



HAL
open science

Première approche d'une stratégie de partitionnement multimodèle pour la simulation de problèmes multiphysiques

Floriane Wurtzer, Pierre-Alain Boucard, Pierre Ladevèze, David Néron

► **To cite this version:**

Floriane Wurtzer, Pierre-Alain Boucard, Pierre Ladevèze, David Néron. Première approche d'une stratégie de partitionnement multimodèle pour la simulation de problèmes multiphysiques. Congrès Français de Mécanique 2022 - CFM 2022, Aug 2022, Nantes, France. hal-03806755

HAL Id: hal-03806755

<https://hal.science/hal-03806755>

Submitted on 8 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Première approche d'une stratégie de partitionnement multimodèle pour la simulation de problèmes multiphysiques

F. Wurtzer, P.-A. Boucard, P. Ladevèze, D. Néron

Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS,
LMPS - Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay, 91190, Gif-sur-Yvette, France.
{floriane.wurtzer, pierre-alain.boucard, pierre.ladeveze, david.neron}@ens-paris-saclay.fr

Résumé :

Pour résoudre un problème multiphysique fortement couplé, par exemple dans le cadre de la thermo-mécanique, les méthodes dites de partitionnement consistent à résoudre successivement chacune des physiques, tout en les faisant dialoguer. Le point clé de ces méthodes incrémentales réside dans le traitement séparé des différentes physiques, permettant d'envisager l'utilisation de modèles différents pour chacune. Dans cet article, un modèle réduit précalculé est couplé à un modèle classique au sein de la stratégie de partitionnement ISSP. Un cas test simple permet d'appréhender les limites des stratégies de partitionnement incrémentales lorsqu'on cherche à résoudre un problème trop éloigné de celui ayant servi à générer la base réduite. Cela justifie l'intérêt qui sera porté à la méthode non incrémentale LATIN-PGD pour la résolution partitionnée multimodèle d'un problème multiphysique fortement couplé.

Abstract :

For strongly coupled multiphysics problems, such as a thermo-mechanics problem, the so-called partitioning methods compute each of the physics successively while getting them to interact. The major strength of these incremental methods lies in the separate treatment of the involved physics, allowing the use of different models for each. In this paper, a precomputed reduced model is combined with a full model within the ISSP partitioning strategy. A simple test case highlights the limits of incremental partitioning strategies when solving a too different problem from the one used to generate the reduced base. For this reason, future work will focus on the non-incremental LATIN-PGD method for the multimodel partitioned resolution of a strongly coupled multiphysics problem.

Mots clefs : multiphysique, partitionnement, réduction de modèles, LATIN, PGD

1 Introduction

Le fonctionnement de la plupart des systèmes industriels modernes met en jeu des interactions entre des phénomènes physiques de natures différentes (mécaniques, thermiques, électromagnétiques, etc.). La simulation haute fidélité de ces systèmes complexes nécessite alors la prise en compte de leur comportement multiphysique. Dans le cas d'un couplage fort, c'est-à-dire lorsque tous les phénomènes interagissent de façon significative, la simulation doit traiter le problème de manière couplée.

Deux types d'approches sont alors classiquement utilisées [1]. D'une part, l'approche directe, dite *monolithique*, consiste à résoudre le problème en traitant toutes les physiques simultanément. Il s'agit de la stratégie en apparence la plus simple, même si elle nécessite le développement de codes spécifiques et conduit à des coûts de calcul importants du fait de la taille du problème ainsi formulé. D'autre part, les méthodes de *partitionnement* reposent sur une résolution séparée des différentes physiques, l'une après l'autre, avec de potentielles sous-itérations à chaque incrément de temps si le problème est fortement couplé. Les interactions entre physiques y sont alors vues comme des chargements imposés. Les approches partitionnées permettent de tirer parti des solveurs performants existant pour chacune des physiques, ainsi que de traiter des aspects multiéchelles inhérents aux problèmes multiphysiques.

Plus récemment, une stratégie de partitionnement alternative aux méthodes incrémentales classiques a été proposée, basée sur la méthode LATIN-PGD [2]. Cette méthode non incrémentale, qui a initialement été développée pour traiter des problèmes d'évolution non-linéaires en utilisant des outils de réduction de modèles, a été adaptée à la résolution de problèmes multiphysiques fortement couplés grâce au concept d'interface entre physiques, qui est une extension de la notion d'interface entre sous-domaines [3]. La méthode LATIN-PGD est une approche itérative à deux étapes dont le principe est, dans notre cas, de séparer les équations linéaires monophysiques, éventuellement globales, des équations locales mettant en relation des physiques différentes. L'originalité de cette méthode se trouve dans la possibilité à la fois de découpler les physiques et, chacune étant résolue sur le domaine temporel entier à chaque itération, d'appliquer des techniques de réduction de modèle efficaces basées sur la *Proper Generalized Decomposition* (PGD) [4].

Dès lors que le couplage de plusieurs modèles de physiques est évoqué, la question de la nature même de ces modèles est essentielle. En particulier, il peut être pertinent de coupler des modèles de natures différentes [5] (modèle simplifié/modèle fin, modèle à base de données/modèles éléments finis, etc.). Dans cette contribution, l'aspect multimodèle est abordé dans le cadre des méthodes de partitionnement incrémentales standard en résolvant l'une des deux physiques sur une base réduite, générée au préalable à l'aide d'une solution connue.

2 Problème de référence

Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse au couplage fort en thermo-mécanique. Considérons une structure occupant un domaine Ω , que l'on étudie sur un intervalle temporel $I = [0, t_f]$. Dans son état naturel non déformé et non contraint, la structure a une température uniforme T_0 . On s'intéresse aux champs suivants en tout point \underline{M} de la structure et sur tout l'intervalle I :

- le déplacement \underline{u} , les déformations ε et les contraintes σ pour la partie mécanique ;
- la température absolue T , ou plutôt l'incrément de température $\theta = T - T_0$ par rapport à la température de référence T_0 , et le flux de chaleur surfacique \underline{q} pour la partie thermique.

2.1 Équations mises en jeu

On se place sous les hypothèses de petites perturbations et d'évolution quasi-statique sur l'intervalle temporel I . La structure est constituée d'un matériau homogène isotrope. Dans ce cadre, les équations du modèle de thermoélasticité linéaire fortement couplée, devant être vérifiées à tout instant $t \in I$, s'écrivent [6] :

(a) équation d'équilibre

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma} + \underline{f}_d = \underline{0} \quad \text{sur } \Omega \quad (1)$$

où \underline{f}_d représente les efforts volumiques imposés.

(b) équation de compatibilité des déformations

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^T) \quad \text{sur } \Omega \quad (2)$$

(c) relation de comportement thermoélastique

$$\underline{\sigma} = \mathcal{K} : (\underline{\varepsilon} - \underbrace{\alpha(T - T_0)}_{\theta} \mathbf{I}) = 2\mu \underline{\varepsilon} + \lambda \text{Tr}[\underline{\varepsilon}] \mathbf{I} - \underbrace{\alpha(2\mu + 3\lambda)}_{\beta} \theta \mathbf{I} \quad (3)$$

où \mathcal{K} désigne le tenseur de Hooke, α le coefficient de dilatation thermique linéaire, \mathbf{I} le tenseur identité, λ et μ les coefficients de Lamé et β le coefficient de couplage thermoélastique.

(d) équation de la chaleur couplée

$$\rho c_\varepsilon \dot{\theta} = r_d - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} - \beta T_0 \text{Tr}[\dot{\underline{\varepsilon}}] \quad \text{sur } \Omega \quad (4)$$

où ρ désigne la masse volumique, c_ε la capacité thermique massique à déformation constante, r_d la source de chaleur volumique et $\dot{\square} = \frac{\partial \square}{\partial t}$ la dérivée temporelle.

(e) loi de Fourier

$$\underline{q} = -k \underline{\nabla} \theta \quad (5)$$

où k est le coefficient de conduction thermique.

Afin de définir totalement le problème, il reste à spécifier les conditions aux limites (imposées à chaque instant $t \in I$), ainsi que les conditions initiales (pour tout point $\underline{M} \in \Omega$) :

- $\underline{u} = \underline{u}_d(t)$ sur Γ_u
- $\underline{\sigma} \underline{n} = \underline{F}_d(t)$ sur Γ_F
- $\underline{u}(\underline{M}, t = 0) = \underline{u}_0(\underline{M})$
- $\theta = \theta_d(t)$ sur Γ_θ
- $\underline{q} \cdot \underline{n} = q_d(t)$ sur Γ_q
- $\theta(\underline{M}, t = 0) = \theta_0(\underline{M})$

où \underline{n} désigne la normale sortante à Ω au point \underline{M} de la surface considérée. La [figure 1](#) résume ces chargements et leurs domaines d'application.

2.2 Formulation variationnelle

On introduit l'espace \mathcal{U} des champs de déplacement à énergie finie sur $\Omega \times I$ et vérifiant la condition limite sur Γ_u . On note \mathcal{U}_0 l'espace homogène associé à \mathcal{U} . De la même façon, on définit les espaces \mathcal{T} et \mathcal{T}_0 , relatifs au champ de température. Pour simplifier la présentation, on supposera dans la suite que $\underline{f}_d = \underline{0}$ et $r_d = 0$.

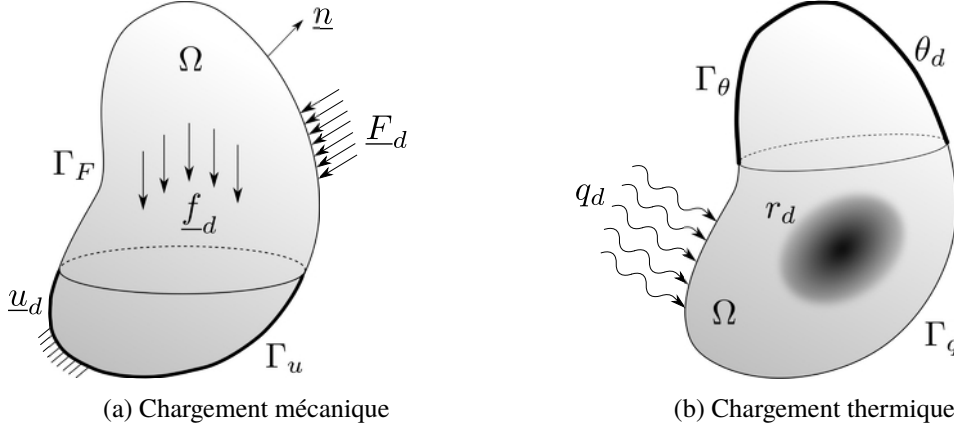


FIGURE 1 – Problème de référence sur le domaine Ω

Les inconnues primales \underline{u} et θ peuvent alors être déterminées en résolvant le problème écrit sous forme variationnelle :

Trouver $(\underline{u}, \theta) \in \mathcal{U} \times \mathcal{T}$ tels que $\forall t \in I$,

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\varepsilon}(\underline{u}) \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*)] d\Omega - \int_{\Omega} \beta \theta \text{Tr}[\underline{\varepsilon}(\underline{u}^*)] d\Omega = \int_{\Gamma_F} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* dS \quad (6a)$$

$$\forall \theta^* \in \mathcal{T}_0, \quad \int_{\Omega} \rho c_{\varepsilon} \dot{\theta} \theta^* d\Omega + \int_{\Omega} k \underline{\nabla} \theta \cdot \underline{\nabla} \theta^* d\Omega + \int_{\Omega} \beta T_0 \text{Tr}[\dot{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})] \theta^* d\Omega = - \int_{\Gamma_q} q_d \theta^* dS \quad (6b)$$

en vérifiant les conditions initiales.

2.3 Discrétisation du problème

Après discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis, le problème précédent peut s'écrire classiquement par blocs sous la forme d'un système global non symétrique [7] :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\theta u} & \mathbf{C}_{\theta \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{u}} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\theta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_{\theta} \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \mathbf{C}_{\theta u} = -T_0 \mathbf{K}_{u\theta}^T \quad (7)$$

où l'on note simplement $\underline{u}(t)$ et $\theta(t)$ les champs semi-discrétisés en espace associés à $\underline{u}(\underline{M}, t)$ et $\theta(\underline{M}, t)$. \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{\theta\theta}$ et $\mathbf{C}_{\theta\theta}$ désignent les matrices de raideur mécanique, de conductivité et de capacité thermique, $\mathbf{C}_{\theta u}$ et $\mathbf{K}_{u\theta}$ les matrices de couplage, \mathbf{F}_u et \mathbf{F}_{θ} les forces et flux généralisés respectivement associés à \underline{F}_d et q_d . On trouvera les expressions détaillées de ces différents termes dans [7].

Il est important de noter que les espaces d'approximation éléments finis pour les champs de déplacement et de température ne peuvent être choisis arbitrairement. En effet, utiliser des interpolations d'ordre égal pour les déplacements et pour la température peut entraîner l'apparition d'oscillations parasites sur les contraintes [8]. Cela s'explique par le non-respect de la condition de Ladyzenskaia-Babuška-Brezzi (dite *LBB*) ou encore condition *inf-sup* [9], permettant de garantir la stabilité de la solution d'un problème de type point-selle. Cette condition étant difficile à vérifier analytiquement, un test numérique a été mis au point [10]. Ce test est notamment appliqué au cas de la poroélasticité dans [11], qui est régie par les mêmes équations que la thermoélasticité linéaire; la pression du fluide jouant le rôle de la température [12]. Il en ressort que l'interpolation pour le champ de température doit être d'un ordre inférieur à celui du champ de déplacement.

Après introduction d'un schéma d'intégration en temps, par exemple un schéma d'Euler implicite, on est amené à résoudre à chaque pas de temps t_{i+1} le système linéaire suivant, dit *monolithique* :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{uu} & \mathbf{H}_{u\theta} \\ \mathbf{H}_{\theta u} & \mathbf{H}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_u \\ \mathbf{g}_\theta \end{bmatrix}_{i+1} \quad (8)$$

On peut remarquer que la dérivation de la première ligne du système semi-discrétisé (7), associée à la relation liant les matrices de couplage, permet de réécrire ce système sous une forme symétrique. Après discrétisation temporelle, on se ramène alors à un système monolithique (de la forme de (8)) symétrique.

2.4 Techniques de résolution

Afin de résoudre un problème couplé de la forme de celui donné en (8), deux approches sont classiquement utilisées [1]. D'une part, la *méthode monolithique*, ou *directe*, consiste simplement à inverser l'équation monolithique (8) à chaque pas de temps t_{i+1} . Toutes les physiques sont alors traitées simultanément. D'autre part, dans les stratégies de *partitionnement*, les physiques sont résolues séparément, l'une après l'autre et potentiellement avec des solveurs différents, tout en dialoguant entre elles.

Dans la suite, on se focalise sur la méthode de partitionnement incrémentale ISSP (*Iterated Standard Staggered Procedure*) [13].

3 Méthode de partitionnement ISSP

Toute stratégie de partitionnement repose sur le choix judicieux d'une partition de la matrice du système linéaire (8). Dans cette optique, le système est réécrit de sorte à séparer les termes monophysiques \mathbf{H}_{uu} et $\mathbf{H}_{\theta\theta}$ des termes de couplage $\mathbf{H}_{u\theta}$ et $\mathbf{H}_{\theta u}$ [14]. Par ailleurs, la méthode ISSP se caractérise par la présence de sous-itérations entre les physiques jusqu'à atteindre la convergence à chaque incrément de temps. Le problème à résoudre à chaque pas de temps t_{i+1} et à chaque sous-itération k s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}_{i+1}^k = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{H}_{u\theta} \\ \mathbf{H}_{\theta u} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}_{i+1}^{p,k} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_u \\ \mathbf{g}_\theta \end{bmatrix}_{i+1} \quad (9)$$

Dans le membre de droite, les inconnues \mathbf{u}_{i+1} et $\boldsymbol{\theta}_{i+1}$ sont prédites, ce qu'on note avec un exposant \square^p . On prendra pour prédiction la dernière solution obtenue (à la sous-itération ou au pas de temps précédent). Si l'on choisit de commencer par prédire la température, il est possible de calculer \mathbf{u}_{i+1}^k en résolvant la première ligne du système (9) :

$$\mathbf{H}_{uu} \mathbf{u}_{i+1}^k = -\mathbf{H}_{u\theta} \boldsymbol{\theta}_{i+1}^{p,k} + \mathbf{g}_{u,i+1} \quad (10)$$

Ce résultat est alors pris comme prédiction pour le déplacement, ce qui permet de déterminer $\boldsymbol{\theta}_{i+1}^k$ en résolvant la seconde ligne du système (9) :

$$\mathbf{H}_{\theta\theta} \boldsymbol{\theta}_{i+1}^k = -\mathbf{H}_{\theta u} \mathbf{u}_{i+1}^{p,k} + \mathbf{g}_{\theta,i+1} \quad (11)$$

Les différentes étapes de la procédure ISSP sont schématisées en [figure 2](#), où les flèches rouges représentent les échanges d'informations entre physiques. Les étapes 1 et 2 correspondent à la résolution de l'équation (10) pour $k = 0$, tandis que les étapes 3 et 4 symbolisent la résolution de l'équation (11) pour

$k = 0$. On répète ensuite la résolution des équations (10) puis (11) pour $k \geq 1$ jusqu'à ce qu'un critère de stagnation portant sur chacun des champs inconnus soit vérifié; il s'agit des étapes 5 sur la figure 2.

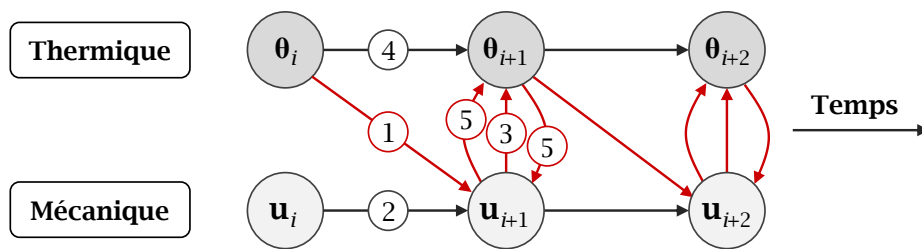


FIGURE 2 – Schématisation de la résolution par la stratégie de partitionnement incrémentale ISSP

Ainsi, on résout successivement un problème de mécanique (10) et un problème de thermique (11) avec seconds membres connus. Il est alors envisageable de traiter les physiques avec des modèles différents, par exemple en remplaçant l'un de ces problèmes par un modèle analytique, un modèle simplifié, des données, etc. On se propose ici de résoudre l'une des physiques avec un modèle réduit précalculé, tandis que l'autre sera résolue de manière standard.

4 Résolution partitionnée multimodèle

Par souci de clarté, seul le cas de la résolution du problème de thermique sur base réduite est présenté ici. Néanmoins, l'utilisation d'un modèle réduit pour la mécanique a également été implémentée.

4.1 Génération des modes

La solution du système (8) obtenue par approche monolithique est prise comme référence. En particulier, on en extrait le champ de température θ_{ref} de taille (n_θ, n_t) , où n_θ représente le nombre d'inconnues nodales pour la température et n_t le nombre de pas de temps. En traitant les conditions aux limites de Dirichlet par relèvement, la décomposition en valeurs singulières (SVD) [15] tronquée à l'ordre n , avec $n \leq \min(n_\theta, n_t)$, permet d'écrire :

$$\theta_{\text{ref}} \approx \sum_{j=1}^n \Lambda_j \lambda_j + \theta_{\text{CL}} \quad (12)$$

où les vecteurs Λ_j représentent les modes spatiaux, λ_j la meilleure solution sur cette base de modes et θ_{CL} désigne une solution simple vérifiant les conditions aux limites du problème. À noter que la base $\{\Lambda_j\}_{j=1,\dots,n}$ ainsi générée est orthonormée selon la norme naturelle : $\Lambda_i^T \Lambda_j = \delta_{ij}$.

4.2 Résolution sur base réduite

Dans le cadre de la résolution du problème de thermique sur base réduite, plutôt que d'inverser directement le système (11) pour obtenir θ_{i+1}^k , la solution en température au pas de temps t_{i+1} et à la sous-itération k est recherchée sous la forme :

$$\theta_{i+1}^k = \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^{i+1} \Lambda_j + \theta_{\text{CL}}^{i+1} \quad (13)$$

où les $\bar{\lambda}_j^{i+1}$ (inconnus) représentent la meilleure approximation de la solution au pas de temps t_{i+1} dans la base $\{\Lambda_j\}_{j=1,\dots,n}$ précédemment exhibée.

En notant $\widehat{\mathbf{g}}_{i+1}$ le second membre connu de l'équation (11), le problème à résoudre s'écrit sous forme faible :

$$\forall \bar{\lambda}_j^*, \int_I \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^* \mathbf{\Lambda}_j \left\{ \mathbf{H}_{\theta\theta} \left(\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^{i+1} \mathbf{\Lambda}_j + \boldsymbol{\theta}_{\text{CL}}^{i+1} \right) - \widehat{\mathbf{g}}_{i+1} \right\} dt = 0 \quad (14)$$

soit sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vdots & & \\ \dots & \mathbf{\Lambda}_j^T \mathbf{H}_{\theta\theta} \mathbf{\Lambda}_k & \dots \\ \vdots & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_{\theta\theta}^{\text{maj}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1^{i+1} \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_n^{i+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}^{\text{maj}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{\Lambda}_j^T (\widehat{\mathbf{g}}_{i+1} - \mathbf{H}_{\theta\theta} \boldsymbol{\theta}_{\text{CL}}^{i+1}) \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}^{\text{maj}}} \quad (15)$$

La matrice $\mathbf{H}_{\theta\theta}^{\text{maj}}$ du système à résoudre est de taille (n, n) réduite par rapport à la matrice initiale $\mathbf{H}_{\theta\theta}$ de taille (n_θ, n_θ) et peut même être rendue égale à l'identité si on a pris soin d'orthonormaliser la base $\{\mathbf{\Lambda}_j\}_{j=1, \dots, n}$ selon la norme $\|\bullet\|^2 = \bullet^T \mathbf{H}_{\theta\theta} \bullet$. Le coût de calcul de la nouvelle solution en température est donc largement réduit, ce qui justifie la volonté d'utiliser des modèles réduits.

La procédure complète de l'algorithme ISSP avec résolution du problème de thermique sur la base réduite $\{\mathbf{\Lambda}_j\}_{j=1, \dots, n}$ est détaillée dans l'[algorithme 1](#).

Algorithme 1 : Couplage de modèles différents par stratégie ISSP

$\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_{\text{CL}}, \{\mathbf{\Lambda}_j\}_{j=1, \dots, n}$

for $i = 1 : n_t - 1$ **do**

- 1. Prédiction :** $\boldsymbol{\theta}_{i+1}^{p,0} = \boldsymbol{\theta}_i$
- 2. Progression :** $\mathbf{u}_{i+1}^0 \leftarrow \mathbf{H}_{\text{uu}} \mathbf{u}_{i+1}^0 = -\mathbf{H}_{\text{u}\theta} \boldsymbol{\theta}_{i+1}^{p,0} + \mathbf{g}_{\text{u},i+1}$
- 3. Substitution :** $\mathbf{u}_{i+1}^{p,0} = \mathbf{u}_{i+1}^0$
- 4. Progression :** $\bar{\lambda}^{i+1} \leftarrow \mathbf{H}_{\theta\theta}^{\text{maj}} \bar{\lambda}^{i+1} = \mathbf{g}^{\text{maj}}(\mathbf{u}_{i+1}^{p,0})$
 $\boldsymbol{\theta}_{i+1}^0 = \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^{i+1} \mathbf{\Lambda}_j + \boldsymbol{\theta}_{\text{CL}}^{i+1}$

5. Sous-itérations :

while $(\text{stag}_u > \text{tol})$ **or** $(\text{stag}_\theta > \text{tol})$ **do**

- $\boldsymbol{\theta}_{i+1}^{p,k} = \boldsymbol{\theta}_{i+1}^{k-1}$
- $\mathbf{u}_{i+1}^k \leftarrow \mathbf{H}_{\text{uu}} \mathbf{u}_{i+1}^k = -\mathbf{H}_{\text{u}\theta} \boldsymbol{\theta}_{i+1}^{p,k} + \mathbf{g}_{\text{u},i+1}$
- $\mathbf{u}_{i+1}^{p,k} = \mathbf{u}_{i+1}^k$
- $\bar{\lambda}^{i+1} \leftarrow \mathbf{H}_{\theta\theta}^{\text{maj}} \bar{\lambda}^{i+1} = \mathbf{g}^{\text{maj}}(\mathbf{u}_{i+1}^{p,k})$
- $\boldsymbol{\theta}_{i+1}^k = \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^{i+1} \mathbf{\Lambda}_j + \boldsymbol{\theta}_{\text{CL}}^{i+1}$

end

end

5 Premiers résultats

On se propose d'illustrer l'algorithme présenté sur un cas simple. En particulier, on s'intéresse à l'influence du nombre n de modes utilisés pour la résolution du problème de thermique.

5.1 Description du problème initial

On décrit ici le problème initial servant à générer la base $\{\Lambda_j\}_{j=1,\dots,n}$. On considère un barreau en acier de longueur $L = 0,2$ m et de section carrée $S = 100$ mm² que l'on étudie sur l'intervalle $I = [0, 3600$ s]. Les propriétés matériau sont données dans le [tableau 1](#).

Module d'Young	$E = 210$ GPa	Conductivité thermique	$k = 43$ W/m/K
Coef. de Poisson	$\nu = 0,3$	Capacité thermique	$c_\varepsilon = 500$ J/kg/K
Masse volumique	$\rho = 7850$ kg/m ³	Coef. de dilatation linéaire	$\alpha = 11 \times 10^{-6}$ K ⁻¹

TABLE 1 – Paramètres matériau

Le barreau est bi-encasté et on impose des températures sinusoïdales déphasées à ses extrémités :

$$\theta_d(t) = \begin{cases} A \sin\left(\frac{7\pi}{t_f}t\right) & \text{en } x = 0 \\ -2A \sin\left(\frac{5\pi}{t_f}t\right) & \text{en } x = L \end{cases} \quad (16)$$

où l'on prend $A = 15$ K. La structure 3D est maillée avec 840 éléments tétraédriques et l'intervalle temporel est discrétisé avec $n_t = 60$ pas de temps.

Le problème ainsi décrit sert à générer les n modes Λ_j . Cette base est ensuite utilisée pour résoudre le problème de thermique au sein de la stratégie de partitionnement ISSP. On s'intéresse à l'influence de n lors de la résolution de ce problème initial, mais également d'un problème légèrement différent.

5.2 Premier cas test – ajout d'une source de chaleur globale

Le problème initial présenté dans la partie 5.1 est légèrement modifié pour construire un premier cas test. En plus des conditions aux limites en température, on applique une source volumique de chaleur uniforme $r_d = 3 \times 10^5$ W/m³ à l'ensemble du barreau à partir d'un instant t_i .

On définit l'erreur relative des champs de température θ et de déplacement \mathbf{u} , obtenus en appliquant l'[algorithme 1](#), par rapport aux références θ_{ref} et \mathbf{u}_{ref} , issues de la résolution par méthode monolithique :

$$e_\theta = \frac{\|\theta - \theta_{\text{ref}}\|_{L^2}}{\|\theta_{\text{ref}}\|_{L^2}} \quad \text{et} \quad e_u = \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{ref}}\|_{L^2}}{\|\mathbf{u}_{\text{ref}}\|_{L^2}} \quad (17)$$

La [figure 3](#) représente l'évolution de ces erreurs en fonction du nombre n de modes utilisés pour la résolution du problème de thermique. Il est intéressant de remarquer que le champ de déplacement, pourtant obtenu par résolution standard avec un modèle full, se trouve également impacté par l'utilisation d'un modèle réduit pour la thermique.

Pour le problème initial, l'erreur ne décroît plus à partir de 12 modes. En ce qui concerne le problème modifié, la prise en compte de quelques modes supplémentaires ne permet pas de diminuer significativement l'erreur, qui stagne à un niveau bien supérieur à celui observé pour le problème initial. Toutefois, des erreurs relatives de l'ordre de 10^{-6} sont atteintes avec seulement 10 modes, ce qui reste tout à fait

acceptable. La source de chaleur étant appliquée à l'ensemble de la structure, les modes spatiaux générés sur le problème initial restent plutôt bien adaptés à ce problème modifié.

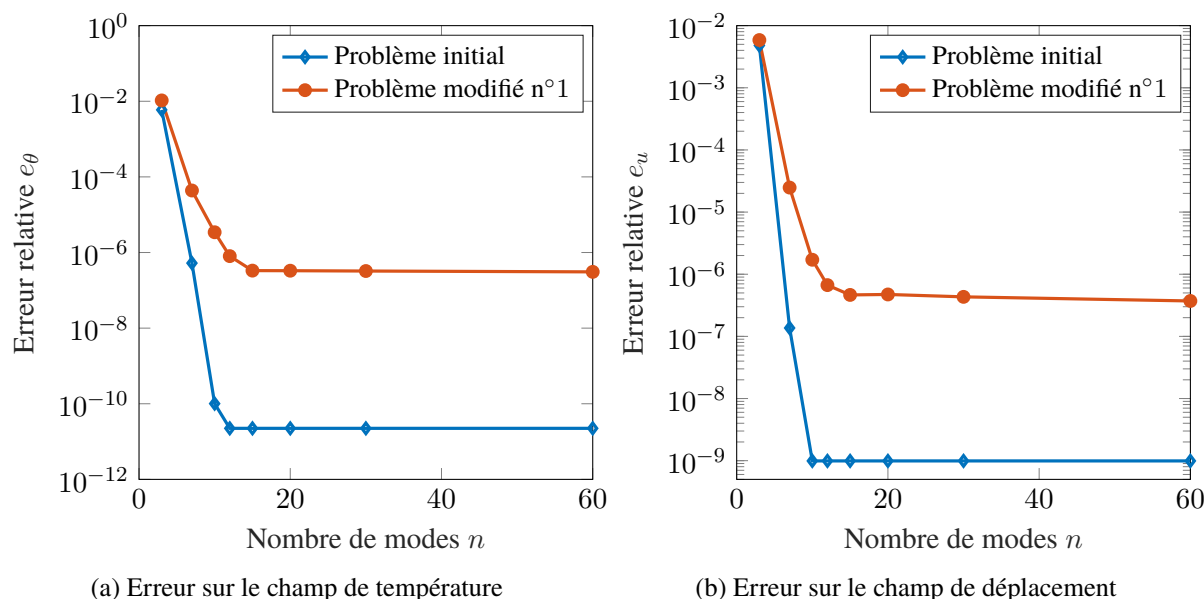


FIGURE 3 – Évolution de l'erreur relative pour le problème initial et le premier cas test

5.3 Second cas test – ajout d'une source de chaleur localisée

On s'intéresse à un second cas test, qui consiste à appliquer une source volumique de chaleur uniquement à une portion du barreau. On applique alors $r_d = 2 \times 10^6 \text{ W/m}^3$ sur un tronçon de longueur $\frac{L}{5}$.

Les erreurs relatives e_θ et e_u sont à nouveau tracées en fonction du nombre de modes pour ce second problème modifié et comparées aux résultats pour le problème initial en figure 4. Pour ce cas test, l'erreur commise reste importante. Cela traduit le fait que la base de modes spatiaux générée sur le problème initial est inadaptée pour décrire le problème modifié par l'ajout d'une source de chaleur localisée. Il

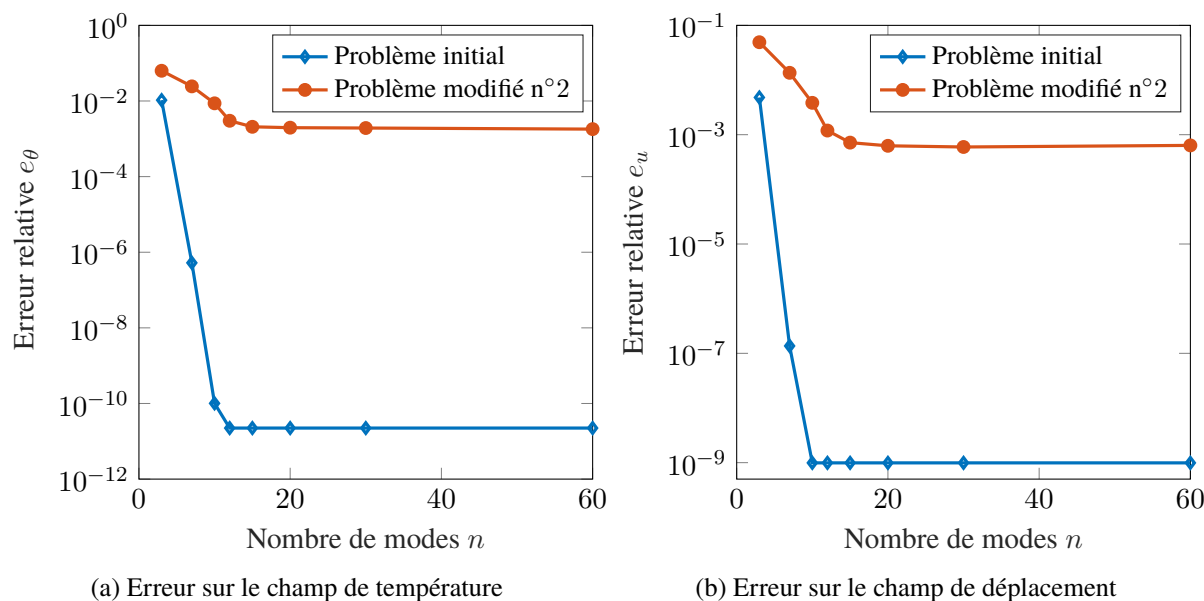


FIGURE 4 – Évolution de l'erreur relative pour le problème initial et le second cas test

faudrait donc pouvoir enrichir la base avec de nouveaux modes, plus adaptés au problème que l'on souhaite traiter, ce qui n'est pas possible au sein d'une méthode de partitionnement incrémentale.

6 Conclusions et perspectives

Ces travaux préliminaires ont permis d'aborder l'aspect multimodèle dans le cadre de la résolution d'un problème multiphysique fortement couplé avec une méthode de partitionnement standard. Dans cette optique, un modèle réduit a été utilisé pour résoudre l'une des deux physiques uniquement. Les modes permettant de construire ce modèle réduit ont été obtenus sur un problème connexe. Les limites de cette approche ont été mises en évidence lorsqu'on cherche à résoudre un problème s'éloignant trop de celui ayant permis de générer les modes. Ainsi, une stratégie de partitionnement incrémentale permet de mélanger des modèles de natures différentes, mais pas de les générer. La méthode LATIN-PGD, non incrémentale, suit quant à elle une philosophie différente. En effet, la base réduite est générée à la volée, en même temps que la solution du problème, sans nécessiter la résolution d'un problème connexe. C'est pourquoi la suite des travaux se focalise sur l'étude des aspects multimodèle dans le cadre de la méthode LATIN-PGD. À terme, l'objectif est de développer la notion d'interface physiques/physiques pour l'étendre à des interfaces physiques/données. Ainsi, on pourra aboutir avec ce formalisme à une stratégie de simulation des problèmes multiphysiques multimodèles, dont certains pourront se baser sur des données expérimentales, pouvant éventuellement nécessiter un enrichissement.

Références

- [1] C. A. Felippa, K.C. Park, and C. Farhat. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(24) :3247–3270, 2001.
- [2] P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Mechanics: New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag, 1999.
- [3] D. Néron and D. Dureisseix. A computational strategy for thermo-poroelastic structures with a time–space interface coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(9) :1053–1084, 2008.
- [4] P. Ladevèze and D. Néron. Proper Generalized Decomposition for multiscale and multiphysics problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4) :351 – 372, December 2010.
- [5] D. Néron, H. Ben Dhia, and R. Cottreau. A decoupled strategy to solve reduced-order multimodel problems in the PGD and Arlequin frameworks. *Computational Mechanics*, 57(4) :509–521, 2016.
- [6] W. Nowacki. *Dynamic problems of thermoelasticity*. Springer, 1975.
- [7] M. Balla. Formulation of coupled problems of thermoelasticity by finite elements. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*, 33(1-2) :59–70, 1989.
- [8] G. Prathap and B. P. Naganarayana. Consistent thermal stress evaluation in finite elements. *Computers and Structures*, 54(3) :415–426, 1995.
- [9] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer Series in Computational Mathematics ; Vol. 15, 1991.
- [10] K.-J. Bathe. The inf–sup condition and its evaluation for mixed finite element methods. *Computers and Structures*, 79(2) :243–252, 2001.

-
- [11] A. Krischok and C. Linder. A generalized inf–sup test for multi-field mixed-variational methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 357 :112497, 2019.
- [12] M. A. Biot. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. *Journal of Applied Physics*, 27(3) :240–253, 1956.
- [13] A. Saetta, B. A. Schrefler, and R. Vitaliani. Estrategias de solución para análisis de consolidación acoplados en medios porosos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 7(1) :55–66, 1991.
- [14] C. A. Felippa and T. L. Geers. Partitioned analysis for coupled mechanical systems. *Engineering Computation*, 5 :123–133, 1988.
- [15] G. W. Stewart. On the early history of the singular value decomposition. *SIAM Review*, 35(4) :551–566, 1993.