



**HAL**  
open science

# Application de la méthode de la différentiation complexe au développement aérodynamique d'une couche de mélange

Hugo Vincent, Christophe Bogey

► **To cite this version:**

Hugo Vincent, Christophe Bogey. Application de la méthode de la différentiation complexe au développement aérodynamique d'une couche de mélange. 25ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2022, Nantes, France. hal-03796242

**HAL Id: hal-03796242**

**<https://hal.science/hal-03796242>**

Submitted on 4 Oct 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Application de la méthode de la différentiation complexe au développement aérodynamique d'une couche de mélange

H. Vincent<sup>a</sup> & C. Bogey<sup>b</sup>

Univ Lyon, Ecole Centrale de Lyon, CNRS, Univ Claude Bernard Lyon 1, INSA Lyon,

LMFA, UMR 5509, 69130, Ecully, France

a. hugo.vincent@ec-lyon.fr

b. christophe.bogey@ec-lyon.fr

## Résumé :

*La méthode de la différentiation complexe est appliquée à l'étude du développement aérodynamique d'une couche de mélange bidimensionnelle excitée à une seule fréquence. Elle est mise en œuvre dans des simulations numériques directes pour déterminer l'influence de trois paramètres caractéristiques de l'écoulement (le rapport de vitesse, le nombre de Reynolds et la fréquence d'excitation) sur ce développement. Les résultats obtenus avec la méthode de la différentiation complexe sont en bon accord avec ceux issus d'études paramétriques, mettant en évidence la validité de cette méthode. Ils montrent également que cette méthode peut être utilisée pour caractériser les effets d'un paramètre physique sur un écoulement.*

## Abstract:

*The complex differentiation method is applied to the study of the aerodynamic development of a two-dimensional mixing layer excited at a single frequency. It is implemented in direct numerical simulations to determine the influence of three characteristic parameters of the flow (the velocity ratio, the Reynolds number and the excitation frequency) on this development. The results obtained with the complex differentiation method are in good agreement with those from parametric studies, supporting the validity of the method. They also show that the method can be used to characterize the effects of a physical parameter on a flow.*

**Mots clefs : différentiation complexe ; couche de mélange ; simulation**

## 1 Introduction

Pour étudier un écoulement turbulent, il peut être intéressant de caractériser l'influence de paramètres clés, comme par exemple la vitesse de l'écoulement ou sa température, sur les mécanismes physiques régissant son développement aérodynamique. Pour atteindre cet objectif, des études paramétriques, qui consistent à réaliser des simulations pour différentes valeurs des paramètres dont on cherche à déterminer

les effets, sont souvent menées dans la littérature. Une alternative à ces études, pouvant être difficiles à mettre en œuvre, consiste à estimer la sensibilité de l'écoulement aux paramètres considérés. Cette sensibilité décrit les effets d'une petite modification des valeurs des paramètres étudiés sur les solutions de l'écoulement et correspond mathématiquement à une dérivée. Elle peut être utilisée pour étudier l'influence d'un paramètre sur un écoulement, comme l'ont montré Kirkman & Metzger [1] en analysant la dépendance d'un écoulement de canal turbulent aux effets visqueux et Zayernouri & Metzger [2] en décrivant les effets de la viscosité et des échanges thermiques sur des tourbillons se trouvant dans une couche de mélange.

Différentes méthodes, détaillées dans la revue de Martins & Hwang [3], peuvent être employées pour estimer la sensibilité d'un écoulement, comme notamment la méthode de l'équation de sensibilité [1, 2, 4] et celle de la différentiation complexe [5, 6]. La méthode de l'équation de sensibilité consiste à réaliser un calcul en résolvant, d'une part, les équations de Navier-Stokes qui décrivent la dynamique des fluides et, d'autre part, les équations de sensibilité obtenues en dérivant les équations de Navier-Stokes par rapport à un paramètre. Les solutions des équations de sensibilité donnent l'évolution spatio-temporelle des dérivées des solutions de l'écoulement par rapport au paramètre considéré et peuvent donc être utilisées pour caractériser la dépendance de l'écoulement à ce paramètre. La méthode de l'équation de sensibilité a notamment été mise en œuvre par Hristova *et al.* [4], Kirkman & Metzger [1] et Zayernouri & Metzger [2] pour déterminer l'influence de paramètres clés sur des écoulements incompressibles. Il est possible de déterminer une approximation des valeurs des solutions des équations de sensibilité avec la méthode de la différentiation complexe. Cette méthode consiste à ajouter une petite perturbation imaginaire à un paramètre dont on étudie l'influence et à résoudre alors les équations de Navier-Stokes dans le plan complexe. Elle est plus simple à mettre en œuvre que la méthode de l'équation de sensibilité et nécessite la réalisation d'une seule simulation [6]. Elle a notamment été utilisée par Anderson *et al.* [5] pour déterminer la dépendance d'un écoulement turbulent autour d'une aile d'avion aux paramètres géométriques de l'aile.

Dans la présente étude, la méthode de la différentiation complexe est appliquée à l'étude du développement aérodynamique d'une couche de mélange bidimensionnelle excitée à une seule fréquence pour étudier sa validité. Des études paramétriques sont menées, en effectuant des simulations numériques directes, pour mettre en évidence la dépendance de ce développement à trois paramètres clés de l'écoulement : le rapport de vitesse, le nombre de Reynolds et la fréquence d'excitation. Dans chacun des calculs, la méthode de la différentiation complexe est mise en œuvre pour étudier l'influence des paramètres considérés sur des grandeurs aérodynamiques caractérisant l'écoulement. De cette manière, des comparaisons entre les résultats obtenus avec cette méthode et ceux des études paramétriques pourront être faites et la validité de la méthode pourra être étudiée.

## 2 Méthodes

### 2.1 Simulations numériques directes

Pour les simulations numériques directes, un code de calcul précédemment développé au LMFA [7], qui résout les équations de Navier-Stokes compressibles instationnaires en coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  avec des schémas explicites faiblement dissipatifs et dispersifs, est utilisé. Les dérivées spatiales sont évaluées avec des différences finies centrées sur onze points d'ordre quatre et l'intégration temporelle est effectuée avec un algorithme de Runge-Kutta à six sous-étapes d'ordre deux [8]. À chaque itération,

un filtre centré sur onze points d'ordre six [9] est utilisé pour supprimer les oscillations maille-à-maille sans affecter les nombres d'onde résolus avec précision. Aux frontières du domaine de calcul, des différences finies et des filtres décentrés sont employés [10]. Pour permettre la sortie des ondes acoustiques sans produire des réflexions d'amplitude significative, les conditions aux limites de rayonnement de Tam & Dong [11] sont appliquées aux frontières. Une zone éponge combinant un étirement du maillage, un filtrage Laplacien et un rappel de la densité et de la pression vers leurs valeurs ambiantes est implémentée près de la frontière aval pour dissiper progressivement les fluctuations d'origine aérodynamique.

## 2.2 Méthode de la différentiation complexe

La méthode de la différentiation complexe a été mise en œuvre pour la première fois par Lyness & Moler [12] afin d'évaluer des dérivées de fonctions analytiques. Elle a ensuite été utilisée par Vatsa [13], Anderson [5] et Lu & Sagaut [6] sur des écoulements compressibles. Dans la présente étude, cette méthode est employée pour calculer les dérivées de grandeurs aérodynamiques par rapport à un paramètre donné, comme par exemple le nombre de Reynolds.

Pour expliquer la méthode de la différentiation complexe, on peut commencer par considérer une fonction  $f(x)$  qui attribue des valeurs réelles à tout argument réel  $x$ . La série de Taylor de  $f(x)$  quand  $x$  est un nombre complexe égal à  $x_0 + i\varepsilon$ , où  $i$  est l'unité imaginaire et  $\varepsilon$  est un paramètre numérique, s'écrit de la manière suivante

$$f(x_0 + i\varepsilon) = f(x_0) + i\varepsilon \frac{df}{dx}(x_0) - \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d^2f}{dx^2}(x_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (1)$$

Dans l'expression (1), on remarque que la partie réelle de  $f(x_0 + i\varepsilon)$  donne une valeur approchée de la fonction en  $x = x_0$  avec une erreur de l'ordre de  $\varepsilon^2$  et que sa partie imaginaire est liée à la dérivée  $df/dx$  en  $x = x_0$  par

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{\text{Im}[f(x_0 + i\varepsilon)]}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2)$$

Par conséquent, les dérivées des solutions de l'écoulement par rapport à un paramètre peuvent être obtenues en réalisant une seule simulation dans laquelle une petite partie imaginaire est introduite au paramètre considéré.

En pratique, la méthode de la différentiation complexe est implémentée en traitant l'ensemble des variables du code de calcul comme des nombres complexes avec une partie imaginaire nulle au début des simulations et en introduisant une petite partie imaginaire à un paramètre donné [3, 13]. En terme de coût numérique, une simulation avec la méthode de la différentiation complexe requiert donc deux fois plus de mémoire et est environ 2.3 fois plus longue en temps de calcul pour les simulations effectuées dans cette étude.

## 3 Développement aérodynamique d'une couche de mélange

### 3.1 Définition de l'écoulement

Les couches de mélange bidimensionnelles considérées dans cet article sont proches de celles étudiées par Monkewitz & Huerre [14] par des analyses de stabilité linéaire et par Stanley & Sarkar [15] à l'aide de simulations numériques directes. À titre d'illustration, un schéma de ces écoulements est montré sur la figure 1.

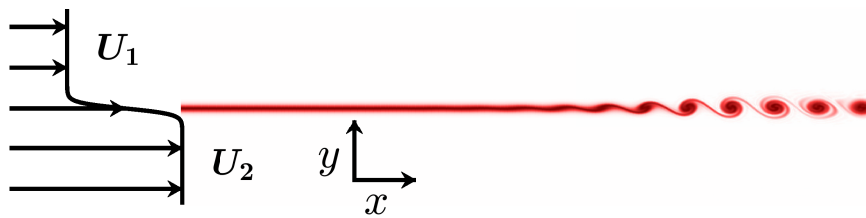


FIGURE 1 – Schéma d'une couche de mélange. Un champ de vorticité est représenté au centre de la zone de cisaillement.

La couche de mélange est centr e en  $y = 0$ . Elle est situ e entre un écoulement rapide de vitesse  $U_2$  et un écoulement lent de vitesse  $U_1$ . La vitesse en entrée est donn e par le profil en tangente hyperbolique

$$u(y) = U_c \left[ 1 + R \tanh \left( \frac{2y}{\delta_\omega} \right) \right], \quad (3)$$

où  $U_c = (U_1 + U_2)/2$  est la vitesse moyenne de l'écoulement,  $R = \Delta U / (2U_c)$  est le rapport de vitesse,  $\Delta U = U_2 - U_1$  est la différence de vitesse et  $\delta_\omega$  est l'épaisseur de vorticité en entrée du domaine de calcul. Les vitesses des écoulements lent et rapide sont li es à la vitesse moyenne et au rapport de vitesse par les relations :  $U_1 = U_c(1 - R)$  et  $U_2 = U_c(1 + R)$ .

Près de la frontière amont du domaine, la couche de mélange est excit e à une fréquence, not e  $f$ , caract ris e par un nombre de Strouhal  $St_\omega = f\delta_\omega / U_c$ , en introduisant des perturbations de nature incompressible au centre de la zone de cisaillement. De cette manière, des ondes d'instabilité [16] se développent à cette fréquence, ce qui conduit à la formation de tourbillons dans l'écoulement, comme on peut l'observer sur la figure 1.

## 3.2 Paramètres numériques

Pour les simulations, un domaine de calcul de dimensions  $L_x = 500\delta_\omega$  et  $L_y = 200\delta_\omega$  est utilisé. Il est discrétisé par un maillage cartésien. En  $x = y = 0$ , les longueurs des mailles dans les directions longitudinale et transverse sont fix es à  $\Delta x_0 = 0.2\delta_\omega$  et  $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$ . Dans la direction transverse, les mailles sont  tir es à partir de  $y = 0$  des deux côtés de la couche de mélange avec un taux de 4% jusqu'à atteindre une longueur de  $\Delta y \approx 4\delta_\omega$  en  $y \pm L_y/2$ . Dans la direction longitudinale, le pas d'espace  $\Delta x$  est constant jusqu'en  $x = x_{ze}$ , où  $x_{ze}$  désigne la position du début de la zone éponge, puis augmente à un taux de 4% jusqu'en  $x = L_x$ . La position  $x_{ze}$  varie de  $80\delta_\omega$  à  $250\delta_\omega$  dans les calculs, pour empêcher la présence d'appariements tourbillonnaires. Dans la zone éponge, un filtre Laplacien est appliqué aux fluctuations de masse volumique, de vitesse et de pression, avec une intensité qui croît linéairement de  $x = x_{ze}$  à  $x = x_{ze} + 50\delta_\omega$  et qui est constante ensuite. Le pas de temps, calculé à partir de la taille minimale des mailles dans la direction transverse, est donné par  $\Delta t = 0.9\Delta y_0 / c_0$ , où  $c_0$  est la vitesse du son dans le milieu ambiant.

## 3.3 Influence du rapport de vitesse

Dans cette partie, l'influence du rapport de vitesse  $R = \Delta U / (2U_c)$  sur le développement aérodynamique des couches de mélange est  tudi e.

### Paramètres des simulations

Cinq simulations ont été réalisées pour des rapports de vitesse égaux à 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 et 0.5, pour une vitesse moyenne de l'écoulement  $U_c = (U_1 + U_2)/2$  fixée à  $0.5c_0$ . L'épaisseur de vorticité en entrée du domaine de calcul est obtenue à partir du nombre de Reynolds  $Re_\omega = \delta_\omega U_0/\nu = 10^4$ , où  $U_0 = 0.1c_0$ . La couche de mélange est excit e à une fréquence proche de celle qui est la plus amplifi e. Cette fréquence, donn e par une analyse de stabilité linéaire men e par Monkewitz & Huerre [14], est caract ris e par un nombre de Strouhal  $St_\omega = f\delta_\omega/U_c$  égal à 0.132.

### Méthode de la différentiation complexe

Pour étudier l'influence du rapport de vitesse sur des grandeurs aérodynamiques avec la méthode de la différentiation complexe, une petite perturbation imaginaire, not e  $i\varepsilon$ , est introduite dans l'expression (3) du profil de vitesse en entrée de la manière suivante

$$u(y) = U_c \left[ 1 + R(1 + i\varepsilon) \tanh \left( \frac{2y}{\delta_\omega} \right) \right], \quad (4)$$

où  $\varepsilon = 10^{-5}$ . De cette façon, une valeur approchée de la d riv e d'une grandeur  $\mathcal{J}$  vis-à-vis du rapport de vitesse peut être obtenue à partir de la partie de imaginaire de  $\mathcal{J}$  par

$$\frac{d\mathcal{J}}{dR} \simeq \frac{\text{Im}[\mathcal{J}]}{\varepsilon R}. \quad (5)$$

### Champs de vorticité

Afin d'illustrer l'influence du rapport de vitesse sur le développement aérodynamique des couches de mélange, des champs de vorticité sont représentés sur la figure 2. Dans tous les cas, des tourbillons sont observés. Ils sont organisés au sein d'all es tourbillonnaires dans lesquelles ils sont espacés régulièrement dans la direction de l'écoulement, en accord avec l'étude expérimentale effectu e par Ho & Huang [17] et les simulations numériques directes de Stanley & Sarkar [15]. Cette organisation spatiale est due à l'amplification et à la saturation des perturbations harmoniques introduites par l'excitation, qui conduit à la formation de tourbillons à la fréquence d'excitation [16]. Les tourbillons apparaissent plus en amont quand le rapport de vitesse augmente, conformément à des résultats de la littérature [14, 18] montrant une augmentation du taux d'amplification des ondes d'instabilité [16] avec le rapport de vitesse. Par exemple, les enroulements tourbillonnaires ont lieu aux alentours de  $x = 200\delta_\omega$  pour  $R = 0.1$ , de  $x = 80\delta_\omega$  pour  $R = 0.3$  et de  $x = 60\delta_\omega$  pour  $R = 0.5$ .

### Champs moyens de vitesse transverse

La capacité de la méthode de la différentiation complexe à mettre en évidence les effets du rapport de vitesse sur des grandeurs aérodynamiques est maintenant  tudi e. Pour cela, les champs moyens de vitesse transverse et leurs dérivées vis-à-vis du rapport de vitesse, obtenues avec cette méthode dans chacune des simulations, sont repr sent es sur la figure 3. Pour tous les cas, les vitesses moyennes sont positives dans la région de l'écoulement rapide ( $y < 0$ ) et négatives dans la région de l'écoulement lent ( $y > 0$ ) autour des enroulements tourbillonnaires, mettant en évidence un entraînement [19] de l'air environnement vers le centre des couches de mélange quand les tourbillons apparaissent. En valeur

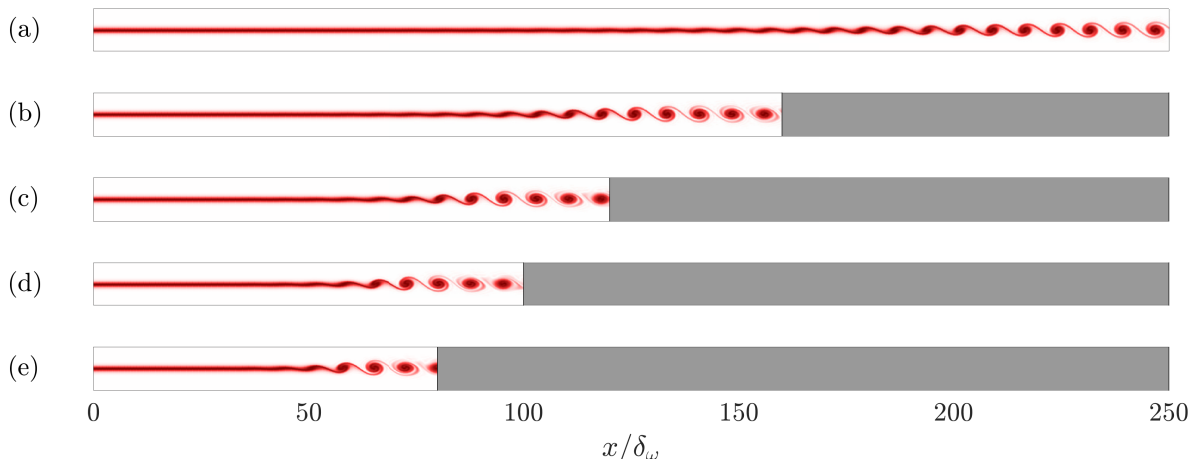


FIGURE 2 – Représentations de la norme de la vorticité pour (a)  $R = 0.1$ , (b)  $R = 0.2$ , (c)  $R = 0.3$ , (d)  $R = 0.4$  et (e)  $R = 0.5$ . L'échelle de couleur varie entre 0 et  $\Delta U/\delta_\omega$  du blanc au rouge. Les zones éponges sont grisées.

absolue, les vitesses moyennes augmentent avec le rapport de vitesse, montrant que cet entraînement est plus fort quand la différence de vitesse entre les deux écoulements croît.

Les champs des dérivées permettent de localiser les zones influencées par une petite modification de la valeur du rapport de vitesse. Près des enroulements, les dérivées sont positives dans la région de l'écoulement rapide et négative dans la région de l'écoulement lent, puis après les enroulements, elles changent de signe et sont négatives pour  $y < 0$  et positives pour  $y > 0$ . Ce résultat suggère que les tourbillons apparaissent plus en amont quand le rapport de vitesse augmente, en accord avec les champs de vorticité de la figure 2. Il montre aussi que l'entraînement de l'air environnant par les enroulements est plus fort lorsque le rapport de vitesse croît.

### Intensité des fluctuations de vitesse transverse et taux d'amplification des ondes d'instabilité

Pour étudier quantitativement les effets du rapport de vitesse sur le développement aérodynamique des couches de mélange, les variations axiales des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse, calculées au centre de la zone de cisaillement et notées  $v'_{\text{RMS}}$ , sont tracées sur la figure 4(a) en utilisant une échelle logarithmique. Dans tous les cas, ces valeurs croissent d'abord fortement, puis plus faiblement et décroissent finalement. La position où elles sont maximales décroît avec le rapport de vitesse, mettant en évidence que les ondes d'instabilité saturent plus en amont quand le rapport de vitesse augmente. Les courbes obtenues sur la figure 4(a) suivent des droites entre  $x = 20\delta_\omega$  et  $x = 50\delta_\omega$ , montrant que l'amplitude des fluctuations de vitesse transverse croît exponentiellement dans cette région compte tenu de l'échelle logarithmique utilisée pour la représentation.

Cette augmentation exponentielle est caractérisée par un taux d'amplification, noté  $-k_i$ , correspondant au taux d'amplification des ondes d'instabilité [16]. Dans chacune des simulations, ce taux et sa dérivée sont évalués avec une méthode des moindres carrés, entre  $x = 20\delta_\omega$  et la position où les valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse valent le tiers de leurs valeurs maximales. Les taux d'amplification, ainsi obtenus par cette méthode, sont représentés en fonction du rapport de vitesse sur la figure 4(b). Ils augmentent avec le rapport de vitesse de manière quasi-linéaire, conformément aux analyses de stabilité linéaire menées par Monkewitz & Huerre [14].

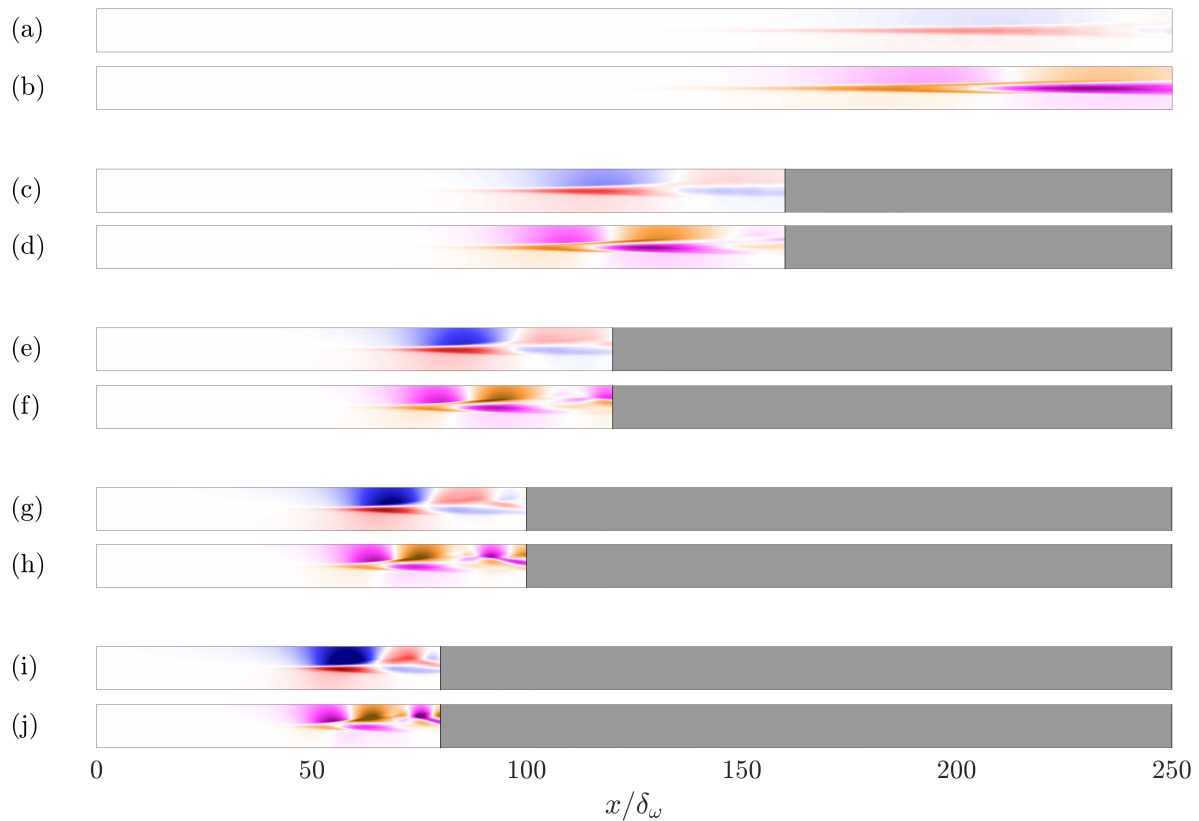


FIGURE 3 – Représentations (a,c,e,g,i) des champs moyens de vitesse transverse et (b,d,f,h,j) de leurs dérivées vis-à-vis du rapport de vitesse pour (a,b)  $R = 0.1$ , (c,d)  $R = 0.2$ , (e,f)  $R = 0.3$ , (g,h)  $R = 0.4$  et (i,j)  $R = 0.5$ . Les échelles de couleur varient entre  $\pm 10^{-2} \Delta U$  du bleu au rouge pour les champs moyens et entre  $\pm 2 \times 10^{-1} \Delta U$  du fuchsia au jaune pour leurs dérivées. Les zones éponges sont grisées.

Les dérivées des taux d'amplification, calculées avec la méthode de la différentiation complexe, sont aussi représentées sur la figure 4(b). Elles permettent d'estimer les variations des taux d'amplifications autour de chacune des valeurs du rapport de vitesse considérées. Elles sont positives pour tous les cas et sont en bon accord avec l'évolution du taux d'amplification avec le rapport de vitesse, mettant en évidence la validité de la méthode de la différentiation complexe.

### 3.4 Influence du nombre de Reynolds

L'influence des effets visqueux sur le développement aérodynamique des couches de mélange est à présent étudiée.

#### Paramètres des simulations

Des simulations visqueuses et non-visqueuses pour des nombres de Reynolds  $Re_\omega = \delta_\omega \Delta U / \nu$  égaux à 300, 600, 1200, 2400, 4800 et  $\infty$  ont été réalisées. Le rapport de vitesse  $R = \Delta U / (2U_c)$  et la vitesse moyenne de l'écoulement  $U_c = (U_1 + U_2)/2$  valent respectivement 0.5 et  $0.5c_0$ . L'épaisseur de vorticité en entrée du domaine de calcul est obtenue à partir du nombre de Reynolds dans chacune des simulations. Comme dans l'étude de l'influence des effets du rapport de vitesse, les couches de mélange consid r es sont excit es à une seule fréquence, caract ris e par un nombre de Strouhal  $St_\omega = fU_c/\delta_\omega$  égal à 0.132.



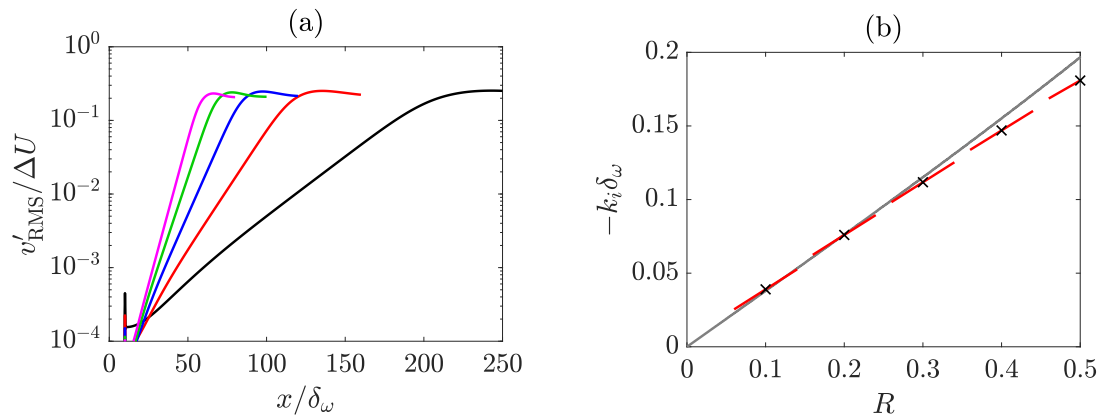


FIGURE 4 – Représentations (a) des variations axiales des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse pour —  $R = 0.1$ , —  $R = 0.2$ , —  $R = 0.3$ , —  $R = 0.4$  et —  $R = 0.5$  et (b) du taux d’amplification normalisé  $-k_i \delta_\omega$  en fonction du rapport de vitesse ; les dérivées calculées avec la méthode de la différentiation complexe sont représentées en rouge ; les résultats de Monkewitz & Huerre [14] obtenus par des analyses de stabilité linéaire sont montrés en gris.

### Méthode de la différentiation complexe

L’influence du nombre de Reynolds sur des grandeurs caractérisant le développement aérodynamique des couches mélange est estimée dans chacun des calculs avec la méthode de la différentiation complexe. Pour cela, une petite perturbation imaginaire, notée  $i\varepsilon$ , est introduite dans la viscosité moléculaire de la manière suivante

$$\nu \rightarrow \nu(1 + i\varepsilon), \quad (6)$$

où  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Une valeur approchée de la dérivée d’une grandeur  $\mathcal{J}$  par rapport au nombre de Reynolds peut alors être calculée à partir de la partie de imaginaire de  $\mathcal{J}$  par

$$\frac{d\mathcal{J}}{dRe_\omega} \simeq -\frac{\text{Im}[\mathcal{J}]}{\varepsilon Re_\omega}. \quad (7)$$

### Champs de vorticité

Des champs de vorticité obtenus pour les six simulations sont représentés sur les figure 5(a-f). Pour  $Re_\omega = 300$  sur la figure 5(a), aucun tourbillon ne se forme et seul un l’élargissement de la zone de cisaillement dans la direction transverse est observé, suggérant que les ondes d’instabilité sont trop amorties par les effets visqueux pour conduire à la formation de structures turbulentes. Pour  $Re_\omega \geq 600$  sur les figures 5(b-f), l’amortissement de ces ondes par la viscosité est plus faible et des tourbillons sont visibles. On remarque que les valeurs de la vorticité diminuent au centre des tourbillons et que les structures turbulentes sont plus épaisses quand le nombre de Reynolds décroît, en bon accord avec l’étude de Zayernouri & Metzger [2] qui présente des résultats similaires obtenus à l’aide de la méthode de l’équation de sensibilité. Les champs de vorticité représentés pour  $Re_\omega = 4800$  sur la figure 5(e) et pour  $Re_\omega = \infty$  sur la figure 5(f) sont très proches, montrant la faible influence des effets visqueux sur le développement aérodynamique pour  $Re_\omega \geq 4800$ . La position des enroulements tourbillonnaires se déplace légèrement vers l’amont quand le nombre de Reynolds augmente. Elle varie peu cependant au delà de  $Re_\omega = 2400$ .

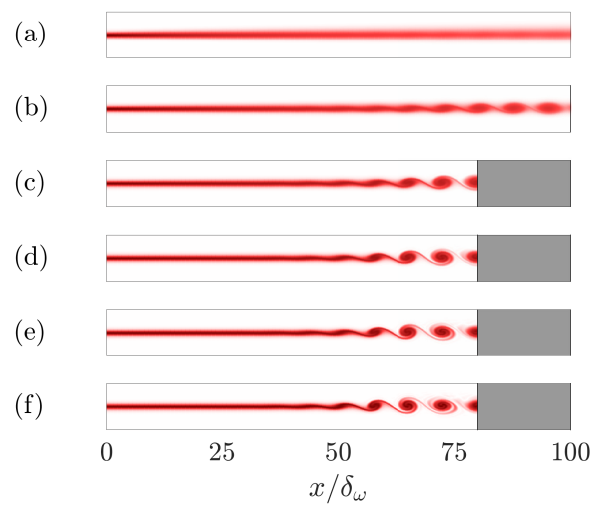


FIGURE 5 – Représentations de la norme de la vorticité pour (a)  $Re_\omega = 300$ , (b)  $Re_\omega = 600$ , (c)  $Re_\omega = 1200$ , (d)  $Re_\omega = 2400$ , (e)  $Re_\omega = 4800$  et (f)  $Re_\omega = \infty$ . L'échelle de couleur varie entre 0 et  $\Delta U/\delta_\omega$  du blanc au rouge. Les zones éponges sont grisées.

### Champs moyens de vitesse transverse

Les champs moyens de vitesse transverse et leurs dérivées par rapport au nombre de Reynolds, obtenues avec la méthode de la différentiation complexe, sont montrés sur les figures 6(a-j). Dans tous les cas, les vitesses moyennes sont négatives pour  $y > 0$  et positives pour  $y < 0$ , avant et autour des enroulements tourbillonnaires. En valeur absolue, leurs valeurs diminuent avec le nombre de Reynolds pour  $x < 50\delta_\omega$ , mettant en évidence que la zone de cisaillement s'épaissit moins quand les effets visqueux sont moins importants. À l'inverse, elles augmentent autour des enroulements tourbillonnaires, ce qui montre que l'entraînement de l'air au cours de l'apparition des structures turbulentes est plus fort quand le nombre de Reynolds croît.

Pour tous les cas sur les figures 6(b,d,f,h,j), les dérivées sont positives dans la région de l'écoulement lent ( $y > 0$ ) et négatives dans la région de l'écoulement rapide ( $y < 0$ ) pour  $x < 40\delta_\omega$ , en accord avec la diminution de l'épaississement de la zone de cisaillement avec le nombre de Reynolds. Près de la frontière amont, elles décroissent en valeur absolue avec le nombre de Reynolds, montrant que la variation des valeurs de vitesse moyenne avec ce nombre est plus faible quand les effets visqueux sont plus importants. Ce résultat est en accord avec les champs moyens de vitesse transverse des figures 6(a,c,e,g,i) dans lesquels on peut observer que les valeurs diminuent fortement entre  $Re_\omega = 300$  et  $Re_\omega = 600$  et plus faiblement entre  $Re_\omega = 2400$  et  $Re_\omega = 4800$ , pour  $x < 40\delta_\omega$ . Pour  $Re_\omega \geq 600$  sur les figures 6(d,f,h,j), les dérivées sont négatives pour  $y > 0$  et positives pour  $y < 0$  autour des enroulements, ce qui suggère qu'une petite augmentation de la valeur du nombre de Reynolds a pour effet de faire croître la quantité de fluide entraînée au cours de l'apparition des structures turbulentes, conformément aux champs moyens de vitesse transverse. Autour des tourbillons les valeurs des dérivées décroissent en valeur absolue quand le nombre de Reynolds augmente, en accord avec la diminution de la dépendance de l'écoulement à la viscosité quand le nombre de Reynolds croît.

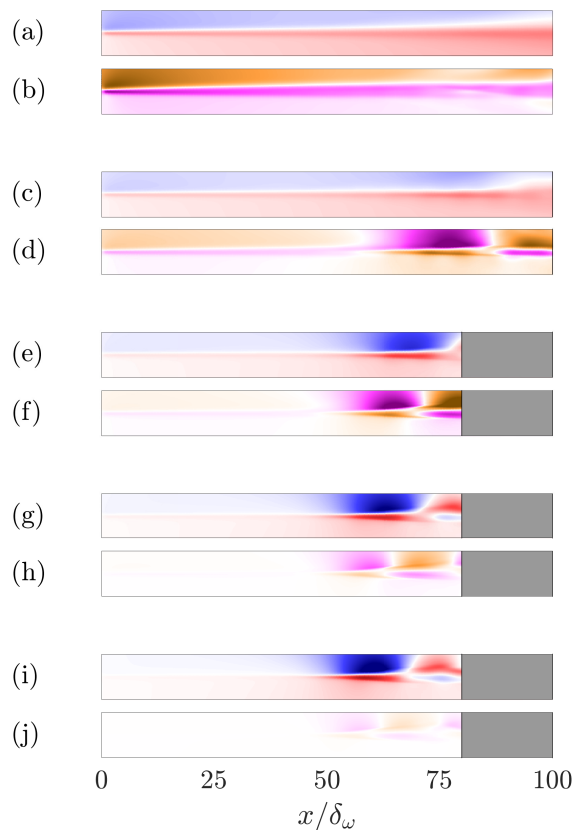


FIGURE 6 – Représentations (a,c,e,g,i) des champs moyens de vitesse transverse et (b,d,f,h,j) de leurs dérivées par rapport au nombre de Reynolds pour (a,b)  $Re_\omega = 300$ , (c,d)  $Re_\omega = 600$ , (e,f)  $Re_\omega = 1200$ , (g,h)  $Re_\omega = 2400$  et (i,j)  $Re_\omega = 4800$ . Les échelles de couleur varient entre  $\pm 10^{-2}\Delta U$  du bleu au rouge pour les champs moyens et entre  $\pm 8 \times 10^{-6}\Delta U$  du fuchsia au jaune pour leurs dérivées. Les zones éponges sont grisées.

### Intensité des fluctuations de vitesse transverse et taux d'amplification des ondes d'instabilité

Les profils axiaux des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse, calculées dans les six simulations en  $y = 0$ , sont tracés en échelle logarithmique sur la figure 7(a). Pour chacun des cas, ces valeurs croissent, puis saturent et diminuent finalement, comme dans l'étude portant sur l'influence du rapport de vitesse. Leur augmentation dans la direction de l'écoulement est plus faible quand le nombre de Reynolds décroît, à cause des effets dissipatifs de la viscosité qui contribuent à diminuer le taux d'amplification des ondes d'instabilité [20]. La position où les valeurs sont maximales est plus en amont quand les effets visqueux sont moins importants. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, les valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse tendent vers celles obtenues avec la simulation non visqueuse, comme attendu.

Les taux d'amplification des ondes d'instabilité et leurs dérivées par rapport au nombre de Reynolds, calculés à partir des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse, sont représentés en fonction du nombre de Reynolds sur la figure 7(b). Les taux d'amplification augmentent fortement avec le nombre de Reynolds pour  $Re_\omega \leq 600$  et de plus en plus faiblement ensuite en se rapprochant de la valeur calculée avec la simulation non visqueuse. Ce résultat est en accord avec l'analyse de stabilité linéaire visqueuse de Ragab & Wu [20] qui prédit une augmentation de ces taux avec le nombre de Reynolds et aussi une diminution de leurs dépendance à la viscosité quand le nombre de Reynolds croît.

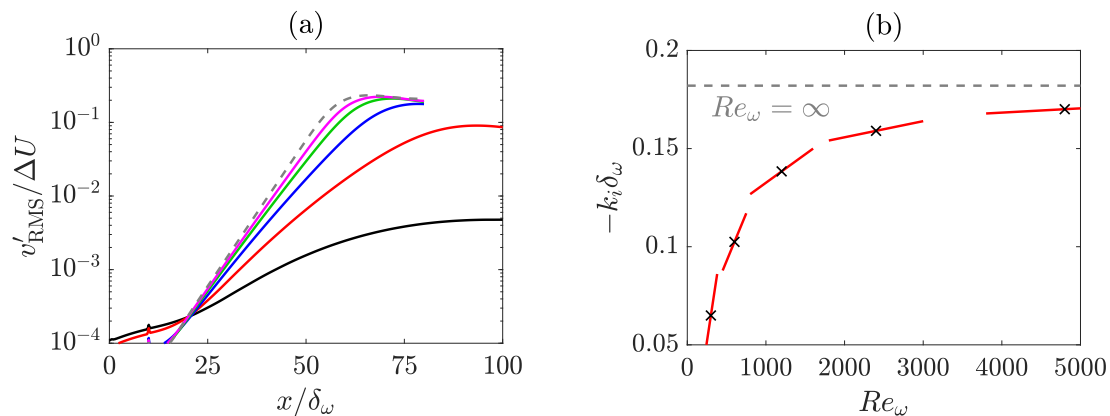


FIGURE 7 – Représentations (a) des variations axiales des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse pour —  $Re_\omega = 300$ , —  $Re_\omega = 600$ , —  $Re_\omega = 1200$ , —  $Re_\omega = 2400$ , —  $Re_\omega = 4800$  et - - -  $Re_\omega = \infty$ . et (b) du taux d’amplification normalisé  $-k_i \delta_\omega$  en fonction du nombre de Reynolds; les dérivées obtenues avec la méthode de la différentiation complexe sont représentées en rouge.

Les dérivées des taux d’amplification sont positives pour tous les cas et décroissent avec le nombre de Reynolds. Elles sont en bon accord avec les valeurs des taux d’amplification, mettant une nouvelle fois en évidence la validité de la méthode de la différentiation complexe.

### 3.5 Influence de la fréquence d’excitation

À présent, les effets de la fréquence d’excitation sur le développement aérodynamique des couches de mélange sont étudiés.

#### Paramètres des simulations

Cinq simulations ont été réalisées pour différentes fréquences d’excitation caractérisées par des nombres de Strouhal  $St_\omega = f \delta_\omega / U_c$  égaux à 0.08, 0.1, 0.12, 0.14 et 0.16. La vitesse moyenne de l’écoulement  $U_c = (U_1 + U_2) / 2$  est fixée à  $0.5c_0$  et le rapport de vitesse  $R = \Delta U / (2U_c)$  vaut 0.5. L’épaisseur de vorticité en entrée du domaine de calcul est obtenue à partir du nombre de Reynolds  $Re_\omega = \delta_\omega \Delta U / \nu = 10^{12}$ . La valeur du nombre de Reynolds consid r e est très  lev e afin de pouvoir comparer les résultats de la présente étude à ceux obtenus par Monkewitz & Huerre [14] à l’aide d’analyses de stabilité linéaire non visqueuses.

#### Méthode de la différentiation complexe

Pour estimer l’influence de la fréquence d’excitation sur les solutions de l’écoulement, une petite perturbation imaginaire, not e  $i\varepsilon$ , est ajout e au nombre de Strouhal par

$$St_\omega \rightarrow St_\omega(1 + i\varepsilon), \quad (8)$$

où  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Une valeur approchée de la d riv e d’une grandeur  $\mathcal{J}$  par rapport au nombre de Strouhal peut alors être  valu e à partir de la partie de imaginaire de  $\mathcal{J}$  de la manière suivante

$$\frac{d\mathcal{J}}{dSt_\omega} = \frac{\text{Im}[\mathcal{J}]}{\varepsilon St_\omega}. \quad (9)$$

### Champs de vorticité

Des champs de vorticité obtenus pour les cinq fréquences d'excitation consid r es sont représentés sur la figure 8. Dans tous les cas, les perturbations introduites par l'excitation s'amplifient dans la direction de l'écoulement, ce qui conduit à la formation de tourbillons dans la zone de cisaillement. La taille de ces tourbillons et la distance qui les sépare diminuent avec la fréquence d'excitation, comme attendu. On peut aussi remarquer que les tourbillons apparaissent plus en amont quand le nombre de Strouhal augmente.

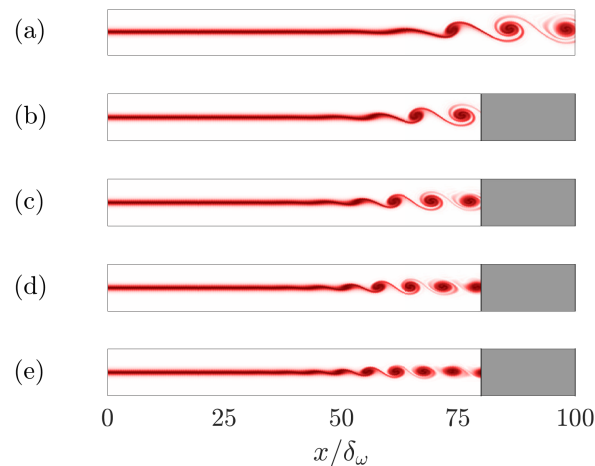


FIGURE 8 – Représentations de la norme de la vorticité pour (a)  $St_\omega = 0.08$ , (b)  $St_\omega = 0.1$ , (c)  $St_\omega = 0.12$ , (d)  $St_\omega = 0.14$  et (e)  $St_\omega = 0.16$ . L'échelle de couleur varie entre 0 et  $\Delta U/\delta_\omega$  du blanc au rouge. Les zones éponges sont grisées.

### Intensité des fluctuations de vitesse transverse et taux d'amplification des ondes d'instabilité

Les profils axiaux des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse, calcul es en  $y = 0$ , sont tracés en échelle logarithmique sur la figure 9(a). Pour toutes les fréquences d'excitation consid r es, ces valeurs augmentent dans la direction de l'écoulement, puis diminuent, montrant l'amplification puis la saturation des ondes d'instabilité excit es. Les courbes obtenues sur la figure 9(a), sont approximativement des droites entre  $x = 30\delta_\omega$  et les positions des enroulements tourbillonnaires, mettant en évidence que l'amplitude des perturbations harmoniques augmente de manière exponentielle dans ces régions. Quand la fréquence d'excitation croît, les valeurs maximales des valeurs quadratiques moyennes diminuent légèrement. De plus, elles se rapprochent de l'entrée de l'écoulement quand le nombre de Strouhal augmente.

Les taux d'amplification des ondes d'instabilité,  valu es à partir des valeurs quadratiques moyennes de vitesse transverse, sont représentés en fonction du nombre de Strouhal sur la figure 9(b). Ils augmentent avec la fréquence d'excitation pour  $St_\omega \leq 0.14$  et diminuent ensuite, conformément aux analyses de stabilité linéaire men es par Monkewitz & Huerre [14]. Les dérivées des taux d'amplification, calcul es avec la méthode de la différentiation complexe, sont également repr sent es sur la figure 9(b). Elles sont positives pour  $St_\omega \leq 0.12$  et négatives pour  $St_\omega \geq 0.14$ . Un bon accord est obtenu entre ces dérivées et les valeurs des taux d'amplification, montrant de nouveau la validité de la méthode de la différentiation complexe.

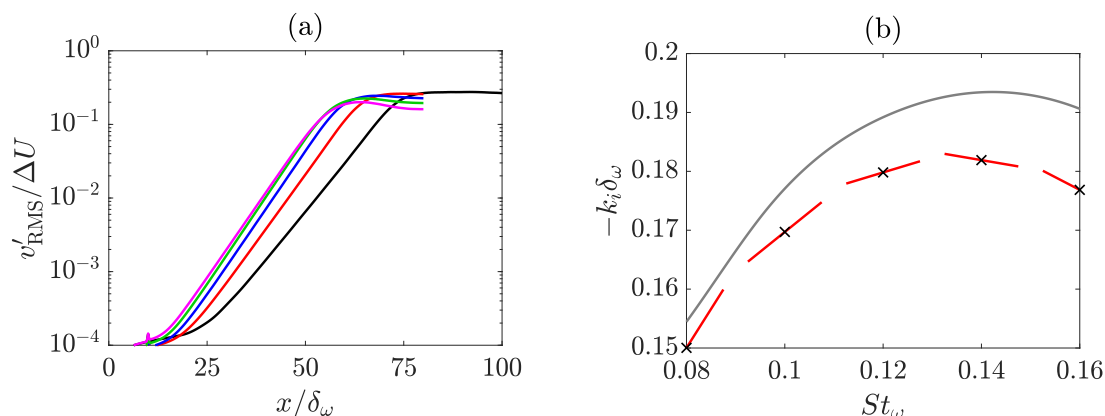


FIGURE 9 – Représentations (a) des variations axiales des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse pour —  $St_\omega = 0.08$ , —  $St_\omega = 0.1$ , —  $St_\omega = 0.12$ , —  $St_\omega = 0.14$  et —  $St_\omega = 0.16$  et (b) du taux d’amplification normalisé  $-k_i \delta_\omega$  en fonction du nombre de Strouhal ; les dérivées calculées avec la méthode de la différentiation complexe sont représentées en rouge ; les résultats des analyses de stabilité linéaire menées par Monkewitz & Huerre [14] sont montrés en gris.

## 4 Conclusion

La méthode de la différentiation complexe a été appliquée à l’étude du développement aérodynamique d’une couche de mélange bidimensionnelle excitée à une seule fréquence. Des comparaisons entre les résultats obtenus avec cette méthode et ceux issus d’études paramétriques, menées en réalisant des simulations pour différentes valeurs du rapport de vitesse, du nombre de Reynolds et de la fréquence d’excitation, ont été faites. Elles mettent en évidence la validité de la méthode de la différentiation complexe et montrent que cette méthode peut être utilisée pour étudier l’influence d’un paramètre physique sur un écoulement. À l’avenir, la méthode de la différentiation complexe pourra être incluse dans une boucle de contrôle pour optimiser, à l’aide de calculs de dérivées, les valeurs d’un paramètre de contrôle considéré afin d’obtenir un effet désiré.

## Remerciements

La présente étude a été réalisée grâce au financement du projet régional FUI25 CALM-AA (CiblAge des sources par voie Logicielle et Méthodes inverses pour l’AéroAcoustique), cofinancé par le fonds européen de développement régional. Les simulations ont été réalisées grâce aux ressources numériques du PMCS2I (Pôle de Modélisation et de Calcul en Sciences de l’Ingénieur de l’Information) de l’École Centrale de Lyon. Ce travail a été réalisé au sein du LABEX CeLyA (ANR-10-LABX-0060) de l’Université de Lyon, dans le cadre du programme « Investissements d’Avenir » (ANR-16-IDEX-0005) de l’Etat Français, géré par l’Agence Nationale de la Recherche (ANR).

## Références

- [1] R. D. Kirkman et M. Metzger, Direct numerical simulation of sensitivity coefficients in low Reynolds number turbulent channel flow, *Journal of Turbulence* **10**, N23 (2009).
- [2] M. Zayernouri et M. Metzger, Coherent features in the sensitivity field of a planar mixing layer, *Physics of Fluids* **2**, 025105 (2011).

- [3] J. R. R. A. Martins et J. T. Hwang, Review and unification of methods for computing derivatives of multidisciplinary computational models, *AIAA Journal* **51**, 2582-2599 (2013).
- [4] H. Hristova, S. Étienne, D. Pelletier et J. Borggaard, A continuous sensitivity equation method for time-dependent incompressible laminar flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **50**, 817-844 (2006).
- [5] W. K. Anderson, J. C. Newman, D. L. Whitefield et E. J. Nielsen, Sensitivity analysis for Navier-Stokes equations on unstructured meshes using complex variables, *AIAA Journal* **39**, 56-63 (2001).
- [6] S. Lu et P. Sagaut, Direct sensitivity analysis for smooth unsteady compressible flows using complex differentiation, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **53**, 1863-1886 (2007).
- [7] C. Bogey, C. Bailly et D. Juvé, Numerical simulation of sound generated by vortex pairing in a mixing layer **38**, *AIAA Journal*, 2210-2218 (2000).
- [8] C. Bogey et C. Bailly, A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations, *Journal of Computational Physics* **194**, 194-214 (2004).
- [9] C. Bogey, N. Cacqueray et C. Bailly, A shock-capturing methodology based on adaptive spatial filtering for high-order non-linear computations, *Journal of Computational Physics* **228**, 1447-1465 (2009).
- [10] J. Berland, C. Bogey, O. Marsden et C. Bailly, High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multiple-scale and boundary problems, *Journal of Computational Physics* **224**, 637-662 (2007).
- [11] C. K. W. Tam et Z. Dong, Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow, *Journal of Computational Acoustics* **4**, 175-201 (1996).
- [12] J. N. Lyness et C. B. Moler, Numerical differentiation of analytic functions, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **4**, 202-210 (1967).
- [13] V. N. Vatsa, Computation of sensitivity derivatives of Navier-Stokes equations using complex variables, *Advances in Engineering Software* **31**, 655-659 (2000).
- [14] P. A. Monkewitz et P. Huerre, Influence of the velocity ratio on the spatial instability of mixing layers, *The Physics of Fluids* **25**, 1137-1143 (1982).
- [15] S. Stanley et S. Sarkar, Simulations of spatially developing two-dimensional shear layers and jets, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* **9**, 121-147 (1997).
- [16] C. M. Ho et P. Huerre, Perturbed free shear layers, *Annual Review of Fluid Mechanics* **16**, 365-422 (1984).
- [17] C. M. Ho et L. S. Huang, Subharmonics and vortex merging in mixing layers, *Journal of Fluid Mechanics* **119**, 443-473 (1982).
- [18] G. L. Brown et A. Roshko, On density effects and large structure in turbulent mixing layers, *Journal of Fluid Mechanics* **64**, 775-816 (1974).
- [19] A. Roshko, Structure of turbulent shear flows: a new look, *AIAA Journal* **14**, 1349-1357 (1976).
- [20] S. A. Ragab et J. L. Wu, Linear instabilities in two-dimensional compressible mixing layers, *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* **1**, 957-966 (1989).