



HAL
open science

Texte Actes CORFEM 2021, en ligne :
<https://www.univ-irem.fr/-corfem->

Cécile Ouvrier-Bufferet

► **To cite this version:**

Cécile Ouvrier-Bufferet. Texte Actes CORFEM 2021, en ligne: <https://www.univ-irem.fr/-corfem->.
CORFEM 2021, 2021, Strasbourg - En ligne, France. hal-03800973

HAL Id: hal-03800973

<https://hal.science/hal-03800973>

Submitted on 6 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DEFINIR ET PROUVER : QUELLES INTERACTIONS ?

Cécile OUVRIER-BUFFET

Résumé. Définir pour prouver ou prouver pour définir ? Les interactions entre ces deux heuristiques de l'activité mathématique ne sont pas facilement saisissables. Dans ce texte, qui reprend pour l'essentiel l'exposé, nous illustrerons les spécificités d'un travail sur la définition en mathématiques et mettrons en évidence les liens avec la preuve. Nous ouvrirons ainsi la discussion sur l'intérêt de mettre en œuvre cette dialectique entre définition et preuves en classe.

Nous sommes dans une classe de 4ème ; le professeur dicte :

Le cercle est le lieu des points du plan qui sont à la même distance d'un point intérieur appelé centre.

Le bon élève écrit cette phrase sur son cahier ; le mauvais élève y dessine des bonshommes ; mais ni l'un ni l'autre n'ont compris ; alors le professeur prend la craie et trace un cercle sur le tableau.

« Ah ! pensent les élèves, que ne disait-il tout de suite : un cercle c'est un rond, nous aurions compris. »

Sans doute, c'est le professeur qui a raison. La définition des élèves n'aurait rien valu, puisqu'elle n'aurait pu servir à aucune démonstration, et surtout puisqu'elle n'aurait pu leur donner la salutaire habitude d'analyser leurs conceptions. Mais il faudrait leur montrer qu'ils ne comprennent pas ce qu'ils croient comprendre (...) (Poincaré, 1947, pp. 129-130).

Cette citation pose le problème de la fonction des définitions en mathématiques, problème que l'on peut poser dans la discipline et dans l'enseignement sous l'hypothèse d'une distance entre les mathématiques qui se font et les mathématiques qui s'enseignent. Au-delà d'une dénomination, la définition permet d'appréhender un concept et est un élément structurant dans une axiomatique. C'est ainsi un élément central dans l'activité mathématique de construction de connaissances et de preuve. Certains travaux (e.g. Mariotti & Fischbein, 1997) montrent la nécessité de se pencher sur le processus de définition car il donne accès à une compréhension des concepts et des axiomatiques et permet de discuter la place et le rôle des énoncés mathématiques. L'étude des activités de « définition » (avec plusieurs intitulés dans la littérature tels que *defining*, *defining processes*, *definitional procedure*, *defining activity*) est cependant relativement peu développée dans le champ de la didactique des mathématiques, et les interactions entre définir et prouver le sont encore moins. Nous proposons ainsi, dans cet article, d'appréhender les activités de définition dans la discipline des « mathématiques » afin d'extraire des potentialités pour l'enseignement en mettant en évidence des liens avec la preuve. Nous commencerons par étudier quelques concepts de mathématiques contemporaines, puis nous présenterons des propositions pour l'enseignement mettant en jeu l'articulation définir-prouver. Nous poserons les fondements épistémologiques proposés par Lakatos (1984) afin d'apporter des outils pour penser cette articulation. Les conclusions et perspectives ouvriront la discussion sur des pistes pour l'enseignement et la formation.

Petite visite chez des mathématiciens contemporains

Méchanceté d'un convexe

La convexité, comme le souligne le mathématicien Berger (2006), est un sujet riche :

La convexité dans le plan et dans l'espace présente un sujet passionnant, la convexité, à la fois par sa simplicité, sa naturalité et sa puissance, pour au moins trois raisons :

- au niveau des questions que l'on peut se poser naturellement, géométriques, visibles ;
- du fait que la convexité est une notion qui se rencontre dans de nombreuses branches des mathématiques ;
- du fait de son utilité, de sa force, dans de nombreuses applications.

La convexité « géométrique » (structures des corps convexes) et la convexité « fonctionnelle » (propriétés des fonctions convexes) sont deux domaines distincts en mathématiques. Nous présentons ici brièvement une problématique géométrique de mathématiciens et reviendrons plus loin sur un exemple de questionnements sur la convexité en classe au niveau de l'école.

Berger (2006) propose d'étudier la « méchanceté » d'un convexe, c'est-à-dire de juger du défaut d'être rond. Il met en évidence quatre critères (ellipse de John Loewner, rapport aréolaire, inégalité isopérimétrique inverse, produit aréolaire) et s'intéresse à définir différemment des degrés de méchanceté, réutiliser des résultats connus, mobiliser la dualité, changer de dimension et générer de nouveaux problèmes. Le plus méchant des convexes semble être le triangle, comme illustré dans la Figure 1. La situation en 3D est bien différente et encore un problème d'actualité chez les mathématiciens.

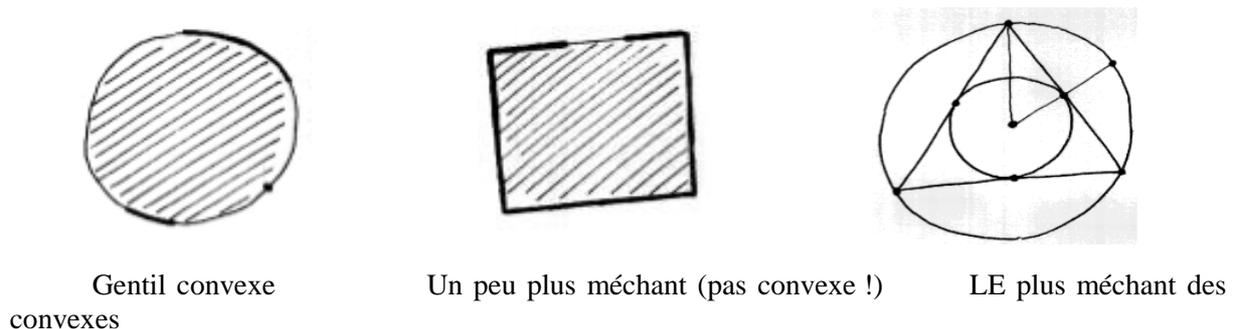


Figure 1 – La méchanceté des convexes (MATH.en.JEANS, 1992)

Nous renvoyons le lecteur à une fiche MATH.en.JEANS (1992) pour une découverte de ces convexes, adaptation par Pierre Duchet et Charles Payan de la conférence inaugurale de Marcel Berger au Palais de la Découverte.

Géométrie discrète (ou géométrie sphérique) versus géométrie euclidienne

Étudier le devenir d'une définition d'un concept familier dans un cadre différent, ce que propose par exemple MATH.en.JEANS (1995, 1997) avec des carrés sur la sphère (Figure 2), ou Ouvrier-Buffet (2006a) avec des droites discrètes, permet d'engager une activité de définition. En effet, ce type de situation peut impliquer des activités de définition se plaçant à des niveaux différents quant au point de vue axiomatique. Prenons l'exemple de définir dans le cadre de la géométrie sphérique ou discrète. Il s'agira alors d'une recherche extrinsèque ou intrinsèque :

- une recherche extrinsèque si la géométrie euclidienne est considérée comme un outil d'investigation avec un travail de transposition de définitions existantes (on cherche à conserver et préserver une axiomatique existante avec des objets connus mais placés dans un autre cadre mathématique) ;

- une recherche *intrinsèque* si l'on construit une « autre » géométrie en cherchant de nouveaux principes applicables au nouveau cadre : on abandonne alors l'axiomatique connue au profit de la construction d'une nouvelle, locale, plus productive. Il s'agit en quelque sorte de « désinstitutionnaliser » le savoir préexistant, ce qui peut s'avérer déstabilisant.

Paris et New-York sont-ils les sommets d'un carré ?

par Sothi Mok (3^e), Michel Vongsavanh (3^e),
Eric Chin (3^e), Siek-Hor Lim (1^{er}S), Eric
Akbaraly (1^{er}S), élèves et anciens élèves du
Collège Victor Hugo (2 rue Elsa Triolet,
93160 Noisy-le-Grand)

enseignants : Mme Martine Brunstein et
M. Pierre Lévy

chercheur : M. Pierre Duchet

« Paris et New-York sont-ils les sommets d'un carré ? » Cette question qui paraît si bête est en fait le prétexte pour une réflexion sur la définition d'un carré dans une sphère. Plusieurs mois de travaux et plusieurs feuilles d'exposé pour en arriver à la conclusion qu'un carré peut ne pas posséder d'angle droit.

Compiègne
Compte-rendu du groupe 42 parrainé par le groupe 37.

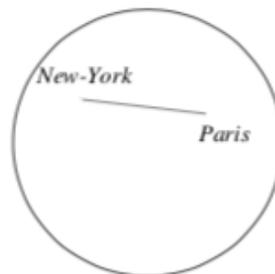
Des élèves de Noisy ont complètement résolu le problème de savoir s'il existe des carrés dont les 4 sommets sont sur une sphère, connaissant deux sommets. Leur sujet se présentait donc par une question :

« Paris et New-York sont-ils les sommets d'un carré ? »

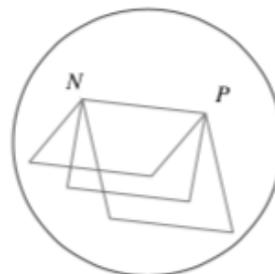
Ils nous ont montré que oui en traçant, sur le globe terrestre, un "carré bossu".

Nous avons remarqué que leur exposé était bien complet et les démonstrations étaient tout-à-fait valables, mais peut-être dites un peu trop vite pour permettre la compréhension de certain spectateurs.

Voilà une curieuse question pour un sujet de recherche en mathématiques car à première vue, la réponse paraît simple. En effet, dans l'espace, nous pouvons par des plans de coupe, obtenir le support d'une infinité de carrés possédant des sommets à l'endroit où l'on veut.



En fait, tous les plans contenant la droite passant par Paris et New-York conviennent pour y tracer nos carrés : on peut imaginer un plan pivotant autour de l'axe Paris-New-York, comme sur la figure ci-dessous.



Cependant ces carrés ne sont pas sur la surface de la Terre, assimilée à une sphère parfaite.

En tentant de résoudre ce nouveau problème, c'est à une géométrie singulière que l'on doit faire face car nous n'avons jamais étudié de telles figures sur une surface sphérique.

Pour construire de tels carrés, il nous a fallu définir ce qu'est un segment et un angle sur une sphère.

Figure 2 – Paris et New York sont-ils les sommets d'un carré ? (MATH.en.JEANS, 1995)

Dans MATH.en.JEANS (1995 & 1997), une expérience menée avec des élèves de collège (3^{ème}) et de lycée (1^{ère} S) en géométrie sphérique, est décrite, où la problématique est la

suivante : « Paris et New York sont-ils les sommets d'un carré ? ». Nous avons ici aussi un changement de cadre permettant de réinvestir des concepts mathématiques connus et donc de les redéfinir au regard du nouveau cadre.

Si l'on se place maintenant dans le cadre de la géométrie discrète, nous pouvons alors s'interroger sur deux processus distincts : Comment construire des objets discrets ? Comment les reconnaître ? ou encore : que mobilise-t-on comme définition pour reconnaître que tel objet est une droite (discrète) ou un cercle (discret) dans la Figure 3 ? Utilise-t-on la même définition, la même caractérisation pour les construire ? Si le questionnement sur ces objets semble naturel, le travail mathématique à conduire demeure complexe. Adopter une démarche extrinsèque cherchant à préserver une axiomatique de type euclidien, c'est-à-dire produire une géométrie discrète « idéale » en accord avec la géométrie euclidienne, semble être une impasse, mais produire une géométrie discrète qui permettrait de re-générer la géométrie euclidienne est plus accessible (Reveillès, 1991). Notons que la structure périodique des droites discrètes est étudiée depuis Bernoulli (XVIIIème), à une époque où les pixels et la reconnaissance d'image n'existaient pas encore. Mais cette problématique de définition des objets géométriques discrets reste contemporaine. Dans le cadre d'analyse d'images, il s'agit de définir des outils mathématiques et de proposer des solutions algorithmiques pour l'analyse d'objets discrets dans la reconnaissance de formes. Différents processus de discrétisation peuvent être utilisés. En fait, la caractérisation de formes discrètes se retrouve à la croisée entre une géométrie algorithmique, impliquant l'étude de la complexité algorithmique, les structures de données et la programmation linéaire, et une géométrie discrète qui, elle, considère des objets et algorithmes fondamentaux et l'arithmétique (e.g. Coeurjolly, 2002). Mais avoir des algorithmes efficaces pour la reconnaissance de structures discrètes régulières ne garantit pas une « bonne » analyse d'images.

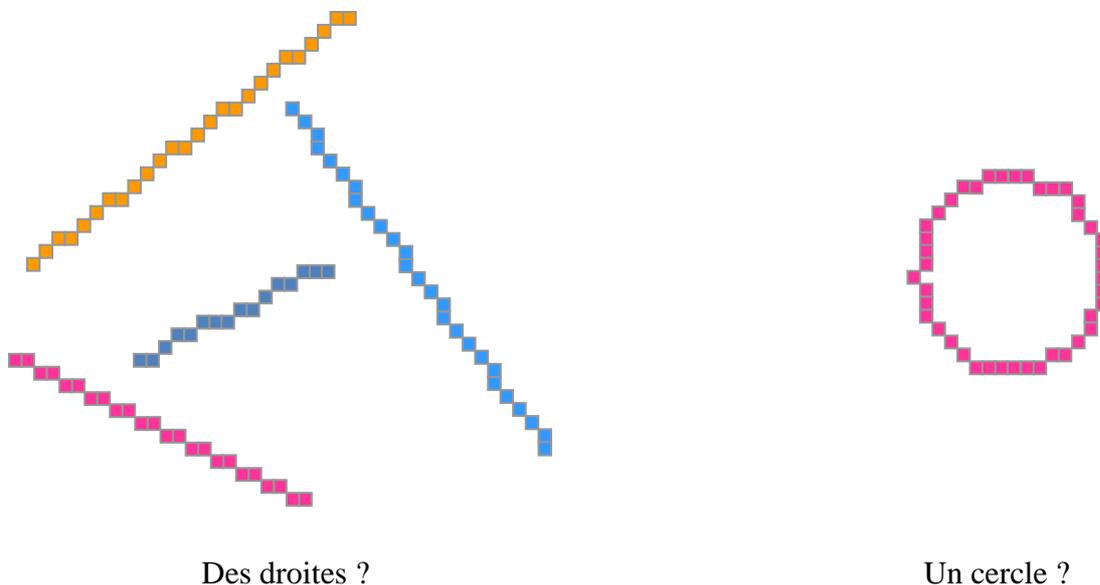


Figure 3 – Reconnaissance d'objets en géométrie discrète

Pour préciser l'activité de définitions dans le cas des droites discrètes, nous pouvons rechercher des critères locaux, une caractérisation géométrique (espace dual et programmation linéaire), une caractérisation arithmétique (périodicité, théorie des nombres, fraction continue...) (e.g. Ouvrier-Buffet, 2003). Au niveau de l'histoire des droites discrètes : l'Analyse Discrète Différentielle avec l'approche algorithmique de Bresenham, les algorithmes basés sur des analyses combinatoires, les algorithmes basés sur des analyses linguistiques, les petits harpons de Greene-Yoa, la discrétisation de Freeman et Pham, la

discrétisation de Rosenfeld et finalement l'approche arithmétique de Reveillès qui en découle sont autant de pistes explorées ces dernières années pour la définition des droites discrètes. Des approches mettant en jeu des propriétés statistiques (loi de Bernoulli) existent également. Cela permet d'aborder ensuite la question de la reconnaissance et de la segmentation de cercles discrets (e.g. Coeurjolly, 2002). L'étude d'une courbe discrète, des cercles et arcs de cercles est, quant à elle, plus complexe que l'étude des droites discrètes.

Ainsi, l'intérêt de la construction de définitions d'objets discrets dans des problèmes de reconnaissance d'objets, impliquant une modélisation d'objets réels du continu (les droites réelles notamment) est avéré et rejoint une problématique de construction de théorie mathématique et donc d'axiomatique : le lien avec la preuve émerge quand il s'agira de démontrer l'équivalence entre plusieurs définitions, réinterroger des énoncés mathématiques de la géométrie euclidienne ou construire une axiomatique ne serait-ce que locale. Nous proposons une analyse détaillée sur les enjeux mathématiques des droites discrètes et les résultats d'une expérimentation avec des étudiants de première année d'université (Ouvrier-Buffet, 2003, 2006a). Dans le cas de la géométrie, tant pour MATH.en.JEANS que pour les droites discrètes, il s'agit bien de poser des questions liées à l'axiomatique de la géométrie telles que celles concernant, par exemple, l'existence de l'intersection de deux droites ou encore l'existence d'un triangle équilatéral avec trois angles droits (sur la sphère), ce qui va contre la perception acquise en géométrie euclidienne et génère ainsi des conflits, une activité de définition et une activité de preuve.

Orientation de la discussion

Les deux exemples précédents illustrent une problématique de la définition qui touche à : la construction de nouveaux concepts, la réutilisation de concepts et définitions existants, l'élaboration d'axiomatique et la génération de nouveaux problèmes. Nous allons maintenant proposer une synthèse de ce qui existe en didactique des mathématiques sur l'articulation définir-prouver, puis considérer spécifiquement les travaux de Lakatos (1961, 1976, 1984) pour enrichir la réflexion.

Panorama sur l'articulation définir-prouver

Synthèse sur les travaux existants

En général, les travaux en didactique des mathématiques portant sur les définitions s'intéressent à des concepts mathématiques familiers, ou hors curricula mais accessibles. Ainsi, les types de situations impliquant une activité de définition sont de trois types : il s'agit principalement de

- redéfinition de concepts familiers, d'étude de définitions « incorrectes »
- de changement de cadre de concepts déjà connus des élèves ou étudiants
- ou de situations « à la Lakatos ».

Un changement de cadre de concepts déjà connus (comme l'exemple du carré sur la sphère ou l'exemple de la géométrie discrète) permet d'envisager une interaction définir-prouver. Par ailleurs, les concepts mathématiques utilisés dans les expérimentations sont hors curricula (mathématiques discrètes par exemple) ou déjà partiellement connus des élèves ou étudiants. Enfin, le matériel à la disposition des étudiants peut aussi inclure un manuel comprenant des éléments qui vont être utiles au processus des étudiants, voire des définitions de départ.

Les situations cherchant à suivre le modèle de Lakatos (recherche d'une validation d'une (re)définition dans une activité de preuve) sont rares et nous n'avons pas référencé de situation avec de nouveaux objets mathématiques (nouveaux pour les élèves). Ce qui nous

éloigne de la construction de concepts. A noter, dans ces travaux, que la gestion de classe n'est pas problématisée et s'avère pourtant non neutre, mais les conditions expérimentales sont toujours très favorables (petits effectifs, plusieurs enseignants et/ou chercheurs pour accompagner le travail de groupes des élèves sur un temps suffisamment long), ce qui crée inévitablement un biais lorsque l'on se projette dans un contexte de classe ordinaire. Nous renvoyons à Ouvrier-Bufferet (2013) pour une synthèse détaillée de ces travaux.

Il est important de préciser ici les différentes caractéristiques des concepts que nous pouvons considérer comme de « bons candidats » à une activité de définition (cf. Ouvrier-Bufferet, 2013, p.55s). Ce sont des concepts :

- possédant plusieurs définitions équivalentes, définitions pouvant être formulées dans des systèmes de représentations symboliques différents ;
- dont l'accessibilité *via* des représentations et/ou l'exploration de problèmes est avérée ;
- appartenant à différents champs des mathématiques (c'est le cas des objets appartenant à différentes géométries) : il est vrai que la transposition des objets d'un champ à un autre implique une activité de définition, mais aussi de changement d'axiomatique, et donc nécessite une exploration du nouveau concept, parfois en s'affranchissant de connaissances antérieures afin d'avoir un regard neuf sur le concept ;
- pour lesquels il est aisé de générer des questionnements naturels (c'est le cas lors de l'exploration de problèmes combinatoires ou lors de l'essai de transposition d'une axiomatique géométrique au cas de la géométrie discrète par exemple) ;
- pour lesquels l'enseignant se retrouve dans la même position de chercheur que l'étudiant.

Exemples de changements de cadres

Nous ne revenons pas ici sur l'intérêt du changement de cadre mathématiques pour problématiser un concept et le faire évoluer. Nous renvoyons le lecteur aux exemples précédents en géométrie sphérique et en géométrie discrète, les deux étant mathématiquement représentatifs des expérimentations que l'on trouve dans la littérature dans ce domaine (e.g. Ouvrier-Bufferet, 2006a ; Rasmussen & Zandieh, 2000 ; Larsen & Zandieh, 2005 ; Zandieh & Rasmussen, 2010).

Convexité et classification

Nous revenons ici sur le concept de convexité, en géométrie, et nous proposons de l'étudier à l'école élémentaire dans une situation de classification (Ouvrier-Bufferet, 2006b). Une situation de classification se questionne de la façon suivante : classer, oui, mais en combien de classes ?

Nous proposons différentes définitions possibles de figure « convexe » en géométrie et laissons le soin au lecteur de prouver leur équivalence.

- Etant donné deux points P et Q de la figure, tous les points du segment PQ appartiennent à la figure.
- Toute droite passant par un point quelconque intérieur à la figure, coupe la frontière exactement en deux points.
- Par chaque point de sa frontière, il passe au moins une ligne de support.
- En langage naturel : en parcourant la frontière de la figure, toute la figure est toujours du même côté (un sens de parcours étant choisi).

- A chaque point P extérieur correspond un point et un seul de la figure qui soit le plus proche de P.
- Tous les angles sont saillants.

Finalement, il reste plusieurs concepts à définir (frontière, angle...) dans une perspective de rigueur axiomatique.

Nous avons expérimenté la situation suivante (Ouvrier-Buffer, 2006b), en partie inspirée de Fletcher (1970). Le matériel à disposition des élèves (cycle 3) est constitué d'objets physiques découpés dans du carton et d'une feuille où les figures sont dessinées (Figure 4). La manipulation et le tracé de segments ou de droites sont ainsi possibles. La consigne est énoncée de la façon suivante : « faire deux classes ». Le nom « convexe » n'est pas donné, mais il s'agit bien de construire une définition de « convexe » à partir des classes des élèves. L'enseignant et le chercheur qui gèrent la situation en classe utilisent la demande explicite de définition pour faire évoluer la situation en faisant verbaliser ainsi aux élèves les propriétés mathématiques sous-jacentes aux classes qu'ils ont déterminées. Le terme « convexe » n'est introduit que lorsque les caractéristiques des classes sont suffisamment consistantes et qu'une rédaction est demandée. L'enseignant et le chercheur peuvent également demander aux élèves de produire des figures convexes et des figures qui ne le sont pas, favorisant ainsi un travail de génération d'exemples et contre-exemples. Ce type de travail facilite la formulation de propriétés.

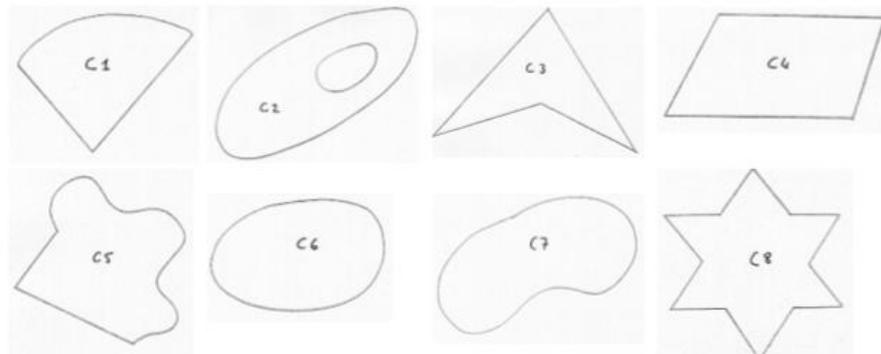


Figure 4 –Figures convexes et non convexes - Exemples

Nous notons que plusieurs définitions potentielles, présentes du fait de la manipulation, n'ont pas émergées. Nous indiquons ici quelques définitions produites par les élèves (voir Ouvrier-Buffer, 2006b pour le détail et la gestion de classe) :

- Déf-élève A : « convexe : figure ayant les points qui se relie à l'intérieur ». Les élèves remarquent que ce n'est « pas convexe dès qu'il y a un creux ». Le terme "point" est ainsi barré, remplacé par "angles" puis par "angles et arrondis". La discussion porte alors sur « relier un arrondi ».
- Déf-élève B : « convexe : quand on trace les diagonales, ça reste à l'intérieur de la figure ». Ce que l'on trouve dans un autre groupe avec la formulation suivante : « si on trace une droite ou une diagonale hors de la forme, c'est non convexe ».
- Déf-élève B : « convexe : quand on relie un point à un autre, la droite ne sort pas de la figure ». Autre énoncé proposé par les élèves : « si on met une corde qui relie les angles, et qu'elle sort de la figure, elle est non convexe ».

Ces définitions montrent déjà des diversités d'approches du concept et permettent d'envisager, à un autre niveau de classe, des questionnements sur les relations entre ces définitions et donc sur la preuve.

Graphes et arbres

En théorie des graphes, l'arbre est un objet « riche » en définition, comme le montre le Tableau 1.

Définitions	Nature principale des définitions
Def1- G est connexe sans cycle.	Perceptive, structurelle
Def2- entre deux sommets quelconques de G, il existe un unique chemin .	Perceptive, cheminement
Def3- G (à n sommets) est sans cycle avec (n-1) arêtes	Combinatoire
Def4- G (à n sommets) est connexe avec (n-1) arêtes	Combinatoire
Def5- G est sans cycle et en ajoutant une arête, on crée un cycle (graphe sans cycle maximal ¹)	Dynamique (nécessite une action sur l'objet), optimal
Def6- G est connexe, et si on supprime une arête quelconque, il n'est plus connexe (connexe minimal ²)	Dynamique
Def7- un arbre est soit un sommet isolé, soit un arbre auquel on ajoute un sommet pendant ³ .	Inductive (ascendante), dynamique constructive
Def8- G est soit un sommet isolé, soit un graphe A, qui, privé d'un sommet pendant quelconque est soit un arbre, soit un sommet isolé.	Inductive (descendante), dynamique constructive
Def9- un arbre est soit un sommet isolé, soit deux arbres reliés par une arête.	Inductive, dynamique
Def10- un arbre est soit un sommet isolé, soit le graphe obtenu à partir d'une forêt ⁴ en reliant un nouveau sommet à un sommet de chacun des arbres de la forêt.	Inductive, dynamique

Tableau 1- Définitions de l'arbre

Nous avons expérimenté, en première année d'université et en classe de terminale ES, une situation de classification semblable à celle de la convexité, en donnant des exemples et contre-exemples d'arbres (Figure 5). Pour entrer dans une démarche de preuve, nous avons

¹ Maximal pour le nombre d'arêtes.

² Minimal pour le nombre d'arêtes.

³ Un sommet pendant est un sommet qui n'est adjacent qu'à un seul sommet.

⁴ Forêt : ensemble d'arbres disjoints.

mis en jeu le problème suivant : Soit G un graphe connexe. Démontrer qu'il existe un arbre couvrant tous les sommets.

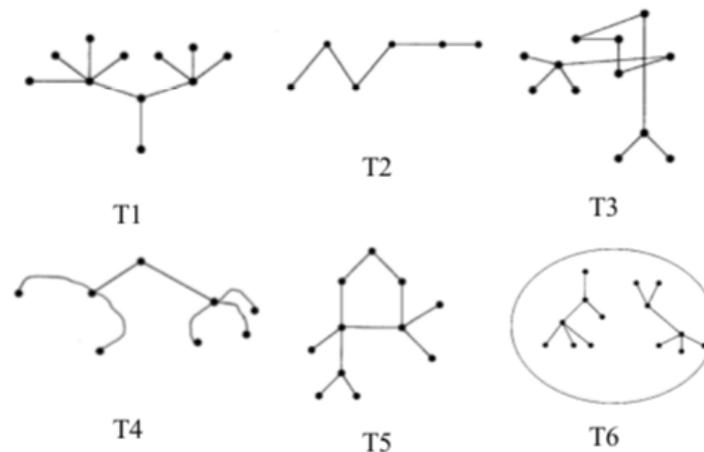


Figure 5 – Exemples et contre-exemples du concept d'arbre

Nous pourrions aussi imaginer un problème mettant en jeu une formule conjecturée telle celle-ci : pour n points, il y a $(n-1)$ traits. Il s'agirait alors de caractériser la classe d'objets vérifiant cette formule. Les objets vérifiant cette formule sont des graphes non connexes (avec des composantes connexes quelconques) ou des arbres. Les composantes comportant des cycles peuvent être « compensées » par plusieurs composantes de type « arbre ». L'étude du rapport entre le nombre de cycles et le nombre de composantes peut faire ressortir l'intérêt des graphes particuliers que sont les arbres et permettre la construction de différentes définitions. Si nous cherchons à problématiser l'arbre dans un changement de cadre, où la construction de définition serait nécessaire, c'est-à-dire permettrait la résolution de la question posée, nous trouvons l'ensemble des problèmes de recherche de labyrinthes où il y a modélisation du labyrinthe par des arbres. Il ne s'agit pas de travailler au sein de la théorie des graphes mais de modéliser, mathématiser la situation par les arbres, qui possèdent la propriété recherchée (existence d'un unique chemin). Nous renvoyons à Ouvrier-Buffet (2003, 2013) pour l'analyse épistémologique du concept d'arbre et les détails de l'expérimentation et des résultats produits par les étudiants en début d'université et en terminale.

Un point de vue épistémologique : les propositions de Lakatos

Nous nous référons ici en particulier à la thèse de Lakatos (1961) et à son ouvrage « Preuves et Réfutations » (1976) version traduite et annotée par Balacheff et Laborde (1984), remarquable quant à l'étude de processus de construction de définitions en appui sur une approche épistémologique

Apports de Lakatos : types de situations et méthodes

Pour une présentation détaillée des apports des travaux de Lakatos et de leurs limites, nous renvoyons à Ouvrier-Buffet (2013). Nous renvoyons également le lecteur aux excellents documents (Kampis et al., 2002 ; Motterlini, 2002 ; Koetsier, 1991 ; Corfield, 1997) pour une investigation complète et poussée de la complexité de la pensée de Lakatos et des influences qui ont pesé sur sa réflexion.

Lakatos reconnaît qu'il utilise trois sources idéologiques majeures, a priori incompatibles, dans son cadre théorique : les heuristiques mathématiques de Pólya, la dialectique d'Hegel, et le faillibilisme de Popper (Lakatos, 1961, Archive, 3.4).

Directement inspiré par Pólya et Popper, Lakatos s'appuie sur le contexte de la découverte (construction de conjectures) et de la justification (mise à l'épreuve de conjectures). Il reprend

en effet une idée de Pólya (le *guessing and testing*) comme un exemple de raisonnement de type inductif en mathématiques, où une conjecture naïve (antérieure à toute preuve en fait) est atteinte par la méthode de Popper des conjectures et réfutations. Un processus de preuve par analyse-synthèse permet de faire disparaître la conjecture naïve au profit de *proof-generated theorems* de plus en plus complexes, de lemmes cachés etc. Ce qui nous concerne davantage ici, c'est la place prépondérante donnée aux définitions, qu'elles soient naïves, zéro ou générées dans/par la preuve (les fameuses *proof-generated definitions* traduites par « définitions éprouvettes » dans la version française de Lakatos (1984)), la construction de définitions apparaissant clairement comme un processus de formation de concepts. Les trois types de définitions proposés par Lakatos (définitions naïves, zéro-définitions, *proof-generated definitions*) ont pour fonctions respectives de nommer, communiquer un résultat, prouver. Une définition naïve peut être établie au début d'une recherche mais ne peut évoluer, contrairement à une zéro-définition qui marque réellement le début de l'activité de définition et du processus de recherche à proprement parler. Une zéro-définition est adoptée, à titre d'essai, au début du processus de recherche, mais n'affecte pas le domaine de la preuve (Lakatos, 1961, p. 68-75) ; une zéro-définition peut être modifiée pour protéger la conjecture d'un « monstre » ou parce que le concept est modifié par la présentation d'une preuve. La construction d'un système de concepts est alors engagée, et le stade de *proof-generated definition* ne sera atteint que grâce à l'idée de la preuve. Donner des exemples de *proof-generated definitions* est délicat, car il faudrait expliciter une preuve et la dialectique entre cette preuve et la définition (et même les définitions) en construction. En fait, l'idée séduisante des *proof-generated definitions* réside dans le fait qu'elles tentent de relier la construction de concepts et la validation de définitions à la preuve : ce point reste à explorer plus en profondeur, car la situation proposée par Lakatos ne permet pas d'aller vers la généralisation d'un processus permettant de passer des zéro-définitions aux *proof-generated definitions*, processus qui tend à expliciter les fameux « lemmes cachés » qui émergent lors de la recherche des conditions pour la validité d'une conjecture) (Lakatos, 1984, p. 170-172).

Méthodes des P&R, règles heuristiques

Face à une conjecture, il s'agit de mettre en chantier sa preuve comme sa réfutation, de rechercher des contre-exemples à la conjecture (aspect global) et aux lemmes suspects (aspect local). Si l'on « trouve » un contre-exemple, il faut procéder à un réexamen de la preuve et recherche d'un lemme « coupable » et vérifier si un contre-exemple est local ou global. Dans le cas d'un contre-exemple local, on améliore la preuve analytique en remplaçant le lemme réfuté par un autre qui ne le soit pas.

Dans Preuves et Réfutations, Lakatos (1984) propose de mettre à l'étude la conjecture naïve : $S-A+F = 2$ pour un polyèdre quelconque ; nous référons à Balacheff (1982) pour un résumé des heuristiques (Figure 6).

LAKATOS part de la preuve (ou expérience de pensée), inspirée de CAUCHY (1813)⁽⁷⁾, suivante :

1) on met le polyèdre à plat (en découpant une face), on se ramène ainsi à établir $S-A+F = 1$ pour un graphe planaire.

2) on triangule le graphe plan en traçant des diagonales dans les faces polygonales qui ne sont pas des triangles. Dans cette opération on ajoute, à chaque pas, à la fois une face et une arête ; donc $S-A+F$ reste constant.

3) On enlève, un par un, les triangles du graphe triangulé à l'aide d'une des deux opérations suivantes :

- . ôter un côté ;
- . ôter deux côtés et un sommet.

Si $S-A+F = 1$ avant l'une des deux opérations, alors $S-A+F = 1$ après.

A la fin de cette procédure de destruction il reste un triangle pour lequel $S-A+F = 1$, donc la conjecture est prouvée.

Si aucun contre-exemple ne vient réfuter la conjecture, ou sa preuve, alors elle doit être acceptée comme théorème. C'est là le critère (pragmatique) de rigueur que donne LAKATOS.

Si un contre-exemple est produit, il peut être une réfutation de la conjecture ou de sa preuve. Dans le premier cas il s'agit d'un contre-exemple global, dans le second cas d'un contre-exemple local. Un contre-exemple global peut être en même temps local, c'est-à-dire réfuter un lemme (ou sous-conjecture) de la preuve ;

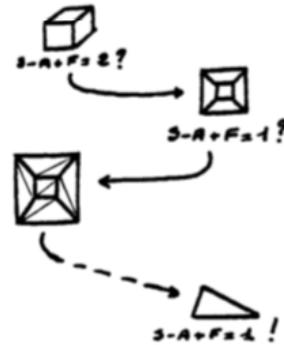


Figure 6 – Point de départ de la problématique de Lakatos, inspirée de la preuve de Cauchy (Balacheff, 1982, p. 5)

Les fondements de la découverte mathématique, ou le « développement de théories mathématiques non formelles »

La méthode de Lakatos se décline en sept étapes (Lakatos, 1984, p. 165s) que nous reprenons ici :

1. Conjecture primitive
2. Preuve (une expérience mentale grossière ou une argumentation, décomposant la conjecture primitive en sous-conjectures ou encore en lemmes).
3. Émergence d'un contre-exemple 'global' (contre-exemple à la conjecture primitive).
4. Réexamen de la preuve : le 'lemme coupable', par lequel le contre-exemple global est un contre-exemple 'local', est repéré. Ce lemme coupable peut d'abord être resté 'caché' ou avoir été mal identifié. Il est maintenant rendu explicite et incorporé sous forme de condition à la conjecture primitive. Le théorème (c'est-à-dire la conjecture améliorée) remplace la conjecture primitive et a pour nouveau caractère essentiel le concept engendré par la preuve.

5. On examine les preuves d'autres théorèmes pour voir si le lemme nouvellement trouvé ou le nouveau *proof-generated* concept y apparaissent : ce concept peut se trouver à la croisée de différentes preuves, et se révéler ainsi d'une importance fondamentale.
6. On contrôle une à une les conséquences, jusque-là acceptées, de la conjecture d'origine maintenant réfutée.
7. Les contre-exemples deviennent de nouveaux exemples – de nouveaux champs de recherche s'ouvrent.

Les questions que cela pose

Quelles sont les données initiales du problème lakatosien ?

Chez Lakatos (1984), le point de départ est un **problème** qui pose la question de la transition entre le plan et l'espace : ici le but est une **classification**. Existe-t-il une relation entre le nombre S de sommets, le nombre A d'arêtes et le nombre F de faces d'un polyèdre, en particulier d'un polyèdre régulier, du même type que celle, évidente, qu'il y a entre le nombre de sommets et d'arêtes d'un polygone, à savoir $S=A$? Cette dernière relation nous permet de classer les polygones selon leur nombre d'arêtes (ou de sommets) : triangles, quadrilatères, pentagones etc. Une relation du même genre nous aiderait à classer les polyèdres (Lakatos, 1984, p.7). Autre point de départ, la **conjecture** (émanant des élèves) dite naïve ou primitive : $S-A+F = 2$ pour un polyèdre quelconque. Une conjecture alternative peut porter sur la relation entre S , A et F pour tout polyèdre. Les premiers essais des élèves corroborent la conjecture qui peut être prouvée. Et le maître propose une **preuve** (historiquement la preuve de Cauchy) : l'analyse de la preuve génère des sous-conjectures et lemmes à étudier. Ici, la preuve est une expérience mentale, et non un exercice formel.

Lakatos (1984) propose, en annexe, un autre exemple, celui de la continuité, mais seul un scénario général est donné. La conjecture est la suivante : la limite d'une série convergente de fonctions continues est continue. La preuve en jeu est la preuve de Cauchy mais n'est pas donnée dans l'annexe. Cet exemple réfère au problème historique de la définition de la continuité. En découleront notamment les définitions de limite etc.

Questionnements pour l'enseignement des mathématiques

Plusieurs questions se posent sur les apports de Lakatos et la dialectique prouver-définir qu'il propose dans un exemple épistémologique dans l'activité mathématique. Serait-il pertinent d'actualiser la méthode de Lakatos à d'autres concepts voire aux mathématiques contemporaines ? Quelle est la pertinence didactique de ce type de situations de définition, est-ce profitable aux élèves ?

Plusieurs chercheurs s'accordent à souligner l'influence de Lakatos en didactique des mathématiques (e.g. Davis & Hersch, 1981 ; Hersch, 2006 ; Sriraman, 2008), mais peu se sont emparés de la question de la reproductibilité de situations « à la Lakatos » et des conditions expérimentales nécessaires : est-ce tenable en classe ordinaire ? à quel coût ? Interrogeons donc la portée des travaux de Lakatos du côté des pratiques des enseignants.

Sriraman (2008) argumente sur la nécessité de prendre comme point d'appui pour le développement de théories de l'apprentissage le travail de Lakatos. L'importance de la gestion par l'enseignant, devant aussi être au fait des développements historiques (et épistémologiques) des concepts, est également rappelée. Sriraman a expérimenté des situations « à la Lakatos » (au lycée, Sriraman, 2003 ; en formation d'enseignants du premier degré, Sriraman & Daniels (non publié)), en a discuté, et même « idéalisé » (SIC, Sriraman,

2008, 2006) les potentialités pédagogiques. Il émet l'hypothèse que la « mathématisation », telle qu'elle est proposée par Lakatos, est possible dans l'enseignement secondaire. Implicitement, le statut des énoncés et « exemples » proposés par les étudiants est lui aussi crucial (cet aspect n'est pas développé par Sriraman) : si les étudiants n'en perçoivent ni le statut ni la portée, ce sera à l'enseignant d'orienter la recherche. Soulignons que les problèmes retenus pour les expérimentations de Sriraman sont de nature combinatoire et sont censés permettre aux enseignants de se détacher des méthodes et contenus habituels (Sriraman, 2006). Nous entrevoyons là un large champ de questions, qui rejoignent celles posées dans le cadre de l'enseignement de la preuve et de la formation des enseignants et des élèves à une « activité mathématique », proche de celle pratiquée par des mathématiciens. Nous ne développerons pas ici la construction d'un cadre épistémologique de référence pour modéliser l'activité de définition et permettant de mettre en évidence les liens avec la preuve (Ouvrier-Buffet, 2013), mais nous insistons sur l'importance des types de situations impliquant une activité de définition et la difficulté de liées celles-ci à une activité de preuve, en dehors de toute problématique axiomatique. Celle-ci semble en effet incontournable et met en scène le statut des énoncés mathématiques, trop peu mis en évidence dans les instructions officielles.

Conclusions et discussion

Nous avons pointé l'activité dialectique en mathématiques qui existe entre définir et prouver. Nous pouvons nous interroger sur la légitimité de sa transposition à la classe et sur les conditions à réunir pour que cela réussisse : quels sont les leviers à disposition de l'enseignant ? Faut-il changer le rapport des élèves aux mathématiques (accepter de ne pas savoir, formuler des définitions provisoires de travail, s'interroger sur une démarche axiomatique) ? La compétence « définir » pourrait être une compétence à travailler spécifiquement, tout comme le sont les compétences transversales aux mathématiques « prouver » et « modéliser ». Mais s'engager dans la mise en œuvre en classe d'une dialectique entre définir et prouver nécessite un temps long et une gestion de classe spécifique, assez inhabituelle quant à la gestion de la construction de définitions. Nous pouvons par exemple nous inspirer des Situations Recherches pour la Classe (e.g. IREM de Grenoble, 2016), du débat scientifique (e.g. Legrand, 1993), de MATH.en.Jeux pour réfléchir collaborativement à l'optimisation de la mise en œuvre de telles situations dans un contexte de classe ordinaire. Reste à trouver le temps nécessaire ☺

Bibliographie

- Balacheff, N. (1982). Construction des connaissances mathématiques, l'approche de Imre Lakatos. In R. Gras (Ed), *Séminaire d'histoire et didactique des mathématiques* (pp.1-12). Rennes. hal-02095927
- Berger, M. (2006). *Convexité dans le plan, dans l'espace et au-delà. De la puissance et de la complexité d'une notion simple*. 2 volumes, collection Opuscules, Editions Ellipses.
- Coeurjolly, D. (2002). *Algorithmique et géométrie discrète pour la caractérisation des courbes et des surfaces*. Thèse. Université Lumière - Lyon II, disponible en ligne tel00167370
- Corfield, D. (1997). Assaying Lakatos's Philosophy of Mathematics. *Studies in History and Philosophy of Science*, 28 (1), 99-121.
- Davis, P.J. & Hersch, R. (1981). *The Mathematical Experience*. The Harvester Press.
- Fletcher, T.J. (1970). *L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui – Essai d'une didactique nouvelle pour l'enseignement du second degré*. 4ème Edition, OCDL, Paris.

- Hersch, R. (2006). *18 Unconventional essays on the nature of mathematics*. Springer Science & Business Media Inc.
- IREM DE GRENOBLE (2016). *Situations de recherche pour la classe, pour le collège et le lycée ...et au-delà*. IREM de Grenoble.
- Kampis, G., Kvasz, L. Stöltzner, M. (2002). *Appraising Lakatos – Mathematics, Methodology and the Man*. Vienna Circle Institute Library – Kluwer Academic Publishers.
- Koetsier, T. (1991). *Lakatos' philosophy of mathematics, a historical approach*. North-Holland Amsterdam.
- Lakatos, I. (1961). *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*. Thesis. Cambridge University Library.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge University Library.
- Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations*. Traduction de N. Balacheff & J.-M. Laborde. Hermann.
- Larsen, S. & Zandieh, M. (2005). Conjecturing and Proving as Part of the Process of Defining. In Lloyd, G. M., Wilson, M., Wilkins, J. L. M., & Behm, S. L. (Eds.), *Proceedings of the 27th PME-NA* (pp. 797-804).
- Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères IREM*, 10, 123-159.
- Mariotti, M.A & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219–248.
- MATH.en.JEANS (1992). Flashes de géométrie – Combien méchant peut être un convexe ? Ou quel est le convexe le moins rond ? Actes *MATH.en.JEANS au Palais de la Découverte*, 167-172. <http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/92167172.pdf>
- MATH.en.JEANS (1995). Paris et New York sont-ils les sommets d'un carré ? Collèges Condorcet (77340 Pontault-Combault) et Victor Hugo (93160 Noisy-le-Grand). Actes *MATH.en.JEANS*, 95-103. Ed. MATH.en.JEANS, Paris. <http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/95095103.pdf>
- MATH.en.JEANS (1997). Paris et New York sont-ils les sommets d'un carré ? Actes *MATH.en.JEANS*, 175-176. Ed. MATH.en.JEANS, Paris. <http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/97175175.pdf>
- Motterlini, M. (2002). Reconstructing Lakatos: a reassessment of Lakatos' epistemological project in the light of the Lakatos Archive. *Studies in History and Philosophy of Science*, 33, 487-509.
- Ouvrier-Buffet, C. (2003). *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse, Université de Grenoble (disponible en ligne : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515/en/>).
- Ouvrier-Buffet, C. (2006a). Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 259-282.
- Ouvrier-Buffet, C. (2006b). Classer et définir : des processus connexes. *Grand N*, 78, 83-98.
- Ouvrier-Buffet, C. (2013). *Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve – Étude épistémologique et enjeux didactiques*. Note de synthèse HDR. Université Paris Diderot. Disponible en ligne.
- Poincaré, H. (1947). *Science et méthode*. Collection : Bibliothèque de philosophie scientifique 3e éd. (1^{ère} édition 1908).
- Rasmussen, C. & Zandieh, M. (2000). Defining as a mathematical activity: a realistic mathematical analysis. In M. L. Fernández (Ed.), *Proceedings of the 22nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 301-305). Columbus, OH.

- Reveillès, J.P. (1991). *Géométrie discrète, calculs en nombres entiers et algorithmique*. Doctorat d'état, Université Louis Pasteur, Strasbourg.
- Sriraman, B. (2003). Can mathematical discovery fill the existential void? The use of conjecture, proof and refutation in a high school classroom. *Mathematics in School*, 32(2), 2-6.
- Sriraman, B. (2006). An ode to Imre Lakatos: Bridging the ideal and actual mathematics classrooms. *Interchange*, 37(1-2), 151-178.
- Sriraman, B. (2008). Let Lakatos be – A commentary on Pimm et al. "Would the real Lakatos please stand up!". *Interchange*, 39(4), 483-492.
- Zandieh, M. & Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 29, 57–75.