



HAL
open science

Cohomologie cristalline et l'anneau A_{cris}

Olivier Brinon

► **To cite this version:**

| Olivier Brinon. Cohomologie cristalline et l'anneau A_{cris} . Doctorat. France. 2018. hal-03793274

HAL Id: hal-03793274

<https://hal.science/hal-03793274>

Submitted on 30 Sep 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Cohomologie cristalline et l'anneau A_{cris}

Olivier Brinon

RÉSUMÉ. Notes d'exposé pour le groupe de travail organisé à l'IMB au premier semestre 2018. Il s'agit d'un résumé assez fidèle de l'ouvrage [2].

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Calcul différentiel schématique (cf [2, §2] et [5, §16])	1
2.1. Voisinages infinitésimaux	1
2.2. Opérateurs différentiels	2
2.3. Connexions et stratifications (cf [9, §1])	3
2.4. Le site infinitesimal	6
3. Le site cristallin	9
3.1. Puissances divisées	9
3.2. Calcul différentiel sur les schémas à puissances divisées	14
3.3. Site et topos cristallins	17
3.4. Cohomologie cristalline	27
4. L'anneau A_{cris}	32
4.1. La construction générale de Fontaine	32
4.2. Le cas de l'anneau des entiers d'un corps local	35
Références	37

1. INTRODUCTION

On sait que la cohomologie ℓ -adique sur les schémas en caractéristique p n'est pas un bon objet¹ lorsque $\ell = p$. Pire, Serre a démontré qu'il n'existe pas² de bonne théorie cohomologique à coefficients dans \mathbf{Z}_p . Il a été pressenti qu'une bonne théorie cohomologique devrait être de nature différentielle et s'appuyer sur la cohomologie de de Rham. Bien entendu, cette dernière n'est pas exempte de défauts : elle n'est pas à valeurs dans des coefficients de caractéristique 0, et n'est pas de la « bonne » dimension en général (et même pas de type fini en général³). L'idée de base est de considérer la cohomologie de de Rham de certains relèvements en caractéristique 0 (ou plus précisément modulo p^n pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$). Il y a eu plusieurs précurseurs de la théorie cristalline, cf travaux de Dwork, Monsky-Washnitzer. En caractéristique 0, le site cristallin coïncide avec un site plus simple, le site infinitesimal, qui permet de réinterpréter les coefficients de la cohomologie de de Rham. Ce dernier sert de guide spirituel pour définir le site cristallin.

2. CALCUL DIFFÉRENTIEL SCHÉMATIQUE (cf [2, §2] ET [5, §16])

2.1. **Voisinages infinitésimaux.** Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme de schémas. On note $\Delta: X \rightarrow X \times_S X$ l'immersion diagonale.

Version du 9 avril 2018.

1. Par exemple, on a $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}_p) = 0$ si $i > d$ pour tout schéma X propre, lisse et connexe de dimension d sur un corps algébriquement clos de caractéristique p . On montre que $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = 0$ (et plus généralement $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$) pour $i > d$ en considérant la suite exacte d'Artin-Schreier $0 \rightarrow (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_X \rightarrow \mathbf{G}_{a,X} \xrightarrow{t \mapsto t^p} \mathbf{G}_{a,X} \rightarrow 0$ (Witt-Artin-Schreier si $n > 1$) et en utilisant le fait que $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{G}_a) = H_{\text{Zar}}^i(X, \mathcal{O}_X)$, cf [10, III, §3]).

2. Si X est une courbe elliptique supersingulière, son anneau d'endomorphismes engendre une algèbre de quaternions sur \mathbf{Q} qui n'est pas déployée en p et à l'infini. Si X avait un groupe de cohomologie de rang 2 sur \mathbf{Z}_p , cela fournirait une représentation de dimension 2 de l'anneau des endomorphismes, ce qui n'est pas possible.

3. Si k est de caractéristique p et X est une courbe affine sur k , alors $H_{\text{dR}}^0(X/K)$ est de dimension infinie.

Le morphisme $\Delta^{-1}\mathcal{O}_{X \times_S X} \rightarrow \mathcal{O}_X$ est surjectif : soit \mathcal{I} son noyau. Si $n \in \mathbf{N}$, le faisceau des *parties principales d'ordre n* est

$$\mathcal{P}_{X/S}^{(n)} = \Delta^{-1}\mathcal{O}_{X \times_S X} / \mathcal{I}^{n+1}.$$

Le faisceau $\Delta^{-1}\mathcal{O}_{X \times_S X}$ est muni de deux structures de \mathcal{O}_X -module : $d_1: \mathcal{O}_X \rightarrow \Delta^{-1}\mathcal{O}_{X \times_S X}$ (structure à gauche) et $d_2: \mathcal{O}_X \rightarrow \Delta^{-1}\mathcal{O}_{X \times_S X}$ (structure à droite) déduites des morphismes $\text{pr}_1^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{X \times_S X}$ et $\text{pr}_2^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{X \times_S X}$ respectivement : il en est de même des faisceaux $\mathcal{P}_{X/S}^{(n)}$. Pour ces deux structures, la \mathcal{O}_X -algèbre $\mathcal{P}_{X/S}^{(n)}$ est quasi-cohérente. L'espace annelé $P_{X/S}^{(n)} := (X, \mathcal{P}_{X/S}^{(n)})$ est un schéma, et l'augmentation $\mathcal{P}_{X/S}^{(n)} \rightarrow \mathcal{O}_X$ définit une immersion fermée $X \rightarrow P_{X/S}^{(n)}$, appelée le *n -ième voisinage infinitésimal de X* . On a la factorisation

$$\begin{array}{ccc} & \Delta & \\ X & \hookrightarrow & P_{X/S}^{(n)} \longrightarrow X \times_S X \end{array}$$

Le faisceau conormal à Δ est le faisceau des différentielles relatives

$$\Omega_{X/S}^1 = \mathcal{I} / \mathcal{I}^2.$$

C'est un faisceau de \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérent (et même cohérent si Y est noethérien et f de type fini), muni de la dérivation canonique $d = d_2 - d_1: \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X/S}^1$ (c'est un morphisme $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ -linéaire).

Exemple 2.1.1. Si f est lisse et x_1, \dots, x_d sont des coordonnées locales (*i.e.* des sections de \mathcal{O}_X définissant un morphisme étale $X \rightarrow \mathbf{A}_S^d$) et ξ_i l'image de $1 \otimes x_i - x_i \otimes 1$ dans $\mathcal{P}_{X/S}^{(n)}$, alors ce dernier est le \mathcal{O}_X -module libre de base $\{\xi_1^{n_1} \cdots \xi_d^{n_d}\}_{\substack{(n_1, \dots, n_d) \in \mathbf{N}^d \\ n_1 + \dots + n_d \leq n}}$. En effet, l'image de ξ_i dans $\Omega_{X/S}^1$ est dx_i pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ et le \mathcal{O}_X -module $\Omega_{X/S}^1$ est libre de base (dx_1, \dots, dx_d) : on conclut par récurrence sur n grâce à la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_{X/S}^{(n)} \rightarrow \mathcal{P}_{X/S}^{(n-1)} \rightarrow 0$.

2.2. Opérateurs différentiels. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux \mathcal{O}_X -modules.

Définition 2.2.1. Un *opérateur différentiel* de \mathcal{F} dans \mathcal{G} est un morphisme $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ -linéaire $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$.

On a un isomorphisme naturel

$$\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{F} = f^* f_* \mathcal{F} \rightarrow \text{pr}_{1*} \text{pr}_2^* \mathcal{F}$$

(en particulier, on a $\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \text{pr}_{1*} \mathcal{O}_{X \times_S X}$). La linéarisation $\bar{h}: \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de h s'insère donc dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{h} & \mathcal{G} \\ & \searrow d_2 \otimes \mathcal{F} & \nearrow \bar{h} \\ & \text{pr}_{1*} \text{pr}_2^* \mathcal{F} & \end{array}$$

Observons que $\text{pr}_{1*} \text{pr}_2^* \mathcal{F}$ est un $\text{pr}_{1*} \text{pr}_2^* \mathcal{O}_X = \text{pr}_{1*} \mathcal{O}_{X \times_S X}$ -module, donc un $\Delta^{-1}\mathcal{O}_{X \times_S X}$ -module (on a un morphisme $\Delta^{-1}\mathcal{O}_{X \times_S X} \rightarrow \text{pr}_{1*} \mathcal{O}_{X \times_S X}$ par adjonction).

Définition 2.2.2. Soit $n \in \mathbf{N}$. On dit que l'opérateur différentiel $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est d'*ordre $\leq n$* si \bar{h} est nul sur \mathcal{I}^{n+1} , c'est-à-dire si on a une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{h} & \mathcal{G} \\ & \searrow d_{X/S, \mathcal{F}}^{(n)} & \nearrow \bar{h} \\ & \mathcal{P}_{X/S}^{(n)} d_2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} & \end{array}$$

(de sorte que $d_{X/S, \mathcal{F}}^{(n)}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{P}_{X/S}^{(n)} d_2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ est l'opérateur différentiel d'ordre $\leq n$ universel).

Remarque 2.2.3. (1) Un opérateur différentiel est donc d'ordre 0 si et seulement s'il est \mathcal{O}_X -linéaire.

(2) Si $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq n$ et $g: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur différentiel d'ordre $\leq m$, alors le composé $g \circ f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq n + m$, et on a

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G} & \xrightarrow{g} & \mathcal{H} \\ & \searrow & \nearrow \bar{f} & & \nearrow \bar{g} \\ & & \mathcal{P}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} & & \mathcal{P}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \\ & & & & \uparrow \mathcal{P}_{X/S}^{(n)} \otimes \bar{f} \\ \mathcal{P}_{X/S}^{(n+m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} & \xrightarrow{\delta_{n,m} \otimes \mathcal{F}} & \mathcal{P}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} & & \mathcal{P}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \end{array}$$

où l'application $\delta_{m,n}: \mathcal{P}_{X/S}^{(m+n)} \rightarrow \mathcal{P}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(n)}$ est induite par pr_{13} (cf [5, Lemme 16.8.9.1]). Dans le cas affine, elle correspond à l'application $B \otimes_A B \rightarrow B \otimes_A B \otimes_A B$; $a \otimes b \mapsto a \otimes 1 \otimes b$ (cf [2, Corollary 2.4]).

Notation 2.2.4. On note $\mathcal{D}iff_{X/S}^n(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ le faisceau des germes d'opérateurs différentiels d'ordre $\leq n$ de \mathcal{F} dans \mathcal{G} . D'après ce qui précède, on a

$$\mathcal{D}iff_{X/S}^n(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

C'est un \mathcal{O}_X -module (dans le membre de gauche, la multiplication par une section a de \mathcal{O}_X est donnée par la composition à gauche par l'opérateur différentiel de degré 0 correspondant). On pose

$$\mathcal{D}iff_{X/S}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \varinjlim_n \mathcal{D}iff_{X/S}^n(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Exemple 2.2.5. Plaçons-nous sous les hypothèses de l'exemple 2.1.1, dont on conserve les notations. Si $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbf{N}^d$, on pose $|\underline{n}| = n_1 + \dots + n_d$, $\underline{n}! = n_1! \dots n_d!$ et $\xi^{\underline{n}} = \xi_1^{n_1} \dots \xi_d^{n_d}$, de sorte que $(\xi^{\underline{n}})_{|\underline{n}| \leq n}$ est une base de $\mathcal{P}_{X/S}^{(n)}$. Soit $(\overline{D}_{\underline{n}})_{|\underline{n}| \leq n}$ la base duale dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_{X/S}^{(n)}, \mathcal{O}_X)$. On note $D_{\underline{n}}: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ l'opérateur différentiel correspondant. Alors $(D_{\underline{n}})_{|\underline{n}| \leq n}$ est une base du \mathcal{O}_X -module $\mathcal{D}iff_{X/S}^n(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$. La composition est donnée par $D_{\underline{n}} \circ D_{\underline{m}} = \binom{\underline{n}+\underline{m}}{\underline{n}} D_{\underline{n}+\underline{m}}$. Notons que le fait que les $D_{\underline{n}}$ commutent n'implique pas que $\mathcal{D}iff_{X/S}^n(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ soit commutatif : ils ne commutent pas aux opérateurs de degré 0, *i.e.* aux sections de \mathcal{O}_X .

En particulier, si S est un \mathbf{Q} -schéma, on a $D_{\underline{n}} = \frac{1}{\underline{n}!} \prod_{i=1}^d D_i^{n_i}$ où $D_i = D_{e_i}$, de sorte que $\mathcal{D}iff_{X/S}^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ engendre $\mathcal{D}iff_{X/S}^n(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.

2.3. Connexions et stratifications (cf [9, §1]).

Définition 2.3.1. Une *connexion* sur un \mathcal{O}_X -module \mathcal{E} est un morphisme additif

$$\nabla: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1$$

vérifiant la condition de Leibnitz : pour toutes sections a de \mathcal{O}_X et x de \mathcal{E} , on a

$$\nabla(ax) = a\nabla x + x \otimes da$$

Le faisceau $\mathcal{E}^\nabla := \text{Ker}(\nabla)$ s'appelle le *faisceau des germes de sections horizontales* (ou plates).

Exemple 2.3.2. La dérivation canonique $d: \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X/S}^1$ est une connexion (dite *constante*).

Remarque 2.3.3. La différence de deux connexions est \mathcal{O}_X -linéaire, il en résulte que s'il est non vide, l'ensemble des connexions sur \mathcal{E} est un $\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1$ -torseur.

L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/S}^1, \mathcal{O}_X) &\rightarrow \mathcal{D}er_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X) \\ f &\mapsto f \circ d \end{aligned}$$

est un isomorphisme⁴. Si $\nabla: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1$ est une connexion et $D = f \circ d$ une dérivation, on en déduit une application

$$\nabla(D) = (\text{Id} \otimes f) \circ \nabla: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}.$$

La connexion donne donc lieu à une application \mathcal{O}_X -linéaire

$$\nabla: \mathcal{D}er_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{E}nd_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{E}).$$

Observons que lorsque $f: X \rightarrow S$ est lisse, toute application \mathcal{O}_X -linéaire comme ci-dessus provient d'une unique connexion.

Exemple 2.3.4. Reprenons les hypothèses et les notations de l'exemple 2.1.1. Si $i \in \{1, \dots, d\}$, on a $\frac{\partial}{\partial x_i} = (dx_i)^* \circ d$, de sorte que pour toute section x de \mathcal{E} , on a

$$\nabla(x) = \sum_{i=1}^d \nabla\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(x) \otimes dx_i.$$

Proposition 2.3.5. (cf [2, Proposition 2.9]). *La donnée d'une connexion $\nabla: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1$ équivaut à celle d'un isomorphisme*

$$\varepsilon: \mathcal{P}_{X/S}^{(1)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(1)}$$

induisant l'identité modulo l'idéal d'augmentation $\Omega_{X/S}^1 = \text{Ker}(\mathcal{P}_{X/S}^{(1)} \rightarrow \mathcal{O}_X)$.

4. Rappelons qu'une application $D: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ est une application $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ -linéaire et telle que $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ pour toutes sections x et y de \mathcal{O}_X .

Démonstration. Soit $\varepsilon: \mathcal{P}_{X/S}^{(1)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(1)}$ un isomorphisme comme dans l'énoncé. Notons $\theta: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(1)}$ le composé

$$\mathcal{E} \xrightarrow{d_{X/S, \mathcal{E}}^{(1)}} \mathcal{P}_{X/S}^{(1)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(1)}$$

Comme $d_{X/S, \mathcal{E}}^{(1)}$ est \mathcal{O}_X -linéaire pour la structure à droite sur $\mathcal{P}_{X/S}^{(1)}$, il en est de même de θ i.e. $\theta(ax) = (1 \otimes a)\theta(x)$. Posons alors

$$\nabla(x) = \theta(x) - x \otimes 1$$

pour toute section x de \mathcal{E} . Comme ε induit l'identité modulo $\Omega_{X/X}^1$, on obtient en fait une section de $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1$: on a défini un morphisme additif $\nabla: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1$. Vérifions la règle de Leibniz: soient a une section de \mathcal{O}_X et x une section de \mathcal{E} . On a

$$\begin{aligned} \nabla(ax) &= \theta(ax) - ax \otimes 1 = (1 \otimes a)\theta(x) - (a \otimes 1)(x \otimes 1) \\ &= (1 \otimes a)(\nabla(x) + x \otimes 1) - (a \otimes 1)(x \otimes 1) \\ &= (1 \otimes a)\nabla(x) + (1 \otimes a - a \otimes 1)(x \otimes 1) \\ &= a\nabla(x) + x \otimes da \end{aligned}$$

(dans $\Omega_{X/S}^1$, les structures de \mathcal{O}_X -module à gauche et à droite coïncident, de sorte que $(1 \otimes a)\omega = (a \otimes 1)\omega = a\omega$ pour toute section ω de $\Omega_{X/S}^1$). \square

Remarque 2.3.6. La preuve montre que si ∇ est la connexion associée à ε , alors

$$\varepsilon(1 \otimes x) = x \otimes 1 + \nabla(x)$$

pour toute section x de \mathcal{E} .

Soit $\nabla: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1$ une connexion. Si $i \in \mathbf{N}$, on a une application

$$\nabla_i: \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^i \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^{i+1}$$

définie par

$$\nabla_i(x \otimes \omega) = x \otimes d\omega + (-1)^i \omega \wedge \nabla(x)$$

(où $\omega \wedge \nabla(x)$ désigne l'image de $\omega \otimes \nabla(x)$ par l'application canonique $\Omega_{X/S}^i \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1) \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^{i+1}$ qui envoie $\omega \otimes (x \otimes \tau)$ sur $x \otimes (\omega \wedge \tau)$).

Définition 2.3.7. La courbure de la connexion ∇ est l'application

$$K(\nabla) := \nabla_1 \circ \nabla: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^2.$$

On dit que ∇ est *intégrable* si $K(\nabla) = 0$.

Proposition 2.3.8. (1) L'application $K(\nabla)$ est \mathcal{O}_X -linéaire⁵.

(2) Pour tout $i \in \mathbf{N}$, on a $(\nabla_{i+1} \circ \nabla_i)(x \otimes \omega) = \omega \wedge K(\nabla)(x)$ pour toutes sections x et ω de \mathcal{E} et $\Omega_{X/S}^i$ respectivement.

Démonstration. (1) Commençons par observer que si a, x et ω sont des sections de $\mathcal{O}_X, \mathcal{E}$ et $\Omega_{X/S}^1$ respectivement, on a

$$\nabla_1(ax \otimes \omega) = ax \otimes d\omega - \omega \wedge \nabla(ax) = ax \otimes d\omega - \omega \wedge (a\nabla(x) + x \otimes da) = a\nabla_1(x \otimes \omega) - x \otimes (\omega \wedge da)$$

On a donc

$$K(\nabla)(ax) = \nabla_1(a\nabla(x) + x \otimes da) = aK(\nabla)(x) - \nabla(x) \wedge da + x \otimes d^2a - da \wedge \nabla(x)$$

comme $d^2a = 0$ et $da \wedge \nabla(x) = -\nabla(x) \wedge da$, on trouve $K(\nabla)(ax) = aK(\nabla)(x)$, ce qu'on voulait.

(2) Si $\nabla(x) = \sum_{k=1}^r x_k \otimes da_k$, on a $K(\nabla)(x) = -\sum_{k=1}^r da_k \wedge \nabla(x_k)$ et

$$\begin{aligned} \nabla_{i+1}(\omega \wedge \nabla(x)) &= \sum_{k=1}^r \nabla_{i+1}(x_k \otimes \omega \wedge da_k) = \sum_{k=1}^r (x_k \otimes d(\omega \wedge da_k) + (-1)^{i+1} \omega \wedge da_k \wedge \nabla(x_k)) \\ &= \sum_{k=1}^r x_k \otimes d\omega \wedge da_k + (-1)^{i+1} \omega \wedge \sum_{k=1}^r da_k \wedge \nabla(x_k) \\ &= d\omega \wedge \nabla(x) + (-1)^i \omega \wedge K(\nabla)(x) \end{aligned}$$

5. Alors que ni ∇ ni ∇_1 ne le sont.

de sorte que

$$\begin{aligned} (\nabla_{i+1} \circ \nabla_i)(x \otimes \omega) &= \nabla_{i+1}(x \otimes d\omega + (-1)^i \omega \wedge \nabla(x)) \\ &= x \otimes d^2 \omega + (-1)^{i+1} d\omega \wedge \nabla(x) + (-1)^i (d\omega \wedge \nabla(x) + (-1)^i \omega \wedge K(\nabla)(x)) \\ &= \omega \wedge K(\nabla)(x) \end{aligned}$$

parce que $d^2 \omega = 0$. \square

Remarque 2.3.9. (1) En particulier, ∇ est intégrable si et seulement si $\nabla_{i+1} \circ \nabla_i = 0$ pour tout $i \in \mathbf{N}$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^\bullet: \quad 0 \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1 \xrightarrow{\nabla_1} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^2 \xrightarrow{\nabla_2} \dots$$

est un complexe (le *complexe de de Rham à coefficients dans \mathcal{E}*).

(2) La courbure mesure le défaut de commutation de ∇ (vue comme application $\mathcal{D}er_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E})$) aux crochets de Lie. En effet, si D_1 et D_2 sont des sections de $\mathcal{D}er_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X)$, on a

$$[\nabla(D_1), \nabla(D_2)] = \nabla([D_1, D_2]) + (D_1 \wedge D_2)(K(\nabla))$$

où $(D_1 \wedge D_2)(K(\nabla))$ est le composé $\mathcal{E} \xrightarrow{K(\nabla)} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^2 \xrightarrow{D_1 \wedge D_2} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{E}$ (cf [9, 1.0.5]).

Exemple 2.3.10. Plaçons-nous sous les hypothèses de l'exemple 2.1.1. Il existe $\theta_1, \dots, \theta_d \in \mathcal{E}nd_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{E})$ tels que $\nabla(x) = \sum_{k=1}^r \theta_k(x) \otimes dx_k$ pour toute section x de \mathcal{E} (cf exemple 2.3.4). D'après le calcul fait lors de la preuve de la proposition 2.3.8, on a

$$K(\nabla)(x) = - \sum_{i=1}^d dx_i \wedge \nabla(\theta_i(x)) = - \sum_{1 \leq i, j \leq d} dx_i \wedge \theta_j(\theta_i(x)) \otimes dx_j = \sum_{1 \leq i < j \leq d} [\theta_i, \theta_j](x) \otimes dx_i \wedge dx_j$$

ce qui prouve que ∇ est intégrable si et seulement si les endomorphismes $\theta_1, \dots, \theta_d$ commutent deux à deux.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $P_{X/S}^{(n)}(2)$ le n -ième voisinage infinitésimal de la diagonale dans $X \times_S X \times_S X$. Les morphismes de projection

$$X \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{pr}_1} \\ \xleftarrow{\text{pr}_2} \end{array} X \times_S X \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{pr}_{1,2}} \\ \xleftarrow{\text{pr}_{1,3}} \\ \xleftarrow{\text{pr}_{2,3}} \end{array} X \times_S X \times_S X$$

induisent des applications

$$X \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{pr}_1^{(n)}} \\ \xleftarrow{\text{pr}_2^{(n)}} \end{array} P_{X/S}^{(n)} \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{pr}_{1,2}^{(n)}} \\ \xleftarrow{\text{pr}_{1,3}^{(n)}} \\ \xleftarrow{\text{pr}_{2,3}^{(n)}} \end{array} P_{X/S}^{(n)}(2)$$

Définition 2.3.11. Une *stratification* sur \mathcal{E} est une famille d'isomorphismes

$$\varepsilon_n: \mathcal{P}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(n)}$$

(i.e. $\varepsilon_n: \text{pr}_2^{(n)*} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \text{pr}_1^{(n)*} \mathcal{E}$) indexée par $n \in \mathbf{N}$ telle que :

- (1) ε_n est $\mathcal{P}_{X/S}^{(n)}$ -linéaire;
- (2) si $m \leq n$, alors ε_n induit ε_m via la restriction $\mathcal{P}_{X/S}^{(n)} \rightarrow \mathcal{P}_{X/S}^{(m)}$;
- (3) $\varepsilon_0 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$;
- (4) on a la condition de cocycle $\text{pr}_{1,3}^{(n)*}(\varepsilon_n) = \text{pr}_{1,2}^{(n)*}(\varepsilon_n) \circ \text{pr}_{2,3}^{(n)*}(\varepsilon_n)$.

Remarque 2.3.12. (1) Une donnée de descente pour le faisceau \mathcal{E} sur X relativement au morphisme $f: X \rightarrow S$ est un isomorphisme $\varphi: \text{pr}_1^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \text{pr}_2^* \mathcal{E}$ satisfaisant la condition de cocycle $\text{pr}_{3,1}^*(\varphi) = \text{pr}_{3,2}^*(\varphi) \circ \text{pr}_{2,1}^*(\varphi)$. La donnée d'une stratification s'apparente donc à celle d'une donnée de descente infinitésimale.

(2) La condition de cocycle (4) se traduit par le fait que le diagramme suivant commute pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{array}{ccc} & \text{pr}_{1,3}^* \text{pr}_2^* \mathcal{E} \xrightarrow{\text{pr}_{1,3}^*(\varepsilon_n)} \text{pr}_{1,3}^* \text{pr}_1^* \mathcal{E} & \\ & \swarrow \pi_3^* \mathcal{E} \cong \searrow \pi_1^* \mathcal{E} & \\ \text{pr}_{2,3}^* \text{pr}_2^* \mathcal{E} & & \text{pr}_{1,2}^* \text{pr}_1^* \mathcal{E} \\ & \searrow \text{pr}_{2,3}^*(\varepsilon_n) \quad \swarrow \text{pr}_{1,2}^*(\varepsilon_n) & \\ & \text{pr}_{2,3}^* \text{pr}_1^* \mathcal{E} \simeq \pi_2^* \mathcal{E} \simeq \text{pr}_{1,2}^* \text{pr}_2^* \mathcal{E} & \end{array}$$

en posant

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \text{pr}_1 \circ \text{pr}_{1,3} = \text{pr}_1 \circ \text{pr}_{1,2} \\ \pi_2 &= \text{pr}_2 \circ \text{pr}_{1,2} = \text{pr}_1 \circ \text{pr}_{2,3} \\ \pi_3 &= \text{pr}_2 \circ \text{pr}_{2,3} = \text{pr}_2 \circ \text{pr}_{1,3} \end{aligned}$$

(3) Soit $\nabla: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1$ une connexion, et $\varepsilon: \mathcal{P}_{X/S}^{(1)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(1)}$ l'isomorphisme associé (cf proposition 2.3.5). Si x est une section de \mathcal{E} , écrivons $\nabla(x) = \sum_{k=1}^r x_k \otimes da_k$. D'après la remarque 2.3.6, on a $\varepsilon(1 \otimes x) = x \otimes 1 + \nabla(x)$. En voyant $\mathcal{P}_{X/S}^{(1)}$ comme un quotient de $\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{O}_X$, et donc $\mathcal{P}_{X/S}^{(1)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ et $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(1)}$ comme des quotients de $\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{E}$ et de $\mathcal{E} \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{O}_X$ respectivement, cette égalité se réécrit

$$\varepsilon(1 \otimes x) \equiv x \otimes 1 + \sum_{k=1}^r (x_k \otimes a_k - a_k x_k \otimes 1).$$

Il en résulte qu'on a

$$\begin{aligned} p_{1,3}^{(1)*}(\varepsilon)(1 \otimes 1 \otimes x) &\equiv x \otimes 1 \otimes 1 + \sum_{k=1}^r (x_k \otimes 1 \otimes a_k - a_k x_k \otimes 1 \otimes 1) \\ p_{2,3}^{(1)*}(\varepsilon)(1 \otimes 1 \otimes x) &\equiv 1 \otimes x \otimes 1 + \sum_{k=1}^r (1 \otimes x_k \otimes a_k - a_k x_k \otimes 1 \otimes 1) \\ p_{1,2}^{(1)*}(\varepsilon)(1 \otimes x \otimes 1) &\equiv x \otimes 1 \otimes 1 + \sum_{k=1}^r (x_k \otimes a_k \otimes 1 - a_k x_k \otimes 1 \otimes 1) \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} (p_{1,2}^{(1)*}(\varepsilon) \circ p_{2,3}^{(1)*}(\varepsilon))(1 \otimes 1 \otimes x) &\equiv p_{1,2}^{(1)*}(\varepsilon) \left(1 \otimes x \otimes 1 + \sum_{k=1}^r (1 \otimes x_k \otimes a_k - a_k x_k \otimes 1 \otimes 1) \right) \\ &\equiv x \otimes 1 \otimes 1 + \sum_{k=1}^r (x_k \otimes a_k \otimes 1 - a_k x_k \otimes 1 \otimes 1) + \sum_{k=1}^r (x_k \otimes 1 \otimes a_k + \nabla(x_k) \otimes a_k - a_k x_k \otimes 1 \otimes 1 - \nabla(a_k x_k) \otimes 1) \\ &\equiv p_{1,3}^{(1)*}(\varepsilon)(1 \otimes 1 \otimes x) + \sum_{k=1}^r (\nabla(x_k) \otimes a_k - a_k \nabla(x_k) \otimes 1) \end{aligned}$$

(parce que $x_k \otimes a_k \otimes 1 - a_k x_k \otimes 1 \otimes 1 = (x_k \otimes da_k) \otimes 1$ pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$). Si la condition de cocycle

$$\text{pr}_{1,3}^{(1)*}(\varepsilon) = \text{pr}_{1,2}^{(1)*}(\varepsilon) \circ \text{pr}_{2,3}^{(1)*}(\varepsilon)$$

est vérifiée, alors

$$\sum_{k=1}^r (\nabla(x_k) \otimes a_k - a_k \nabla(x_k) \otimes 1) \equiv 0$$

dont l'image dans $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^2$ n'est autre que $K(\nabla)(x)$, et la connexion ∇ est intégrable.

(4) Supposons $f: X \rightarrow S$ lisse. En reprenant les notations de l'exemple 2.3.10, le calcul qui précède montre que⁶

$$\begin{aligned} \text{pr}_{1,2}^{(1)*}(\varepsilon) \circ \text{pr}_{2,3}^{(1)*}(\varepsilon)(x) - \text{pr}_{1,3}^{(1)*}(\varepsilon)(x) &\equiv \sum_{j=1}^d \nabla(\theta_j(x)) \otimes dx_j \\ &\equiv \sum_{1 \leq i, j \leq d} \theta_j(\theta_i(x)) \otimes dx_i \otimes dx_j \\ &\equiv \sum_{1 \leq i < j \leq d} [\theta_i, \theta_j](x) \otimes dx_i \otimes dx_j \end{aligned}$$

de sorte que si la connexion ∇ est intégrable, alors la condition de cocycle est vérifiée : la réciproque de (3) est donc valide lorsque $f: X \rightarrow S$ est lisse. En particulier, la donnée d'une connexion intégrable correspond à celle d'une donnée de descente infinitésimale d'ordre 1, bien sûr plus faible, en général, que celle d'une stratification.

2.4. Le site infinitesimal. Le *site infinitesimal* et ses variantes ont été introduits par Grothendieck pour revisiter la cohomologie de de Rham à la lumière du calcul différentiel schématique tel qu'on l'a sommairement présenté ci-dessus. Par définition, il englobe tous les épaissements infinitésimaux des ouverts d'un schéma : c'est un cadre naturel pour considérer la cohomologie de de Rham de ces derniers « simultanément ». Cela dit,

6. L'image de $dz \otimes dz$ dans $\mathcal{P}_{X/S}^{(2)}$ est nulle : avec $z = x + y$, cela implique que l'image de $dx \otimes dy + dy \otimes dx$ dans $\mathcal{P}_{X/S}^{(2)}$ est nulle.

il ne se comporte bien qu'en ⁷ caractéristique 0 : le site cristallin (et la cohomologie afférente) est un raffinement visant à corriger ses défauts en caractéristique p .

Définition 2.4.1. ([7, §4]). Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme de schémas. Le *site infinitésimal* de X/S est le site $\text{Inf}(X/S)$ dont :

- les objets sont les S -épaississements $(U \hookrightarrow T)$ définis par un faisceau d'idéaux nilpotent ⁸, où $U \subset X$ est un ouvert de Zariski ;
- un morphisme entre deux objets $(U \hookrightarrow T)$ et $(U' \hookrightarrow T')$ est un carré commutatif (dans la catégorie des S -schémas) :

$$\begin{array}{ccc} U \hookrightarrow T & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow u \\ U' \hookrightarrow T' & & \end{array}$$

où $U \subset U'$ est un ouvert de Zariski ;

- une famille $((U_i \hookrightarrow T_i) \rightarrow (U \hookrightarrow T))_{i \in I}$ (donnée par des S -morphisms $u_i: T_i \rightarrow T$) est couvrante si chaque u_i est une immersion ouverte et $T = \bigcup_{i \in I} u_i(T_i)$.

On note $(X/S)_{\text{inf}}$ le topos associé.

Le *site stratifié* est le site dont la catégorie sous-jacente est la sous-catégorie pleine de $\text{Inf}(X/S)$ constituée des immersions $(U \hookrightarrow T)$ admettant localement une rétraction $T \rightarrow X$ (avec la topologie induite). On note $(X/S)_{\text{strat}}$ le topos associé. Lorsque $f: X \rightarrow S$ est lisse on a bien sûr $\text{Inf}(X/S) = \text{Strat}(X/S)$.

2.4.2. *Description des objets de $(X/S)_{\text{cris}}$.* Soit $\mathcal{F} \in (X/S)_{\text{inf}}$. Si $(U \hookrightarrow T) \in \text{Inf}(X/S)$ et $T' \hookrightarrow T$ est une immersion ouverte, $U' = U \cap T' = U \times_T T'$, on dispose du morphisme $(U' \hookrightarrow T') \rightarrow (U \hookrightarrow T)$ dans $\text{Inf}(X/S)$, et de l'application

$$\mathcal{F}(U \hookrightarrow T) \rightarrow \mathcal{F}(U' \hookrightarrow T'),$$

Proposition 2.4.3. (0) $T' \mapsto \mathcal{F}(U' \hookrightarrow T')$ définit un faisceau $\mathcal{F}_T := \mathcal{F}_{(U \hookrightarrow T)}$ sur T_{Zar} ;

- (1) si $u: (U_2 \hookrightarrow T_2) \rightarrow (U_1 \hookrightarrow T_1)$ est un morphisme dans $\text{Inf}(X/S)$, on a un morphisme

$$\rho_u: u^{-1} \mathcal{F}_{T_1} \rightarrow \mathcal{F}_{T_2}$$

qui est un isomorphisme lorsque u est une immersion ouverte ;

- (2) si en outre $v: (U_3 \hookrightarrow T_3) \rightarrow (U_2 \hookrightarrow T_2)$ est un morphisme dans $\text{Inf}(X/S)$, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} v^{-1} u^{-1} \mathcal{F}_{T_1} & \xrightarrow{v^{-1}(\rho_u)} & v^{-1} \mathcal{F}_{T_2} & \xrightarrow{\rho_v} & \mathcal{F}_{T_3} \\ \downarrow & & & \nearrow & \\ (u \circ v)^{-1} \mathcal{F}_{T_1} & & & \xrightarrow{\rho_{u \circ v}} & \end{array}$$

- (3) la donnée de \mathcal{F} équivaut à celle d'une famille de faisceaux de Zariski $\{\mathcal{F}_T\}_{(U \hookrightarrow T) \in \text{Inf}(X/S)}$ satisfaisant les conditions (1) et (2).

Exemple 2.4.4. • Le faisceau structural $\mathcal{O}_{X/S}$ défini par $(\mathcal{O}_{X/S})_T = \mathcal{O}_T$. En particulier, $(X/S)_{\text{inf}}$ est un topos annelé.

- Le faisceau des différentielles $\Omega_{X/S}^1$ défini par $\Omega_{X/S}^1(U \hookrightarrow T) = \Gamma(T, \mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ et ses puissances extérieures.
- Si $\mathcal{G} \in X_{\text{Zar}}$, on dispose de $\underline{\mathcal{G}}$ défini par $\underline{\mathcal{G}}(f: U \hookrightarrow T) = f_* \mathcal{G}$.

Définition 2.4.5. On dit de $\mathcal{F} \in (X/S)_{\text{inf}}$ que c'est un *cristal* si pour tout $u: (U_2 \hookrightarrow T_2) \rightarrow (U_1 \hookrightarrow T_1)$ dans $\text{Inf}(X/S)$, le morphisme

$$\rho_u: u^{-1} \mathcal{F}_{T_1} \rightarrow \mathcal{F}_{T_2}$$

est un isomorphisme.

Exemple 2.4.6. Le faisceau structural $\mathcal{O}_{X/S}$ est un cristal.

Proposition 2.4.7. (cf [2, Proposition 2.11]). Supposons $f: X \rightarrow S$ lisse et soit \mathcal{E} un \mathcal{O}_X -module. Les données suivantes sont équivalentes :

- (1) Une stratification sur \mathcal{E} .

7. La raison en est que, pour prouver l'exactitude du complexe de Rham, il faut une sorte de lemme de Poincaré, dont la preuve requiert l'intégration et donc l'existence de certaines « puissances divisées » (cf paragraphe 3.1), qui existent en caractéristique 0 mais pas toujours en caractéristique p .

8. Cela implique que $U \rightarrow T$ est un homéomorphisme.

(2) Un système compatible d'applications \mathcal{O}_X -linéaires à droite

$$\theta_n: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(n)}$$

tel que $\theta_0 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$ et que pour tout $m, n \in \mathbf{N}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(m+n)} & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \delta_{m,n}} & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(n)} \\ \theta_{m+n} \uparrow & & \uparrow \theta_m \otimes \text{Id}_{\mathcal{P}_{X/S}^{(n)}} \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{\theta_n} & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(n)} \end{array}$$

commute (condition de cocycle).

(3) Un homomorphisme de \mathcal{O}_X -algèbres $\mathcal{D}\text{iff}_{X/S}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{D}\text{iff}_{X/S}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$.

(4) Un cristal $(\mathcal{E}_T)_T \in (X/S)_{\text{inf}}$.

Démonstration. • Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une stratification sur \mathcal{E} . Soit $(U \hookrightarrow T) \in \text{Inf}(X/S)$ un épaissement nilpotent d'ordre $n \in \mathbf{N}$. S'il existe une rétraction $g_1: T \rightarrow X$, posons $\mathcal{E}_T = g_1^* \mathcal{E}$. Si $g_2 \rightarrow T \rightarrow X$ est une autre rétraction, alors le morphisme $g = (g_1, g_2): T \rightarrow X \times_S X$ se factorise *via* le voisinage infinitésimal $P_{X/S}^{(n)}$ (puisque g_1 et g_2 coïncident modulo un idéal dont la puissance n -ième est nulle). L'isomorphisme $\varepsilon: \text{pr}_2^{(n)*} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \text{pr}_1^{(n)*} \mathcal{E}$ tiré par g fournit un isomorphisme

$$g_2^* \mathcal{E} \simeq g^* \text{pr}_2^{(n)*} \mathcal{E} \xrightarrow{g^*(\varepsilon_n)} g^* \text{pr}_1^{(n)*} \mathcal{E} \simeq g_1^* \mathcal{E}$$

De sorte que \mathcal{E}_T est indépendant, à isomorphisme près, du choix de la rétraction. Si $u: (U_2 \hookrightarrow T_2) \rightarrow (U_1 \hookrightarrow T_1)$ appartient à $\text{Inf}(X/S)$ est compatible aux restrictions, on en déduit un isomorphisme

$$\rho_u: u^{-1} \mathcal{E}_{T_1} \rightarrow \mathcal{E}_{T_2}$$

La condition de cocycle (2.3.11 (4)) implique que les diagrammes 2.4.3 (2) commutent, et permet la construction des faisceaux \mathcal{E}_T sans l'hypothèse de l'existence d'une rétraction globalement, mais seulement localement (ce qui est le cas grâce à l'hypothèse de lissité de $f: X \rightarrow S$). On en déduit un cristal $(\mathcal{E}_T)_{U \hookrightarrow T \in \text{Inf}(X/S)}$.

• Réciproquement, soit $(\mathcal{E}_T)_{U \hookrightarrow T \in \text{Inf}(X/S)}$ un cristal. Posons $\mathcal{E} = \mathcal{E}_X$. Si $n \in \mathbf{N}$ et $i \in \{1, 2\}$, on dispose du morphisme $\text{pr}_i: (X \hookrightarrow P_{X/S}^{(n)}) \rightarrow (X = X)$ et donc d'un isomorphisme $\rho_{\text{pr}_i}: \text{pr}_1^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{P_{X/S}^{(n)}}$. On en déduit un isomorphisme

$$\varepsilon_n = \rho_{\text{pr}_1}^{-1} \circ \rho_{\text{pr}_2}: \text{pr}_2^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{P_{X/S}^{(n)}} \leftarrow \text{pr}_1^* \mathcal{E}$$

La famille $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est alors une stratification sur \mathcal{E} .

• Si $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une stratification sur \mathcal{E} , et $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$\theta_n: \varepsilon_n \circ (d_{X/S}^{(n)} \otimes \text{Id}): \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(n)}$$

La condition de cocycle implique la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} & \xrightarrow{\delta_{m,n}^{*(\varepsilon_{m+n})}} & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(n)} \\ \text{Id} \otimes \varepsilon_n \downarrow & \nearrow \varepsilon_m \otimes \text{Id} & \\ \mathcal{P}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(n)} & & \end{array}$$

impliquant les conditions 2.4.7 (2).

• Étant donné un système $(\theta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ comme en (3), et $h: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ un opérateur différentiel d'ordre $\leq n$, de linéarisation $\bar{h}: \mathcal{P}_{X/S}^{(n)} \rightarrow \mathcal{O}_X$, on pose

$$\nabla(h) = (\text{Id} \otimes \bar{h}) \circ \theta_n: \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(n)} \rightarrow \mathcal{E}$$

On en déduit une application additive

$$\mathcal{D}\text{iff}_{X/S}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{D}\text{iff}_{X/S}(\mathcal{E}, \mathcal{E}).$$

La relation de cocycle équivaut au fait que c'est un morphisme d'anneaux. \square

Définition 2.4.8. (Linéarisation des opérateurs différentiels) Soit \mathcal{E} un \mathcal{O}_X -module. On note $\mathbf{L}_{\bullet} \mathcal{E}$ le système projectif $(\mathcal{P}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E})_{n \in \mathbf{N}}$. Il est muni d'une stratification canonique définie de la façon suivante. On part de l'application

$$\begin{aligned} \tau: \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{O}_X \\ a \otimes x &\mapsto x \otimes a. \end{aligned}$$

On dispose de l'identification

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{E} \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{O}_X &\simeq (\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{O}_X) \\ b \otimes x \otimes c &\mapsto b \otimes x \otimes 1 \otimes c = 1 \otimes x \otimes b \otimes c \end{aligned}$$

et donc de l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{E} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{E} \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\text{incl}} & (\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{O}_X) \\ a \otimes x \mapsto & & x \otimes a & \longrightarrow & 1 \otimes x \otimes a = 1 \otimes x \otimes 1 \otimes a \end{array}$$

ce qui fournit des applications $\varepsilon_n: \mathbf{L}_n \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{L}_n \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S}^{(n)}$.

Si $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un opérateur différentiel, on a une application \mathcal{O}_X -linéaire horizontale (*i.e.* compatible aux stratifications)

$$\mathbf{L}_\bullet(h): \mathbf{L}_\bullet \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{L}_\bullet \mathcal{G}$$

Théorème 2.4.9. ([2, Theorem 2.15]). *Si S est un \mathbf{Q} -schéma et $f: X \rightarrow S$ est lisse, une connexion sur \mathcal{E} s'étend en une stratification si et seulement si elle est intégrable.*

Démonstration. Si ∇ s'étend en une stratification, alors on a la relation de cocycle, de sorte que ∇ est intégrable (cf remarque 2.3.12 (3)). Réciproquement, si $K(\nabla) = 0$, on peut étendre $\rho_1: \mathcal{D}iff_{X/S}^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{D}iff_{X/S}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ de façon unique en $\rho: \mathcal{D}iff_{X/S}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{D}iff_{X/S}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$. Cela se voit localement, si x_1, \dots, x_d sont des coordonnées locales, (D_1, \dots, D_d) la base duale de (dx_1, \dots, dx_d) et $\theta_i = \nabla(\frac{\partial}{\partial x_i})$ (cf exemple 2.2.5). Pour tout $\underline{n} \in \mathbf{N}^d$, on a nécessairement $\rho(D_{\underline{n}}) = \frac{1}{n!} \theta_1^{n_1} \circ \dots \circ \theta_d^{n_d}$ ce qui a bien un sens parce que S est un \mathbf{Q} -schéma et $\theta_1, \dots, \theta_d$ commutent deux à deux (car $K(\nabla) = 0$, cf exemple 2.3.10). \square

2.4.10. *Cohomologie infinitésimale.* Le site $\text{Inf}(X/S)$ n'a pas d'objet final en général (on peut toujours épaissir un épaissement nilpotent). Si $\mathcal{F} \in (X/S)_{\text{inf}}$, on a

$$\Gamma(\text{Inf}(X/S), \mathcal{F}) = \left\{ \{s_T \in \mathcal{F}(U \hookrightarrow T)\}_{U \hookrightarrow T \in \text{Inf}(X/S)} \mid (\forall u: (U_2 \hookrightarrow T_2) \rightarrow (U_1 \hookrightarrow T_1)) \rho_u(s_{T_1}) = s_{T_2} \right\}$$

Mentionnons que le site $\text{Inf}(X/S)$ a assez de points (parce que c'est le cas des sites T_{zar}), et que les catégories des faisceaux de groupes abéliens et de $\mathcal{O}_{X/S}$ -modules ont assez d'injectifs. La cohomologie se définit comme d'habitude :

$$\mathbf{H}^i((X/S)_{\text{inf}}, \mathcal{F}) := \mathbf{R}^i \Gamma(\text{Inf}(X/S), \mathcal{F}).$$

Théorème 2.4.11. (1) ([7, Theorem 4.1]). *Si S est de caractéristique 0 et $f: X \rightarrow S$ lisse, on a un isomorphisme canonique*⁹

$$\mathbf{H}^i((X/S)_{\text{inf}}, \mathcal{O}_{X/S}) \simeq \mathbf{H}_{\text{dR}}^i(X/S).$$

(2) ([7, §5.3]). *Si $X \hookrightarrow X'$ est un épaissement nilpotent, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{H}^i((X/S)_{\text{inf}}, \mathcal{O}_{X/S}) \simeq \mathbf{H}^i((X'/S)_{\text{inf}}, \mathcal{O}_{X'/S})$$

3. LE SITE CRISTALLIN

3.1. **Puissances divisées.** Dans tout ce qui suit, « anneau » signifie anneau commutatif et unitaire.

Définition 3.1.1. (cf [2, Définition 3.1]). Soient A un anneau et $I \subset A$ un idéal. Une *structure à puissances divisées* sur I est une famille d'applications

$$\gamma = (\gamma_n: I \rightarrow A)_{n \in \mathbf{N}}$$

telle que pour tout $x, y \in I$ et $n, m \in \mathbf{N}$, on ait :

- (i) $\gamma_0(x) = 1$, $\gamma_1(x) = x$ et $\gamma_n(x) \in I$ pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$;
- (ii) $\gamma_n(x + y) = \sum_{k=0}^n \gamma_k(x) \gamma_{n-k}(y)$;
- (iii) $\gamma_n(ax) = a^n \gamma_n(x)$ pour tout $a \in A$;
- (iv) $\gamma_n(x) \gamma_m(x) = \binom{n+m}{n} \gamma_{n+m}(x)$;
- (v) $\gamma_n(\gamma_m(x)) = \frac{(nm)!}{n!(m!)^n} \gamma_{nm}(x)$.

On dit aussi que (I, γ) est un *idéal à puissances divisées*.

Remarque 3.1.2. (1) Lorsque qu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la structure à puissances divisées, on note souvent $x^{[n]}$ au lieu de $\gamma_n(x)$.

(2) D'après (iii), on a $\gamma_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$.

(3) Une petite récurrence utilisant (iv) implique que $n! \gamma_n(x) = x^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, de sorte que la famille γ_n a formellement les propriétés de $x \mapsto \frac{x^n}{n!}$. En particulier, si A est de caractéristique 0 (resp. une \mathbf{Q} -algèbre), alors tout idéal admet au plus une (resp. une unique) structure à puissances divisées.

(4) Si $N1_A = 0$, on a $x^N = n! \gamma_N(x) = 0$, ce qui implique que I est un nil-idéal. Si en outre I est de type fini, il est donc nilpotent.

9. Permet de calculer la cohomologie de de Rham sans formes différentielles !

- (5) Si $N1_A = 0$ et $(N-1)! \in A^\times$, et si $I \subset A$ est un idéal tel que $I^N = 0$, alors on obtient une structure à puissances divisées sur I en posant $\gamma_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ si $n < N$ et $\gamma_n(x) = 0$ si $n \geq N$.

5/03/2018

Exemple 3.1.3. (1) Si A est un anneau de valuation discrète¹⁰ de caractéristique mixte $(0, p)$ d'indice de ramification absolu e , son idéal maximal a une (unique) structure à puissances divisées si et seulement si $e < p$. En effet, si $\pi \in A$ est une uniformisante, on a $p = u\pi^e$ avec $u \in A^\times$. On a une structure à puissances divisées si et seulement si $n!$ divise π^n et $\frac{\pi^n}{n!} \in \pi A$ i.e. $v_\pi(n!) < n$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$. Comme $v_\pi(n!) = ev_p(n!) = e \frac{n-s(n)}{p-1}$ (où $s(n)$ désigne la somme des chiffres de l'écriture de n en base p), cela équivaut à $e(1 - \frac{s(n)}{n}) < p-1$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$. Comme $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s(n)}{n} = 0$, c'est équivalent à $e \leq p-1$.

(2) Avec les notations qui précèdent, posons $A_k = A/\langle \pi^k \rangle$ pour $k \in \mathbf{N}_{>0}$. Si $e < p$, on peut munir l'idéal πA_k des puissances divisées déduites de l'unique structure de puissances divisées sur πA (on parle alors de la structure à puissances divisées *canonique*). Cela dit, il existe en général d'autres structures de puissances divisées sur πA_k (par exemple la structure mentionnée dans la remarque 3.1.2 (5) lorsque $k \leq p$, et ce sans condition sur e).

(3) Si A est un anneau, Λ un ensemble et $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ des indéterminées, on définit l'*algèbre des polynômes à puissances divisées* $A\langle T_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ comme étant le A -module $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$ où Γ_n est le A -module libre de base

$$\left\{ \prod_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda^{[n_\lambda]} \right\}_{\substack{(n_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \mathbf{N}^{(\Lambda)} \\ \sum_{\lambda \in \Lambda} n_\lambda = n}}$$

et où la structure d'algèbre est donnée par $T_\lambda^{[n]} T_\lambda^{[m]} = \binom{n+m}{n} T_\lambda^{[n+m]}$. L'idéal $I = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ est muni d'une unique

structure à puissances divisées γ telle que $\gamma_n(T_\lambda) = T_\lambda^{[n]}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et $n \in \mathbf{N}$.

(4) Si A est de caractéristique p et $I \subset A$ a une structure de puissances divisées, on a $I^{(p)} = 0$, mais la réciproque est fautive : si k est un anneau de caractéristique p , $A = k[x_1, \dots, x_6]/\langle x_1^p, \dots, x_6^p, x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 \rangle$ et¹¹ $I = \langle x_1, \dots, x_6 \rangle$ (cf [2, Exemple 3.2.4]).

Lemme 3.1.4. (cf [11, Tag 07GS]). Soient p un nombre premier, A une $\mathbf{Z}_{(p)}$ -algèbre et $I \subset A$ un idéal. Deux structures à puissances divisées γ, γ' sur I sont égales si et seulement si $\gamma_p = \gamma'_p$. En outre, si $\delta : I \rightarrow I$ est une application telle que

- (a) $(\forall x \in I) p! \delta(x) = x^p$;
- (b) $(\forall a \in A) (\forall x \in I) \delta(ax) = a^p \delta(x)$;
- (c) $(\forall x, y \in I) \delta(x+y) = \delta(x) + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i!(p-i)!} x^i y^j + \delta(y)$;

alors il existe une unique structure à puissances divisées γ sur I telle que $\gamma_p = \delta$.

Démonstration. Si $p \nmid n$, on a $\gamma_n(x) = \frac{1}{n} x \gamma_{n-1}(x)$, et $\gamma_{pm}(x) \in \frac{m! p!^m}{(pm)!} \gamma_m(\gamma_p(x))$ (on a $\frac{m! p!^m}{(pm)!} \in \mathbf{Z}_{(p)}^\times$), ce qui montre l'unicité. Pour la deuxième assertion, si $n = a_0 + a_1 p + \dots + a_r p^r$ est l'écriture de n en base p , on a nécessairement

$$\gamma_n(x) = c_n x^{a_0} \delta(x)^{a_1} \dots \delta^r(x)^{a_r}$$

avec $c_n = \frac{1}{n!} (p!)^{a_1 + a_2(1+p) + \dots + a_r(1 + \dots + p^{r-1})} \in \mathbf{Z}_{(p)}^\times$ (on vérifie facilement les axiomes de la définition 3.1.1). \square

Définition 3.1.5. (cf [2, Définition 3.1]). Un *morphisme à puissances divisées* entre deux anneaux munis d'idéaux à puissances divisées (A, I, γ) et (B, J, δ) est un morphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ tel que $f(I) \subset J$ et

$$f(\gamma_n(x)) = \delta_n(f(x))$$

pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbf{N}$.

Remarque 3.1.6. (cf [2, Définition 3.4 & Lemme 3.5]). On en déduit les notions de sous-idéal à puissances divisées et structure à puissances divisées quotient. Plus précisément, si A est un anneau, (I, γ) un idéal à puissances divisées et $J \subset A$ un idéal, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes¹² :

- (i) il y a une structure à puissances divisées $\bar{\gamma}$ sur $\bar{I} = I(A/J)$ (nécessairement unique) telle que la surjection canonique $A \rightarrow A/J$ soit un morphisme à puissances divisées ;

10. L'exemple de base est l'anneau des vecteurs de Witt $W(k)$ à coefficients dans un corps k parfait de caractéristique p .

11. Supposons que $\gamma = (\gamma_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une structure de puissances divisées sur I . On a $\gamma_p(x_1 x_2) = x_1^p \gamma_p(x_2) = 0$ et de même $\gamma_p(x_3 x_4) = \gamma_p(x_5 x_6) = 0$, de sorte que $0 = \gamma_p(-x_5 x_6) = \sum_{i=1}^p \gamma_i(x_1 x_2) \gamma_{p-i}(x_3 x_4)$, i.e. $\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{(p-1)! i} \binom{p-1}{i} (x_1 x_2)^i (x_3 x_4)^{p-i} = 0$. Comme $(1-X)^p = 1 - X^p$ donc $(1-X)^{p-1} = 1 + X + X^2 + \dots + X^{p-1}$ dans $\mathbf{F}_p[X]$, on a $\binom{p-1}{i} \equiv (-1)^i \pmod{p \mathbf{Z}}$ pour tout $i \in \{1, \dots, p-1\}$, donc $\sum_{i=1}^{p-1} \frac{(-1)^i}{i} (x_1 x_2)^i (x_3 x_4)^{p-i} = 0$. Comme le morphisme naturel $B := k[x_1, \dots, x_4]/\langle x_1^p, \dots, x_4^p \rangle \rightarrow A$ est injectif, l'égalité qui précède est vraie dans B , ce qui n'est pas vu que B est libre sur k , de base $(x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} x_4^{i_4})_{0 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 < p}$.

12. Si $\bar{\gamma}$ existe et $x \in I$ a pour image \bar{x} dans A/J , on a nécessairement $\bar{\gamma}_n(\bar{x}) = \bar{\gamma}_n(x)$ ce qui montre l'unicité. Si en outre $x \in J$, on a $\bar{x} = 0$, donc $\bar{\gamma}_n(\bar{x}) = \bar{\gamma}_n(x) = 0$ i.e. $\gamma_n(x) \in J$ soit $\gamma_n(x) \in I \cap J$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, ce qui prouve (i) \Rightarrow (ii). Réciproquement, si on (ii) et $x \in J$, il faut montrer que $\bar{\gamma}_n(x)$ ne dépend que de \bar{x} , i.e. que $\gamma_n(x)$ et $\gamma_n(x+y)$ ont même image dans A/J pour tout $y \in J$, ce qui résulte de la condition (ii) de la définition 3.1.1.

(ii) $I \cap J$ est un sous-idéal à puissances divisées de I .

Remarque 3.1.7. Si B est une A -algèbre, (I, γ) un idéal à puissances divisées de B et $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ une famille génératrice de I comme A -module, alors il existe un unique morphisme à puissances divisées $f: A\langle T_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda} \rightarrow B$ tel que $f(T_\lambda) = x_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Lemme 3.1.8. (cf [2, Lemma 3.7]).

- (1) Si (A_k, I_k, γ_k) est un système inductif d'anneaux à puissances divisées, $A = \varinjlim_k A_k$ et $I = \varinjlim_k I_k$, alors il existe une unique structure à puissances divisées sur I telle que $(A_k, I_k, \gamma_k) \rightarrow (A, I, \gamma)$ soit un morphisme à puissances divisées pour tout k .
- (2) Si A est un anneau, B et C deux A -algèbres munies d'idéaux d'augmentation¹³ $I \subset B$ et $J \subset C$ à puissances divisées γ et δ respectivement. Alors l'idéal $K := \text{Ker}(B \otimes_A C \rightarrow (B/I) \otimes_A (C/J))$ est muni d'une unique structure de puissances divisées ε telle que $(B, I, \gamma) \rightarrow (B \otimes_A C, K, \varepsilon)$ et $(C, J, \delta) \rightarrow (B \otimes_A C, K, \varepsilon)$ soient des morphismes à puissances divisées.

Lemme 3.1.9. (cf [2, Theorem 3.9]). Soient A un anneau et M un A -module. Alors il existe une A -algèbre à puissances divisées $(\Gamma_A(M), \Gamma_A^+(M), \gamma)$ et un morphisme A -linéaire $\varphi: M \rightarrow \Gamma_A^+(M)$ ayant la propriété universelle suivante : si (B, J, δ) est une A -algèbre à puissances divisées et $\psi: M \rightarrow J$ une application A -linéaire, alors il existe un unique morphisme à puissances divisées $\tilde{\psi}: \Gamma_A(M) \rightarrow B$ tel que $\psi = \tilde{\psi} \circ \varphi$. En outre :

- (1) $\Gamma_A(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma_A^n(M)$ est une A -algèbre graduée telle que $\Gamma_A^0(M) = A$, $\Gamma_A^1(M) = M$ et $\Gamma_A^+(M) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \Gamma_A^n(M)$;
- (2) $\Gamma_{A'}(A' \otimes_A M) = A' \otimes_A \Gamma_A(M)$ pour toute A -algèbre A' ;
- (3) $\Gamma_A(\varinjlim_k M_k) = \varinjlim_k \Gamma_A(M_k)$;
- (4) $\Gamma_A(M_1 \oplus M_2) = \Gamma_A(M_1) \otimes_A \Gamma_A(M_2)$;
- (5) le A -module $\Gamma_A^n(M)$ est engendré par les éléments de la forme $\prod_{k=1}^r \gamma_{n_k}(\varphi(x_k))$ avec $x_1, \dots, x_r \in M$ et $n_1, \dots, n_r \in \mathbf{N}$ tels que $\sum_{k=1}^r n_k = n$.

Démonstration. Soit $(T_{x,n})_{x \in M, n \in \mathbf{N}}$ des indéterminées et $G = A[T_{x,n}]_{x \in M, n \in \mathbf{N}}$. On note I l'idéal de G engendré par

$$\left\{ T_{x,0} - 1, T_{\lambda x, n} - \lambda^n T_{x, n}, T_{x, n} T_{x, m} - \binom{n+m}{n} T_{x, n+m}, T_{x+y, n} - \sum_{i=0}^n T_{x, i} T_{y, n-i} \right\}$$

alors $\Gamma_A(M) = G/I$, muni de la graduation déduite de celle de G et de $\varphi: M \rightarrow G/I$ défini par $\varphi(x) = T_{x,1} \text{ mod } I$ a la propriété universelle requise (cf [2, Appendix A]). \square

Remarque 3.1.10. Lorsque M est libre de base $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, on a $\Gamma_A(M) \simeq A\langle T_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$.

Définition 3.1.11. (cf [2, Définition 3.24]). Soient A un anneau et (I, γ) un idéal à puissances divisées.

- (1) Si $n \in \mathbf{N}$, on note $I^{[n]}$ l'idéal de A engendré par les éléments de la forme $x_1^{[n_1]} \dots x_r^{[n_r]}$ pour $x_1, \dots, x_r \in I$ et $n_1, \dots, n_r \in \mathbf{N}$ tels que $n_1 + \dots + n_r = n$. Si $n > 0$, alors $I^{[n]}$ est un sous-idéal à puissances divisées de I , qu'on appelle n -ième puissance divisée de I .
- (2) On dit que I est *PD-nilpotent* s'il existe $N \in \mathbf{N}_{>0}$ tel que $I^{[N]} = 0$. Lorsque c'est le cas, on peut définir des isomorphismes de groupes $\exp: I \rightarrow 1 + I$ et $\log: 1 + I \rightarrow I$ inverses l'un de l'autre par $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{[n]}$ et $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! x^{[n]}$.

Remarque 3.1.12. (1) Bien entendu, l'idéal $I^{[n]}$ n'est pas engendré par les éléments de la forme $x_1^{[n_1]} \dots x_r^{[n_r]}$ pour $x_1, \dots, x_r \in I$ et $n_1, \dots, n_r \in \mathbf{N}$ tels que $n_1 + \dots + n_r = n$ en général, et ce même lorsque I est principal.

- (2) On a $I^{[n]} I^{[m]} \subset I^{[n+m]}$ pour tous $n, m \in \mathbf{N}$.

Lemme 3.1.13. ([2, Proposition 3.12]). Soient A un anneau, (I, γ) et (J, δ) deux idéaux à puissances divisées de A tels que γ et δ coïncident sur $I \cap J$. Alors il existe une unique structure à puissances divisées sur $I + J$ pour laquelle I et J sont des sous-idéaux à puissances divisées.

Définition 3.1.14. ([2, §3.14]) Soient $f: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux et (I, γ) un idéal à puissances divisées de A .

- (1) On dit que γ s'étend à B s'il existe une (nécessairement unique) structure à puissances divisées $\bar{\gamma}$ sur IB telle que $f: (A, I, \gamma) \rightarrow (B, IB, \bar{\gamma})$ soit un morphisme à puissances divisées.

13. I.e. tels que les surjections $B \rightarrow B/I$ et $C \rightarrow C/J$ admettent des sections.

- (2) Soit (J, δ) un idéal à puissances divisées de B . On dit que γ et δ sont *compatibles* si γ s'étend à B en $\bar{\gamma}$ et si $\bar{\gamma}$ et δ coïncident sur $IB \cap J$.

Remarque 3.1.15. (cf [2, Proposition 3.15]). Si I est principal, alors γ s'étend à tout B .

Toutes les définitions qui précèdent s'étendent sans difficulté aux schémas : on considère alors des schémas à puissances divisées (S, \mathcal{I}, γ) où S est un schéma, \mathcal{I} un faisceau d'idéaux sur S et γ une structure à puissance divisées.

Théorème 3.1.16. (cf [2, Theorem 3.19]). Soient $f: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux, (I, γ) un idéal à puissances divisées de A et $J \subset B$ un idéal. Le foncteur qui à une A -algèbre C , munie d'un idéal à puissances divisées (K, δ) telle que δ soit compatible à γ , associe $\{g \in \text{Hom}_{A\text{-alg}}(B, C) \mid g(J) \subset K\}$ est représentable par un triplet $(\mathcal{D}_{B, \gamma}(J), \bar{J}, \bar{\gamma})$ appelé l'enveloppe à puissances divisées de J .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & \searrow g & \downarrow \\ C & \xleftarrow{\dots} & \mathcal{D}_{B, \gamma}(J) \end{array}$$

Démonstration. • Cas où $f(I) \subset J$. On dispose de l'anneau à puissances divisées $(\Gamma_B(J), \Gamma_B^+(J), [.])$ et de l'application $\varphi: J \rightarrow \Gamma_B^+(J)$ (cf lemme 3.1.9). Notons \hat{J} l'idéal de $\Gamma_B(J)$ engendré par les éléments de la forme

- (i) $\varphi(x) - x$ pour $x \in J$;
- (ii) $\varphi(f(a))^{[n]} - \varphi(f(\gamma_n(a)))$ pour $a \in I$.

On pose alors

$$\mathcal{D}_{B, \gamma}(J) := \Gamma_B(J) / \hat{J}$$

On peut montrer (c'est un peu technique) que $\hat{J} \cap \Gamma_B^+(J)$ est un sous-idéal à puissances divisées de $\Gamma_B^+(J)$. Cela implique que l'image \bar{J} de $\Gamma_B^+(J)$ dans $\mathcal{D}_{B, \gamma}(J)$ est un idéal muni de puissances divisées $\bar{\gamma}$ (induites par $[.]$). Les relations (i) impliquent que $J\mathcal{D}_{B, \gamma}(J) \subset \bar{J}$ et les relations (ii) impliquent que $\bar{\gamma}$ est compatible à γ .

• Dans le cas général, on pose $J_1 = J + IB$, $\mathcal{D}_{B, \gamma}(J) := \mathcal{D}_{B, \gamma}(J_1)$ et on note $\bar{J} \subset \bar{J}_1$ le sous-idéal à puissances divisées engendré par J . \square

Notation 3.1.17. Dans tout ce qui suit, on écrit $\gamma = 0$ lorsque $I = 0$ est muni de la structure à puissances divisées triviale.

Exemple 3.1.18. (cf [2, Remarks 3.20 (5)]). Si M est un A -module, $B = \text{Sym}_A^\bullet(M)$ et $J = \text{Sym}_A^+(M)$, alors $\mathcal{D}_{B, 0}(J) = \Gamma_A(M)$ (cela résulte de la propriété universelle). En particulier, lorsque $B = A[T_1, \dots, T_d]$ et $J = \langle T_1, \dots, T_d \rangle \subset B$, alors $\mathcal{D}_{B, 0}(J) = A\langle T_1, \dots, T_d \rangle$.

Remarque 3.1.19. (cf [2, Remarks 3.20]).

- (1) On a bien sûr $\mathcal{D}_{B, \gamma}(J) = \mathcal{D}_{B, \gamma}(J + IB)$ (par la propriété universelle¹⁵), mais l'idéal \bar{J} dépend de J .
- (2) La B -algèbre $\mathcal{D}_{B, \gamma}(J)$ est engendrée par $\{x^{[n]}\}_{\substack{x \in J \\ n \in \mathbb{N}}}$, et \bar{J} par J (comme idéal à puissances divisées).
- (3) Le morphisme $B \rightarrow \mathcal{D}_{B, \gamma}(J)$ induit un isomorphisme $B/J \simeq \mathcal{D}_{B, \gamma}(J) / \bar{J}$ si et seulement si γ s'étend à B/J (cela résulte de la propriété universelle). Cette condition est automatiquement remplie lorsque I est principal ou $IB \subset J$.
- (4) Si γ s'étend à B/J et $B \rightarrow B/J$ admet une section, on peut oublier la condition de compatibilité¹⁶ à γ .
- (5) Si $\mathfrak{b} \subset B$ est un idéal tel que $\mathfrak{b}\mathcal{D}_{B, \gamma}(J) = 0$, alors¹⁷ on a $\mathcal{D}_{B, \gamma}(J) \simeq \mathcal{D}_{B/\mathfrak{b}, \gamma}(J/(J \cap \mathfrak{b}))$.

Proposition 3.1.20. (cf [2, Remarks 3.20 (8)]). Soit $(A, I, \gamma) \rightarrow (A', I', \gamma')$ un morphisme à puissances divisées surjectif¹⁸, B une A -algèbre, $J \subset B$ un idéal, $B' = A' \otimes_A B$ et $J' = JB' \subset B'$. Alors le morphisme naturel

$$A' \otimes_A \mathcal{D}_{B, \gamma}(J) \rightarrow \mathcal{D}_{B', \gamma'}(J')$$

est un isomorphisme.

14. On a $x \in B = \Gamma_B^0(J)$ et $\varphi(x) \in \Gamma_B^1(J)$.

15. Ça se voit aussi par la construction.

16. En effet, les puissances divisées sur $\bar{J}_\gamma \subset \mathcal{D}_{B, \gamma}(J)$ sont compatibles aux puissances divisées canoniques sur l'idéal nul dans A : on en déduit un morphisme canonique $\mathcal{D}_{B, 0}(J) \rightarrow \mathcal{D}_{B, \gamma}(J)$ (par la propriété universelle). Ce dernier n'est autre que le morphisme $\Gamma_B(J) / \hat{J}_0 \rightarrow \Gamma_B(J) / \hat{J}_\gamma$ où \hat{J}_0 est l'idéal engendré par $\{\varphi(x) - x\}_{x \in J}$ et \hat{J}_γ est l'idéal engendré par \hat{J}_0 et $\{\varphi(f(a))^{[n]} - \varphi(f(\gamma_n(a)))\}_{\substack{a \in I \\ n \in \mathbb{N}}}$, ce qui implique qu'il est surjectif. Si $\bar{\gamma}$ désigne une extension de γ à B/J , la section $B/J \rightarrow B \rightarrow \mathcal{D}_{B, 0}(J)$ de $\mathcal{D}_{B, 0}(J) / \bar{J}_0 \simeq B/J$ permet d'écrire $\mathcal{D}_{B, 0}(J) = (B/J) \oplus \bar{J}_0$, de sorte que $\bar{\gamma}$ s'étend à $\mathcal{D}_{B, 0}(J)$. Par la propriété universelle, on en déduit un morphisme $\mathcal{D}_{B, \gamma}(J) \rightarrow \mathcal{D}_{B, 0}(J)$ inverse du précédent.

17. En effet, si C est une A -algèbre munie d'un idéal K à puissances divisées δ compatibles à γ , et $g: B \rightarrow C$ un morphisme de A -algèbres tel que $g(J) \subset K$, alors g se factorise de façon unique à travers le morphisme $B \rightarrow \mathcal{D}_{B, \gamma}(J)$. Comme $\mathfrak{b}\mathcal{D}_{B, \gamma}(J) = 0$, le morphisme g se factorise en $\bar{g}: B/\mathfrak{b} \rightarrow C$ et $\bar{g}(J/(J \cap \mathfrak{b})) \subset K$: par la propriété universelle, \bar{g} se factorise à travers un unique morphisme $\mathcal{D}_{B/\mathfrak{b}, \gamma}(J/(J \cap \mathfrak{b})) \rightarrow C$, ce qui montre que $\mathcal{D}_{B/\mathfrak{b}, \gamma}(J/(J \cap \mathfrak{b}))$ a la propriété universelle définissant $\mathcal{D}_{B, \gamma}(J)$.

18. De sorte que $\text{Ker}(A \rightarrow A') \subset I$.

Démonstration. Soit $g' : B' \rightarrow C$ un morphisme de A' -algèbres tel que $g'(J') \subset K$ où $K \subset C$ est un idéal muni de puissances divisées compatibles à γ' , donc à γ . Le morphisme composé $g : B \rightarrow B' \rightarrow C$ envoie J dans K : la propriété universelle fournit un unique morphisme de B -algèbres $\mathcal{D}_{B,\gamma}(J) \rightarrow C$ factorisant g . Comme C est une B' -algèbre, on en déduit un unique morphisme de B' -algèbres $B' \otimes_B \mathcal{D}_{B,\gamma}(J) \rightarrow C$ factorisant g' . Pour voir que $B' \otimes_B \mathcal{D}_{B,\gamma}(J) \simeq A' \otimes_A \mathcal{D}_{B,\gamma}(J)$ a la propriété universelle de $\mathcal{D}_{B',\gamma'}(J')$ (et donc lui est isomorphe comme B' -algèbre à puissances divisées), il reste à voir que l'image de \bar{J} dans $A' \otimes_A \mathcal{D}_{B,\gamma}(J)$ est munie de puissances divisées compatibles à γ' i.e. à γ . Il suffit de montrer que $\bar{J} \cap \text{Ker}(\mathcal{D}_{B,\gamma}(J) \rightarrow A' \otimes_A \mathcal{D}_{B,\gamma}(J))$ est un sous-idéal à puissances divisées de \bar{J} . Mais si $\mathfrak{a} = \text{Ker}(A \rightarrow A')$, on a $\text{Ker}(\mathcal{D}_{B,\gamma}(J) \rightarrow A' \otimes_A \mathcal{D}_{B,\gamma}(J)) = \mathfrak{a}\mathcal{D}_{B,\gamma}(J)$. Comme $\mathfrak{a} \subset I$, cela résulte de la compatibilité des puissances divisées avec γ . \square

Exemple 3.1.21. Si k est un corps parfait de caractéristique p et $n \geq m$ des entiers, on a un morphisme à puissances divisées surjectif $W_n(k) \rightarrow W_m(k)$ (où $\langle p \rangle$ est muni de sa structure à puissances divisées canonique) : on voit dans ce cas que l'enveloppe à puissances divisées est compatible à la réduction modulo p^m .

Proposition 3.1.22. ([2, Proposition 3.21]). *Avec les notation du théorème 3.1.16, si B' est une B -algèbre, on a un morphisme naturel $B' \otimes_B \mathcal{D}_{B,\gamma}(J) \rightarrow \mathcal{D}_{B',\gamma}(JB')$. C'est un isomorphisme lorsque $B \rightarrow B'$ est plat. Cela implique en particulier que la construction de l'enveloppe à puissances divisées se faisceautise.*

Démonstration. On a un homomorphisme naturel de B -algèbres $\mathcal{D}_{B,\gamma}(J) \rightarrow \mathcal{D}_{B',\gamma}(JB')$ (par la propriété universelle, comme dans la preuve précédente). Comme $\mathcal{D}_{B',\gamma}(JB')$ est une B' -algèbre, on en déduit un morphisme de B' -algèbres

$$B' \otimes_B \mathcal{D}_{B,\gamma}(J) \rightarrow \mathcal{D}_{B',\gamma}(JB').$$

Supposons $B \rightarrow B'$ plat : on a $J \otimes_B B' \simeq JB'$, donc $\Gamma_{B'}(JB') \simeq \Gamma_B(J) \otimes_B B'$ (cf lemme 3.1.9 (2)). Avec les notations de la preuve du théorème 3.1.16, on a

$$\hat{J}' = \hat{J}\Gamma_{B'}(JB') \simeq \hat{J}(\Gamma_B(J) \otimes_B B') = \hat{J} \otimes_B B'$$

de sorte que le morphisme naturel

$$\mathcal{D}_{B,\gamma}(J) \otimes_B B' = (\Gamma_B(J)/\hat{J}) \otimes_B B' \rightarrow \Gamma_{B'}(JB')/\hat{J}' \rightarrow \mathcal{D}_{B',\gamma}(JB')$$

est un isomorphisme. \square

Exemple 3.1.23. Si (A, I, γ) est un idéal à puissances divisées, et $S \subset A$ une partie multiplicative, alors la localisation $(S^{-1}A, S^{-1}I)$ est munie canoniquement de puissances divisées (encore notées γ) telles que le morphisme $(A, I, \gamma) \rightarrow (S^{-1}A, S^{-1}I, \gamma)$ soit à puissances divisées. On a bien sûr $\gamma_n(x/s) = \gamma_n(x)/s^n$ pour tous $n \in \mathbf{N}$, $x \in I$ et $s \in S$.

Corollaire 3.1.24. ([2, Corollaries 3.22 & 3.23]) *On conserve les notations du théorème 3.1.16.*

- (1) *Si $f : A \rightarrow B$ est plat, alors γ s'étend à B .*
- (2) *Le morphisme $B \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{D}_{B,\gamma}(J) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ est un isomorphisme¹⁹.*

On fixe désormais un schéma à puissances divisées (S, \mathcal{I}, γ) (par exemple $S = \text{Spec}(W_n(k))$ où k est un corps parfait de caractéristique p avec $\mathcal{I} = \langle p \rangle$ muni de sa structure à puissances divisées canonique).

Proposition 3.1.25. ([2, Proposition 3.30]) *Soient X un S -schéma, \mathcal{B} une \mathcal{O}_X -algèbre quasi-cohérente et $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}$ un idéal quasi-cohérent. Alors $\mathcal{D}_{\mathcal{B},\gamma}(\mathcal{I})$ est quasi-cohérent.*

Définition 3.1.26. (1) Une *immersion à puissances divisées* est une S -immersion fermée $X \hookrightarrow X'$ définie

par un idéal à puissances divisées compatible à γ . On dit aussi que $X \rightarrow X'$ est un *épaississement à puissances divisées*.

(2) Soit $i : X \hookrightarrow Y$ une immersion fermée de S -schémas définie par un faisceau d'idéaux \mathcal{I} . On pose

$$\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y) = \mathcal{D}_{\mathcal{O}_Y,\gamma}(\mathcal{I}) \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_{X,\gamma}(Y) = \mathbf{Spec}_Y(\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)).$$

Si γ s'étend à X (i.e. à \mathcal{O}_X), alors $\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)/\bar{\mathcal{I}} \simeq \mathcal{O}_X$ (cf remarque 3.1.19), de sorte que i se factorise à travers l'immersion fermée $X \hookrightarrow \mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)$, qui est définie par l'idéal à puissances divisées $\bar{\mathcal{I}}$: c'est une immersion à puissances divisées. Cette dernière jouit de la propriété universelle suivante. Pour tout épaississement à puissances divisées $i' : X' \hookrightarrow Y'$ (compatible à γ) s'insérant dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i'} & Y' \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ X & \xrightarrow{i} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

$\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)$

¹⁹. Car $B \rightarrow B \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ est plat.

(dans la catégorie des S -schémas) il existe une unique flèche en pointillés. Si $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$\mathcal{D}_{X,\gamma}^{(n)}(Y) = \mathcal{D}_{X,\gamma}(Y) / \mathcal{I}^{[n+1]}$$

et $D_{X,\gamma}^{(n)}(Y) = \mathbf{Spec}_Y(\mathcal{D}_{X,\gamma}^{(n)}(Y))$. Ce dernier s'appelle le n -ième voisinage à puissances divisées de X dans Y .

(3) Si $N\mathcal{O}_Y = 0$ avec $N \in \mathbf{N}_{>0}$, le point (2) se généralise au cas où X est seulement localement fermé dans Y , en remplaçant Y par un ouvert dans lequel X est fermé. En effet, l'idéal \mathcal{I} est alors un nil-idéal, de sorte que les espaces topologiques sous-jacents à X , $D_{X,\gamma}(Y)$ et $D_{X,\gamma}^{(n)}(Y)$ sont les mêmes.

Exemple 3.1.27. (cf [2, Proposition 3.22]). Supposons que $i: X \hookrightarrow Y$ soit une immersion de S -schémas lisses sur S , et qu'il existe $N \in \mathbf{N}_{>1}$ tel que $N\mathcal{O}_Y = 0$. Alors $\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)$ est localement isomorphe²⁰ à une algèbre de polynômes à puissances divisées sur \mathcal{O}_X .

Proposition 3.1.28. (Lemme de Poincaré à puissances divisées : le cas affine, cf [1, V, Lemme 2.1.2]) Soient A un anneau, $d \in \mathbf{N}$ et $B = A[x_1, \dots, x_d]$. On dispose de la A -algèbre $D = A\langle x_1, \dots, x_d \rangle = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}^d} Ax^{[n]}$ à puissances

divisées pour l'idéal $I = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}^d \setminus \{0\}} Ax^{[n]}$ (cf exemple 3.1.3 (3)). On étend la différentielle canonique $d: B \rightarrow \Omega_{B/A}^1$

en $d: D \rightarrow D \otimes_B \Omega_{B/A}^1$ en posant $d(\gamma_k(x)) = \gamma_{k-1}(x) dx$ pour tout $x \in I$ et $k \in \mathbf{N}_{>0}$. Elle induit un complexe de de Rham à puissances divisées :

$$D \otimes_B \Omega_{B/A}^\bullet: D \xrightarrow{d} D \otimes_B \Omega_{B/A}^1 \xrightarrow{d} D \otimes_B \Omega_{B/A}^2 \rightarrow \dots$$

Ce dernier est une résolution de A , i.e. le complexe $0 \rightarrow A \rightarrow D \otimes_B \Omega_{B/A}^\bullet$ est acyclique.

Démonstration. Lorsque $n = 1$, c'est l'exactitude de la suite

$$0 \rightarrow A \rightarrow \bigoplus_{n=0}^{\infty} Ax^{[n]} \xrightarrow{d} \bigoplus_{n=0}^{\infty} Ax^{[n]} \otimes dx \rightarrow 0$$

où $d\left(\sum_{n=0}^N a_n x^{[n]}\right) = \sum_{m=0}^{N-1} a_{m+1} x^{[m]} \otimes dx$ (qui n'est autre qu'un décalage). On procède alors par récurrence sur d : on écrit le complexe $D \otimes_B \Omega_{B/A}^\bullet$ sous la forme $K^\bullet(\xi_1, \dots, \xi_d)$. Alors $K^\bullet(\xi_1, \dots, \xi_d)$ s'identifie au complexe simple associé au bicomplexe $K^\bullet(\xi_1, \dots, \xi_{d-1}) \otimes_A K^\bullet(x_d)$. Comme $K^\bullet(\xi_1, \dots, \xi_{d-1})$ est à termes plats sur A et $K^\bullet(x_d)$ une résolution de A , il en résulte que $K^\bullet(\xi_1, \dots, \xi_d)$ est une résolution de $K^\bullet(\xi_1, \dots, \xi_{d-1})$, et donc de A par hypothèse de récurrence²¹. \square

3.2. Calcul différentiel sur les schémas à puissances divisées. Comme plus haut, on fixe un schéma à puissances divisées (S, \mathcal{I}, γ) (où \mathcal{I} est un idéal quasi-cohérent), et $f: X \rightarrow S$ un morphisme de schémas. Si $m \in \mathbf{N}$, on note $X_S^{(m)}$ le produit fibré de $m+1$ copies de X au-dessus de S . On dispose de l'immersion diagonale $\Delta: X \rightarrow X_S^{(m)}$ et des $m+1$ projections $\text{pr}_i: X_S^{(m)} \rightarrow X$ pour $i \in \{1, \dots, m+1\}$.

Définition 3.2.1. Supposons que f soit lisse ou qu'il existe $N \in \mathbf{N}_{>1}$ tel que $N\mathcal{O}_X = 0$ (cf remarque 3.1.26 (3)). Soit $n \in \mathbf{N}$. On dispose des faisceaux $\mathcal{D}_{X/S}(m) := \mathcal{D}_{X,\gamma}(X_S^{(m)})$ et $\mathcal{D}_{X/S}^{(n)}(m) := \mathcal{D}_{X,\gamma}^{(n)}(X_S^{(m)})$. On note $D_{X/S}(m)$ (resp. $D_{X/S}^{(n)}(m)$) l'enveloppe à puissances divisées (resp. le n -ième voisinage à puissances divisées) de X dans $X_S^{(m)}$ (cf définition 3.1.26). Pour alléger, on note $\mathcal{D}_{X/S}$, $\mathcal{D}_{X/S}^{(n)}$, $D_{X/S}$ et $D_{X/S}^{(n)}$ lorsque $m = 1$.

Remarque 3.2.2. (1) Si γ s'étend à X , alors $D_{X/S}(m)$ et $D_{X/S}^{(n)}(m)$ ne dépendent²² pas de la structure γ (cf remarque 3.1.19 (4)).

(2) L'application naturelle $\mathcal{D}_{X/S}^{(1)} \rightarrow \mathcal{D}_{X/S}$ est un isomorphisme.

20. En effet, on peut supposer i fermée, de codimension d . L'idéal quasi-cohérent \mathcal{I} définissant i est localement engendré par d sections. Comme $N\mathcal{O}_Y = 0$, on a $\mathcal{I}^m \mathcal{D}_{X,\gamma}(Y) = 0$ avec $m = d(N-1) + 1$, de sorte que $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}^m, \gamma}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^m) = \mathcal{D}_{\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}^m, \gamma}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^m)$ (cf remarque 3.1.19 (5)). Comme $X \rightarrow S$ est lisse, l'application $\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}^m \rightarrow \mathcal{O}_X$ admet localement une section et γ s'étend localement : d'après la remarque 3.1.19 (4), on peut oublier γ (en donc remplacer \mathcal{I} et γ par 0). Si (t_1, \dots, t_d) est une suite régulière de sections engendrant \mathcal{I} , une section de $\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}^m \rightarrow \mathcal{O}_X$ fournit (localement) une application $\mathcal{O}_X[t_1, \dots, t_d] \rightarrow \mathcal{O}_Y$. Si \mathcal{I}_0 désigne l'idéal de $\mathcal{O}_X[t_1, \dots, t_d]$ engendré par $\{t_1, \dots, t_d\}$, elle induit un isomorphisme $\mathcal{O}_X[t_1, \dots, t_d]/\mathcal{I}_0^m \rightarrow \mathcal{O}_Y/\mathcal{I}^m$, de sorte que localement, on a $\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y) = \mathcal{D}_{\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}^m, \gamma}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^m) \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}^m, 0}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^m) \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{O}_X[t_1, \dots, t_d]/\mathcal{I}_0^m, 0}(\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^m) \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{O}_X[t_1, \dots, t_d], 0}(\mathcal{I}_0) \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{O}_X(t_1, \dots, t_d)}$.

21. Explication terre à terre (piquée à Marc-Hubert). L'idée est d'intégrer les formes différentielles en isolant la n -ième variable. Si donc ω est une forme fermée de degré k , on écrit $\omega = \omega_1 \wedge dx_d + \omega_2$ où ω_1 est de degré $k-1$ et ω_2 de degré k mais ne faisant pas intervenir dx_d . Écrivons aussi $d = d' + \frac{\partial}{\partial x_d} \wedge dx_d$. On a alors $0 = d\omega = d'\omega_1 \wedge dx_d + d'\omega_2 + (-1)^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_d} \omega_2 \wedge dx_d$. Cela implique que $d'\omega_2 = 0$ et $d'\omega_1 + (-1)^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_d} \omega_2 = 0$. Par récurrence, on peut écrire $\omega_2 = d'\eta_2$ (avec η_2 de degré $k-1$) et donc $d'(\omega_1 + (-1)^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_d} \eta_2) = 0$, ce qui implique qu'il existe η_1 de degré $k-2$ telle que $\omega_1 + (-1)^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_d} \eta_2 = d\eta_1$, de sorte que $\omega = d(\eta_1 \wedge dx_d + \eta_2)$.

22. Dans ce cas, la notation ne mentionnant pas γ est rigoureuse.

- (3) S'il existe $N \in \mathbf{N}_{>1}$ tel que $N\mathcal{O}_X = 0$, les espaces topologiques sous-jacents à X , $\mathcal{D}_{X/S}(m)$ et $\mathcal{D}_{X/S}^{(n)}(m)$ sont les mêmes.

Exemple 3.2.3. Si $f: X \rightarrow S$ est lisse et $N\mathcal{O}_X = 0$ (avec $N \in \mathbf{N}_{>1}$), et si x_1, \dots, x_d sont des coordonnées locales de X/S , alors $\mathcal{D}_{X/S}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X\langle \xi_1, \dots, \xi_d \rangle$, où $\xi_i = 1 \otimes x_i - x_i \otimes 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ (cf exemple 3.1.27).

On suppose désormais que γ s'étend à X . L'idéal \mathcal{I} de $\mathcal{D}_{X/S}$ est un idéal d'augmentation à puissances divisées. Cela implique que $\mathcal{D}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}$ est une algèbre à puissances divisées (cf lemme 3.1.8 (2)). Le morphisme

$$\begin{aligned} \delta: \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{O}_X &\rightarrow (\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{O}_X) \\ x \otimes y &\mapsto x \otimes 1 \otimes 1 \otimes y \end{aligned}$$

(qui envoie $\xi = 1 \otimes x - x \otimes 1$ sur $\xi \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \xi$ avec $\mathbf{1} = 1 \otimes 1$) induit un morphisme à puissances divisées

$$\delta: \mathcal{D}_{X/S} \rightarrow \mathcal{D}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}$$

Remarque 3.2.4. Si $\xi = 1 \otimes x - x \otimes 1$ et $k \in \mathbf{N}$, on a alors

$$\delta(\xi^{[k]}) = \delta(\xi)^{[k]} = (\xi \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \xi)^{[k]} = \sum_{i=0}^k \xi^{[i]} \otimes \xi^{[k-i]}$$

ce qui montre que δ induit des morphismes

$$\delta_{m,n}: \mathcal{D}_{X/S}^{(m+n)} \rightarrow \mathcal{D}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}^{(n)}$$

pour tout $n, m \in \mathbf{N}$.

L'analogue de la notion de stratification dans ce contexte est le suivant :

Définition 3.2.5. Soit \mathcal{E} un \mathcal{O}_X -module. Une *stratification à puissances divisées* sur \mathcal{E} est une famille d'isomorphismes

$$\varepsilon_n: \mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}^{(n)}$$

indexée par $n \in \mathbf{N}$ telle que :

- (1) ε_n est $\mathcal{D}_{X/S}^{(n)}$ -linéaire;
- (2) si $m \leq n$, alors ε_n induit ε_m via la restriction $\mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \rightarrow \mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$;
- (3) $\varepsilon_0 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$;
- (4) pour tout $m, n \in \mathbf{N}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} & \xrightarrow{\delta_{m,n}^{*(\varepsilon_{m+n})}} & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \\ \text{Id} \otimes \varepsilon_n \searrow & & \nearrow \varepsilon_m \otimes \text{Id} \\ & \mathcal{D}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}^{(n)} & \end{array}$$

est commutatif (condition de cocycle).

Une structure plus forte est la suivante :

Définition 3.2.6. Soit \mathcal{E} un \mathcal{O}_X -module. Une *hyper-stratification à puissances divisées* sur \mathcal{E} est un isomorphisme

$$\varepsilon: \mathcal{D}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}$$

tel que :

- (1) ε est $\mathcal{D}_{X/S}$ -linéaire;
- (2) ε induit $\text{Id}_{\mathcal{E}}$ modulo $\overline{\mathcal{I}}$;
- (3) le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} & \xrightarrow{\delta^*(\varepsilon)} & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S} \\ \text{Id} \otimes \varepsilon \searrow & & \nearrow \varepsilon \otimes \text{Id} \\ & \mathcal{D}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S} & \end{array}$$

est commutatif (condition de cocycle).

On dispose aussi d'un analogue de la notion d'opérateur différentiel :

Définition 3.2.7. Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux \mathcal{O}_X -modules. Un *opérateur différentiel à puissances divisées* d'ordre $\leq n$ de \mathcal{E} dans \mathcal{F} est une application \mathcal{O}_X -linéaire

$$\mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$$

(on dispose aussi de la notion « hyper »).

Remarque 3.2.8. Un opérateur différentiel à puissances divisées $h: \mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ d'ordre $\leq n$ induit un opérateur différentiel²³ $h^b: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ qui s'inscrit dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \\ \uparrow d_{X/S, \mathcal{E}}^{(n)} & & \downarrow h \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{h^b} & \mathcal{F} \end{array}$$

Contrairement au cas des opérateurs différentiels « classiques », l'application h^b ne détermine pas h , parce que \mathcal{E} n'engendre pas $\mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ comme \mathcal{O}_X -module (contrairement à $\mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$).

On peut composer les opérateurs différentiels à puissances divisées (cf [2, Définition 4.4]), notons que $(f \circ g)^b = f^b \circ g^b$. On a un énoncé analogue à la proposition 2.4.7 et au théorème 2.4.9 :

Théorème 3.2.9. (cf [2, Theorem 4.8]). *Supposons $f: X \rightarrow S$ lisse et soit \mathcal{E} un \mathcal{O}_X -module. Les données suivantes sont équivalentes :*

- (1) *une stratification à puissances divisées $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sur \mathcal{E} ;*
- (2) *une famille compatible d'applications \mathcal{O}_X -linéaires*

$$\rho_n: \text{PD}\mathcal{D}\text{iff}_{X/S}^n(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \text{PD}\mathcal{D}\text{iff}_{X/S}^n(\mathcal{E}, \mathcal{E})$$

induisant un homomorphisme d'anneaux²⁴ $\rho: \text{PD}\mathcal{D}\text{iff}_{X/S}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \text{PD}\mathcal{D}\text{iff}_{X/S}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$;

- (3) *une connexion intégrable ∇ sur \mathcal{E} .*

Idee de la preuve. Soient (x_1, \dots, x_d) des coordonnées locales de X/S et $\xi_i = 1 \otimes x_i - x_i \otimes 1$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$. Pour $n \in \mathbf{N}$, le \mathcal{O}_X -module $\mathcal{D}_{X/S}^{(n)}$ est libre de base $(\xi^{[\underline{n}]})_{\substack{\underline{n} \in \mathbf{N}^d \\ |\underline{n}| \leq n}}$ où $\xi^{[\underline{n}]} = \xi_1^{[n_1]} \dots \xi_d^{[n_d]}$ si $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbf{N}^d$ (cf

exemple 3.2.3). Notons $(D_{[\underline{n}]})_{\substack{\underline{n} \in \mathbf{N}^d \\ |\underline{n}| \leq n}}$ la base duale dans $\text{PD}\mathcal{D}\text{iff}_{X/S}^n(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{D}_{X/S}^{(n)}, \mathcal{O}_X)$. Observons

que si $\underline{n}, \underline{m}, \underline{k} \in \mathbf{N}^d$, alors $(D_{[\underline{m}]} \circ D_{[\underline{n}]}) (\xi^{[\underline{k}]})$ est l'image de $\xi^{[\underline{k}]}$ par le composé

$$\mathcal{D}_{X/S}^{(2n)} \xrightarrow{\delta_{n,n}} \mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \xrightarrow{\text{Id} \otimes D_{[\underline{m}]}} \mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \xrightarrow{D_{[\underline{m}]}} \mathcal{O}_X.$$

Comme on a $\delta(\xi^{[\underline{k}]}) = \sum_{\substack{\underline{i} + \underline{j} = \underline{k}}} \xi^{[\underline{i}]} \otimes \xi^{[\underline{j}]}$, on a $(\text{Id} \otimes D_{[\underline{m}]}) (\delta(\xi^{[\underline{k}]})) = \xi^{[\underline{k} - \underline{n}]}$, et donc $(D_{[\underline{m}]} \circ D_{[\underline{n}]}) (\xi^{[\underline{k}]}) = \delta_{\underline{k}, \underline{m} + \underline{n}}$ (sym-

bole de Kronecker), ce qui montre que $D_{[\underline{m}]} \circ D_{[\underline{n}]} = D_{[\underline{m} + \underline{n}]}$. Cela montre que le \mathcal{O}_X -module $\text{PD}\mathcal{D}\text{iff}_{X/S}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ est engendré par les opérateurs différentiels à puissances divisées d'ordre ≤ 1 , i.e. par $(D_i)_{1 \leq i \leq d}$ où $D_i = D_{[(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)]}$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$.

(1) \leftrightarrow (2) Comme dans le cas « classique », si $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une stratification à puissances divisées et $h: \mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \rightarrow \mathcal{O}_X$ un opérateur différentiel à puissances divisées d'ordre $\leq n$, on définit $\rho_n(h)$ comme le composé

$$\mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\varepsilon_n} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \xrightarrow{\text{Id} \otimes h} \mathcal{E}.$$

Le point clé (qui requiert une vérification²⁵) est de montrer que la condition de cocycle équivaut au fait que ρ est $\mathcal{D}_{X/S}$ -linéaire. Réciproquement, si on part des applications $(\rho_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on dispose pour tout $n \in \mathbf{N}$ d'un morphisme $\mathcal{D}_{X/S}^{(n)}$ -linéaire $\rho_n \otimes \text{Id}: \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{D}_{X/S}^{(n)}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}, \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}^{(n)}$, qui s'identifie à un morphisme $\rho_n \otimes \text{Id}: \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{D}_{X/S}^{(n)}) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{D}_{X/S}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}^{(n)})$: on a alors²⁶ $\varepsilon_n = (\rho_n \otimes \text{Id})(\text{Id}_{\mathcal{D}_{X/S}^{(n)}})$.

(2) \leftrightarrow (3) Si $\nabla: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1$ est une connexion, on a $\nabla = \sum_{i=1}^d \theta_i \otimes dx_i$ avec $\theta_i = \nabla(D_i) \in \mathcal{E}nd_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{E})$

pour $i \in \{1, \dots, d\}$. On a nécessairement²⁷ $\rho(D_{[\underline{n}]}) = \theta_1^{n_1} \dots \theta_d^{n_d}$ pour tout $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbf{N}^d$ (ce qui a bien un sens parce que les θ_i commutent deux à deux). Bien entendu, on retrouve ∇ connaissant la famille $(\rho_n)_{n \in \mathbf{N}}$ car $\theta_i = \rho(D_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. \square

Supposons, pour le reste de ce paragraphe, que p nilpotent sur S .

23. I.e. une application $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ -linéaire, cf définition 2.2.1.

24. Où $\text{PD}\mathcal{D}\text{iff}_{X/S}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \varinjlim_n \text{PD}\mathcal{D}\text{iff}_{X/S}^n(\mathcal{E}, \mathcal{E})$.

25. Qui s'appuie sur la formule $zD_{[\underline{n}]} = \sum_{\substack{\underline{i} + \underline{j} = \underline{n}}} \binom{\underline{n}}{\underline{i}} D_{[\underline{i}]}(z) D_{[\underline{j}]}$ qui, par linéarité, se vérifie sur $\xi^{[\underline{n}]}$ avec $z = \xi^{[\underline{m}]}$.

26. Cela résulte de l'égalité $\varepsilon_n = \sum_{\substack{\underline{m} + \underline{l} = \underline{n}}} (\text{Id} \otimes D_{[\underline{m}]}) \circ \varepsilon_n \otimes \xi^{[\underline{l}]}$ qui est évidente vu que les bases $(\xi^{[\underline{n}]})_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d}$ et $(D_{[\underline{n}]})_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d}$ sont duales

l'une de l'autre.

27. Cf. la formule $\rho(D_{[\underline{n}]}) = \frac{1}{\underline{n}!} \theta_1^{n_1} \dots \theta_d^{n_d}$ de la preuve du théorème 2.4.9 : ici les dénominateurs sont contenus dans la base $(\xi^{[\underline{n}]})_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d}$.

Définition 3.2.10. (cf [2, Definition 4.10]). Supposons $f: X \rightarrow S$ lisse et soient (x_1, \dots, x_d) des coordonnées locales de X/S . Une connexion $\nabla: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1$ est dite *quasi-nilpotente* si pour tout ouvert $U \subset X$ et toute section $x \in \Gamma(U, \mathcal{E})$, il existe un recouvrement ouvert $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de U et des entiers $(e_{i,\lambda})_{\substack{1 \leq i \leq d \\ \lambda \in \Lambda}}$ tels que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ et tout $\lambda \in \Lambda$, on ait $\nabla\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{e_{i,\lambda}}(x|_{U_\lambda})\right) = 0$.

Remarque 3.2.11. Si $p\mathcal{O}_S = 0$, on a $\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^p\right)^p \equiv 0 \pmod{p}$, ce qui implique que les opérateurs $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^b$ sont nilpotents.

Théorème 3.2.12. (cf [2, Theorem 4.12]). Supposons $f: X \rightarrow S$ lisse, et soit \mathcal{E} un \mathcal{O}_X -module. La donnée d'une hyperstratification à puissances divisées sur \mathcal{E} équivaut à celle d'une connexion intégrable quasi-nilpotente sur \mathcal{E} .

Démonstration. • Soit $\varepsilon: \mathcal{D}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}$ une hyperstratification à puissances divisées. Notons $\rho: \text{HPD}\mathcal{D}\text{iff}_{X/S}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \text{HPD}\mathcal{D}\text{iff}_{X/S}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ l'application associée, on dispose de $\theta = \varepsilon \circ d_{2,\mathcal{E}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}$ (on a $\theta(x) = \varepsilon(1 \otimes x)$). Reprenons les notations de la « preuve » du théorème 3.2.9. Si x est une section de \mathcal{E} , on peut écrire $\theta(x) = \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} x_{\underline{n}} \otimes \xi^{[\underline{n}]}$ (somme localement finie). Pour tout $\underline{n} \in \mathbf{N}^d$, on a $x_{\underline{n}} = (\text{Id} \otimes D_{[\underline{n}]})\theta(x) = \rho(D_{[\underline{n}]})^b(x)$, ce qui montre que $\theta(x) = \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} \rho(D_{[\underline{n}]})^b(x) \otimes \xi^{[\underline{n}]}$. Comme la somme est localement finie, presque

tous les $\rho(D_{[\underline{n}]})^b(x)$ sont nuls, ce qui signifie que la connexion associée est quasi-nilpotente.

• Réciproquement, soit $\nabla: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1$ une connexion intégrable et quasi-nilpotente pour un choix de coordonnées locales (x_1, \dots, x_d) . Pour $i \in \{1, \dots, d\}$, on dispose de $\theta_i = \nabla(D_i)^b$. L'intégrabilité implique que les θ_i commutent deux à deux : on peut poser $\rho(D_{[\underline{n}]})^b = \theta_1^{n_1} \dots \theta_d^{n_d}$ pour tout $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbf{N}^d$. La quasi-nilpotence signifie que pour toute section x de \mathcal{E} , on a $\rho(D_{[\underline{n}]})^b(x) = 0$ pour presque tout $\underline{n} \in \mathbf{N}^d$. On peut donc poser $\theta(x) = \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} \rho(D_{[\underline{n}]})^b(x) \otimes \xi^{[\underline{n}]}$, ce qui définit une application \mathcal{O}_X -linéaire $\theta: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}$ qu'on étend par $\mathcal{D}_{X/S}$ -linéarité en $\varepsilon: \mathcal{D}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}$. La condition de cocycle provient de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S} \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \otimes \text{Id} \\ \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S} & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \delta} & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S} \end{array}$$

qui résulte des égalités

$$\begin{aligned} (\theta \otimes \text{Id})(\theta(x)) &= (\theta \otimes \text{Id})\left(\sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} \rho(D_{[\underline{n}]})^b(x) \otimes \xi^{[\underline{n}]}\right) = \sum_{\underline{m}, \underline{n} \in \mathbf{N}^d} \rho(D_{[\underline{m}]}^b(x)) \rho(D_{[\underline{n}]}^b(x) \otimes \xi^{[\underline{m}]} \otimes \xi^{[\underline{n}]}) \\ &= \sum_{\underline{m}, \underline{n} \in \mathbf{N}^d} \rho(D_{[\underline{m}+\underline{n}]}^b(x) \otimes \xi^{[\underline{m}]} \otimes \xi^{[\underline{n}]} = \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} \rho(D_{[\underline{n}]}^b(x) \otimes \left(\sum_{\underline{i}+\underline{j}=\underline{n}} \xi^{[\underline{i}]} \otimes \xi^{[\underline{j}]}\right) \\ &= \sum_{\underline{n} \in \mathbf{N}^d} \rho(D_{[\underline{n}]}^b(x) \otimes \delta(\xi)^{[\underline{n}]} = (\text{Id} \otimes \delta)(\theta(x)) \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.2.13. La condition de quasi-nilpotence ne dépend pas du choix des coordonnées locales.

3.3. Site et topos cristallins. Dans tout ce qui suit, on suppose p nilpotent sur S , et on fixe un S -schéma X sur lequel γ s'étend.

Définition 3.3.1. Le (petit) *site cristallin* $\text{Cris}(X/S)$ est le site dont :

- les objets sont les S -épaississements à puissances divisées $(U \hookrightarrow T, \delta)$ où $U \subset X$ est un ouvert de Zariski²⁸ ;
- un morphisme entre deux objets $(U \hookrightarrow T, \delta)$ et $(U' \hookrightarrow T', \delta')$ est un carré commutatif (dans la catégorie des S -schémas) :

$$\begin{array}{ccc} U \hookrightarrow T & & \\ \downarrow \delta & \searrow & \downarrow u \\ U' \hookrightarrow T' & & \end{array}$$

où $U \subset U'$ est un ouvert de Zariski et u un morphisme à puissances divisées ;

- une famille $((U_i \hookrightarrow T_i, \delta) \rightarrow (U \hookrightarrow T, \delta))_{i \in I}$ (donnée par des S -morphisms à puissances divisées $u_i: T_i \rightarrow T$) est couvrante si chaque u_i est une immersion ouverte et $T = \bigcup_{i \in I} u_i(T_i)$.

On note $(X/S)_{\text{cris}}$ le topos associé.

²⁸ Comme p est nilpotent, l'idéal de l'immersion $U \hookrightarrow T$ est un nil-idéal, ce qui implique que $U \rightarrow T$ est un homéomorphisme. Rappelons en outre (cf définition 3.1.26 (1)) que cela implique que les puissances divisées sur l'idéal définissant l'immersion fermée $U \hookrightarrow T$ sont compatibles à γ .

Remarque 3.3.2. (1) Grâce à l'hypothèse que γ s'étend à X , on a $(U = U, 0) \in \text{Cris}(X/S)$ pour tout ouvert $U \subset X$ (parce que γ est compatible à la structure à puissances divisées 0 sur l'idéal nul de \mathcal{O}_U).

(2) Le site $(X/S)_{\text{cris}}$ n'a pas d'objet final en général. Soient $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et k un corps parfait de caractéristique p . Posons $S = \text{Spec}(W/p^n W)$ (où $W = W(k)$ est l'anneau des vecteurs de Witt muni de sa structure à puissances divisées canonique). Supposons en outre $X = \text{Spec}(A)$ affine. Si $(U_0 \hookrightarrow T_0)$ est un objet final, il existe un unique morphisme $(X = X) \rightarrow (U_0 \hookrightarrow T_0)$, ce qui implique que $U_0 = X$. Comme $X \rightarrow T_0$ est entier, le schéma T_0 est affine (cf [11, Tag 05YU]) : écrivons $T_0 = \text{Spec}(B_0)$. On a un morphisme de W -algèbres $B_0 \rightarrow A$ surjectif, dont le noyau est muni de puissances divisées compatibles avec celles sur $W/p^n W$, et initial pour cette propriété. On verra plus tard (cf 4.1) que si $p \cdot 1_A = 0$ et A est semi-parfait²⁹, alors un tel B_0 existe. Par exemple, si $A = k$, alors $B_0 = W/p^n W$. *A contrario*, un tel B_0 n'existe pas lorsque $A = k[x]$: montrons-le par l'absurde. Comme $(W/p^n W)[x] \rightarrow A$ a un noyau muni de puissances divisées, il existe un unique morphisme à puissances divisées $f: B_0 \rightarrow (W/p^n W)[x]$ de W -algèbres relevant Id_A . Soit $\beta_0 \in B_0$ relevant $x \in A$: on a $f(\beta_0) \equiv x \pmod{(pW/p^n W)[x]}$ donc $f(\beta_0)$ engendre la W -algèbre $(W/p^n W)[x]$. Il en résulte que l'application f est surjective. Quitte à modifier β_0 , on peut supposer que $f(\beta_0) = x$. Si $g: (W/p^n W)[x] \rightarrow B_0$ désigne l'unique morphisme de W -algèbres tel que $g(x) = \beta_0$, alors g est un morphisme à puissances divisées, relève Id_A et $g \circ f: B_0 \rightarrow B_0$ est un morphisme à puissances divisées relevant Id_A : on a $g \circ f = \text{Id}_{B_0}$, ce qui montre que f est un isomorphisme *i.e.* $B_0 = (W/p^n W)[x]$. Mais si $n > 1$ et $\beta \in B_0 = (W/p^n W)[x]$ vérifie $\beta \equiv x \pmod{(pW/p^n W)[x]}$, l'unique morphisme de W -algèbres $B_0 \rightarrow B_0$ envoyant x sur β est aussi un morphisme à puissances divisées relevant Id_A : il n'y a pas unicité d'un tel morphisme et $B_0 \rightarrow A$ n'est pas initial.

3.3.3. *Description des objets de $(X/S)_{\text{cris}}$.* Soit $\mathcal{F} \in (X/S)_{\text{cris}}$. Si $(U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(X/S)$ et $T' \hookrightarrow T$ une immersion ouverte, $U' = U \cap T'$ et $\delta' = \delta|_{T'}$, on dispose du morphisme $(U' \hookrightarrow T', \delta') \rightarrow (U \hookrightarrow T, \delta)$ dans $\text{Cris}(X/S)$, et de l'application

$$\mathcal{F}(U \hookrightarrow T, \delta) \rightarrow \mathcal{F}(U' \hookrightarrow T', \delta')$$

Proposition 3.3.4. (0) $T' \mapsto \mathcal{F}(U' \hookrightarrow T', \delta')$ définit un faisceau $\mathcal{F}_T := \mathcal{F}_{(U \hookrightarrow T, \delta)}$ sur T_{Zar} ;

(1) si $u: (U_2 \hookrightarrow T_2, \delta_2) \rightarrow (U_1 \hookrightarrow T_1, \delta_1)$ est un morphisme dans $\text{Cris}(X/S)$, on a un morphisme

$$\rho_u: u^{-1} \mathcal{F}_{T_1} \rightarrow \mathcal{F}_{T_2}$$

qui est un isomorphisme lorsque u est une immersion ouverte ;

(2) si en outre $v: (U_3 \hookrightarrow T_3, \delta_3) \rightarrow (U_2 \hookrightarrow T_2, \delta_2)$ est un morphisme dans $\text{Cris}(X/S)$, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} v^{-1}u^{-1} \mathcal{F}_{T_1} & \xrightarrow{v^{-1}(\rho_u)} & v^{-1} \mathcal{F}_{T_2} & \xrightarrow{\rho_v} & \mathcal{F}_{T_3} \\ \wr & & & & \\ (u \circ v)^{-1} \mathcal{F}_{T_1} & \xrightarrow{\rho_{u \circ v}} & & & \end{array}$$

(3) la donnée de \mathcal{F} équivaut à celle d'une famille de faisceaux de Zariski $\{\mathcal{F}_T\}_{(U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(X/S)}$ satisfaisant les conditions (1) et (2).

Exemple 3.3.5. • Le faisceau structural $\mathcal{O}_{X/S}$ défini par $(\mathcal{O}_{X/S})_T = \mathcal{O}_T$, et son sous-faisceau $\mathcal{I}_{X/S}$ défini par $(\mathcal{I}_{X/S})_T = \text{Ker}(\mathcal{O}_T \rightarrow \mathcal{O}_U)$ (c'est un faisceau d'idéaux à puissances divisées).

• Le faisceau $i_{X/S*} \mathcal{O}_X$ défini par $(i_{X/S*} \mathcal{O}_X)_T = \mathcal{O}_U$ (cf plus tard). Notons qu'on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{X/S} \rightarrow \mathcal{O}_{X/S} \rightarrow i_{X/S*} \mathcal{O}_X \rightarrow 0.$$

• Le faisceau des différentielles $\Omega_{X/S}^1$ défini par $\Omega_{X/S}^1(U \hookrightarrow T, \delta) = \Gamma(T, \mathcal{I}/\mathcal{I}^{[2]})$ et ses puissances extérieures.

Corollaire 3.3.6. (cf [2, Remark 5.3]). *Le site $\text{Cris}(X/S)$ a assez de points : un morphisme de faisceaux $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un isomorphisme si et seulement s'il induit des isomorphismes sur les fibres $(\mathcal{F}_T)_x \rightarrow (\mathcal{G}_T)_x$ pour tout point x de X et tout S -épaississement à puissances divisées T d'un voisinage ouvert de x dans X .*

Remarque 3.3.7. Le site cristallin n'est pas fonctoriel : si $X' \rightarrow X$ est un morphisme de S -schémas, on ne peut pas, en général, tirer un épaississement à puissances divisées de X en un épaississement à puissances divisées de X' . Cela dit, il y a fonctorialité du topos cristallin : on a un morphisme de topos $(X'/S)_{\text{cris}} \rightarrow (X/S)_{\text{cris}}$, et on peut tirer en arrière le faisceau qu'il représente.

²⁹ *I.e.* le morphisme de Frobenius $A \rightarrow A$; $x \mapsto x^p$ est surjectif.

3.3.8. *Fonctorialité du topos cristallin.* Si \mathcal{C} est une catégorie, on note³⁰ $h_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}; A \rightarrow \widetilde{A}$ son plongement de Yoneda. Commençons par observer que pour tout $T = (U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(X/S)$, le préfaisceau \widetilde{T} est un faisceau (cela résulte de l'énoncé correspondant pour $\text{Zar}(X/S)$).

Soit

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

un diagramme commutatif, où $f: S' \rightarrow S$ est un morphisme à puissances divisées. Le but de ce paragraphe est d'expliquer qu'il induit un morphisme de topos

$$g_{\text{cris}}: (X'/S')_{\text{cris}} \rightarrow (X/S)_{\text{cris}}$$

Il s'agit pour cela de construire un foncteur

$$g_{\text{cris}*}: (X'/S')_{\text{cris}} \rightarrow (X/S)_{\text{cris}}$$

qui admet un adjoint à gauche

$$g_{\text{cris}}^{-1}: (X/S)_{\text{cris}} \rightarrow (X'/S')_{\text{cris}}$$

qui commute aux limites projectives finies.

Définition 3.3.9. Si $T = (U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(X/S)$, on note $g^{-1}(T)$ le préfaisceau sur $\text{Cris}(X'/S')$ défini par

$$(U' \hookrightarrow T', \delta') \mapsto \text{PD } \mathcal{H}om_g((U' \hookrightarrow T', \delta'), (U \hookrightarrow T, \delta)).$$

C'est l'ensemble vide sauf si $g(U') \subset U$, auquel cas c'est l'ensemble des morphismes à puissances divisées $h: (T', \delta') \rightarrow (T, \delta)$ s'insérant dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{g} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ T' & \xrightarrow{h} & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

Remarque 3.3.10. Il est essentiellement immédiat que $g^{-1}(T)$ est un faisceau (non représentable en général), et que $T \mapsto g^{-1}(T)$ est un foncteur $\text{Cris}(X/S) \rightarrow (X'/S')_{\text{cris}}$. Cela dit, il n'est pas évident qu'il existe un morphisme de topos $g_{\text{cris}}: (X'/S')_{\text{cris}} \rightarrow (X/S)_{\text{cris}}$ compatible avec cette définition *i.e.* tel que $g_{\text{cris}}^{-1}(\widetilde{T}) = g^{-1}(T)$ pour tout $T = (U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(X/S)$.

L'unicité résulte du résultat général suivant :

Proposition 3.3.11. (cf [2, Proposition 5.7]). Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' des catégories et $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}'}$ un foncteur. Il existe un unique couple de foncteurs $\varphi_{\bullet}: \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}'}$ et $\varphi^{\bullet}: \widehat{\mathcal{C}'} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ tels que $\varphi_{\bullet}^{\bullet} = \varphi$ et φ^{\bullet} est adjoint à gauche de φ_{\bullet} .

Démonstration. Si $\mathcal{F}' \in \widehat{\mathcal{C}'}$ et $T \in \mathcal{C}$, on veut avoir

$$\varphi_{\bullet}(\mathcal{F}')(T) = \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}'}}(\widetilde{T}, \varphi_{\bullet}(\mathcal{F}')) = \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}'}}(\varphi^{\bullet}(\widetilde{T}), \mathcal{F}') = \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}'}}(\varphi(T), \mathcal{F}')$$

ce qui montre déjà l'unicité de φ_{\bullet} , et donc de son adjoint φ^{\bullet} . Pour l'existence, il s'agit de montrer que le foncteur $\varphi_{\bullet}: \widehat{\mathcal{C}'} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ défini par

$$\varphi_{\bullet}(\mathcal{F}')(T) = \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}'}}(\varphi(T), \mathcal{F}')$$

admet un adjoint à gauche φ^{\bullet} . Si $T' \in \mathcal{C}'$, on note $\varphi\{T'\}$ la catégorie constituée par les morphismes $\widetilde{T}' \rightarrow \varphi(T)$ où $T \in \mathcal{C}$. Pour $\mathcal{F} \in \widehat{\mathcal{C}}$ et $T' \in \mathcal{C}'$, on pose

$$\varphi^{\bullet}(\mathcal{F})(T') = \lim_{\varphi\{T'\}} \mathcal{F}(T)$$

Si $\mathcal{F}' \in \widehat{\mathcal{C}'}$, un élément de $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}'}}(\varphi^{\bullet}(\mathcal{F}'), \mathcal{F}')$ correspond à la donnée d'une famille compatible de flèches $\{\varphi^{\bullet}(\mathcal{F}')(T') \xrightarrow{f_{T'}} \mathcal{F}'(T')\}_{T' \in \mathcal{C}'}$, soit encore une famille compatible de flèches $\{\mathcal{F}(T) \xrightarrow{f_u} \mathcal{F}'(T')\}_{u \in \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}'}}(T', \varphi(T))}$ *i.e.* une famille compatible de flèches $\{\mathcal{F}(T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Ens}}(\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}'}}(T', \varphi(T)), \mathcal{F}'(T'))\}_{T \in \mathcal{C}, T' \in \mathcal{C}'}$. La compatibilité en T' implique que cela équivaut à la donnée d'un système compatible de flèches $\{\mathcal{F}(T) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}'}}(\varphi(T), \mathcal{F}')\}_{T \in \mathcal{C}}$. Comme $\varphi_{\bullet}(\mathcal{F}')(T) = \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}'}}(\varphi(T), \mathcal{F}')$, cela équivaut donc à la donnée d'un morphisme $\mathcal{F} \rightarrow \varphi_{\bullet}(\mathcal{F}')$: on a donc

$$\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}'}}(\varphi^{\bullet}(\mathcal{F}'), \mathcal{F}')$$

ce qu'on voulait. \square

30. Bien entendu, $\widehat{\mathcal{C}}$ désigne la catégorie des préfaisceaux de \mathcal{C} .

Plaçons-nous dans la situation (*). On dispose du morphisme $\varphi = g^{-1}: \text{Cris}(X/S) \rightarrow \widehat{\text{Cris}(X'/S')}$. Grâce à la proposition 3.3.11, on dispose d'un prolongement $\varphi^\bullet: \widehat{\text{Cris}(X/S)} \rightarrow \widehat{\text{Cris}(X'/S')}$ et de son adjoint à droite $\varphi_\bullet: \widehat{\text{Cris}(X'/S')} \rightarrow \widehat{\text{Cris}(X/S)}$.

Proposition 3.3.12. (cf [2, Proposition 5.8]).

- (1) Si \mathcal{F}' est un faisceau sur $\text{Cris}(X'/S')$, alors $g_{\text{cris}*}(\mathcal{F}') := \varphi_\bullet(\mathcal{F}')$ est un faisceau sur $\text{Cris}(X/S)$.
- (2) Si \mathcal{F} est un faisceau sur $\text{Cris}(X/S)$, on note $g_{\text{cris}}^{-1}(\mathcal{F})$ la faisceautisation du préfaisceau $\varphi^\bullet(\mathcal{F})$. Alors g_{cris}^{-1} est adjoint à gauche de $g_{\text{cris}*}$.

Démonstration. La preuve est formelle.

(2) Soient $(u_i: T_i \rightarrow T)_{i \in I}$ une famille couvrante de $(U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(X/S)$ et $(s_i)_{i \in I}$ une famille compatible de sections : on a $s_i \in g_{\text{cris}*}(\mathcal{F}')(T_i) = \text{Hom}_{\widehat{\text{Cris}(X'/S')}}(g^{-1}(T_i), \mathcal{F}')$ pour tout $i \in I$. On veut construire le recollement $s \in g_{\text{cris}*}(\mathcal{F}')(T) = \text{Hom}_{\widehat{\text{Cris}(X'/S')}}(g^{-1}(T), \mathcal{F}')$, c'est-à-dire une application

$$s_{T'}: g^{-1}(T)(T') = \text{PD } \mathcal{H}om_g((U' \hookrightarrow T', \delta'), (U \hookrightarrow T, \delta)) \rightarrow \mathcal{F}'(T')$$

pour chaque $(U' \hookrightarrow T', \delta') \in \text{Cris}(X'/S')$, compatible au changement de base. Si $h \in g^{-1}(T)(T')$ et $i \in I$, on dispose de $T'_i = h^{-1}(T_i)$, de la restriction $h_i: T'_i \rightarrow T_i \in g^{-1}(T_i)(T'_i)$ et du recouvrement $\{(T'_i \rightarrow T')\}_{i \in I}$. Si $i \in I$, la section s_i induit $s_{i,T'_i}: g^{-1}(T_i)(T'_i) \rightarrow \mathcal{F}'(T'_i)$, de sorte que $s_{i,T'_i}(h_i) \in \mathcal{F}'(T'_i)$. Comme \mathcal{F}' est un faisceau, la compatibilité des sections s_i implique qu'il existe un unique élément $s_{T'}(h) \in \mathcal{F}'(T')$ induisant $s_{i,T'_i}(h_i)$ dans $\mathcal{F}'(T'_i)$. La compatibilité des sections s_i implique que les $s_{T'}$ définissent l'unique section $s \in g_{\text{cris}*}(\mathcal{F}')(T)$ induisant s_i sur T_i pour tout $i \in I$.

(2) Résulte de la propriété d'adjonction au niveau des préfaisceaux et de la propriété universelle de la faisceautisation. \square

Proposition 3.3.13. (cf [2, Proposition 5.9]). *Le foncteur g_{cris}^{-1} commute aux limites projectives finies.*

Démonstration. Contrairement à ce qui précède, ce n'est pas formel. Il s'agit de montrer que si I est une catégorie finie et $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ un système projectif de $(X/S)_{\text{cris}}$ indexé par I , l'application naturelle

$$g_{\text{cris}}^{-1}(\varprojlim_{i \in I} \mathcal{F}_i) \rightarrow \varprojlim_{i \in I} g_{\text{cris}}^{-1}(\mathcal{F}_i)$$

est un isomorphisme. Cela se vérifie sur les fibres. Si $(U' \hookrightarrow T', \delta') \in \text{Cris}(X'/S')$ et $x' \in T'$, la fibre de $g_{\text{cris}}^{-1}(\mathcal{F})$ en (T', x') est

$$\varinjlim_{I_{x', T', g}} \mathcal{F}(T)$$

où $I_{x', T', g}$ est la catégorie dont les objets sont les S -morphisms à puissances divisées $h: V' \rightarrow T$ où V' est un voisinage ouvert de x' dans T' et $(U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(X/S)$, un morphisme $h_1 \rightarrow h_2$ étant un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V'_2 & \xrightarrow{h_2} & T_2 \\ \circlearrowleft & & \downarrow \\ V'_1 & \xrightarrow{h_1} & T_1 \end{array}$$

et il s'agit de montrer que l'application

$$\varinjlim_{I_{x', T', g}} \varprojlim_I \mathcal{F}_i(T) \rightarrow \varprojlim_I \varinjlim_{I_{x', T', g}} \mathcal{F}_i(T)$$

est un isomorphisme, ce qui résulte du fait que la catégorie $I_{x', T', g}$ est *filtrante*³¹. La preuve repose sur des lemmes techniques, dont l'un, dû à Grothendieck, est le suivant :

Lemme 3.3.14. *Si $(U' \hookrightarrow T', \delta') \in \text{Cris}(X'/S')$ avec U' affine et tel que $g(U') \subset U$ où U est un ouvert affine de X , alors il existe $(U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(X/S)$ et un S' -morphisme à puissances divisées $T' \rightarrow T$ qui étend $g: U' \rightarrow U$.*

On peut supposer S et S' affines d'anneaux (A, I, γ) et (A', I', γ') respectivement. Écrivons $U' = \text{Spec}(C')$, $T' = \text{Spec}(B')$ et $U = \text{Spec}(C)$. On pose alors $B = C \times_{C'} B'$: on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{h} & B' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ C & \xrightarrow{g} & C' \end{array}$$

31. C'est-à-dire qu'elle est non vide, connexe (si a et b sont des objets, il en existe un troisième c et des flèches $a \rightarrow c$ et $b \rightarrow c$), que si $a \rightarrow b$ et $a \rightarrow c$ sont des flèches, il existe des flèches $b \rightarrow d$ et $c \rightarrow d$ tels que les composés $a \rightarrow b \rightarrow d$ et $a \rightarrow c \rightarrow d$ soient égaux, et si $u, v: a \rightarrow b$ sont deux flèches, il en existe une troisième $w: b \rightarrow c$ telle que $w \circ u = w \circ v$.

Comme π' est surjective, il en est de même de π , et $J := \text{Ker}(\pi) = \{(b', 0) \mid b' \in J'\}$ où $J' = \text{Ker}(\pi')$. On munit J de la structure à puissances divisées donnée par $\delta_n(b', 0) = (\delta'_n(b'), 0)$ (où $\delta' = (\delta'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est la structure à puissances divisées dont on dispose sur J'), ce qui fait de h un morphisme à puissances divisées. Par définition, γ' s'étend à B' (par définition des objets de $\text{Cris}(X'/S')$) et γ à C (rappelons qu'on suppose toujours que γ s'étend à X , cf remarque 3.3.2 (1)), donc à B' parce que $A \rightarrow A'$ est un morphisme à puissances divisées. On étend γ à B en posant $\bar{\gamma}_n(b', c) = (\gamma_n(b'), \gamma_n(c))$ si $(b', c) \in IB$ i.e. $b' \in IB'$ et $c \in IC$. Comme δ' est compatible avec γ' donc avec γ , alors δ est compatible avec γ . \square

Remarque 3.3.15. Plaçons-nous de nouveau dans la situation (*). Si $(U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(X/S)$, et $(U' \hookrightarrow T', \delta') \in \text{Cris}(X'/S')$, et si $h \in g^{-1}(T)(T') = \text{PD } \mathcal{H}om_g((U' \hookrightarrow T', \delta'), (U \hookrightarrow T, \delta))$, on dispose de l'application

$$\mathcal{O}_{X/S}(T) = \mathcal{O}_T(T) \rightarrow \mathcal{O}_{T'}(T') = \mathcal{O}_{X'/S'}(T')$$

Cela définit une application

$$\mathcal{O}_{X/S}(T) \rightarrow \text{Hom}_{(X'/S')_{\text{cris}}}(g^{-1}(T), \mathcal{O}_{X'/S'}) = g_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X'/S'})(T)$$

fonctorielle en T , i.e. un morphisme

$$\mathcal{O}_{X/S} \rightarrow g_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X'/S'})$$

Il en résulte que $g_{\text{cris}} : (X'/S')_{\text{cris}} \rightarrow (X/S)_{\text{cris}}$ est un morphisme de *topos annelés*.

26/03/2018

Remarque 3.3.16. L'objet final du topos \mathcal{T} associé à un site \mathcal{X} est le faisceau associé au préfaisceau constant (qui vaut $\{0\}$ sur tous les objets de \mathcal{X}). Il n'est pas représentable en général, notamment dans le cas du site cristallin, comme on l'a mentionné plus haut (cf remarque 3.3.2). Cela dit, si \mathcal{A} est un faisceau d'anneaux sur \mathcal{X} , la catégorie des faisceaux de \mathcal{A} -modules a assez d'injectifs, et pour tout $T \in \mathcal{T}$, on peut définir $H^i(T, \cdot)$ comme le i -ème foncteur dérivé du foncteur $\Gamma(T, \cdot)$ dans cette catégorie. Il ne dépend pas de \mathcal{A} : on peut le calculer dans la catégorie des faisceaux abéliens sur \mathcal{X} .

Dans la situation (*), on dispose d'une suite spectrale de Leray :

$$E_2^{p,q} = H^p((X/S)_{\text{cris}}, R^q g_{\text{cris}*} \mathcal{F}') \Rightarrow H^{p+q}((X'/S')_{\text{cris}}, \mathcal{F})$$

(qui n'est autre que la suite spectrale associée à la composition des foncteurs ³² $\Gamma((X/S)_{\text{cris}}, \cdot)$ et $g_{\text{cris}*}$).

Proposition 3.3.17. Soit $i : X \hookrightarrow Y$ une S -immersion fermée. Si Y/S est lisse, alors $\tilde{Y} = i_{\text{cris}}^{-1}(Y)$ est représentable et l'application ³³ $\tilde{Y} \rightarrow e$ est un épimorphisme.

Démonstration. Observons déjà que $(Y = Y, 0) \in \text{Cris}(Y/S)$ (cf remarque 3.3.2 (1)).

• L'objet $\tilde{Y} := i_{\text{cris}}^{-1}(Y)$ est représenté par l'enveloppe à puissances divisées $D = D_{X,\gamma}(Y)$ de X dans Y . En effet, \tilde{Y} est le faisceau associé au préfaisceau

$$\text{Cris}(X/S) \ni (U' \hookrightarrow T') \mapsto \varinjlim_{U \hookrightarrow T} Y(U \hookrightarrow T) = \varinjlim_h \text{Hom}_{\text{Cris}(Y/S)}(U \hookrightarrow T, Y = Y)$$

où la limite est indexée par les morphismes $h : T' \rightarrow T$ relevant $i|_{U'} : U' \rightarrow U$ (cf définition 3.3.9). Si h est un tel morphisme et $f \in \text{Hom}_{\text{Cris}(Y/S)}((U \hookrightarrow T), (Y = Y))$, la propriété universelle de l'enveloppe à puissances divisées implique l'existence et l'unicité de $\tilde{f} \in \text{Hom}_{\text{Cris}(X/S)}((U' \hookrightarrow T'), (X \hookrightarrow D))$ en pointillé dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & i|_{U'} \\ & & \swarrow \quad \searrow \\ U' & & U \\ \downarrow & \begin{array}{ccc} \nearrow & T' & \xrightarrow{h} & T & \nwarrow \\ & \tilde{f} \downarrow & & & \downarrow f \\ & D & \xrightarrow{g} & & Y \end{array} & \\ \downarrow & \begin{array}{ccc} & X & \xrightarrow{i} & Y \end{array} & \\ & & \searrow & \swarrow \\ & & S & \end{array}$$

Réciproquement, $\tilde{f} \in \text{Hom}_{\text{Cris}(X/S)}((U' \hookrightarrow T'), (X \hookrightarrow D))$ fournit le morphisme $h_{\tilde{f}} = g \circ \tilde{f} : T' \rightarrow Y$ relevant $i|_{U'}$, et \tilde{f} provient par la construction précédente de

$$\text{Id}_{Y=Y} \in \text{Hom}_{\text{Cris}(Y/S)}(Y = Y, Y = Y) \rightarrow \varinjlim_h \text{Hom}_{\text{Cris}(Y/S)}(U \hookrightarrow T, Y = Y).$$

Cela implique que le préfaisceau en question est représentable par D : c'est donc un faisceau, i.e. \tilde{Y} .

32. Notons que $g_{\text{cris}*}$ envoie injectifs sur injectifs parce que son adjoint à gauche g_{cris}^* est exact.

33. Où, comme plus haut, e est l'objet final de $(X/S)_{\text{cris}}$.

• Pour voir que $\tilde{Y} \rightarrow e$ est un épimorphisme, il suffit de voir que $\tilde{Y}_{T'} \rightarrow e_{T'}$ est un épimorphisme de faisceaux de Zariski pour tout $(U' \hookrightarrow T') \in \text{Cris}(X/S)$, c'est-à-dire que pour tout ouvert $T'' \subset T'$ assez petit, $\tilde{Y}(T'')$ est non vide, soit encore que le morphisme $X \cap T'' \rightarrow Y$ peut être relevé en $T'' \rightarrow Y$. Cela résulte du fait que Y/S est lisse et que $X \cap T'' \rightarrow T''$ est une nil-immersion³⁴. \square

Il en résulte que, bien qu'il ne soit pas représentable en général, l'objet final de $(X/S)_{\text{cris}}$ est recouvert par un objet représentable.

Remarque 3.3.18. Cela implique que l'exactitude d'une suite de faisceaux abéliens se vérifie en tirant sur \tilde{Y} . Cela permet aussi de calculer la cohomologie d'un faisceau à la Cech-Alexander.

Théorème 3.3.19. (cf [2, Theorem 5.17]) *Supposons qu'on a un diagramme cartésien*

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_0 & \hookrightarrow & S \end{array}$$

où (S, \mathcal{I}, γ) est un schéma à puissances divisées et $S_0 \hookrightarrow S$ défini par un sous-idéal $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ à puissances divisées. Alors on a un isomorphisme canonique

$$H^i((X/S)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X/S}) \xrightarrow{\sim} H^i((X_0/S)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X_0/S}).$$

Démonstration. On a le morphisme de topos $i_{\text{cris}}: (X_0/S)_{\text{cris}} \rightarrow (X/S)_{\text{cris}}$ et la suite spectrale de Leray associée : le théorème résulte des deux faits suivants :

- $i_{\text{cris}*}$ est exact ;
- $i_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X_0/S}) = \mathcal{O}_{X/S}$.

Cela repose sur l'observation que si $T = (U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(X/S)$, alors $i^{-1}(T)$ est représentable³⁵. Si \mathcal{F} est un faisceau sur $\text{Cris}(X_0/S)$, alors

$$i_{\text{cris}*}(\mathcal{F})(U \hookrightarrow T) = \text{Hom}_{(X_0/S)_{\text{cris}}}(i^{-1}(T), \mathcal{F}) = \text{Hom}_{(X_0/S)_{\text{cris}}}((U_0 \hookrightarrow T), \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U_0 \hookrightarrow T)$$

L'exactitude de $i_{\text{cris}*}$ provient donc du fait qu'une suite de faisceaux dans $(X/S)_{\text{cris}}$ est exacte si et seulement si les suites de faisceaux Zariski associées (cf paragraphe 3.3.3) sont exactes. On a en outre $i_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X_0/S})(U \hookrightarrow T) = \mathcal{O}_{X_0/S}(U_0 \hookrightarrow T) = \mathcal{O}_T(T) = \mathcal{O}_{X/S}(U \hookrightarrow T)$ pour tout $(U \hookrightarrow T) \in \text{Cris}(X/S)$, i.e. $i_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X_0/S}) = \mathcal{O}_{X/S}$. \square

3.3.20. *Le morphisme $u_{X/S}$.*

Proposition 3.3.21. *On a un morphisme de topos*

$$u_{X/S}: (X/S)_{\text{cris}} \rightarrow X_{\text{Zar}}$$

défini par :

- pour $\mathcal{F} \in (X/S)_{\text{cris}}$ et $j: U \hookrightarrow X$, on a $u_{X/S*}(\mathcal{F})(U) = \Gamma((U/S)_{\text{cris}}, j_{\text{cris}}^{-1} \mathcal{F})$;
- si $\mathcal{E} \in X_{\text{Zar}}$ et $(U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(X/S)$, on a $u_{X/S}^{-1}(\mathcal{E})(U \hookrightarrow T, \delta) = \mathcal{E}(U)$.

Démonstration. • Montrons que $u_{X/S}^{-1}$ est adjoint à gauche de $u_{X/S|_{\text{ast}}}$. Si $\mathcal{E} \in X_{\text{Zar}}$ et $\mathcal{F} \in (X/S)_{\text{cris}}$, la donnée d'un élément de $f \in \text{Hom}_{(X/S)_{\text{cris}}}(u_{X/S}^{-1}(\mathcal{E}), \mathcal{F})$ correspond à celle d'une famille compatible d'applications $f_T: \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U \hookrightarrow T)$ pour $(U \hookrightarrow T) \in \text{Cris}(X/S)$. Pour toute immersion ouverte $j: U \hookrightarrow X$, on a $\text{Cris}(U/S) \subset \text{Cris}(X/S)$: si $(U' \hookrightarrow T', \delta') \in \text{Cris}(U/S)$, on a une application

$$\mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U') \xrightarrow{j_{T'}} \mathcal{F}(U' \hookrightarrow T') = j_{\text{cris}}^{-1}(\mathcal{F})(U' \hookrightarrow T').$$

Les compatibilités impliquent que les sections se recollent : on a une famille compatible d'applications

$$g_U: \mathcal{E}(U) \rightarrow \Gamma((U/S)_{\text{cris}}, j_{\text{cris}}^{-1}(\mathcal{F}))$$

c'est-à-dire un élément de $g \in \text{Hom}_{X_{\text{Zar}}}(\mathcal{E}, u_{X/S}^{-1}(\mathcal{F}))$. Réciproquement, si $g \in \text{Hom}_{X_{\text{Zar}}}(\mathcal{E}, u_{X/S}^{-1}(\mathcal{F}))$, et si $(U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(X/S)$, on dispose de l'application composée

$$f_T: \mathcal{E}(U) \xrightarrow{g_U} \Gamma((U/S)_{\text{cris}}, j_{\text{cris}}^{-1}(\mathcal{F})) \rightarrow j_{\text{cris}}^{-1}(\mathcal{F})(U \hookrightarrow T) = \mathcal{F}(U \hookrightarrow T)$$

34. C'est classique lorsqu'on a une immersion définie par un idéal nilpotent. Le cas d'une nil-immersion se ramène au cas nilpotent par un procédé standard (cf [2, §5.28]).

35. En effet, si $U_0 = U \cap X_0$, alors $U_0 \hookrightarrow U$ est défini par l'idéal à puissances divisées $\mathcal{K}\mathcal{O}_U \subset \mathcal{O}_U$, de sorte que $U_0 \hookrightarrow T$ l'est par $\mathcal{K}\mathcal{O}_T + \mathcal{I}$ (où \mathcal{I} est l'idéal de $U \hookrightarrow T$). Par définition (cf définition 3.1.26 (1)), γ s'étend en $\bar{\gamma}$ à $\mathcal{I}\mathcal{O}_T$ donc à son sous-idéal à puissances divisées \mathcal{K} , et δ est compatible à $\bar{\gamma}$ sur $\mathcal{K}\mathcal{O}_T + \mathcal{I}$. Cela implique que $(U_0 \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(X_0/S)$ et $(U_0 \hookrightarrow T) \rightarrow (U \hookrightarrow T)$ est universel, de sorte que $i^{-1}(T)$ est représenté par $(U_0 \hookrightarrow T, \delta)$.

et les applications f_T définissent un élément $f \in \text{Hom}_{(X/S)_{\text{cris}}}(u_{X/S}^{-1}(\mathcal{E}), \mathcal{F})$.

- On a en outre $u_{X/S}^{-1}(\mathcal{E}) \underset{(U \hookrightarrow T, \delta)}{\simeq} \mathcal{E}_U$ pour tout $\mathcal{E} \in X_{\text{Zar}}$ et $(U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(X/S)$, ce qui implique que $u_{X/S}^{-1}$ commute aux limites projectives quelconques. \square

Remarque 3.3.22. $u_{X/S}$ n'est pas un morphisme de topos annelés (on n'a pas de morphisme $\mathcal{O}_X \rightarrow u_{X/S*}(\mathcal{O}_{X/S})$ en général).

Le foncteur $u_{X/S}^{-1}$ admet un adjoint à gauche $i_{X/S}^{-1} := u_{X/S}!$ défini par

$$u_{X/S}!(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{(X=X,0)}$$

On a donc un morphisme de topos

$$i_{X/S}: X_{\text{Zar}} \rightarrow (X/S)_{\text{cris}}$$

en posant $i_{X/S*} = u_{X/S}^{-1}$. C'est un morphisme de topos annelés car on a un morphisme³⁶ $\mathcal{O}_{X/S} \rightarrow i_{X/S*}(\mathcal{O}_X)$. Notons que comme $i_{X/S*}$ est exact, la suite spectrale de Leray associée dégénère, de sorte que

$$H^n(X_{\text{Zar}}, \mathcal{E}) \simeq H^n((X/S)_{\text{cris}}, i_{X/S*}(\mathcal{E}))$$

pour tout $\mathcal{E} \in X_{\text{cris}}$.

Remarque 3.3.23. Le morphisme de topos $i_{\text{cris}}: X_{\text{Zar}} \rightarrow (X/S)_{\text{cris}}$ est une section de $u_{X/S}$, qu'on qualifie donc de *projection* sur le topos X_{Zar} .

3.3.24. Cristaux.

Définition 3.3.25. (cf [2, Définition 6.1]). Un *cristal de $\mathcal{O}_{X/S}$ -modules* est un faisceau de $\mathcal{O}_{X/S}$ -modules \mathcal{F} tel que pour tout morphisme $u: (U' \hookrightarrow T', \delta') \rightarrow (U \hookrightarrow T, \delta)$ dans $\text{Cris}(X/S)$, l'application naturelle

$$u^* \mathcal{F}_T \rightarrow \mathcal{F}_{T'}$$

soit un isomorphisme (ici u^* est l'image inverse de modules, i.e. l'image inverse tensorisée avec le faisceau structural).

Exemple 3.3.26. Le faisceau structural $\mathcal{O}_{X/S}$ et son sous-faisceau $\mathcal{I}_{X/S}$ sont des cristaux. *A contrario*, les faisceaux $\Omega_{X/S}^i$ ne sont pas des cristaux.

Proposition 3.3.27. (cf [2, Proposition 6.2]). Soit $i: X \hookrightarrow Y$ une immersion fermée de (S, \mathcal{I}, γ) -schémas (auxquels γ s'étend). Le foncteur $i_{\text{cris}*}$ est exact et $i_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/S})$ est un cristal de $\mathcal{O}_{Y/S}$ -algèbres.

Remarque 3.3.28. Cela généralise les résultats démontrés lors de la preuve du théorème 3.3.19.

Démonstration. Comme dans la preuve du théorème 3.3.19, on montre que si $(U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(Y/S)$, alors $i^{-1}(T)$ est représenté par $D = (U_0 \hookrightarrow D_{U_0, \bar{\delta}}(T), [\cdot])$ où $U_0 = U \cap X$ et $\bar{\delta}$ l'extension de δ à $\mathcal{I}\mathcal{O}_T + \mathcal{I}$ (où \mathcal{I} est l'idéal à puissances divisées définissant $U \hookrightarrow T$). En outre, si \mathcal{F} est un faisceau sur $\text{Cris}(X/S)$, on a $i_{\text{cris}*}(\mathcal{F})_T = \lambda_*(\mathcal{F}_D)$ (dans T_{Zar}) où $\lambda: D \rightarrow T$ est l'application naturelle. Au niveau des espaces topologiques sous-jacents, λ est l'immersion fermée $U_0 \hookrightarrow U$, de sorte que λ_* est exact (cf [11, Lemma 58.14.1]) : il en est de même de $i_{\text{cris}*}$. Pour voir que $i_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/S})$ est un cristal, il faut montrer que $u^*(i_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/S})_T) \xrightarrow{\sim} i_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/S})_{T'}$ i.e. que

$$\mathcal{O}_{T'} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{D}_{U_0, \bar{\delta}}(T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{U_0', \bar{\delta}'}(T')$$

pour tout morphisme $u: (U' \hookrightarrow T', \delta') \rightarrow (U \hookrightarrow T, \delta)$ dans $\text{Cris}(Y/S)$. On se ramène au cas affine, et la preuve, assez technique, requiert de revenir à la construction des enveloppes à puissances divisées. \square

Corollaire 3.3.29. (cf [2, Corollaries 6.3 & 6.4]). Les applications canoniques

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{X, \gamma}(Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y/S} &\rightarrow \mathcal{D}_{X, \gamma}(Y \times_S Y) \\ \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{X, \gamma}(Y) &\rightarrow \mathcal{D}_{X, \gamma}(Y \times_S Y) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes. Ils fournissent une hyper-stratification à puissances divisées

$$\varepsilon: \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{X, \gamma}(Y) \rightarrow \mathcal{D}_{X, \gamma}(Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y/S}$$

et la connexion intégrable ∇ associée vérifie $\nabla(y^{[k]}) = y^{[k-1]} \otimes dy$ pour tout $k \in \mathbf{N}_{>0}$ et toute section y de l'idéal de X dans Y .

36. Il correspond, par adjonction, à l'isomorphisme $i_{X/S}^{-1}(\mathcal{O}_{X/X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$.

Démonstration. • On a les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Y \times_S Y \\ i \uparrow & & \downarrow p_1 \downarrow p_2 \\ X & \xrightarrow{i} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \mathcal{D}_{Y/S} \\ & \nearrow & \downarrow \pi_1 \downarrow \pi_2 \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array}$$

Les morphismes π_1 et π_2 sont les morphismes dans $\text{Cris}(Y/S)$: comme $i_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/S})$ est un cristal, les applications

$$\pi_i^* i_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/S})_Y \rightarrow i_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/S})_{\mathcal{D}_{Y/S}}$$

sont des isomorphismes. On a en outre $i_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/S})_Y \simeq \mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)$ et $i_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/S})_{\mathcal{D}_{Y/S}} \simeq \mathcal{D}_{X,\bar{\square}}(\mathcal{D}_{Y/S})$ (cf « preuve de la proposition 3.3.27). On conclut en observant que $\mathcal{D}_{X,\bar{\square}}(\mathcal{D}_{Y/S}) \simeq \mathcal{D}_{X,\gamma}(Y \times_S Y)$ en vertu de la propriété universelle de l'enveloppe à puissances divisées.

• L'application $\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y/S} \rightarrow \mathcal{D}_{X,\gamma}(Y \times_S Y)$ (resp. $\mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{X,\gamma}(Y) \rightarrow \mathcal{D}_{X,\gamma}(Y \times_S Y)$) étant donnée par $x \otimes \alpha \mapsto \alpha x$ (resp. $\alpha \otimes x \mapsto \alpha x$), on a $\varepsilon(\alpha \otimes x) = x \otimes \alpha$ pour toutes sections α de $\mathcal{D}_{Y/S}$ et x de $\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)$. Si β est une section de $\mathcal{D}_{Y/S}$, on a donc

$$(\varepsilon \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes \varepsilon)(\alpha \otimes \beta \otimes x) = (\varepsilon \otimes \text{Id})(\alpha \otimes x \otimes \beta) = x \otimes \alpha \otimes \beta = \delta^*(\varepsilon)(\alpha \otimes \beta \otimes x)$$

(rappelons que $\delta: \mathcal{D}_{Y/S} \rightarrow \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y/S}$ envoie $u \otimes v$ sur $u \otimes \mathbf{1} \otimes v$) car

$$\delta^*(\varepsilon)(\alpha \otimes \beta \otimes x) = \delta^*(\varepsilon)((\alpha \otimes \beta) \otimes (1 \otimes x)) = (\alpha \otimes \beta) \otimes (x \otimes 1) = x \otimes \alpha \otimes \beta$$

la première égalité provenant de l'identification

$$\mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{X,\gamma}(Y) \simeq (\mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y/S}) \otimes_{\mathcal{D}_{Y/S}} (\mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)).$$

Cela prouve la relation de cocycle vérifiée par ε (cf définition 3.2.6).

• Si y est une section de l'idéal de X dans Y et $k \in \mathbf{N}_{>0}$, l'image de $1 \otimes y^{[k]}$ par $\mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{X,\gamma}(Y) \rightarrow \mathcal{D}_{X,\gamma}(Y \times_S Y)$ est

$$(1 \otimes y)^{[k]} = (y \otimes 1 + 1 \otimes y - y \otimes 1)^{[k]} = \sum_{i=0}^k (y^{[i]} \otimes 1)(1 \otimes y - y \otimes 1)^{[k-i]}$$

dont l'image dans $\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y/S}$ est congrue à $y^{[k]} \otimes 1 + (y^{[k-1]} \otimes 1)(1 \otimes y - y \otimes 1)$ modulo $\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{I}^{[2]}$. Comme $\nabla(y^{[k]})$ est l'image de $\varepsilon(1 \otimes y^{[k]}) - y^{[k]} \otimes 1$ dans $\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}$: c'est donc $y^{[k-1]} \otimes dy$. \square

Proposition 3.3.30. *Plaçons-nous dans la situation (*). Si \mathcal{F} est un cristal sur X/S , alors $g_{\text{cris}}^*(\mathcal{F})$ est un cristal sur X'/S' . En outre, si $h: T' \rightarrow T$ est un élément de $\text{DP } \mathcal{H}om_g((U' \hookrightarrow T', \delta'), (U \hookrightarrow T, \delta))$, alors $g_{\text{cris}}^*(\mathcal{F})_{T'} \simeq \mathcal{F}_T$.*

Démonstration. • Soit $(U' \hookrightarrow T', \delta') \in \text{Cris}(X'/S')$. Quitte à localiser en T' , il existe $(U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(X/S)$ et $h: T' \rightarrow T$ un élément de $\text{PD } \mathcal{H}om_g((U' \hookrightarrow T', \delta'), (U \hookrightarrow T, \delta))$. Comme on l'a mentionné lors de la « preuve » de la proposition 3.3.13, la catégorie des tels h est filtrante : si on a $h_1: T' \rightarrow T_1$ et $h_2: T' \rightarrow T_2$ deux telles applications, il en existe une troisième $h_3: T' \rightarrow T_3$ qui coiffe les deux premières, c'est-à-dire s'insérant dans un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & T_1 \\ & \nearrow^{h_1} & \uparrow p_1 \\ T' & \xrightarrow{h_3} & T_3 \\ & \searrow_{h_2} & \downarrow p_2 \\ & & T_2 \end{array}$$

Comme \mathcal{F} est un cristal sur $\text{Cris}(X/S)$, on a les isomorphismes

$$h_1^* \mathcal{F}_{T_1} \simeq h_3^* p_1^* \mathcal{F}_{T_1} \simeq h_3^* \mathcal{F}_{T_3} \simeq h_3^* p_2^* \mathcal{F}_{T_2} \simeq h_2^* \mathcal{F}_{T_2}$$

L'isomorphisme $h_1^* \mathcal{F}_{T_1} \simeq h_2^* \mathcal{F}_{T_2}$ ne dépend pas des choix faits. On dispose alors d'un morphisme

$$(\clubsuit) \quad \mathcal{O}_{T'} \otimes_{h^{-1}(\mathcal{O}_T)} h^{-1} \mathcal{F}_T \rightarrow g_{\text{cris}}^*(\mathcal{F})_{T'}$$

(par définition de $g_{\text{cris}}^*(\mathcal{F})$). C'est un isomorphisme. Cela se vérifie sur les fibres : soit x' un point de T' . La fibre de $g_{\text{cris}}^{-1}(\mathcal{F})$ en (T', x') est $\varinjlim_{I_{x',T',g}} \mathcal{F}_{T_1,g(x')}$, de sorte que celle de $g_{\text{cris}}^*(\mathcal{F})$ est $\varinjlim_{I_{x',T',g}} \mathcal{O}_{V'} \otimes_{\mathcal{O}_{T_1}} \mathcal{F}_{T_1,g(x')}$, où $I_{x',T',g}$ est

la catégorie des g -PD-morphismes $V' \rightarrow T_1$ d'un voisinage ouvert V' de x' dans T' et $(U_1 \hookrightarrow T_1, \delta_1) \in \text{Cris}(X/S)$. Comme $I_{x',T',g}$ est filtrante, la sous-catégorie des objets qui factorisent h est cofinale, ce qui implique que (\clubsuit) induit un isomorphisme sur la fibre en x' .

• Soit $u: (U'_1 \hookrightarrow T'_1, \delta'_1) \rightarrow (U'_2 \hookrightarrow T'_2, \delta'_2)$ un morphisme dans $\text{Cris}(X'/S')$. Il s'agit de vérifier que l'application naturelle

$$u^* g_{\text{cris}}^*(\mathcal{F})_{T_2} \rightarrow g_{\text{cris}}^*(\mathcal{F})_{T_1}$$

est un isomorphisme dans $T_{1, \text{Zar}}$. Cela se vérifie localement en T_2 : on peut supposer qu'il existe un g -PD-morphisme $h: T_2 \rightarrow T$ où $(U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(X/S)$: on dispose du g -PD-morphisme $h \circ u: T_1 \rightarrow T$. L'isomorphisme (\clubsuit) appliqué à T'_1 et T'_2 fournit des isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{T'_2} \otimes_{h^{-1}(\mathcal{O}_T)} h^{-1}(\mathcal{F})_T &\xrightarrow{\sim} g_{\text{cris}}^*(\mathcal{F})_{T_2} \\ \mathcal{O}_{T'_1} \otimes_{u^{-1}h^{-1}(\mathcal{O}_T)} u^{-1}h^{-1}(\mathcal{F})_T &\xrightarrow{\sim} g_{\text{cris}}^*(\mathcal{F})_{T_1} \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. \square

Théorème 3.3.31. ([2, Theorem 6.6]). *Soit $i: X \hookrightarrow Y$ une immersion fermée de (S, \mathcal{I}, γ) -schémas. Si Y lisse sur S , alors les catégories suivantes sont équivalentes :*

- (i) les cristaux de $\mathcal{O}_{X/S}$ -modules sur $\text{Cris}(X/S)$;
- (ii) les $\mathcal{D}_{X, \gamma}(Y)$ -modules munis d'une hyper-stratification à puissances divisées (comme \mathcal{O}_Y -module) compatible avec l'hyper-stratification à puissances divisées canonique sur $\mathcal{D}_{X, \gamma}(Y)$ (cf corollaire 3.3.29) ;
- (iii) les $\mathcal{D}_{X, \gamma}(Y)$ -modules \mathcal{E} munis d'une connexion intégrable quasi-nilpotente $\nabla_{\mathcal{E}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^1$, compatible³⁷ avec la connexion canonique $\nabla: \mathcal{D}_{X, \gamma}(Y) \rightarrow \mathcal{D}_{X, \gamma}(Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^1$ (qui vérifie $\nabla(\alpha^{[n]}) = \alpha^{[n-1]} d\alpha$ pour toute section α de $\text{Ker}(\mathcal{D}_{X, \gamma}(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X)$, cf corollaire 3.3.29).

Démonstration. • L'équivalence entre (ii) et (iii) a déjà été vue (cf théorème 3.2.12).

• Soit \mathcal{F} un cristal sur $\text{Cris}(X/S)$. On dispose des morphismes $\pi_i: \text{D}_{X, \gamma}(Y \times_S Y) \rightarrow \text{D}_{X, \gamma}(Y)$ dans $\text{Cris}(X/S)$: la propriété de cristal fournit deux isomorphismes $\pi_i^*(\mathcal{F}_{\text{D}_{X, \gamma}(Y)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\text{D}_{X, \gamma}(Y \times_S Y)}$. Ils fournissent un isomorphisme $\pi_1^*(\mathcal{F}_{\text{D}_{X, \gamma}(Y)}) \xrightarrow{\sim} \pi_2^*(\mathcal{F}_{\text{D}_{X, \gamma}(Y)})$, i.e. un isomorphisme

$$\mathcal{D}_{X, \gamma}(Y \times_S Y) \otimes_{\mathcal{D}_{X, \gamma}(Y)} \mathcal{F}_{\mathcal{D}_{X, \gamma}(Y)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\mathcal{D}_{X, \gamma}(Y)} \otimes_{\mathcal{D}_{X, \gamma}(Y)} \mathcal{D}_{X, \gamma}(Y \times_S Y)$$

Comme $\mathcal{D}_{X, \gamma}(Y \times_S Y) \simeq \mathcal{D}_{X, \gamma}(Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y/S} \simeq \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{X, \gamma}(Y)$ (cf corollaire 3.3.29), il s'identifie à un isomorphisme

$$\varepsilon_{\mathcal{F}}: \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y/S}$$

où $\mathcal{E} = \mathcal{F}_{\mathcal{D}_{X, \gamma}(Y)}$, ce qui fournit l'hyper-stratification à puissances divisées recherchée.

Réciproquement, si \mathcal{E} est un $\mathcal{D}_{X, \gamma}(Y)$ -module muni d'une hyper-stratification à puissances divisées compatible à l'hyper-stratification à puissances divisées canonique sur $\mathcal{D}_{X, \gamma}(Y)$, on construit un cristal \mathcal{F} sur $\text{Cris}(X/S)$ de la façon suivante. Si $(U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(X/S)$ est tel que T soit suffisamment petit, il existe un S -morphisme $T \rightarrow \text{D}_{X, \gamma}(Y)$ qui étend $U \rightarrow Y$. On pose alors $\mathcal{F}_T = h^*(\mathcal{E})$. L'hyper-stratification à puissances divisées sur \mathcal{E} (vue comme un isomorphisme $\mathcal{D}_{X, \gamma}(Y \times_S Y) \otimes_{\mathcal{D}_{X, \gamma}(Y)} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_{X, \gamma}(Y)} \mathcal{D}_{X, \gamma}(Y \times_S Y)$) implique que cela ne dépend pas, à isomorphisme canonique près du choix de h , et donc que cette construction s'étend, par recollement, au cas où on n'a pas de S -morphisme global $T \rightarrow \text{D}_{X, \gamma}(Y)$. On conclut comme lors de la preuve de la proposition 2.4.7. \square

Corollaire 3.3.32. (cf [2, Corollaries 6.7 & 6.8]). *Supposons qu'on a un diagramme cartésien*

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xhookrightarrow{i} & X \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ S_0 & \xhookrightarrow{} & S \end{array}$$

où $X \rightarrow S$ est de type fini et $S_0 \hookrightarrow S$ une immersion à puissances divisées définie par un sous-idéal à puissances divisées de \mathcal{I} . Alors le foncteur naturel de la catégorie des cristaux sur $\text{Cris}(X/S)$ dans celle des cristaux sur $\text{Cris}(X_0/S)$ est une équivalence de catégories. En particulier, si X est lisse sur S , ces catégories sont équivalentes avec la catégorie des \mathcal{O}_X -modules munis d'une connexion intégrable quasi-nilpotente sur S .

Démonstration. La question est locale : on peut supposer qu'on dispose d'une S -immersion fermée $j: X \hookrightarrow Y$ avec Y lisse sur S . On a vu (cf théorème 3.3.19) que $i_{\text{cris}*} \mathcal{O}_{X_0/S} = \mathcal{O}_{X/S}$ et (cf preuve de la proposition 3.3.27) que $j_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/S})_Y = \mathcal{D}_{X, \gamma}(Y)$ et $(j \circ i)_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X_0/S})_Y = \mathcal{D}_{X_0, \gamma_0}(Y)$, de sorte que $\mathcal{D}_{X_0, \gamma_0}(Y) \simeq \mathcal{D}_{X, \gamma}(Y)$. On conclut en invoquant la description (ii) ou (iii) du théorème 3.3.31. \square

Définition 3.3.33. (cf définition 2.4.8). Soit Y un S schéma auquel γ s'étend. Si \mathcal{E} est un \mathcal{O}_Y -module, on pose

$$\mathcal{L}_Y \mathcal{E} = \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}$$

Ce dernier est muni d'une hyper-stratification à puissances divisées

$$\mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L}_Y \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_Y \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y/S}$$

construite de façon analogue à la définition 2.4.8.

37. Cela signifie qu'on a $\nabla_{\mathcal{E}}(\alpha e) = \nabla(\alpha) \otimes e + \alpha \nabla_{\mathcal{E}}(e)$ pour toutes sections α de $\mathcal{D}_{X, \gamma}(Y)$ et e de \mathcal{E} .

Rappelons (cf définition 3.2.7) qu'un opérateur différentiel à puissances divisées entre deux \mathcal{O}_Y -modules \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 est un morphisme \mathcal{O}_Y -linéaire $u: \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$: il induit un morphisme $\mathcal{D}_{Y/S}$ -linéaire

$$\mathcal{L}_Y u: \mathcal{L}_Y \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{L}_Y \mathcal{E}_2$$

défini comme le composé $\mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\delta \otimes \text{Id}_{\mathcal{E}_1}} \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\text{Id}_{\mathcal{D}_{Y/S}} \otimes u} \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}_2$, ce qui fait de \mathcal{L}_Y un foncteur. Si Y/S est lisse, $\mathcal{D}_{Y/S}$ est localement libre sur \mathcal{O}_Y (cf exemple 3.1.27), ce qui implique que \mathcal{L}_Y est exact.

Remarque 3.3.34. Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème 3.3.31. Il implique que le \mathcal{O}_Y -module hyperstratifié $\mathcal{L}_Y \mathcal{E}$ correspond à un cristal sur $\text{Cris}(Y/S)$ que l'on notera $\mathbf{L}_Y \mathcal{E}$. En particulier, on dispose du cristal $i_{\text{cris}}^* \mathbf{L}_Y \mathcal{E}$ sur $\text{Cris}(X/S)$ (cf proposition 3.3.30).

Proposition 3.3.35. (cf [2, Proposition 6.10]). *Sous les hypothèses qui précèdent, notons $\tilde{Y} = i^{-1}(Y) \in (X/S)_{\text{cris}}$ (c'est le faisceau représenté par $\text{D}_{X,\gamma}(Y)$). On a un diagramme de topos³⁸*

$$\begin{array}{ccc} (X/S)_{\text{cris}, \tilde{Y}} & \xrightarrow{\varphi} & \text{D}_{X,\gamma}(Y)_{\text{Zar}} = X_{\text{Zar}} \\ j_{\tilde{Y}} \downarrow & \nearrow u_{X/S} & \\ (X/S)_{\text{cris}} & & \end{array}$$

Si $\lambda: \text{D}_{X,\gamma}(Y)_{\text{Zar}} \rightarrow Y_{\text{Zar}}$ est le morphisme naturel, on a un isomorphisme naturel

$$i_{\text{cris}}^* \mathbf{L}_Y \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} j_{\tilde{Y},*} (\lambda \circ \varphi)^*(\mathcal{E})$$

Théorème 3.3.36. (Lemme de Poincaré cristallin, cf [2, Theorem 6.12]). *Sous les hypothèses du théorème 3.3.31, le complexe de cristaux*

$$i_{\text{cris}}^* \mathbf{L}_Y \Omega_{Y/S}^\bullet$$

sur $\text{Cris}(X/S)$ est une résolution de $\mathcal{O}_{X/S}$, i.e. il y a un quasi-isomorphisme naturel

$$\mathcal{O}_{X/S} \rightarrow i_{\text{cris}}^* \mathbf{L}_Y \Omega_{Y/S}^\bullet$$

Démonstration. On dispose du morphisme $\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{D}_{Y/S} \simeq \mathcal{L}_Y \mathcal{O}_Y$ défini par $x \mapsto x \otimes 1$, compatible aux hyperstratifications à puissances divisées (celle sur \mathcal{O}_Y est l'identité de $\mathcal{D}_{Y/S}$ et celle sur $\mathcal{D}_{Y/S}$ est donnée par $\mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y/S} \rightarrow \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y/S}; a \otimes b \otimes c \otimes d \mapsto 1 \otimes d \otimes a \otimes bc$).

Si x_1, \dots, x_d sont des coordonnées locales de Y sur S , et $\xi_i = 1 \otimes x_i - x_i \otimes 1 \in \mathcal{D}_{Y/S}$, et si a et ω sont des sections de \mathcal{O}_Y et de $\Omega_{Y/S}^k$ respectivement, l'application $\mathcal{L}_Y(d): \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^k \rightarrow \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^{k+1}$ envoie³⁹

$a \xi_1^{[n_1]} \dots \xi_d^{[n_d]} \otimes \omega$ sur $a \sum_{i=1}^d \xi_1^{[n_1]} \dots \xi_i^{[n_i-1]} \dots \xi_d^{[n_d]} \otimes dx_i \wedge \omega + a \xi_1^{[n_1]} \dots \xi_d^{[n_d]} \otimes d\omega$. Cela implique que le composé

$\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{L}_Y \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{L}_Y \Omega_{Y/S}^1$ est nul, et que $\mathcal{L}_Y \Omega_{Y/S}^\bullet$ est un complexe, de sorte qu'on a bien un morphisme de complexes $\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{L}_Y \Omega_{Y/S}^\bullet$, et donc un morphisme de complexes de cristaux $\mathcal{O}_{Y/S} \rightarrow \mathbf{L}_Y \Omega_{Y/S}^\bullet$, et donc un morphisme de complexes de cristaux $\mathcal{O}_{X/S} \rightarrow i_{\text{cris}}^* \mathbf{L}_Y \Omega_{Y/S}^\bullet$. Le fait qu'il s'agit d'une résolution se vérifie

localement : on se place sur un objet $(U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(X/S)$ assez petit tel qu'il existe un section $h: T \rightarrow Y$: on a $(i_{\text{cris}}^* \mathbf{L}_Y \Omega_{Y/S}^\bullet)_T \simeq h^*(\mathbf{L}_Y \Omega_{Y/S}^\bullet)_Y \simeq h^*(\mathcal{L}_Y \Omega_{Y/S}^\bullet)$. Si $h(T)$ est contenu dans un ouvert de Y sur lequel on a des coordonnées locales x_1, \dots, x_d , cela résulte de la proposition 3.1.28. \square

On dispose d'une version filtrée de l'énoncé précédent :

Théorème 3.3.37. (cf [2, Theorems 6.13 & 6.14]). *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a un quasi-isomorphisme*

$$\mathcal{F}_{X/S}^{[n]} \rightarrow \text{Fil}_X^n i_{\text{cris}}^* \mathbf{L}_Y \Omega_{Y/S}^\bullet$$

où Fil_X est la filtration donnée, en coordonnées locales, par $\text{Fil}_X^n i_{\text{cris}}^* \mathbf{L}_Y \Omega_{Y/S}^q = \mathcal{K}^{[n-q]} i_{\text{cris}}^* \mathbf{L}_Y \Omega_{Y/S}^q$ où \mathcal{K} est l'idéal à puissances divisées engendré par $\{\xi_1, \dots, \xi_d\}$ si $(i_{\text{cris}}^* \mathbf{L}_Y \mathcal{O}_Y)_T \simeq \mathcal{O}_T \langle \xi_1, \dots, \xi_d \rangle$.

Plus généralement, si \mathcal{F} est un faisceau de $\mathcal{O}_{X/S}$ -modules, on a un quasi-isomorphisme

$$\mathcal{F}_{X/S}^{[n]} \rightarrow \text{Fil}_X^n (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} i_{\text{cris}}^* \mathbf{L}_Y \Omega_{Y/S}^\bullet)$$

Si en outre \mathcal{F} est un cristal de $\mathcal{O}_{X/S}$ -modules, associé au module à connexion intégrable quasi-nilpotente \mathcal{E} sur $\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)$, on a un quasi-isomorphisme

$$\mathcal{F}_{X/S}^{[n]} \rightarrow \text{Fil}_X^n i_{\text{cris}}^* \mathbf{L}_Y (\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)} \Omega_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)}^\bullet)$$

38. Si \mathcal{C} est une catégorie et $T \in \mathcal{C}$, on note \mathcal{C}_T la catégorie des flèches de \mathcal{C} de but T . Si \mathcal{C} est un topos, on a un morphisme de topos $j_T: \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{C}$ (cf [2, Proposition 5.23]).

39. En effet, $\mathcal{L}_Y(d)$ est le composé $\mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^k \xrightarrow{\delta \otimes \text{Id}_{\Omega_{Y/S}^k}} \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^k \xrightarrow{\text{Id}_{\mathcal{D}_{Y/S}} \otimes d} \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^{k+1}$. Comme δ est un morphisme à puissances divisées, on a $(\delta \otimes \text{Id}_{\Omega_{Y/S}^k}) (a \xi^{[n]} \otimes \omega) = a \delta(\xi)^{[n]} \otimes \omega = a (\mathbf{1} \otimes \xi_i + \xi_i \otimes \mathbf{1})^{[n]} \otimes \omega = a \sum_{i+j=n} \xi^{[i]} \otimes \xi^{[j]} \otimes \omega$

(car $\delta(\xi) = \mathbf{1} \otimes \xi_i + \xi_i \otimes \mathbf{1} \in \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y/S}$), et $\text{Id}_{\mathcal{D}_{Y/S}} \otimes d$ envoie $\xi^{[j]} \otimes \omega$ sur 0 dès que $|j| \geq 2$.

(où $\Omega_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)/S}^\bullet = \mathcal{D}_{X,\gamma}(Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet$ est muni de la connexion mentionnée dans le théorème 3.3.31).

Remarque 3.3.38. La preuve du cas plus général n'est pas plus dure que celle du cas où $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{X/S}$. L'énoncé plus précis dans le cas d'un cristal repose sur l'existence d'un isomorphisme de complexes $i_{\text{cris}}^* \mathbf{L}_Y(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} i_{\text{cris}}^* \mathbf{L}_Y \Omega_{Y/S}^\bullet$ (qui par linéarité préserve les filtrations). Cette dernière résulte sur celle, pour tout \mathcal{O}_Y -module \mathcal{E} muni d'une hyper-stratification à puissances divisées et tout \mathcal{O}_Y -module Ω , de l'isomorphisme horizontal $\mathbf{L}_Y(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)} \mathbf{L}_Y \Omega$ donné par

$$\varepsilon_{\mathcal{E}}: \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega$$

(cf [2, Proposition 6.15]).

3.4. Cohomologie cristalline.

Théorème 3.4.1. ([2, Theorem 7.1], [4, Theorem 3.6]). Soient $X \hookrightarrow Y$ une immersion fermée de S -schémas telle que Y/S soit lisse, et \mathcal{E} un $\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)$ -module muni d'une hyper-stratification à puissances divisées, de cristal associé \mathcal{F} (cf théorème 3.3.31). Alors on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{R}u_{X/S*}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)} \Omega_{\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)/S}^\bullet$$

dans la catégorie dérivée des faisceaux abéliens⁴⁰ sur X_{Zar} . En particulier, on a un isomorphisme naturel

$$\mathbf{H}^i((X/S)_{\text{cris}}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^i(X_{\text{Zar}}, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet)$$

pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

Remarque 3.4.2.

- (1) Le complexe $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)} \Omega_{\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)/S}^\bullet$ n'est autre que le complexe $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet$ déduit de la connexion intégrable sur le \mathcal{O}_Y -module \mathcal{E} .
- (2) La deuxième partie du théorème résulte de la première parce que $\mathbf{R}\Gamma_{\text{cris}} = \mathbf{R}\Gamma_{\text{Zar}} \circ \mathbf{R}u_{X/S*}$.

Démonstration. • Cas où \mathcal{E} provient d'un \mathcal{O}_Y -module \mathcal{M} muni d'une hyper-stratification à puissances divisées (i.e. $\mathcal{E} \simeq \mathcal{D}_{X,\gamma}(Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{M} = \lambda^* \mathcal{M}$ (où $\lambda: \mathbf{D}_{X,\gamma}(Y) \rightarrow Y$ est le morphisme naturel), muni de l'hyper-stratification à puissances divisées produit tensoriel. D'après le lemme de Poincaré cristallin (cf théorème 3.3.37), on a un quasi-isomorphisme

$$\mathcal{F} \rightarrow i_{\text{cris}}^* \mathbf{L}_Y(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet)$$

dans $(X/S)_{\text{cris}}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (X/S)_{\text{cris}, \tilde{Y}} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)_{\text{Zar}} \\ j_{\tilde{Y}} \downarrow & & \parallel \\ (X/S)_{\text{cris}} & \xrightarrow{u_{X/S}} & X_{\text{Zar}} \hookrightarrow Y_{\text{Zar}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \lambda \\ \rightarrow \end{array}$$

(cf proposition 3.3.35, rappelons que $\tilde{Y} = i^{-1}(Y)$ est représenté par $\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y) \in \text{Cris}(X/S)$). D'après la proposition 3.3.35, on a

$$i_{\text{cris}}^* \mathbf{L}_Y(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet) \simeq j_{\tilde{Y},*}(\lambda \circ \varphi)^*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet) \simeq j_{\tilde{Y},*} \varphi^*(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)} \Omega_{\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)/S}^\bullet)$$

Ils sont acycliques⁴¹ pour $u_{X/S,*}$: on a un isomorphisme dans la catégorie dérivée :

$$\mathbf{R}u_{X/S,*}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} u_{X/S,*} j_{\tilde{Y},*} \varphi^*(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)} \Omega_{\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)/S}^\bullet) \simeq \varphi_* \varphi^*(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)} \Omega_{\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)/S}^\bullet)$$

où $\varphi_* \varphi^*(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)} \Omega_{\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)/S}^\bullet)$ n'est autre que le complexe de faisceaux de Zariski $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)} \Omega_{\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)/S}^\bullet$.

• Cas général. Commençons par observer que $\mathbf{R}i_{\text{cris}*}(\mathcal{F}) \simeq i_{\text{cris}*}(\mathcal{F})$ est un cristal de $\mathcal{O}_{Y/S}$ -modules (on a vu que $i_{\text{cris}*}$ est exact, cf proposition 3.3.27). Si $(U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(Y/S)$, on a vu que $(i_{\text{cris}*}(\mathcal{F}))_T = \mathcal{F}_D$ où D est une enveloppe à puissances divisées de $X \cap T$ dans T dont la formation commute aux changements de base : si $(U' \hookrightarrow T', \delta') \rightarrow (U \hookrightarrow T, \delta) \in \text{Cris}(Y/S)$, on a $u^*(i_{\text{cris}*}(\mathcal{F})_T) = \mathcal{O}_{T'} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{F}_D \simeq \mathcal{D}' \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{F}_D \simeq \mathcal{F}_{D'} = i_{\text{cris}*}(\mathcal{F})_{T'}$ parce que \mathcal{F} est un cristal. Cela implique en particulier que $\mathcal{E} = (i_{\text{cris}*}(\mathcal{F})_Y) = \lambda_*(\mathcal{F}_{\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)})$, et $i_{\text{cris}*}(\mathcal{F})$ est le cristal sur $\text{Cris}(Y/S)$ associé à \mathcal{E} vu comme \mathcal{O}_Y -module muni d'une hyper-stratification à puissances divisées. Le cas particulier traité plus haut implique qu'il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{R}u_{Y/S,*} i_{\text{cris}*}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet \simeq \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)} \Omega_{\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)/S}^\bullet$$

Comme $\mathbf{R}i_{\text{cris}*} = i_{\text{cris}*}$ et $\mathbf{R}u_{Y/S,*} \mathbf{R}i_{\text{cris}*}(\mathcal{F}) = \mathbf{R}i_{\text{Zar}} \mathbf{R}u_{X/S,*}(\mathcal{F})$, on a $\mathbf{R}i_{\text{Zar}} \mathbf{R}u_{X/S,*}(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)} \Omega_{\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)/S}^\bullet$: on conclut en observant que i_{Zar} est exact et $i_{\text{Zar}}^{-1} \circ i_{\text{Zar}*} \simeq \text{Id}$. \square

40. Rappelons que \mathcal{E} et donc $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)} \Omega_{\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)/S}^\bullet$ est un faisceau sur $\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)_{\text{Zar}} = X_{\text{Zar}}$.

41. Cela résulte de la suite spectrale $E_2^{p,q} = \mathbf{R}^p u_{X/S,*} \mathbf{R}^q j_{\tilde{Y},*}(\mathcal{F}) \Rightarrow \mathbf{R}^{p+q}(u_{X/S} \circ j_{\tilde{Y}})(\mathcal{F})$ qui dégénère en un isomorphisme $\mathbf{R}^i u_{X/S,*}(j_{\tilde{Y},*}(\mathcal{F})) \simeq \mathbf{R}^i(u_{X/S} \circ j_{\tilde{Y}})(\mathcal{F})$: comme $u_{X/S} \circ j_{\tilde{Y}} = i_{\tilde{Y}} \circ \varphi_{\tilde{Y}}$ avec $i_{\tilde{Y}}$ et $\varphi_{\tilde{Y}}$ exacts (cf [2, Proposition 5.26 & Corollary 5.27]), on a $\mathbf{R}^i u_{X/S,*}(j_{\tilde{Y},*}(\mathcal{F})) = 0$ si $i > 0$.

Exemple 3.4.3. On a $\mathbf{H}^i((X/S)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X/S}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^i(X_{\text{Zar}}, \Omega_{\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)/S}^\bullet)$.

On dispose d'une version filtrée (en utilisant le lemme de Poincaré cristallin filtré) :

Théorème 3.4.4. ([2, Theorem 7.2]). *Sous les hypothèses du théorème 3.4.1, on a*

$$\mathbf{R}u_{X/S,*} \mathcal{F}_{X/S}^{[n]} \xrightarrow{\sim} \text{Fil}^m(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)} \Omega_{\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)/S}^\bullet)$$

et donc

$$\mathbf{R}\Gamma((X/S)_{\text{cris}}, \mathcal{F}_{X/S}^{[n]}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\Gamma(X, \text{Fil}^m(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)} \Omega_{\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)/S}^\bullet))$$

(où $\text{Fil}^n(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)} \Omega_{\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)/S}^\bullet)$ est le sous-complexe de $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)} \Omega_{\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)/S}^\bullet$ dont le terme de degré q est $\mathcal{I}^{[n-q]} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\gamma}(Y)} \Omega_{\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)/S}^\bullet$ et \mathcal{I} l'idéal de X dans $\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)$).

Corollaire 3.4.5. *Si X/S est lisse, $S_0 \hookrightarrow S$ est une immersion fermée définie par un sous-idéal à puissance divisées de \mathcal{I} et $X_0 = S_0 \times_S X$. Alors on a un quasi-isomorphisme naturel $\mathbf{H}^i((X_0/S)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X_0/S}) \rightarrow \mathbf{H}^i(X_{\text{Zar}}, \Omega_{X/S}^\bullet)$.*

Remarque 3.4.6. Plaçons-nous dans la situation (*). Supposons que X (resp. X') peut se plonger dans un S -schéma (resp. un S' -schéma) lisse. Si X/S est séparé, alors⁴² il existe de telles immersions fermées $X \hookrightarrow Y$ et $X' \hookrightarrow Y'$ et un morphisme $\tilde{g}: Y' \rightarrow Y$ qui relève g .

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{\tilde{g}} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ X' & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}^i((X/S)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X/S}) & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{H}^i(X_{\text{Zar}}, \Omega_{\mathbf{D}_{X,\gamma}(Y)/S}) \\ \downarrow g^* & & \downarrow \tilde{g}^* \\ \mathbf{H}^i((X'/S')_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X'/S'}) & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{H}^i(X'_{\text{Zar}}, \Omega_{\mathbf{D}_{X',\gamma}(Y')/S}) \end{array}$$

qui implique que \tilde{g}^* ne dépend pas des choix de Y, Y' et \tilde{g} .

Mentionnons pour finir quelques propriétés de la cohomologie cristalline.

Théorème 3.4.7. (Finitude et annulation, cf [2, Theorem 7.6]). *Supposons S quasi-compact, $f: X \rightarrow S$ quasi-compact et quasi-séparé. Posons $f_{X/S} = f \circ u_{X/S}: (X/S)_{\text{cris}} \rightarrow S_{\text{Zar}}$. Si \mathcal{F} est un cristal quasi-cohérent⁴³ sur $\text{Cris}(X/S)$, alors $\mathbf{R}^i f_{X/S,*} \mathcal{F}$ est quasi-cohérent sur S . En outre, il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que $\mathbf{R}^i f_{X/S,*} \mathcal{F} = 0$ pour tout \mathcal{F} et tout $i > r$.*

Théorème 3.4.8. (cf [2, Theorem 7.8]). *Considérons le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow f'_0 & & \downarrow f_0 \\ S'_0 & \xrightarrow{u_0} & S_0 \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{u} & S \end{array}$$

où $u: (S', \mathcal{I}', \gamma') \rightarrow (S, \mathcal{I}, \gamma)$ est un morphisme à puissances divisées, $S_0 \hookrightarrow S$ et $S'_0 \hookrightarrow S'$ sont définis par des sous-idéaux à puissances divisées de \mathcal{I} et \mathcal{I}' respectivement. On suppose que $X' = X \times_{S_0} S'_0$ et que \mathcal{F} est un cristal quasi-cohérent et plat sur $\text{Cris}(X/S)$. Alors on a un isomorphisme (de changement de base)

$$\mathbf{L}u^* \mathbf{R}f_{X/S,*}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{R}f'_{X'/S',*} g_{\text{cris}}^*(\mathcal{F}).$$

42. Soient $i: X \hookrightarrow Y_0$ (resp. $i': X' \hookrightarrow Y'_0$) une S -immersion fermée (resp. une S' -immersion fermée). On dispose du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{i'} & Y' & & \\ \downarrow g & \searrow \delta & \downarrow \pi & \searrow & \\ X & \xrightarrow{i} & Y & \longrightarrow & S \end{array}$$

π est lisse par changement de base (car $Y \rightarrow S$ est lisse) : il en est de même du composé $Y \times_S Y' \rightarrow S'$ vu que $Y' \rightarrow S'$ est lisse. Par ailleurs, le morphisme δ est le composé des trois applications $\Delta_{X/S} \times \text{Id}_{X'}: X' \rightarrow X \times_S X'$, $i \times \text{Id}_{X'}: X \times_S X' \rightarrow Y \times_S X'$ et $\text{Id}_Y \times i': Y \times_S X' \rightarrow Y \times_S Y'$ dont chacune est une immersion fermée par changement de base (la première parce que $X \rightarrow S$ est séparé).

43. I.e. tel que \mathcal{F}_T soit un \mathcal{O}_T -module quasi-cohérent pour tout $(U \hookrightarrow T, \gamma) \in \text{Cris}(X/S)$.

Corollaire 3.4.9. (cf [2, Corollary 7.9]). Supposons S quasi-compact, $S_0 \hookrightarrow S$ défini par un sous-idéal à puissances divisées de \mathcal{I} , et soit \mathcal{F} un cristal plat sur $\text{Cris}(X/S)$, $\mathcal{E} = \mathcal{F}_{(X=X,0)}$ muni de sa connexion intégrable ∇ (relativement à S_0). Alors on a un isomorphisme

$$(\mathbf{R}f_{X/S,*}(\mathcal{F})) \otimes_{\mathcal{O}_S}^{\mathbf{L}} \mathcal{O}_{S_0} \rightarrow \mathbf{R}f_*(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^{\bullet}).$$

Corollaire 3.4.10. (cf [2, Corollary 7.11]). Soit $f: X \rightarrow Y$ un S -morphisme lisse, quasi-compact et quasi-séparé, avec Y quasi-compact. Si \mathcal{F} est un cristal quasi-cohérent et plat sur $\text{Cris}(X/S)$, alors $\mathbf{R}f_{\text{cris},*}\mathcal{F}$ est un cristal dans la catégorie dérivée des \mathcal{O}_Y -modules.

Remarque 3.4.11. Supposons Y/S lisse. Alors les projections $p_i: D_{Y/S} \rightarrow Y$ sont lisses, de sorte que $\mathbf{L}p_i^* = p_i^*$: le corollaire qui précède implique qu'on a un isomorphisme

$$p_2^*(\mathbf{R}^i f_{\text{cris},*}(\mathcal{F})_Y) \rightarrow p_1^*(\mathbf{R}^i f_{\text{cris},*}(\mathcal{F})_Y).$$

Comme $f: X \rightarrow S$ est lisse, on a $\mathbf{R}^i f_{\text{cris},*}(\mathcal{F})_Y = \mathbf{R}^i f_*(\mathcal{F}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/Y}^{\bullet})$. cela fournit une connexion intégrable, quasi-nilpotente sur $\mathbf{R}^i f_*(\mathcal{F}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/Y}^{\bullet})$: c'est la connexion de Gauss-Manin.

Théorème 3.4.12. (cf [2, Theorem 7.24 & Summary 7.26]). Soit A un anneau de valuation discrète complet, de caractéristique 0, d'idéal maximal I et de corps résiduel k de caractéristique p (l'exemple qu'on a en tête est bien entendu $A = W(k)$ où k est un corps parfait de caractéristique p). On suppose I muni d'une structure à puissances divisées (ce qui implique que l'indice de ramification absolu e est $\leq p-1$, cf exemple 3.1.3 (1)). Si X est un k -schéma, on pose

$$H_{\text{cris}}^{\bullet}(X/A) := \varprojlim_n H^{\bullet}((X/\text{Spec}(A/I^n))_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X/\text{Spec}(A/I^n)}).$$

- (1) $H_{\text{cris}}^{\bullet}$ est un foncteur de la catégorie des k -schémas propres⁴⁴ et lisses dans la catégorie des A -modules gradués de type fini.
- (2) On a les suites exactes

$$0 \rightarrow H_{\text{cris}}^i(X/A) \otimes_A k \rightarrow H_{\text{dR}}^i(X/k) \rightarrow \text{Tor}_1^A(H_{\text{cris}}^{i+1}(X/A), k) \rightarrow 0$$

- (3) Si Y est un A -schéma lisse relevant X , on a un isomorphisme naturel

$$H_{\text{cris}}^i(X/A) \simeq H_{\text{dR}}^i(Y/A)$$

Remarque 3.4.13. (1) La cohomologie cristalline fournit une bonne cohomologie pour les k -schémas propres et lisses. Si X est un k -schéma projectif ou relevable en caractéristique 0, alors les modules ont le bon rang (donné par les nombres de Betti $\dim_{\mathbf{Q}_\ell} H_{\text{ét}}^i(X_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$ si $\ell \neq p$). Elle satisfait Künneth, la dualité de Poincaré, etc, ce qui permet de montrer la rationalité des fonction zéta.

- (2) Les choses se passent moins bien si X n'est pas propre ou singulier.

3.4.14. *Des contre-exemples* (cf [11, Tag 07LI]). Dans ce paragraphe, on pose $A = \mathbf{Z}_p$, $I = \langle p \rangle$ muni de sa structure à puissances divisées γ .

• Posons $C = \mathbf{F}_p[x, y]/\langle x^2, xy, y^2 \rangle$, qu'on présente comme $C = P/J$ où $P = \mathbf{Z}_p[x, y]$ et $J = \langle x^2, xy, y^2, p \rangle$. Posons $D = \widehat{D_{P,\gamma}(J)}$ et

$$\tau = \bar{\gamma}_p(x^2)\bar{\gamma}_p(y^2) - \bar{\gamma}_p(xy)^2 \in D$$

Si $X = \text{Spec}(C)$, alors τ définit un élément de $H_{\text{cris}}^0(X/A)$ en vertu du théorème 3.4.1, car

$$\begin{aligned} d(\bar{\gamma}_p(x^2)\bar{\gamma}_p(y^2)) &= \bar{\gamma}_{p-1}(x^2)\bar{\gamma}_p(y^2) \otimes dx^2 + \bar{\gamma}_p(x^2)\bar{\gamma}_{p-1}(y^2) dy^2 \\ &= \frac{2}{(p-1)!} (x^{2p-1}\bar{\gamma}_p(y^2) \otimes dx + y^{2p-1}\bar{\gamma}_p(x^2) dy) \\ &= \frac{2}{(p-1)!} (x^{p-1}\bar{\gamma}_p(xy^2) \otimes dx + y^{p-1}\bar{\gamma}_p(x^2y) dy) \\ &= \frac{2}{(p-1)!} \bar{\gamma}_p(xy)(x^{p-1}y^p \otimes dx + x^p y^{p-1} dy) \\ &= 2\bar{\gamma}_p(xy)\bar{\gamma}_{p-1}(xy)(y dx + x dy) \\ &= 2\bar{\gamma}_p(xy)\bar{\gamma}_{p-1}(xy) d(xy) \\ &= d(\bar{\gamma}_p(xy)^2) \end{aligned}$$

ce qui montre que $d\tau = 0$. Par ailleurs, on a

$$p!\tau = x^{2p}\bar{\gamma}_p(y^2) - (xy)^p\bar{\gamma}_p(xy) = \bar{\gamma}_p(x^2y^2) - \bar{\gamma}_p((xy)^2) = 0$$

alors que $\tau \neq 0$. En effet, si

$$\pi: B := \mathbf{F}_p[x, y, u, v]/\langle x^3, x^2y, xy^2, y^3, xu, yu, xv, yv, u^2, v^2 \rangle \rightarrow C$$

44. La propreté est utilisée pour le passage à la limite projective (finitude du \varprojlim , cf [2, Appendix B]).

est la surjection naturelle, on a $K = \text{Ker}(\pi) = \mathbf{F}_p x^2 \oplus \mathbf{F}_p xy \oplus \mathbf{F}_p y^2 \oplus \mathbf{F}_p u \oplus \mathbf{F}_p v \oplus \mathbf{F}_p uv$. On munit K d'une structure à puissances divisées en posant

$$\delta_p(ax^2 + bxy + cy^2 + du + ev + fuv) = a^p u + c^p v$$

(les conditions du lemme 3.1.4 sont trivialement vérifiées). D'après la propriété universelle de l'enveloppe à puissances divisées, on a un unique morphisme $f: D \rightarrow B$ factorisant le morphisme $P \rightarrow B$. On a alors $f(\tau) = \delta_p(x^2)\delta_p(y^2) - \delta_p(xy)^2 = uv \neq 0$, ce qui implique bien que $\tau \neq 0$. Cela fournit donc un exemple pour lequel $H_{\text{cris}}^0(X/A)$ a de la p -torsion.

• Soient $d \in \mathbf{N}_{>0}$ et $C = \mathbf{F}_p[x_1, \dots, x_d]$ que l'on présente comme $C = P/J$ où $P = \mathbf{Z}_p[x_1, \dots, x_d]$ et $J = pP$ (c'est un idéal à puissances divisées). On pose $X = \text{Spec}(C)$ et $S = \text{Spec}(A)$. D'après les théorèmes 3.4.1 et 3.4, $\mathbf{R}\Gamma((X/S)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X/S})$ est représenté par le complexe de de Rham à puissances divisées

$$D \rightarrow \Omega_{D/A}^1 \rightarrow \Omega_{D/A}^2 \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega_{D/A}^d \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

où $D = \widehat{D_{P,\gamma}(J)}$. Cela implique déjà que $H_{\text{cris}}^i(X/A) = 0$ si $i > d$ et $H_{\text{cris}}^0(X/S) = 0$, ce qui est raisonnable. Par contre, $H_{\text{cris}}^r(X/A)$ est infini, n'est pas de torsion et n'est pas séparé pour la topologie p -adique. Traitons le cas $r = 1$: il s'agit de décrire le conoyau de l'application

$$d: D = \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbf{Z}_p x^n \right)^{\widehat{}} \rightarrow \Omega_{D/\mathbf{Z}_p}^1 = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}_p x^{n-1} \otimes dx \right)^{\widehat{}}$$

Ce dernier contient $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}_p/n\mathbf{Z}_p$: il est infini. En outre, si $\omega = \sum_{m=1}^{\infty} p^m x^{2m-1} dx$ définit un élément qui n'est pas de torsion dans le conoyau. Mieux, si $\eta = \sum_{m=1}^{\infty} p^m x^{p^m-1} dx$ est congru à $\sum_{m=N}^{\infty} p^m x^{p^m-1} dx$ modulo $\text{Im}(d)$, ce qui implique que l'image de η dans $\text{Coker}(d)$ est divisible par p^N pour tout $N \in \mathbf{N}$. Elle n'est cependant pas nulle : mieux $p^N \eta$ a une image non nulle dans $\text{Coker}(d)$, ce qui montre que l'image de η engendre une copie de \mathbf{Q}_p dans $H_{\text{cris}}^1(X/A)$.

3.4.15. *Le théorème de comparaison de Berthelot-Ogus.* Dans ce paragraphe, k est un corps parfait de caractéristique p . On note $f: X \rightarrow S$ un morphisme de k -schémas et $\Sigma = \text{Spf}(W)$, où $W = W(k)$ est l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k . On note $F_X: X \rightarrow X$ le Frobenius absolu et $F_{X/S}: X \rightarrow X' := X_S^{(p)}$ le Frobenius relatif :

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow^{F_X} & & & \\ & & X & \xrightarrow{W_{X/S}} & X \\ & \searrow^{F_{X/S}} & \downarrow f' & & \downarrow f \\ & & S & \xrightarrow{F_S} & S \end{array}$$

On dispose alors du morphisme

$$F_{X/S}^*: \mathbf{R}F'_{\text{cris}*} \mathcal{O}_{X'/\Sigma} \rightarrow \mathbf{R}F_{\text{cris}*} \mathcal{O}_{X/\Sigma}$$

Lemme 3.4.16. (cf [3, Theorem 1.3]). *Supposons X/S lisse de type fini et soit $S \hookrightarrow (T, \mathcal{F}, \delta)$ une Σ -immersion à puissances divisées dans un schéma formel. Notons $f_{X/T}$ le composé*

$$(X/T)_{\text{cris}} \xrightarrow{u_{X/T}} X_{\text{Zar}} \xrightarrow{f_{\text{Zar}}} T_{\text{Zar}}$$

Si \mathcal{O}_T sans p -torsion, le morphisme naturel

$$F_{X/T} =: F_{X/S}^*: \mathbf{R}f'_{X'/T,*} \mathcal{O}_{X'/T} \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}f_{X/T,*} \mathcal{O}_{X/T} \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \mathbf{Q}$$

est un isomorphisme.

Idée de la preuve. Si \mathcal{F} est un faisceau abélien, il en est de même de $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ (parce que X_{Zar} est noethérienne). Il en résulte que $(f_{\text{Zar}*} \mathcal{F}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \rightarrow f_{\text{Zar}*} (\mathcal{F} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})$ est un isomorphisme : il en est de même de $(\mathbf{R}f_{\text{Zar}*} \mathcal{F}) \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \mathbf{Q} \rightarrow f_{\text{Zar}*} (\mathcal{F} \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \mathbf{Q})$ dans la catégorie dérivée $D(X_{\text{Zar}})$. Comme $f_{X/T} = f_{\text{Zar}} \circ u_{X/T}$, il suffit donc de montrer que

$$F_{X/S}^*: \mathbf{R}u_{X'/T} \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}u_{X/T} \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \mathbf{Q}$$

est un quasi-isomorphisme (prendre $\mathcal{F} = \mathbf{R}u_{X'/T,*} \mathcal{O}_{X'/T}$). C'est une question locale sur T et X : on peut supposer que X se relève en un schéma formel Y lisse sur T . Supposons⁴⁵ que F_S se relève en un morphisme $F_T: T \rightarrow T$ (c'est alors automatiquement un morphisme à puissances divisées) et que F_X se relève en un F_T -morphisme $F_Y: Y \rightarrow Y$. Posons $Y' = Y \times_{F_T} T$: on dispose d'un relèvement $F_{Y/T}: Y \rightarrow Y'$ du Frobenius relatif $F_{X/S}$. L'action $F_{Y'/T}^*$ de $F_{Y/T}$ sur la cohomologie de de Rham représente celle de $F_{X/T}$ sur la cohomologie cristalline. Il s'agit de voir que

$$F_{Y'/T}^*: \Omega_{Y'/T}^{\bullet} \rightarrow F_{Y/T,*} \Omega_{Y/T}^{\bullet}$$

45. Le cas général est plus délicat, cf [3, Theorem 1.3].

est une isogénie. Observons que ⁴⁶ F_{Y_0/T_0}^* tue Ω_{Y_0'/T_0} , ce qui implique que $F_{Y/T}^*(\Omega_{Y'/T}^1) \subset pF_{Y/S,*}\Omega_{Y/T}^1$. Comme $F_{Y/T}^*$ est compatible aux produits, on a $F_{Y/T}^*(\Omega_{Y'/T}^i) \subset p^i F_{Y/S,*}\Omega_{Y/T}^i$. Comme on a un morphisme de complexes, l'image de $F_{Y/T}^*$ est contenue dans

$$\{\omega \in p^i F_{Y/S,*}\Omega_{Y/T}^i \mid d\omega \in p^{i+1} F_{Y/S,*}\Omega_{Y/T}^{i+1}\}$$

C'est en fait une égalité (cf [2, Theorem 8.3], l'un des ingrédients de la preuve est l'isomorphisme de Cartier). \square

Théorème 3.4.17. (cf [3, Theorem 2.1]). *Soient $f: X \rightarrow S$ et $g: Y \rightarrow S$ deux morphismes lisses de schémas noethériens, $S_0 \hookrightarrow S$ une immersion fermée définie par un idéal à puissances divisées et $u: X_0 \rightarrow Y_0$ (où $X_0 = X \times_S S_0$ et $Y_0 = Y \times_S S_0$) un S_0 -morphisme. Il existe des morphismes canoniques*

$$\begin{aligned} u^*: (Rg_{Y/T,*}\mathcal{O}_{Y/T}) \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Q} &\rightarrow (Rf_{X/T,*}\mathcal{O}_{X/T}) \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Q} \\ u^*: \mathbf{R}\Gamma_{\text{cris}}(Y/T) \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\text{cris}}(X/T) \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Q} \end{aligned}$$

les que si $h: Z \rightarrow S$ est un troisième morphisme lisse de schémas noethériens et $v: Y_0 \rightarrow Z_0$ un S_0 -morphisme, on a $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$. En outre, si u est induit par un S -morphisme $\tilde{u}: X \rightarrow Y$, on a $u^* = \tilde{u}^*$.

Démonstration. Le deuxième isomorphisme résulte du premier en prenant les sections globales sur T . Posons $X^{(0)} = X$ et $X^{(n+1)} = (X^{(n)})' = X^{(n)} \times_{F_S} S$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Avec le lemme 3.4.16, une récurrence immédiate montre qu'on a un isomorphisme canonique ⁴⁷

$$F_{X/S}^{(n)*}: Rf_{X^{(n)}/T,*}\mathcal{O}_{X^{(n)}/T} \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Q} \rightarrow Rf_{X/T,*}\mathcal{O}_{X/T} \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Q}$$

Si \mathcal{I} désigne l'idéal de l'immersion fermée $j: S_0 \hookrightarrow S$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathcal{I}^{p^n} = 0$: le morphisme F_S^n se factorise à travers un morphisme $\rho^{(n)}: S \rightarrow S_0$:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{F_S^n} & S \\ j \uparrow & \searrow \rho^{(n)} & \uparrow j \\ S_0 & \xrightarrow{F_{S_0}^n} & S_0 \end{array}$$

On dispose de $\rho^{(n)*}(u): X^{(n)} \rightarrow Y^{(n)}$. Pour $m \geq n$, on a $\rho^{(m)} = \rho^{(n)} \circ F_S^{m-n}$ donc $\rho^{(m)*}(u) = F_S^{m-n*}(\rho^{(n)*}(u))$. Définissons u^* comme le composé

$$\begin{array}{ccc} (Rg_{Y/T,*}\mathcal{O}_{Y/T}) \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Q} & \xrightarrow{(F_{Y/S}^{(n)*})^{-1}} & (Rg_{Y^{(n)}/T,*}\mathcal{O}_{Y^{(n)}/T}) \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Q} \\ u^* \downarrow \vdots & & \downarrow \rho^{(n)*}(u)^* \\ (Rf_{X/T,*}\mathcal{O}_{X/T}) \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Q} & \xleftarrow{F_{Y/S}^{(n)*}} & (Rf_{X^{(n)}/T,*}\mathcal{O}_{X^{(n)}/T}) \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Q} \end{array}$$

La relation $\rho^{(m)*}(u) = F_S^{m-n*}(\rho^{(n)*}(u))$ et la canonicité de F_S^{m-n*} impliquent que cette définition ne dépend pas du choix de n tel que $\mathcal{I}^{p^n} = 0$. Comme $\rho^{(n)*}(v \circ u) = \rho^{(n)*}(v) \circ \rho^{(n)*}(u)$, la relation $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$ résulte de la fonctorialité de la cohomologie cristalline. La dernière assertion résulte de la définition de u^* et de la canonicité de $F_{X/S}^{(n)*}$. \square

Corollaire 3.4.18. (cf [3, Corollary 2.2]). *Si X et X' sont deux déformations de X_0 sur S , il existe des isomorphismes canoniques*

$$\begin{aligned} \delta_{X,X'}: (Rg_{X'/T,*}\mathcal{O}_{X'/T}) \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Q} &\rightarrow (Rf_{X/T,*}\mathcal{O}_{X/T}) \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Q} \\ u^*: \mathbf{R}\Gamma_{\text{cris}}(X'/T) \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\text{cris}}(X/T) \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Q} \end{aligned}$$

tels que :

- (i) si X'' est une autre déformation, on a $\delta_{X,X''} = \delta_{X,X'} \circ \delta_{X',X''}$;
- (ii) si Y et Y' sont des déformations de Y et $u: X_0 \rightarrow Y_0$ un S_0 -morphisme, on a $\delta_{X,X'} \circ u^* = u^* \circ \delta_{Y,Y'}$.

Démonstration. Résulte du théorème 3.4.17 appliqué à $u = v = \text{Id}_{X_0}$. La relation (ii) résulte que $\delta_{X,X'} \circ u^* = \text{Id}_{X_0}^* \circ u^* = (u \circ \text{Id}_{X_0})^* = (\text{Id}_{Y_0} \circ u)^* = u^* \circ \delta_{Y,Y'}$. \square

Théorème 3.4.19. (cf [3, Theorem 2.4]). *Soient K un corps de valuation discrète complet, de caractéristique 0, à corps résiduel k , et \mathfrak{X} un \mathcal{O}_K -schéma formel lisse, de fibre spéciale X_0 . Il existe des isomorphismes canoniques*

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{cris}}: \mathbf{R}\Gamma(\mathfrak{X}, \Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{O}_K}^{\bullet}) \otimes_{\mathcal{O}_K}^{\mathbb{L}} K &\xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\Gamma_{\text{cris}}(X_0/W) \otimes_W^{\mathbb{L}} K \\ \sigma_{\text{cris}}: \mathbf{H}_{\text{dR}}^i(\mathfrak{X}/\mathcal{O}_K) \otimes_{\mathcal{O}_K} K &\xrightarrow{\sim} \mathbf{H}_{\text{cris}}^i(X_0/W) \otimes_W K. \end{aligned}$$

46. On note avec un indice 0 la fibre spéciale.

47. En ce qu'il commute aux morphismes induits fonctoriellement par les morphismes de S -schémas.

Démonstration. L'application $(W, pW, \gamma) \rightarrow (\mathcal{O}_K, p\mathcal{O}_K, \gamma)$ est un morphisme à puissances divisées. Posons $R = \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \simeq k[t]/\langle t^e \rangle$ (c'est une k -algèbre artinienne) et $S = \text{Spec}(R)$. Posons $T = \text{Spf}(\mathcal{O}_K)$: c'est un Σ -épaississement à puissances divisées de S . Pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on pose $\Sigma_n = \text{Spec}(W/p^n W)$, $T_n = \text{Spec}(\mathcal{O}_K/p^n \mathcal{O}_K)$. Posons aussi $X = \mathfrak{X} \times_T S$ et $\bar{X}_0 = X_0 \times_{\Sigma_1} S$. Le théorème de changement de base cristallin (cf théorème 3.4.8) implique qu'on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(X_0/\Sigma_n) \otimes_{W/p^n W}^{\mathbf{L}} (\mathcal{O}_K/p^n \mathcal{O}_K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(\bar{X}_0/T_n)$$

Comme \mathcal{O}_K est plat sur W , on a $\otimes_{W/p^n W}^{\mathbf{L}} (\mathcal{O}_K/p^n \mathcal{O}_K) \simeq \otimes_W^{\mathbf{L}} \mathcal{O}_K$: en passant à la limite il vient un isomorphisme

$$\mathrm{R}\varprojlim (\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(X_0/\Sigma_n) \otimes_{W/p^n W}^{\mathbf{L}} (\mathcal{O}_K/p^n \mathcal{O}_K)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\varprojlim (\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(\bar{X}_0/T_n))$$

Comme \mathcal{O}_K est libre de rang fini sur W , les foncteurs $\otimes_W^{\mathbf{L}} \mathcal{O}_K$ et $\mathrm{R}\varprojlim$ commutent (cf [2, Appendix B (2.3)]) : on obtient un isomorphisme canonique

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(X_0/W) \otimes_W^{\mathbf{L}} \mathcal{O}_K \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(\bar{X}_0/T)$$

Par ailleurs, X est lisse sur S et \mathfrak{X} est un relèvement lisse de X au-dessus de l'épaississement à puissances divisées $S \hookrightarrow T$. D'après le théorème 3.4.1 (et un autre argument de passage à la limite), on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathfrak{X}, \Omega_{\mathfrak{X}/T}^{\bullet}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(X/T)$$

Mais X et \bar{X}_0 sont deux déformations de X_0 : on dispose de l'isomorphisme

$$\delta_{\bar{X}_0, X} : \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(X/T) \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(\bar{X}_0/T) \otimes_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{L}} \mathbf{Q}.$$

Le théorème résulte de la composition de ces trois isomorphismes. \square

Remarque 3.4.20. L'adjectif « canonique » de l'énoncé signifie que si $h: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ est un morphisme de \mathcal{O}_K -schémas formels lisses, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{R}\Gamma(\mathfrak{Y}, \Omega_{\mathfrak{Y}/\mathcal{O}_K}^{\bullet}) \otimes_{\mathcal{O}_K}^{\mathbf{L}} K & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(Y_0/W) \otimes_W^{\mathbf{L}} K \\ \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(h) \downarrow & & \downarrow \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(h) \\ \mathrm{R}\Gamma(\mathfrak{X}, \Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{O}_K}^{\bullet}) \otimes_{\mathcal{O}_K}^{\mathbf{L}} K & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(X_0/W) \otimes_W^{\mathbf{L}} K \end{array}$$

Corollaire 3.4.21. Si \mathbf{X} est un \mathcal{O}_K -schéma propre et lisse, de fibre spéciale X_0 , il y a un isomorphisme canonique

$$\sigma_{\mathrm{cris}} : \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^i(\mathbf{X}/\mathcal{O}_K) \otimes_{\mathcal{O}_K} K \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_{\mathrm{cris}}^i(X_0/W) \otimes_W K.$$

Démonstration. Cela résulte du théorème de comparaison de Grothendieck (cf [8, Corollary 8.2.4]). \square

4. L'ANNEAU A_{cris}

4.1. La construction générale de Fontaine. Soient Λ un anneau et R une Λ -algèbre séparés et complets pour la topologie p -adique. Supposons le Frobenius surjectif sur R/pR .

4.1.1. *L'anneau \mathcal{R} et l'application θ .* Posons

$$\mathcal{R}_R = \varprojlim_n R/pR = \{(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in (R/pR)^{\mathbf{N}} \mid (\forall n \in \mathbf{N}) x_{n+1}^p = x_n\}$$

C'est un anneau *parfait*⁴⁸ de caractéristique p . Si $m \in \mathbf{N}$, on note $\mathrm{pr}_m : \mathcal{R}_R \rightarrow R/pR$ la m -ième projection.

Lemme 4.1.2. *L'application naturelle*⁴⁹

$$\varprojlim_{x \mapsto x^p} R = \{(x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} \in R^{\mathbf{N}} \mid (\forall n \in \mathbf{N}) x^{(n+1)p} = x^{(n)}\} \rightarrow \mathcal{R}_R$$

est bijective.

Démonstration. Soient $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{R}_R$, et $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbf{N}}, (\tilde{x}_n)_{n \in \mathbf{N}} \in R^{\mathbf{N}}$ des suites relevant x (i.e. telles que la réduction de \hat{x}_n et \tilde{x}_n modulo pR soit x_n pour tout $n \in \mathbf{N}$). Comme $\hat{x}_{n+m} \equiv \tilde{x}_{n+m} \pmod{pR}$, une récurrence immédiate implique que

$$(\spadesuit) \quad \hat{x}_{n+m}^{p^m} \equiv \tilde{x}_{n+m}^{p^m} \pmod{p^{m+1}R}$$

Avec $\tilde{x}_n = \hat{x}_{n+1}^p$, on a $\hat{x}_{n+m+1}^{p^{m+1}} \equiv \hat{x}_{n+m}^{p^m} \pmod{p^{m+1}\mathcal{O}_C}$: la suite $(\hat{x}_{n+m}^{p^m})_{m \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy, donc converge dans R . En outre, () montre que sa limite $x^{(n)} \in \mathcal{O}_C$ ne dépend pas du choix du relèvement $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Bien entendu, la réduction de $x^{(n)}$ modulo pR redonne x_n , de sorte que la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ est elle aussi un relèvement de x . En particulier, on a

$$(x^{(n+1)})^p = \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(n+1+m)p^{m+1}} = x^{(n)}$$

48. L'application inverse du Frobenius est le décalage vers la droite : $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$.

49. De réduction modulo p composante par composante.

ce qui montre que $(x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} \in \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_C$ est un antécédent de x , fournissant l'application réciproque. \square

Dans ce qui suit, on identifiera implicitement \mathcal{R}_R et $\varprojlim_{x \mapsto x^p} R$.

Remarque 4.1.3. Soient $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont des éléments de \mathcal{R} correspondant à $(x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ et $y = (y^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ dans $\varprojlim_{x \mapsto x^p} R$. Comme $x^{(n)}y^{(n)}$ relève $x_n y_n$ et $(x^{(n+1)}y^{(n+1)})^p = x^{(n)}y^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $(xy)^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, i.e. $x \mapsto x^{(n)}$ est une application multiplicative. Elle n'est pas additive : on a seulement

$$(x + y)^{(n)} = \lim_{m \rightarrow \infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$$

L'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans \mathcal{R}_R est séparé et complet pour la topologie p -adique (cf [,]). Posons

$$\begin{aligned} \theta: W(\mathcal{R}_R) &\rightarrow R \\ (x_0, x_1, \dots) &\mapsto \sum_{i=0}^{\infty} p^i x_i^{(i)} \end{aligned}$$

Proposition 4.1.4. θ est un homomorphisme d'anneaux surjectif.

Démonstration. Pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$, soit $\theta_n: W_n(\mathcal{R}_R) \rightarrow R/p^n R$; $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} p^i x_i^{(i)}$ l'application induite par θ modulo p^n . La $n - 1$ -ième composante fantôme

$$\begin{aligned} \Phi_{n-1}: W_n(R/p^n R) &\rightarrow R/p^n R \\ (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) &\mapsto \sum_{i=0}^{n-1} p^i x_i^{p^{n-i-1}} \end{aligned}$$

est un homomorphisme d'anneaux⁵⁰. Si $x_i \equiv y_i \pmod{pR}$ on a $x_i^{p^{n-i-1}} \equiv y_i^{p^{n-i-1}} \pmod{p^{n-i}R}$ (récurrence triviale), donc $\sum_{i=0}^{n-1} p^i x_i^{p^{n-i-1}} \equiv \sum_{i=0}^{n-1} p^i y_i^{p^{n-i-1}} \pmod{p^n R}$. On a donc une factorisation

$$\begin{array}{ccc} W_n(R/p^n R) & \xrightarrow{\Phi_{n-1}} & R/p^n R \\ & \searrow & \nearrow \tilde{\Phi}_{n-1} \\ & W_n(R/pR) & \end{array}$$

où la flèche de gauche est induite par l'application $R/p^n R \rightarrow R/pR$. On en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} W_n(\mathcal{R}_R) & \xrightarrow{\theta_n} & R/p^n R & & \\ \varphi^{1-n} \downarrow & & \nearrow \Phi_{n-1} & & \uparrow \tilde{\Phi}_{n-1} \\ W_n(\mathcal{R}_R) & \xrightarrow{\beta} & W_n(R/pR) & \xrightarrow{\alpha} & W_n(R/p^n R) \end{array}$$

où $\alpha(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_0^{(0)} \pmod{p^n R}, \dots)$ et $\beta(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_0^{(0)} \pmod{pR}, \dots)$. L'application α n'est pas un homomorphisme d'anneaux, mais $\beta = W_n(\text{pr}_0)$ en est un. Cela implique que $\theta_n = \tilde{\Phi}_{n-1} \circ \beta \circ \varphi^{1-n}$ est un homomorphisme d'anneaux. Comme c'est vrai pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, il en est de même de θ .

Soit $a \in R$. L'hypothèse de surjectivité du Frobenius sur R/pR implique l'existence d'une suite $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{R}_R$ telle que $x_0 = a \pmod{pR}$: on a $\theta_1(x) = a \pmod{pR}$. Cela montre que l'application θ est surjective modulo p . Comme R et $W(\mathcal{R}_R)$ sont séparés et complets pour la topologie p -adique, cela implique que θ est surjectif. Notons que sous l'hypothèse plus forte « l'élevation à la puissance p » est surjective sur R , il existe $(x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{R}_R$ tel que $x^{(0)} = a$, et on a $a = \theta([x])$. \square

Par Λ -linéarité, θ induit un homomorphisme surjectif de Λ -algèbres

$$\theta: \Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} W(\mathcal{R}_R) \rightarrow R$$

50. Par définition des vecteurs de Witt.

4.1.5. *L'anneau* A_{cris} . On munit l'idéal $p\Lambda$ de sa structure à puissances divisées canonique γ .

Définition 4.1.6. (1) Un Λ -*épaississement à puissances divisées formel p -adique* de R est un homomorphisme surjectif de Λ -algèbres $\theta_D: D \rightarrow R$ dont le noyau est muni d'une structure à puissances divisées compatible à γ , et tel que D soit séparé et complet pour la topologie p -adique.
(2) On note $A_{\text{cris}}(R/\Lambda)$ le séparé complété, pour la topologie p -adique, de l'enveloppe à puissances divisées (compatible avec γ) de $\Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} W(\mathcal{R}_R)$ par rapport à l'idéal $\text{Ker}(\theta)$, *i.e.*

$$A_{\text{cris}}(R/\Lambda) = D_{\Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} W(\mathcal{R}_R), \gamma}(\text{Ker}(\theta))^\wedge$$

L'homomorphisme θ s'étend en un homomorphisme surjectif de Λ -algèbres $D_{\Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} W(\mathcal{R}_R), \gamma}(\text{Ker}(\theta)) \rightarrow R$, et donc en un homomorphisme surjectif de Λ -algèbres

$$\theta: A_{\text{cris}}(R/\Lambda) \rightarrow R$$

(car R est séparé et complet pour la topologie p -adique).

Théorème 4.1.7. $\theta: A_{\text{cris}}(R/\Lambda) \rightarrow R$ est un Λ -*épaississement à puissances divisées formel p -adique* universel de R : si $\theta_D: D \rightarrow R$ est un Λ -*épaississement à puissances divisées formel p -adique*, il existe un unique homomorphisme continu de Λ -algèbres $\alpha: A_{\text{cris}}(R/\Lambda) \rightarrow D$ tel que $\theta = \theta_D \circ \alpha$.

Démonstration. D'après les propriétés universelles de la complétion p -adique et de l'enveloppe à puissances divisées, il suffit de montrer qu'il existe un unique homomorphisme d'anneaux $\alpha: W(\mathcal{R}_R) \rightarrow D$ tel que

$$\begin{array}{ccc} W(\mathcal{R}_R) & \xrightarrow{\alpha} & D \\ \theta \searrow & & \swarrow \theta_D \\ & R & \end{array}$$

commute. Soit $x = (x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $\hat{x}^{(n)}, \tilde{x}^{(n)} \in D$ des relèvements de $x^{(n)} \in R$ (qui existent vu que θ_D est surjectif). L'élément $a := \hat{x}^{(n)} - \tilde{x}^{(n)} \in \text{Ker}(\theta_D)$ a des puissances divisées dans D : on a $\hat{x}^{(n)p} = (\tilde{x}^{(n)} + a)^p \equiv \tilde{x}^{(n)p} + a^p \pmod{pD}$ d'où $\hat{x}^{(n)p} \equiv \tilde{x}^{(n)p} \pmod{pD}$ puisque $a^p = p!a^{[p]} \in pD$. Par récurrence, on en déduit que $\hat{x}^{(n)p^n} \equiv \tilde{x}^{(n)p^n} \pmod{p^n D}$. Avec le choix $\tilde{x}^{(n)} = \hat{x}^{(n+1)p}$, cela implique que la suite $(\hat{x}^{(n)p^n})_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy (pour la topologie p -adique) dans D : elle converge. La congruence qui précède montre que sa limite $\rho(x) \in D$ ne dépend pas du choix des relèvements $(\hat{x}^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$. Si α existe, alors $\alpha([x^{1/p^n}]) \in D$ relève $x^{(n)}$, de sorte que $\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha([x^{1/p^n}])^{p^n} = \alpha([x])$. Cela implique que si α existe, alors pour tout $\underline{x} = \sum_{n=0}^{\infty} p^n [x_n] \in W(\mathcal{R}_R)$, on a nécessairement

$$\alpha(\underline{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \rho(x_n)$$

ce qui montre l'unicité de α . Pour l'existence, il faut vérifier que la formule qui précède définit un homomorphisme d'anneaux. Soient $x, y \in \mathcal{R}$. On voit facilement que $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$, d'où $\alpha([x][y]) = \alpha([x])\alpha([y])$: il suffit de montrer que $\alpha([x] + [y]) = \alpha([x]) + \alpha([y])$. Écrivons $[x] + [y] = \sum_{n=0}^{\infty} p^n [s_n^{p^{-n}}]$, avec $s_n = S_n([x], [y])$ (où les polynômes S_n définissent l'addition dans les vecteurs de Witt), de sorte que $\alpha([x] + [y]) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \rho(s_n^{p^{-n}})$. Par ailleurs, avec les notations qui précèdent, on a $\alpha([x]) + \alpha([y]) = \rho(x) + \rho(y) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\hat{x}^{(m)p^m} + \hat{y}^{(m)p^m})$. Comme

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(m)p^m} + \hat{y}^{(m)p^m} &= \Phi_m([\hat{x}^{(m)}]) + \Phi_m([\hat{y}^{(m)}]) = \Phi_m(S_0([\hat{x}^{(m)}], [\hat{y}^{(m)}]), S_1([\hat{x}^{(m)}], [\hat{y}^{(m)}]), \dots) \\ &= \sum_{n=0}^m p^n S_n([\hat{x}^{(m)}], [\hat{y}^{(m)}])^{p^{m-n}} \end{aligned}$$

on a $\alpha([x]) + \alpha([y]) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m p^n S_n([\hat{x}^{(m)}], [\hat{y}^{(m)}])^{p^{m-n}}$. Or on a

$$\lambda(S_n([\hat{x}^{(m)}], [\hat{y}^{(m)}])) = S_n([x^{(m)}], [y^{(m)}]) \mapsto S_n([x_m], [y_m]) \in R/pR$$

ce qui implique que

$$S_n([\hat{x}^{(m)}], [\hat{y}^{(m)}]) \equiv \hat{s}_n^{(m)} \pmod{\text{Ker}(\theta_D) + pD}$$

(car la réduction de $s_n^{(m)}$ modulo pR est $\text{pr}_m(s_n) = S_n(\text{pr}_m(x), \text{pr}_m(y)) = S_n([x_m], [y_m])$, vu que la m -ième projection $\text{pr}_m: \mathcal{R}_R \rightarrow R/pR$ est un homomorphisme d'anneaux). Comme l'idéal $\text{Ker}(\theta_D) + pD$ a des puissances divisées dans D , on a $S_n([\hat{x}^{(m)}], [\hat{y}^{(m)}])^{p^{m-n}} \equiv \hat{s}_n^{(m)p^{m-n}} \pmod{p^{m-n}D}$ d'où $\lim_{m \rightarrow \infty} S_n([\hat{x}^{(m)}], [\hat{y}^{(m)}])^{p^{m-n}} = \rho(s_n^{p^{-n}})$, *i.e.*

$$\alpha([x]) + \alpha([y]) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \rho(s_n^{p^{-n}}) = \alpha([x] + [y]). \quad \square$$

Corollaire 4.1.8. *Le site $\text{Cris}(\text{Spec}(R/pR), \text{Spec}(\Lambda/p^n\Lambda))$ a un objet final pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, et*

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^0((\text{Spec}(R/pR), \text{Spec}(\Lambda/p^n\Lambda))_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{\text{Spec}(R/pR)/\text{Spec}(\Lambda/p^n\Lambda)}) &= A_{\text{cris}}(R/\Lambda)/p^n A_{\text{cris}}(R/\Lambda) \\ \mathrm{H}_{\text{cris}}^0(\text{Spec}(R/pR)/\Lambda) &= A_{\text{cris}}(R/\Lambda) \end{aligned}$$

4.2. Le cas de l'anneau des entiers d'un corps local. Dans tout ce qui suit, K désigne un corps de valuation discrète complet, de caractéristique 0, à corps résiduel k parfait de caractéristique p . On note $v: K \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ la valuation normalisée (i.e. telle que $v(p) = 1$). On fixe une clôture algébrique \bar{K} de K et on pose $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$. La valuation v s'étend de façon unique à \bar{K} : on note C le complété de \bar{K} . L'action de G_K se prolonge par continuité à C . Posons $W = \mathbf{W}(k)$ et $F = \text{Frac}(W)$, on a $F \subset K$. Si L est une sous-extension de C/F , on note $\mathcal{O}_L = \{x \in L \mid v(x) \geq 0\}$ son anneau des entiers.

L'anneau

$$\mathcal{R} = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in (\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{\mathbf{N}}, (\forall n \in \mathbf{N}) x_{n+1}^p = x_n \right\}$$

est parfait de caractéristique p , muni d'une action de G_K (composante par composante). C'est une \bar{k} -algèbre via l'application

$$\begin{aligned} \bar{k} &\rightarrow \mathcal{R} \\ x &\mapsto (x, x^{1/p}, x^{1/p^2}, \dots) \end{aligned}$$

Comme \bar{K} est algébriquement clos, on peut extraire des racines p^n -ièmes dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$: les applications pr_m et θ sont surjectives. Mieux, comme C est algébriquement clos, les applications $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{O}_C; x \mapsto x^{(n)}$ sont surjectives pour tout $n \in \mathbf{N}$. Par exemple, on dispose d'éléments $\varepsilon = (\zeta_{p^n})_{n \geq 0}$ (resp. $\tilde{p} = (p^{(n)})_{n \geq 0}$) dans \mathcal{R} tels que ζ_{p^n} soit une racine primitive p^n -ième de l'unité (resp. $p^{(0)} = p$). Ces éléments ne sont *pas* canoniques, parce que les extractions de racines p -ièmes requierent des choix.

Remarque 4.2.1. Si $g \in G_K$, on a $g(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^{\chi(g)}$ (où $\chi: G_K \rightarrow \mathbf{Z}_p^\times$ est le caractère cyclotomique), d'où $g(\varepsilon) = \varepsilon^{\chi(g)}$. De même, il existe $c(g) \in \mathbf{Z}_p$ tel que $g(p^{(n)}) = \zeta_{p^n}^{c(g)} p^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et $g(\tilde{p}) = \varepsilon^{c(g)} \tilde{p}$. Si $h \in G_K$, on a $(gh)(\tilde{p}) = g(\varepsilon^{c(h)} \tilde{p}) = \varepsilon^{\chi(g)c(h)} g(\tilde{p}) = \varepsilon^{c(g)+\chi(g)c(h)} \tilde{p}$, donc c définit un 1-cocycle $G_K \rightarrow \mathbf{Z}_p(1)$.

Si $x = (x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{R}$, on pose

$$v_{\mathcal{R}}(x) = v(x^{(0)}) \in \mathbf{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$$

(rappelons que v est la valuation sur C normalisée par $v(p) = 1$).

Proposition 4.2.2. *L'application $v_{\mathcal{R}}$ est une valuation, pour laquelle \mathcal{R} est complet. En outre, l'action de G_K sur \mathcal{R} est continue pour $v_{\mathcal{R}}$.*

Démonstration. Soit $x = (x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{R}$. Si $v_{\mathcal{R}}(x) = +\infty$, alors $v(x^{(0)}) = +\infty$ i.e. $(x^{(n)})^{p^n} = x^{(0)} = 0$ d'où $x^{(n)} = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, i.e. $x = 0$. Si $y = (y^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{R}$, on a $(xy)^{(0)} = x^{(0)}y^{(0)}$ hence $v_{\mathcal{R}}(xy) = v(x^{(0)}y^{(0)}) = v(x^{(0)}) + v(y^{(0)}) = v_{\mathcal{R}}(x) + v_{\mathcal{R}}(y)$. Si $m \in \mathbf{N}$, on a

$$\frac{1}{p^m} v(x^{(m)} + y^{(m)}) \geq \min \left\{ \frac{1}{p^m} v(x^{(m)}), \frac{1}{p^m} v(y^{(m)}) \right\} = \min \{v(x^{(0)}), v(y^{(0)})\} = \min\{v_{\mathcal{R}}(x), v_{\mathcal{R}}(y)\}$$

donc $v_{\mathcal{R}}(x + y) = v((x + y)^{(0)}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^m} v(x^{(m)} + y^{(m)}) \geq \min\{v_{\mathcal{R}}(x), v_{\mathcal{R}}(y)\}$. Enfin, pour $N \in \mathbf{N}$, on a

$$x \in \bigcap_{i=0}^N \text{pr}_i^{-1}(\{0\}) \Leftrightarrow x^{(N)} \in p\mathcal{O}_C \Leftrightarrow x^{(0)} = x^{(N)p^N} \in p^{p^N} \mathcal{O}_C \Leftrightarrow v_{\mathcal{R}}(x) \geq p^N$$

Cela implique que la topologie de \mathcal{R} définie par la valuation $v_{\mathcal{R}}$ n'est autre que la topologie induite par la topologie produit de $(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^{\mathbf{N}}$. Comme \mathcal{R} est fermé dans ce dernier, il est complet.

Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{R}$. Si $N \in \mathbf{N}$, il existe une extension finie L/K dans \bar{K} telle que $x_n \in \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L$ pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$. Si $g \in \text{Gal}(\bar{K}/L)$, on a $\text{pr}_n(g(x)) = \text{pr}_n(x)$ pour tout $n \leq N$, i.e. $g(x) - x \in \text{Ker}(\text{pr}_N)$, de sorte que $g \in \text{Gal}(\bar{K}/L) \Rightarrow v_{\mathcal{R}}(g(x) - x) \geq p^N$. \square

Exemple 4.2.3. $v_{\mathcal{R}}(\tilde{p}) = 1$ et $v_{\mathcal{R}}(\varepsilon - 1) = \lim_{m \rightarrow \infty} v(\zeta_{p^m} - 1)^{p^m} = \frac{p}{p-1}$.

Remarque 4.2.4. L'action de G_K sur \mathcal{R} induit une action sur $\mathbf{W}(\mathcal{R})$. Cette dernière n'est *pas* continue pour la topologie p -adique : cela impliquerait que l'action de G_K sur $\mathcal{R} = \mathbf{W}(\mathcal{R})/p\mathbf{W}(\mathcal{R})$ est discrète, ce qui n'est pas (car $(g-1)(\tilde{p}) = (\varepsilon^{c(g)} - 1)\tilde{p} = 0 \Leftrightarrow g \in \text{Ker}(c)$ qui n'est pas un sous-groupe ouvert de G_K), cf remarque 4.2.1.

Corollaire 4.2.5. \mathcal{R} est intègre, de corps des fractions $\mathcal{R}[\tilde{p}^{-1}]$.

Démonstration. Résulte que $v_{\mathcal{R}}(\tilde{p}) > 0$. \square

Proposition 4.2.6. *Le corps $\text{Frac}(\mathcal{R})$ est algébriquement clos.*

Démonstration. On doit montrer que tout polynôme irréductible $P(X) = X^N + a_1 X^{N-1} + \dots + a_N \in \text{Frac}(\mathcal{R})[X]$ a une racine dans $\text{Frac}(\mathcal{R})$. Comme \mathcal{R} , donc aussi $\text{Frac}(\mathcal{R})$, est parfait, $P(X)$ est séparable. Comme $\tilde{p}^{-rN} P(\tilde{p}^r X) = X^N + \tilde{p}^r a_1 X^{N-1} + \dots + \tilde{p}^{rN} a_N$ a coefficients dans \mathcal{R} pour $r \in \mathbf{N}$ assez grand, on peut supposer que $P(X) \in \mathcal{R}[X]$. Comme $P(X)$ est séparable dans $\text{Frac}(\mathcal{R})[X]$, il existe $U_0(X), V_0(X) \in \text{Frac}(\mathcal{R})[X]$ tels que $P(X)U_0(X) + P'(X)V_0(X) = 1$. Soit $m_0 \in \mathbf{N}$ tel que $U(X) = \tilde{p}^{m_0} U_0(X) \in \mathcal{R}[X]$ et $V(X) = \tilde{p}^{m_0} V_0(X) \in \mathcal{R}[X]$: on a $P(X)U(X) + P'(X)V(X) = \tilde{p}^{m_0}$. Soit $m \in \mathbf{N}$ tel que $m > 2m_0$. Le polynôme $P^{(m)}(X) := X^N + a_1^{(m)} X^{N-1} + \dots + a_N^{(m)} \in \mathcal{O}_C[X]$ admet une racine dans \mathcal{O}_C . L'application $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{O}_C; x \mapsto x^{(m)}$ étant surjective, il existe $\alpha \in \mathcal{R}$ dont la m -ième composante $\alpha^{(m)}$ est une telle racine. En réduisant modulo $p\mathcal{O}_C$, on a $\text{pr}_m(P(\alpha)) = \alpha_m^N + a_{1,m} \alpha_m^{N-1} + \dots + a_{N,m} = 0$ d'où $v_{\mathcal{R}}(P(\alpha)) \geq p^m$. Cela implique que $v_{\mathcal{R}}(P(\alpha)U(\alpha)) \geq m > m_0$, donc $v_{\mathcal{R}}(P'(\alpha)V(\alpha)) = v_{\mathcal{R}}(p^{m_0} - P(\alpha)U(\alpha)) = m_0$, d'où $v_{\mathcal{R}}(P'(\alpha)) \leq m_0$. comme $v_{\mathcal{R}}(P(\alpha)) = p^m \geq m > 2m_0 \geq 2v_{\mathcal{R}}(P'(\alpha))$, le lemme de Hensel implique que $P(X)$ a un zéro $\equiv \alpha \pmod{\tilde{p}^{m-m_0}\mathcal{R}}$. \square

Proposition 4.2.7. *Le noyau de $\theta: W(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{O}_C$ est principal, engendré par tout élément $x \in \text{Ker}(\theta)$ dont la réduction $\bar{x} \in \mathcal{R}$ modulo p vérifie $v_{\mathcal{R}}(\bar{x}) = 1$. Par exemple, $\xi := [\tilde{p}] - p$ est un tel élément.*

Démonstration. Soit $x \in \text{Ker}(\theta)$ tel que $\bar{x} \in \mathcal{R}$ vérifie $v_{\mathcal{R}}(\bar{x}) = 1$, et $y = \sum_{n=0}^{\infty} p^n [y_n] \in \text{Ker}(\theta)$. On a $\sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n^{(n)} = 0$, donc $y_0^{(0)} \in p\mathcal{O}_C$, i.e. $v_{\mathcal{R}}(y_0) \geq 1$: il existe $z_0 \in \mathcal{R}$ tel que $y_0 = \bar{x}z_0$. Cela implique que $y - x[z_0] \in \text{Ker}(\theta)$ a une image nulle modulo p : on peut écrire $y - x[z_0] = py'$. Comme \mathcal{O}_C est sans p -torsion, on a aussi $y' \in \text{Ker}(\theta)$. Par récurrence, on peut construire une suite $(z_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbf{N}}$ telle que $y - x \sum_{i=0}^n p^i [z_i] \in p^{n+1} \text{Ker}(\theta)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Comme $W(\mathcal{R})$ est séparé et complet pour la topologie p -adique, on a $y = x \sum_{i=0}^{\infty} p^i [z_i] \in xW(\mathcal{R})$. \square

Exemple 4.2.8. Soit $\varpi = \frac{[\varepsilon]-1}{[\varepsilon^{1/p}]-1} = 1 + [\varepsilon^{1/p}] + [\varepsilon^{1/p}]^2 + \dots + [\varepsilon^{1/p}]^{p-1} \in W(\mathcal{R})$. On a $\overline{\varpi} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon^{1/p}-1} = (\varepsilon^{1/p}-1)^{p-1}$, donc $v_{\mathcal{R}}(\overline{\varpi}) = (p-1)v_{\mathcal{R}}(\varepsilon^{1/p}-1) = \frac{p-1}{p}v_{\mathcal{R}}(\varepsilon-1) = 1$ (cf exemple 4.2.3), d'où $\text{Ker}(\theta) = \varpi W(\mathcal{R})$.

Comme $\text{Ker}(\theta)$ est principal, l'enveloppe à puissances divisées $W(\mathcal{R})^{\text{DP}}$ de $W(\mathcal{R})$ par rapport à l'idéal $\text{Ker}(\theta)$ n'est autre que la sous- $W(\mathcal{R})$ -algèbre de $W(\mathcal{R})[p^{-1}]$ engendrée par $\{\eta^{[n]}\}_{n \in \mathbf{N}}$, où η est n'importe quel générateur de $\text{Ker}(\theta)$ (on peut prendre $\eta = \xi$ par exemple). En particulier, elle n'a pas de p -torsion : A_{cris} non plus. L'application θ se prolonge en $\theta: A_{\text{cris}} \rightarrow \mathcal{O}_C$ (on a $\theta(x^{[n]}) = 0$ pour tout $x \in \text{Ker}(\theta)$ et $n \in \mathbf{N}_{>0}$). Soit $\text{Fil}^1 A_{\text{cris}} = \text{Ker}(\theta)$ et, pour $i \in \mathbf{N}$, soit $\text{Fil}^i A_{\text{cris}}$ la i -ième puissance divisée de $\text{Fil}^1 A_{\text{cris}}$: c'est l'adhérence, pour la topologie p -adique, de l'idéal de A_{cris} engendré par $\{\eta^{[n]}\}_{n \geq i}$. On a en particulier $\text{Fil}^i A_{\text{cris}} = W(\mathcal{R})\eta^{[i]} + \text{Fil}^{i+1} A_{\text{cris}}$: l'application θ induit un isomorphisme

$$\text{gr}^i A_{\text{cris}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_C \eta^{[i]}$$

L'action de G_K sur $W(\mathcal{R})$ s'étend à $W(\mathcal{R})^{\text{PD}}$: en effet, si $g \in G_K$, on a

$$g(\xi) = g([\tilde{p}]) - p = [\tilde{p}][\varepsilon^{c(g)}] - p \in \text{Ker}(\theta)$$

(parce que $\theta([\varepsilon^{c(g)}]) = 1$ et $\theta([\tilde{p}]) = p$) : l'idéal $\text{Ker}(\theta)$ est stable par g . Elle s'étend aussi à A_{cris} par continuité. De même, le Frobenius des vecteurs de Witt $\varphi: W(\mathcal{R}) \rightarrow W(\mathcal{R})$ s'étend à $W(\mathcal{R})^{\text{PD}}$, parce que

$$\varphi(\xi) = [\tilde{p}]^p - p = (\xi + p)^p - p \in \text{Ker}(\theta + pW(\mathcal{R}))$$

et $\text{Ker}(\theta + pW(\mathcal{R}))$ est un idéal à puissances divisées. Il s'étend aussi à A_{cris} par continuité.

Proposition 4.2.9. *Soit γ l'application $x \mapsto \frac{x^p}{p}$. On a un isomorphisme :*

$$A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{R}/\tilde{p}^p \mathcal{R})[\delta_m]_{m \in \mathbf{N}} / (\delta_m^p)_{m \in \mathbf{N}}$$

où δ_m est l'image de $\gamma^{m+1}(\eta)$.

Démonstration. Un récurrence immédiate montre que $\gamma^i(x) = \frac{x^{p^i}}{p^{\frac{p^i-1}{p-1}}}$. Si $n \in \mathbf{N}$ s'écrit $n = a_0 + a_1 p + \dots + a_r p^r$ avec $r \in \mathbf{N}$ et $a_i \in \{0, \dots, p-1\}$ pour $i \in \{0, \dots, r\}$, on a $\prod_{i=0}^r (\gamma^i(\eta))^{a_i} = \prod_{i=0}^r \frac{\eta^{a_i p^i}}{p^{a_i \frac{p^i-1}{p-1}}} = \frac{\eta^n}{p^{v_p(n)}} = \alpha_n \eta^{[n]}$ avec $\alpha_n = \frac{n!}{p^{v_p(n)!}} \in \mathbf{Z}_p^\times$. Cela implique que $W(\mathcal{R})^{\text{DP}}$ est la sous- $W(\mathcal{R})$ -algèbre de $W(\mathcal{R})[p^{-1}]$ engendrée par $\{\gamma^i(\eta)\}_{i \in \mathbf{N}_{>0}}$. En particulier, l'application

$$\begin{aligned} W(\mathcal{R})[T_m]_{m \in \mathbf{N}} &\rightarrow W(\mathcal{R})^{\text{DP}} \\ T_m &\mapsto \gamma^{m+1}(\eta) \end{aligned}$$

est surjective. Son noyau est l'idéal I engendré par $\eta^p - pT_0$ et $\{T_m^p - pT_{m+1}\}_{m \in \mathbf{N}}$: on a un isomorphisme $W(\mathcal{R})[T_m]_{m \in \mathbf{N}}/I \rightarrow W(\mathcal{R})^{\text{DP}}$. Sa réduction modulo p fournit un isomorphisme

$$\mathcal{R}[T_m]_{m \in \mathbf{N}}/\bar{I} \rightarrow W(\mathcal{R})^{\text{DP}}/pW(\mathcal{R})^{\text{DP}} \simeq A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}}$$

où \bar{I} est l'image de I dans $\mathcal{R}[T_m]_{m \in \mathbf{N}}$. Comme $v_{\mathcal{R}}(\bar{\eta}) = 1$, on a $\bar{\eta} \in \tilde{p}\mathcal{R}^\times$: cette image est l'idéal engendré par \tilde{p} et $\{\delta_m^p\}_{m \in \mathbf{N}}$ où δ_i est l'image de T_m donc de $\gamma^{m+1}(\eta)$. L'isomorphisme précédent est donc $(\mathcal{R}/\tilde{p}\mathcal{R})[\delta_m]_{m \in \mathbf{N}}/(\delta_m^p)_{m \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\sim} A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}}$. \square

Pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a

$$H_{\text{cris}}^q(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n \mathcal{O}_{\bar{K}}|W_n) = \varinjlim_{L/K} H^q((\text{Spec}(\mathcal{O}_L/p^n \mathcal{O}_L), \text{Spec}(W_n))_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{L,n})$$

(où la limite est indexée par les extensions finies L/K dans \bar{K} , et $\mathcal{O}_{L,n}$ désigne le faisceau structural du topos $(\text{Spec}(\mathcal{O}_L/p^n \mathcal{O}_L)/\text{Spec}(W_n))_{\text{cris}}$).

Théorème 4.2.10. (Fontaine, cf [6, Théorème 1])

$$\varprojlim_n H_{\text{cris}}^q(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n \mathcal{O}_{\bar{K}}|W_n) \cong \begin{cases} A_{\text{cris}} & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{si } q > 0 \end{cases}$$

Démonstration. Le premier isomorphisme résulte du corollaire 4.1.8. Pour calculer $H^q((\mathcal{O}_L/p^n \mathcal{O}_L|W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{L,n})$, on plonge $\text{Spec}(\mathcal{O}_L/p^n \mathcal{O}_L)$ dans un W_n -schéma lisse : comme $\mathcal{O}_L = W[x]$ est monogène, on peut écrire

$$\mathcal{O}_L/p^n \mathcal{O}_L \simeq W_n[X]/(f(X))$$

où $f \in W[X]$ est unitaire, de sorte que la cohomologie cristalline de $\mathcal{O}_L/p^n \mathcal{O}_L$ est celle du complexe de de Rham complexe à puissances divisées :

$$0 \rightarrow D_{L,n} \rightarrow D_{L,n} \otimes_{W_n[X]} \Omega_{W_n[X]/W_n}^1 \rightarrow D_{L,n} \otimes_{W_n[X]} \Omega_{W_n[X]/W_n}^2 = 0 \rightarrow \dots$$

(où $D_{L,n}$ désigne l'enveloppe à puissances divisées de $W_n[X]$ par rapport à l'idéal engendré par f . Cela implique que $H^q((\mathcal{O}_L/p^n \mathcal{O}_L|W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{L,n}) = 0$ si $q \geq 2$. De plus, si $y \in \bar{K}$ vérifie $y^{p^n} = x$, on dispose de la présentation $\mathcal{O}_{L[y]}/p^n \mathcal{O}_{L[y]} \simeq W_n[Y]/(f(Y^{p^n}))$, et du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & & D_{L,n} & \longrightarrow & D_{L,n} \otimes_{W_n[X]} \Omega_{W_n[X]/W_n}^1 & & dX \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y^{p^n} & & D_{L[y],n} & \longrightarrow & D_{L[y],n} \otimes_{W_n[Y]} \Omega_{W_n[Y]/W_n}^1 & & dY^{p^n} = 0 \end{array}$$

qui implique que l'image de $H^1((\mathcal{O}_L/p^n \mathcal{O}_L|W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{L,n})$ dans $H^1((\mathcal{O}_{L[y]}/p^n \mathcal{O}_{L[y]}|W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{L,n})$ est nulle : on a $H_{\text{cris}}^1(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n \mathcal{O}_{\bar{K}}|W_n) = 0$, ce qui prouve le cas $q > 0$. \square

Remarque 4.2.11. (1) De même, $\text{Fil}^1 A_{\text{cris}}$ est relié à la cohomologie du faisceau $\mathcal{I}_{\text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})/W_n}$.

(2) L'évaluation d'un cristal de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})/W_n}$ -modules sur $\text{Cris}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}), \text{Spec}(W))$ en l'objet test $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_C)$ fournit un A_{cris} -module.

RÉFÉRENCES

- [1] P. BERTHELOT – *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$* , Lecture notes in mathematics, vol. 407, Springer-Verlag, 1974.
- [2] P. BERTHELOT & A. OGUS – *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1978.
- [3] ———, « F -socrystals and de Rham Cohomology, I », *Inventiones mathematicae* **72** (1983), p. 159–199.
- [4] B. BHATT & A.-J. DE JONG – « Crystalline cohomology and de Rham cohomology », 2011.
- [5] J. DIEUDONNÉ & A. GROTHENDIECK – « Éléments de géométrie algébrique IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV », *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1967), no. 32, p. 361.
- [6] J.-M. FONTAINE – « Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p -adiques », in *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1016, Springer Verlag, 1983, p. 86–108.
- [7] J. GIRAUD, A. GROTHENDIECK, S. L. KLEIMAN, M. RAYNAUD & J. TATE – « Crystals and the de Rham cohomology of schemes », in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 3, North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Masson & Cie, Editeur, Paris, 1968, p. vi+386.
- [8] L. ILLUSIE – « Grothendieck's existence theorem in formal geometry », in *Fundamental algebraic geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 123, AMS, 2005, p. 181–233.
- [9] N. KATZ – « Nilpotent connections and the monodromy theorem : Applications of a result of Turrittin », *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1970), no. 39, p. 175–232.
- [10] J. MILNE – *Étale cohomology*, Princeton mathematical series, no. 33, Princeton University Press, 1980.
- [11] THE STACKS PROJECT AUTHORS – « *Stacks Project* », <http://stacks.math.columbia.edu>, 2018.