



HAL
open science

Développement d'un Modèle Thermomécanique Homogénéisé pour la Conception Optimisée de Gyromètres à Fibre Optique

Pierre Busnel, Jérémie Pillon, François Louf, Pierre-Alain Boucard, Maxime
Rattier

► **To cite this version:**

Pierre Busnel, Jérémie Pillon, François Louf, Pierre-Alain Boucard, Maxime Rattier. Développement d'un Modèle Thermomécanique Homogénéisé pour la Conception Optimisée de Gyromètres à Fibre Optique. Congrès Français de Mécanique 2022 - CFM 2022, Aug 2022, Nantes, France. hal-03806757

HAL Id: hal-03806757

<https://hal.science/hal-03806757>

Submitted on 8 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Développement d'un Modèle Thermomécanique Homogénéisé pour la Conception Optimisée de Gyromètres à Fibre Optique

P. Busnel ^{a,b}, J. Pillon ^a, F. Louf ^b, M. Rattier ^a, Pierre-Alain Boucard ^b

a. iXblue, 78100 Saint-Germain-en-Laye, France.

{ pierre.busnel, jeremie.pillon, maxime.rattier }@ixblue.com

b. Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMPS - Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay, 91190, Gif-sur-Yvette, France.

{ pierre.busnel, francois.louf, pierre-alain.boucard }@ens-paris-saclay.fr

Résumé :

Les Gyromètres à Fibre Optique (FOG) sont intégrés dans des centrales inertielles de haute précision. La pièce maîtresse de ce type de capteur est une bobine de fibre optique dont les déformations, d'origine thermique notamment, peuvent générer un biais de mesure. Des modélisations numériques fines, mais coûteuses, permettent d'estimer ce biais et ainsi, d'optimiser la conception de la structure bobinée (matériau et géométrie). L'objectif de ce travail est de proposer un modèle homogénéisé de bobinage et d'évaluer sa pertinence au regard des quantités d'intérêt nécessaires au calcul du biais.

Abstract :

Fiber Optic Gyroscopes (FOG) are integrated in high precision Inertial Measurement Units (IMU). The main part of this type of sensor is a fiber optic coil whose deformations, especially of thermal origin, can generate a measurement bias. Fine, but costly, numerical modelling allows to estimate this bias and thus to optimize the design of the coil structure (material and geometry). The objective of this work is to propose a homogenized coil model and to evaluate its relevance with respect to the quantities of interest necessary to calculate the bias.

Mots clefs : Fiber Optic Gyroscopes (FOG), Homogénéisation Mécanique, Structures périodiques, Méthode des Éléments Finis (FEM)

1 Introduction

Les Gyromètres à Fibre Optique (Fiber Optic Gyroscopes - FOG) sont des capteurs de vitesse angulaire de haute précision largement utilisés pour la conception de centrales inertielles hautes performances. Leur principe de fonctionnement est fondé sur un effet relativiste appelé l'effet Sagnac. Un signal lumineux est séparé en deux et envoyé dans chaque extrémité d'une bobine de fibre optique. Ces deux signaux contrapropagatifs sont ensuite recombinaés en sortie de bobine et interfèrent. La différence de

phase entre les deux signaux est alors proportionnelle à la vitesse de rotation de la bobine autour de son axe [1].

La différence de phase, et donc la vitesse mesurée, dépend du trajet optique emprunté par les deux signaux, *i.e.* de la longueur de la fibre et de son indice de réfraction. Ces deux grandeurs peuvent être perturbées par de nombreux facteurs extérieurs. De précédentes études ont néanmoins montré que la source d'erreur la plus importante est due aux déformations induites par des chargement thermiques de la bobine [2, 3]. On sait notamment que c'est la déformation orthoradiale (c'est à dire longitudinale à la fibre) qui influe le plus sur le biais. On caractérise ce biais *via* le coefficient de Mohr, que l'on définit comme le rapport du biais d'origine thermique par la valeur de l'augmentation de température subie par la bobine. On sait que ce coefficient est proportionnel à l'intégrale de la déformation multipliée par la distance au point milieu de la fibre (abscisse $l = L/2$) [3]. Ainsi une déformation près de ce point impacte beaucoup moins les performance du FOG qu'une déformation aux extrémités ($l = 0$ ou $l = L$).

Afin d'étudier l'influence des variations de températures sur la bobine, un modèle numérique Éléments Finis a été proposé dans [4]. Ce modèle axisymétrique permet d'obtenir les déformations, et donc les perturbations du trajet optique, engendrées par une variation de température homogène. Cette simulation nécessite cependant un temps de résolution conséquent.

En effet, la bobine est composée de 4 matériaux différents : la gaine et le coeur de la fibre, tous deux assimilés à la silice pure, deux revêtements (primaire et secondaire) en polymère et la résine qui colle les spire de fibre entre elles. Le maillage utilisé doit donc être suffisamment fin pour représenter correctement ces différents constituants, ce qui mène à un maillage de taille conséquent au vu du nombre de spires, quelques milliers, de la bobine. De plus, le revêtement secondaire et la résine ont des températures de transition vitreuse dans la plage d'utilisation des centrales inertielles : leurs caractéristiques mécaniques y varient donc de manière notoire. Cela nécessite de résoudre le problème sur toute la gamme de température d'utilisation du FOG.

On cherche donc un modèle plus simple permettant de calculer rapidement les déformations de la bobine, et donc l'erreur commise, sous un chargement thermique. Un modèle rapide permettrait notamment de mener une étude paramétrique afin de caractériser l'influence des différents paramètres matériaux et géométriques des constituants de la fibre, ainsi que des différentes manières possibles de bobiner la fibre.

Pour cela, on cherche à homogénéiser le comportement mécanique de la bobine. Cela permet de se passer d'une représentation géométrique fine de chaque composant et d'utiliser un maillage grossier pour la résolution numérique, ce qui réduit considérablement les coûts de calcul. La méthode d'homogénéisation utilisée est présentée Partie 2.1, son implémentation numérique Partie 2.2 et son optimisation Partie 2.3. Le modèle homogénéisé obtenu est ensuite comparé à un modèle fin en Partie 3.

2 Homogénéisation de la bobine

2.1 Méthode d'homogénéisation

L'homogénéisation des paramètres matériaux consiste à trouver un comportement homogène équivalent représentant au mieux le comportement mécanique réel de la bobine.

On étudie pour cela le comportement du matériau sur un Volume Élémentaire Représentatif (VER) qui est un volume plus petit que l'ensemble de la structure mais suffisamment grand pour en être représentatif [6]. On définit ensuite deux ensembles de grandeurs mécaniques : ε , σ et \mathbb{K}^i qui désignent respectivement la déformation, la contrainte et l'opérateur de Hooke (du matériau indexé i) à l'échelle locale, et $E = \langle \varepsilon \rangle_{VER}$, $\Sigma = \langle \sigma \rangle_{VER}$ et \mathbb{K}_h , respectivement la déformation, la contrainte et l'opérateur de Hooke homogénéisé, à l'échelle du VER.

La méthode d'homogénéisation consiste à imposer des conditions sur le bord du VER, en déplacement ou en contraintes, à calculer, par résolution numérique Éléments Finis dans notre cas, la solution du problème ainsi posé, puis à identifier le comportement homogène \mathbb{K}_h qui peut reproduire au mieux cette solution. On cherche un comportement homogène permettant de conserver l'énergie élastique entre les deux échelles (lemme de Hill [6]) :

$$\langle \sigma : \varepsilon \rangle_{VER} = \Sigma : E \quad (1)$$

Il existe classiquement trois approches à ce problème : l'homogénéisation cinématique, statique ou périodique.

En homogénéisation cinématique, on impose un déplacement uniforme sur le bord du VER, de manière à y obtenir une déformation ε_0 , ce qui implique $E = \langle \varepsilon \rangle_{VER} = \varepsilon_0$. On post-traite alors le déplacement à l'intérieur du VER obtenu par résolution numérique Éléments Finis afin d'obtenir la contrainte σ et sa moyenne sur le VER Σ . Comme $E = \varepsilon_0$ est connu et que :

$$\Sigma = \mathbb{K}_{h,c} : E$$

on peut déterminer la matrice $\mathbb{K}_{h,c}$ en répétant le procédé avec plusieurs ε_0 différents. De manière simple, on impose que la j -ième composante de ε_0 soit unitaire et que les autres soient nulles : la contrainte moyenne Σ est alors directement la j -ième colonne de la matrice \mathbb{K}_h en utilisant la notation de Voigt.

La méthode d'homogénéisation statique suit le même principe, mais on impose cette fois une contrainte uniforme σ_0 sur le bord du VER. On a alors $\Sigma = \sigma_0$ et on cherche la déformation ε et sa moyenne E par résolution numérique. On utilise de nouveau la relation de comportement qui relie $\Sigma = \sigma_0$ et E pour déterminer le comportement homogénéisé \mathbb{K}_h^s , cette fois formulée en souplesse :

$$E = \mathbb{K}_{h,s}^{-1} : \Sigma$$

Comme ces deux méthodes introduisent une hypothèse sur le bord du VER (déplacement ou contrainte uniforme), les matrices de rigidité, ou de souplesse, $\mathbb{K}_{h,c}$ et $\mathbb{K}_{h,s}^{-1}$ ne sont que des approximations de la valeur du comportement homogénéisé exact \mathbb{K}_h . Afin de réduire le poids de l'hypothèse faite sur le bord, et donc l'erreur sur le comportement homogénéisé, on peut augmenter la taille du VER, moyennant un temps de calcul plus élevé.

Pour pallier ce problème, on peut faire l'hypothèse que le milieu que l'on cherche à homogénéiser est périodique. On imposera alors des conditions aux limites en déplacement périodiques, *i.e.* pour tout point M du bord, et en notant N le point correspondant sur la face opposée (*c.f.* Figure 2), on impose $u(M) - u(N) = \varepsilon_0 \cdot (M - N)$, où ε_0 est la déformation imposée. Grâce à l'hypothèse de périodicité, la valeur du comportement homogénéisé ne dépend plus de la taille du VER et donc de la taille du problème à résoudre. En contrepartie, le comportement homogénéisé n'est plus forcément représentatif près des bords de la structure réelle.

Une précédente étude de bobines de fibre optique utilisant la tomographie [5], présentée Figure 1(b), ainsi qu'une vue en coupe de la bobine Figure 1(a), révèle que la fibre est arrangée selon un empilement hexagonal compact sur environ 90% du périmètre de la bobine. En faisant l'hypothèse d'axisymétrie, la structure de la bobine est donc périodique. Un VER correspondant est présenté Figure 2.

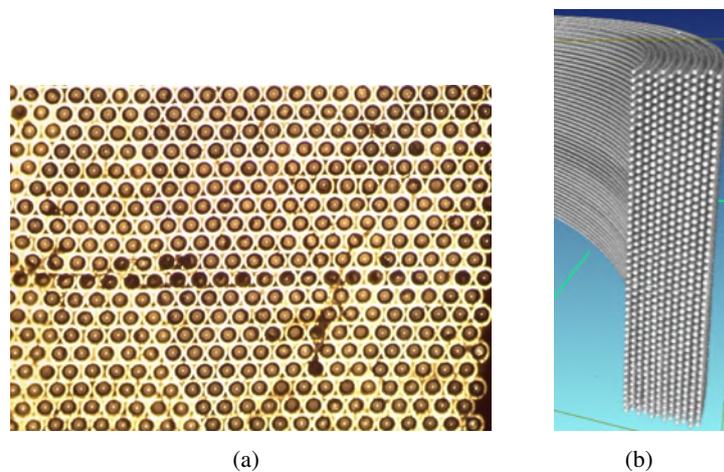


FIGURE 1 – Illustration de la structure d'une bobine de fibre optique avec (a) une vue en coupe partielle au microscope et (b) une image volumique issue d'une tomographie rayons X [5].

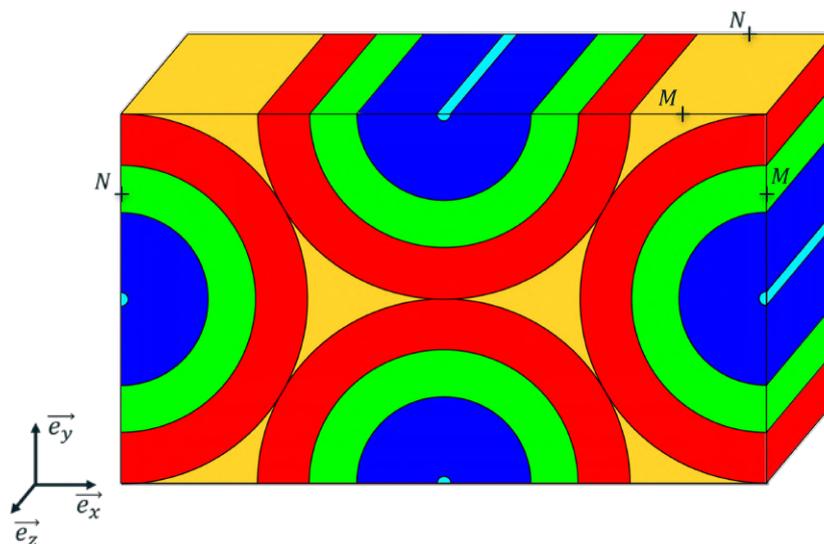


FIGURE 2 – Volume Élémentaire Représentatif (VER) de la bobine : le coeur et la gaine en silice sont en bleu, les revêtements primaires et secondaire en vert et rouge respectivement, et la résine en jaune.

On souhaite également trouver des coefficients d'expansion thermique homogénéisés, *i.e.* tels que, pour

un incrément de température ΔT , on ait une déformation d'origine thermique E^{th} :

$$E^{th} = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_z \end{bmatrix} \Delta T = \mathbb{A}_h \Delta T$$

La déformation dans le VER se décompose alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E &= E^{el} + E^{th} \\ &= \mathbb{K}_h^{-1} : \Sigma + \mathbb{A}_h \Delta T \end{aligned} \quad (2)$$

Comme on impose des conditions aux limites périodiques telles que $E = \varepsilon_0 = 0$, on trouve \mathbb{A}_h à partir du comportement homogénéisé \mathbb{K}_h et de la contrainte moyenne Σ . Celle-ci est obtenue par la résolution numérique sur le VER du problème posé par l'imposition de conditions aux limites périodiques avec $\varepsilon_0 = 0$ et d'un chargement thermique homogène ΔT .

En pratique, on impose la contrainte thermique induite par ce champ de température dans chaque matériau i de coefficient d'expansion thermique α^i : $\sigma^{th} = \mathbb{K}^i : (\alpha^i \mathbb{I}_3 \Delta T)$, avec \mathbb{I}_3 la matrice identité.

Le problème à résoudre consiste donc à trouver un déplacement admissible u tel que :

$$div(\mathbb{K}^i : \nabla^s u) = div(\sigma^{th})$$

où ∇^s est le gradient symétrique et u le déplacement.

Après résolution, la contrainte moyenne Σ se trouve en retranchant la partie thermique de la contrainte :

$$\Sigma = \langle \sigma \rangle_{VER} = \langle \mathbb{K}^i : \nabla^s u - \sigma^{th} \rangle_{VER}$$

On obtient ainsi la matrice des coefficients d'expansion thermique \mathbb{A}_h à partir de l'équation (2) :

$$\mathbb{A}_h = \frac{1}{\Delta T} \mathbb{K}_h^{-1} : \Sigma \quad (3)$$

2.2 Implémentation numérique

Les quatre matériaux composant la bobine sont modélisés comme des solides élastiques isotropes. Leurs caractéristiques physiques et les dimensions géométriques des différents composants de la fibre sont donnés dans les Tableaux 1 et 2 respectivement.

TABLE 1 – Propriétés thermomécaniques des matériaux de la bobine à $T = 20^\circ C$

	E (MPa)	ν	α ($10^{-6} K^{-1}$)
Silice	74×10^3	0.17	0.55
Revêtement primaire	1.2	0.498	660
Revêtement secondaire	950	0.33	40
Résine	3×10^3	0.33	40

TABLE 2 – Caractéristiques géométriques des composants de la fibre

	Coeur	Gaine	Fibre + Revêtements
Rayon (μm)	3	40	85

La méthode d'homogénéisation périodique a été implémentée sur le logiciel CAST3M (www-cast3m.cea.fr). Les conditions aux limites sont appliquées en imposant à tout point M du bord un déplacement périodique $u(M) = u(N) + \varepsilon_0 \cdot (M - N)$, où N est le point correspondant à M sur la face opposée (c.f. Figure 2). On résout ensuite six fois le problème ainsi posé, en mettant une-à-une unitaire les composantes de ε_0 , afin de déterminer l'entièreté de la matrice homogénéisée \mathbb{K}_h par post-traitement de la solution.

La matrice \mathbb{K}_h , au bruit numérique près, peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathbb{K}_h = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Les coefficients indiqués comme nuls correspondent en réalité soit à du bruit numérique, soit à des valeurs plus faibles, d'au moins une dizaine d'ordres de grandeur, que les autres coefficients. La forme de la matrice permet de conclure que le matériau homogénéisé a un comportement isotrope transverse d'axe \vec{e}_z , ce que l'on pouvait présager au vu des symétries de la fibre. Les valeurs des propriétés thermomécaniques déterminées pour une température $T = 20^\circ C$ sont données Tableau 3.

Une fois la matrice de comportement \mathbb{K}_h obtenue, on peut déterminer la matrice des coefficients d'expansion thermique \mathbb{A}_h (c.f. Tableau 3). De nouveau, l'observation de la matrice homogénéisée \mathbb{A}_h confirme que le comportement est isotrope transverse car $\alpha_x = \alpha_y$.

TABLE 3 – Propriétés thermomécaniques homogénéisées de la bobine à $T = 20^\circ C$

E_x (MPa)	E_z (GPa)	ν_{xy}	ν_{xz}	G_{xz} (MPa)	α_x ($10^{-6} K^{-1}$)	α_z ($10^{-6} K^{-1}$)
326.8	15.69	0.6650	0.3375	152.5	195.8	2.430

2.3 Influence de la discrétisation

Lors de l'utilisation d'une méthode de résolution numérique discrétisée comme les Éléments Finis, la qualité de la solution obtenue dépend de la taille du maillage utilisé. Les propriétés thermomécaniques des revêtements polymères de la fibre optique varient fortement avec la température. Ainsi il convient de répéter l'ensemble du processus d'homogénéisation, avec ses 7 appels au solveur, sur l'ensemble de la plage de températures étudiée, ce qui peut mener à des temps de calculs particulièrement longs. On cherche donc à minimiser le temps de calcul nécessaire à l'homogénéisation.

La première piste de réduction de la taille du problème, et donc du temps de calcul, a été d'étudier l'influence de la taille du VER dans la direction de la profondeur \vec{e}_z . Comme il n'y a pas de variation géométrique le long de cet axe l'hypothèse de périodicité n'impose pas de dimension particulière à

respecter. Une étude de la profondeur, à taille d'élément fixée, ne montre aucun impact sur les paramètres homogénéisés. D'autre part, une étude sur le nombre d'éléments dans cette direction montre que celui-ci n'a pas d'influence non plus et qu'il suffit d'un seul élément (même linéaire) pour capter la solution, ce qui réduit considérablement la taille du problème à résoudre.

Après mise en oeuvre de la remarque précédente, une étude de convergence de la solution a été menée. À ce titre, la Figure 3 compare l'évolution des paramètres homogénéisés en fonction du nombre de nœuds du maillage. Sont comparés des éléments linéaires (tétraèdres à 6 nœuds) et quadratiques (tétraèdres à 10 nœuds).

Il ressort de cette étude que les éléments quadratiques permettent bien mieux de capter la solution même avec un nombre de nœuds fortement réduit. Les temps de calculs de chaque résolution sont indiqués sur la Figure 4. L'utilisation d'éléments quadratiques permet donc de réduire considérablement le temps de résolution et évite de devoir trancher entre rapidité et précision des résultats attendus.

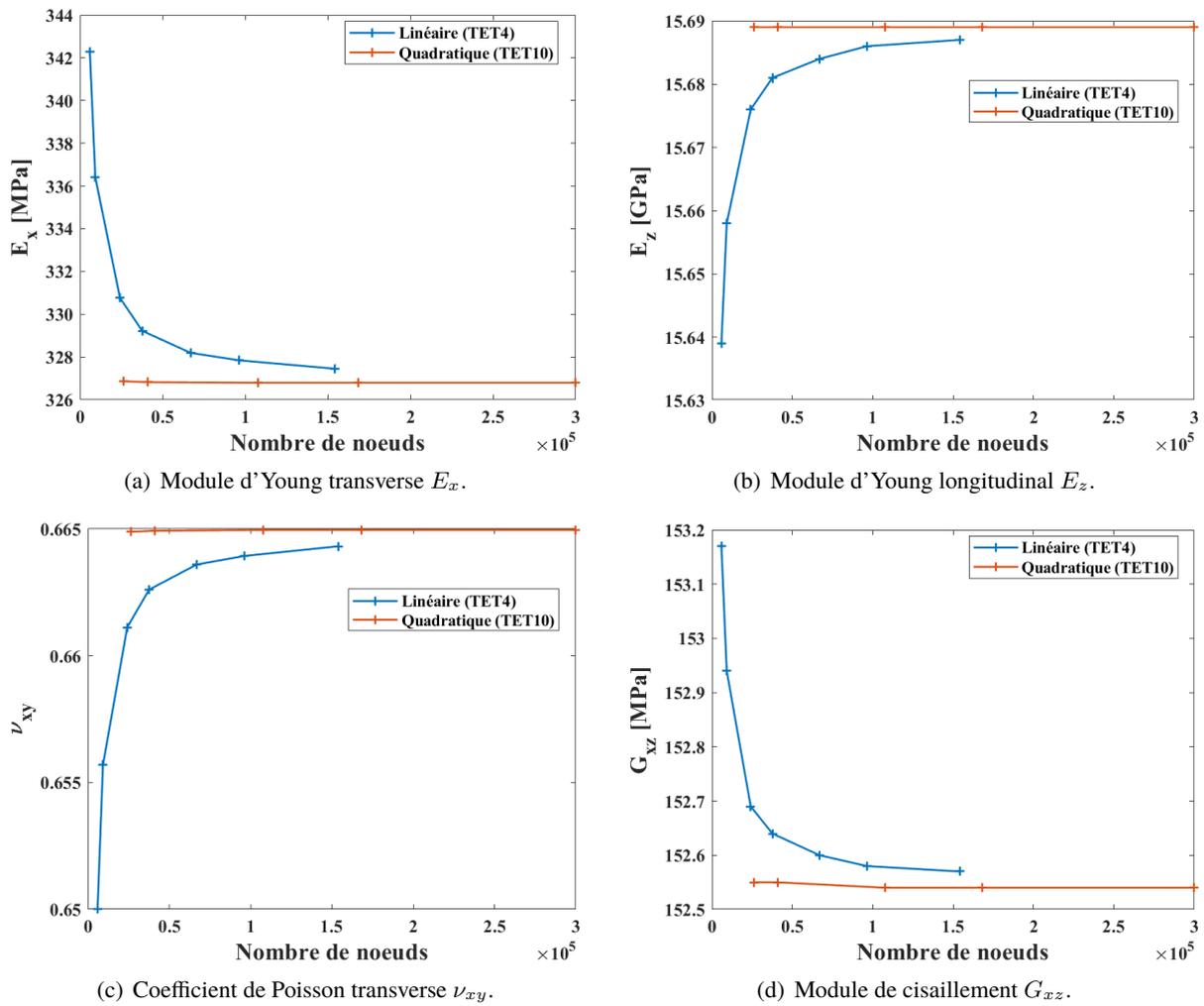


FIGURE 3 – Convergence des caractéristiques mécaniques homogénéisées en fonction du nombre de nœuds utilisés et du type d'élément choisi.

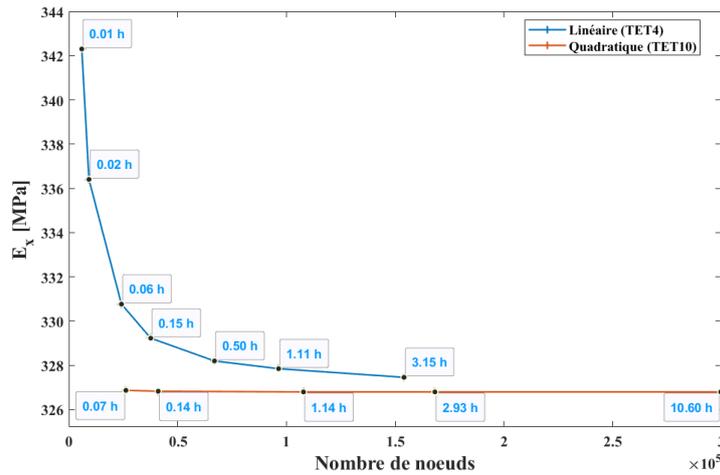


FIGURE 4 – Évolution du module E_x en fonction de la discrétisation utilisée et temps de calculs associés.

3 Comparaison des modèles

Afin de valider le modèle homogénéisé obtenu, on souhaite comparer son comportement à un modèle Éléments Finis détaillé de la bobine. Comme précisé plus haut, on fait l'hypothèse que la bobine est axisymétrique et que l'empilement des fibres est parfait. La symétrie de la bobine selon le plan la coupant au milieu de sa hauteur est utilisée afin de réduire la taille du problème à résoudre.

On construit donc un maillage complet d'une demi-tranche de la bobine, présenté Figure 5(a). Ce maillage, qui doit représenter la géométrie des fibres, comporte 106 000 nœuds.

Le chargement imposé est un champ uniforme de température $T_0 + \Delta T$, où T_0 est la température de référence et $\Delta T = 1^\circ C$ l'incrément de température imposé.

La déformation orthoradiale obtenue après résolution est illustrée Figure 6(a).

Le modèle homogénéisé est implémenté sur un maillage de quadrangles beaucoup plus grossier (130 nœuds) que le maillage utilisé pour le modèle complet, présenté Figure 5(b). On impose le même chargement et les mêmes conditions aux limites, et la déformation obtenue est donnée Figure 6(b).

On remarque que malgré un maillage beaucoup plus grossier, et donc une taille de problème à résoudre notablement réduite, le modèle homogène produit une solution relativement proche de celle du modèle complet.

Pour illustrer les différences entre les deux modèles, on les résout chacun sur le même maillage afin de pouvoir établir facilement une carte d'erreur. On présente Figure 7(a) l'erreur absolue sur la déformation orthoradiale (*i.e.* la valeur absolue de la différence entre les déformations des deux modèles, divisée par la déformation orthoradiale maximale).

Comme attendu, les erreurs apparaissent principalement sur les bords de la bobine : c'est en effet là où l'on respecte le moins l'hypothèse de milieu périodique infini utilisée pour l'homogénéisation. On s'aperçoit aussi que pour la même raison, si l'on étudie une bobine plus grande, l'erreur commise par l'utilisation du modèle homogène est plus faible, comme le montre la Figure 7(b).

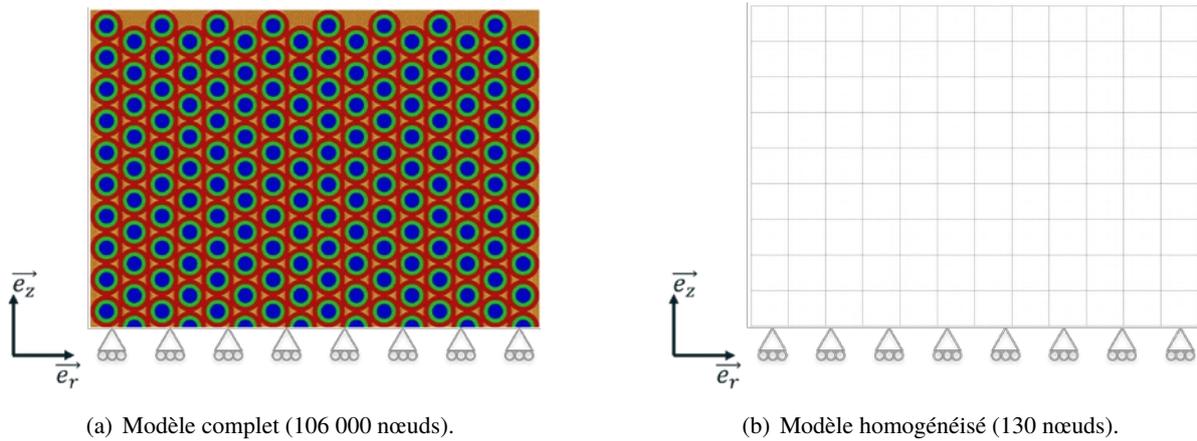


FIGURE 5 – Maillages d'une demi tranche de bobine.

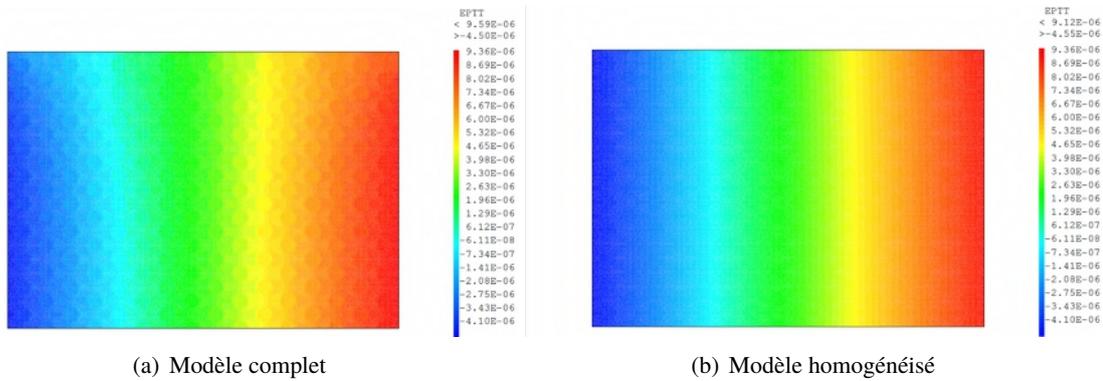


FIGURE 6 – Déformation orthoradiale calculée par les deux modèles Éléments Finis.

Conclusion

Une procédure d'homogénéisation d'une bobine de fibre optique a été mise en place. Cette procédure permet, à partir de la connaissance des caractéristiques géométriques et mécaniques de la fibre d'obtenir des propriétés mécaniques homogénéisées. Afin de pouvoir utiliser cette homogénéisation sur de nombreux types de fibres différents, une optimisation des paramètres de résolution a été réalisée pour réduire le temps de calcul nécessaire.

Les paramètres homogénéisés ainsi obtenus permettent de créer un modèle Éléments Finis homogène dont les performances sont comparées avec un modèle numérique complet de la bobine. On s'aperçoit que ce modèle homogène produit une solution relativement proche de celle du modèle complet, tout en réduisant le nombre de degrés de liberté nécessaire de plusieurs ordres de grandeur.

L'impact de l'erreur entre les deux solutions sur la quantité d'intérêt pour la conceptions de gyromètres, *i.e.* le coefficient de Mohr et donc la déformation uniquement au cœur de la fibre, reste à quantifier. En effet l'erreur observée sur la déformation se concentre surtout dans la résine et ne concerne principalement que quelques spires qui sont sur le rayon intérieure et n'influent donc que peu sur le coefficient de Mohr.

Une approche mixte mêlant modèle homogène et modèle complet pourra alors être envisagée si les performances du modèle homogénéisé sont insuffisantes.

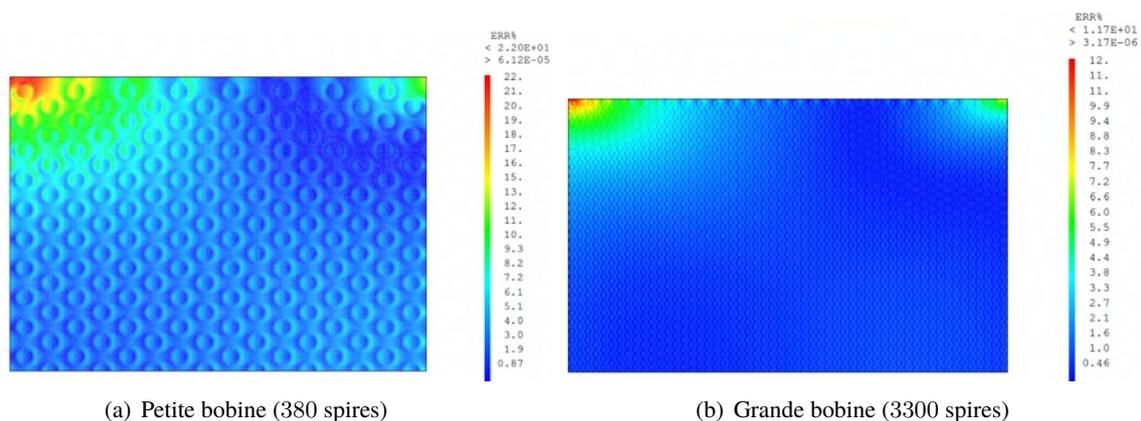


FIGURE 7 – Carte de l'erreur sur la déformation orthoradiale entre les deux modèles, en pourcentage.

Références

- [1] G. Sagnac, L'éther lumineux démontré par l'effet du vent relatif d'éther dans un interféromètre en rotation uniforme. *C. R. Acad. Sci.*, 157 : 708-710, 1913.
- [2] D. M. Shupe, Thermally induced nonreciprocity in the fiber-optic interferometer. *Appl. Opt.*, 19(5) :645-655, 1980.
- [3] F. Mohr et F. Schadt, Error signal formation in FOGs through thermal and elasto-optical environmental influences on the sensing coil. *Symposium Gyro Technology*, vol. 13, n° 20, p. 2-2, 2011.
- [4] J. Pillon, H. Boiron, F. Louf, E. Peter, M. Rattier, P-A. Boucard et H. Lefèvre, Numerical model of optical-fiber gyroscope coil under homogeneous thermal field. *14th World Congress on Computational Mechanics, ECCOMAS Congress 2020*, 2021.
- [5] J. Pillon, M. Collignon, M. Rattier, F. Louf, E. Peter, P-A. Boucard et H. Lefèvre, Three-Dimensional Topological Reconstruction of the Sensing Coil of a Fiber-Optic Gyroscope Using X-Ray Computed Tomography. *Journal of Lightwave Technology*, PP. 1-1, 2021.
- [6] R. Hill, The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *Journal of the Mechanical and Physics of Solids*, 15 :79-95, 1967.