



**HAL**  
open science

## Etude d'un modèle avec endommagement

Patrick Laborde, Abderrahim Michrafy

► **To cite this version:**

Patrick Laborde, Abderrahim Michrafy. Etude d'un modèle avec endommagement. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 1990, 310 (1), pp.613-616. hal-03789722

**HAL Id: hal-03789722**

**<https://hal.science/hal-03789722>**

Submitted on 28 Sep 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Étude d'un modèle avec endommagement

Patrick LABORDE et Abderrahim MICHRAFY

**Résumé** – On considère un modèle en Mécanique des Solides qui prend en compte le phénomène d'endommagement des matériaux. L'étude de cette loi de comportement générale conduit à une équation différentielle multivoque analogue à un processus de rafle au sens de J.-J. Moreau, à la différence près que sa formulation fait intervenir un produit scalaire dépendant de l'état (inconnu) du système. Un exemple d'application est présenté.

## Study of a model involving damage

**Abstract** – A model in Solids Mechanics which takes into account the damage of materials is considered. The study of these constitutive equations requires to solve a certain multivalued differential equation which looks like a sweeping process in the sense of J.-J. Moreau, with the difference that an inner product depending on the (unknown) state of the system is used in its formulation. An example of application is given.

1. LE MODÈLE. – Le phénomène d'endommagement d'un matériau s'exprime à travers la dépendance des caractéristiques élastiques de ce milieu par rapport à l'histoire des déformations subies [3]. Considérons la loi de comportement générale suivante, dans laquelle les caractéristiques dépendent d'une manière assez peu restrictive de variables internes. L'évolution de celles-ci est régie par une condition de normalité qui constitue une variante du principe de dissipativité maximale des *Matériaux standard généralisés*.

On note  $X$  l'espace euclidien des tenseurs  $\tau$  d'ordre 2 symétriques, muni du produit scalaire usuel  $\tau \cdot \tau^*$ . En un point quelconque du milieu considéré, la dépendance des propriétés mécaniques par rapport à l'histoire des déformations (endommagement, écoulement...) est décrite à l'aide d'un nombre fini de paramètres  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  (de nature scalaire ou tensorielle). Ces *variables internes*  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha$  définissent l'état d'irréversibilité dans un espace euclidien  $Y$  dont le produit scalaire est noté  $\alpha \cdot \alpha^*$ . On appelle *contrainte généralisée* le couple  $(\sigma, \alpha) = s$ , où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes usuel. La variable  $s$  prend ses valeurs dans l'espace produit  $E = X \times Y$  muni du produit scalaire canonique  $s \cdot s^* = \sigma \cdot \sigma^* + \alpha \cdot \alpha^*$ .

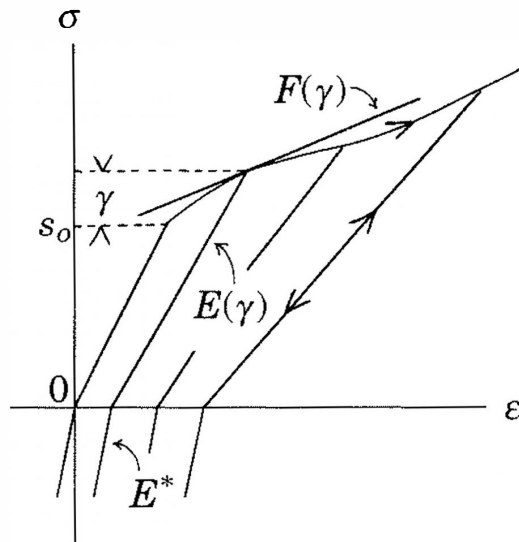
Considérons la *loi de comportement* suivante, dans laquelle  $\varepsilon$  désigne le tenseur des petites déformations :

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(s) \leq 0 \\ (2) \quad & \dot{\varepsilon} = L(s) \dot{\sigma} + \dot{\varepsilon}^{an} \\ (3) \quad & (\dot{\varepsilon}^{an}, -M(s) \dot{\alpha}) \in N_K s. \end{aligned}$$

Dans ces relations, le point exprime la dérivation par rapport au temps, le critère  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction *convexe* telle que  $f(0) < 0$ ,  $K = \{r \in E : f(r) \leq 0\}$  et  $N_K s$  désigne le *cône normal* à  $K$  en  $s$ , i.e. l'ensemble des  $n \in E$  tels que  $n \cdot (r - s) \leq 0$  pour tout  $r \in K$ .

D'une manière générale, la condition d'admissibilité sur  $\sigma$  en (1) dépend de  $\alpha$  (modélisation de l'écrouissage). L'opérateur linéaire des compliances élastiques  $L(s) \in \mathcal{L}(X)$  dépend de  $\alpha$  (description de l'endommagement) et – éventuellement – de  $\sigma$  (prise en compte d'une différence de comportement en traction et en compression). La dépendance par rapport à l'état  $s$  de l'opérateur linéaire  $M(s) \in \mathcal{L}(Y)$  est – naturellement – destinée à

Note présentée par Maurice ROSEAU.



Allure de la courbe de traction uniaxiale pour certains composites céramique-céramique [2].  
Simplified uniaxial tension curve for some ceramic-ceramic composite materials [2].

offrir une plus grande flexibilité de la modélisation de l'écoulement par une condition de normalité.

On note  $A(s)$  l'opérateur des compliances élastiques généralisées défini dans  $\mathcal{L}(E)$  par :  $A(s)s^* = (L(s)\sigma^*, M(s)\alpha^*)$  pour tout  $s^* = (\sigma^*, \alpha^*)$ .

Dans le cas des Matériaux standard généralisés de Nguyen Q.S. [1], la matrice des compliances élastiques généralisées est définie comme la Hessienne de la fonction conjuguée de l'énergie libre supposée fortement convexe. La loi de comportement (1), (2), (3) apparaît comme une extension du modèle des Matériaux standard généralisés à énergie libre quadratique séparée. Notons que, dans ce dernier cas, la loi d'écoulement (3) s'interprète comme un principe de dissipativité maximale.

2. ÉTUDE DE LA LOI DE COMPORTEMENT. — Dans une première étude (locale) de la loi de comportement, on se donne un trajet de déformation  $\varepsilon(t)$  dans l'intervalle de temps  $[0, T]$ . La réponse en contrainte généralisée  $s(t) = (\sigma(t), \alpha(t))$ , fournie par le modèle (1), (2), (3), vérifie l'inéquation d'évolution suivante, où on a noté  $e = (\varepsilon, 0)$  :

$$(4) \quad A(s(t))\dot{s}(t) \cdot (r - s(t)) \geq \dot{e}(t) \cdot (r - s(t)) \quad \text{quel que soit } r \in K, \text{ avec } s(t) \in K.$$

Ce problème d'évolution s'apparente à un processus de rafle au sens de J.-J. Moreau [5] en considérant un produit scalaire  $r, r^* \rightarrow A(s(t))r \cdot r^*$  qui dépend de l'état  $s(t)$  du système. Cette différence par rapport au cas classique empêche l'application directe de résultats mathématiques connus.

On suppose ici que les compliances élastiques généralisées vérifient, outre les conditions classiques de symétrie et de coercivité, une condition de Lipschitz (par rapport à  $s$ ) sur les bornés de  $E$ . Précisément, les hypothèses sont les suivantes, en notant  $|r| = (r \cdot r)^{1/2}$  :

(5) l'application  $s \rightarrow A(s)$  de  $E$  dans  $\mathcal{L}(E)$  est telle que :

$$A(s)r \cdot r^* = r \cdot A(s)r^* \quad \text{et} \quad * \quad A(s)r \cdot r \geq c|r|^2$$

quels que soient  $s, r, r^* \in E$  où  $c$  est une constante strictement positive,

(6) pour tout sous-ensemble borné  $B$  de  $E$  on a :

$$\|A(s) - A(r)\|_{\mathcal{L}(E)} + \|A(s)^{-1} - A(r)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq l(B)|r - s|$$

quels que soient  $r, s \in E$  où  $l(B)$  ne dépend que de  $B$ .

THÉORÈME 1. — Supposant (5), (6) et se donnant  $\varepsilon$  dans  $W^{1,\infty}(0, T; X)$  (<sup>1</sup>), ainsi que  $s_0$  dans  $K$ , il existe une unique fonction  $s$  dans  $W^{1,\infty}(0, T; E)$  qui vérifie l'inéquation (4) p.p.  $t \in ]0, T[$  et la condition initiale  $s(0) = s_0$ .

*Idée de la preuve.* — Une méthode de pénalisation classique de l'inéquation (4) conduit à une équation différentielle ordinaire localement lipschitzienne (le caractère local disparaissant dans le cas classique où  $A(s) = A_0$ ). Grâce à des estimations *a priori* découlant de la coercivité uniforme de  $A(s)$ , on montre l'existence d'une (unique) solution globale (dans  $[0, T]$ ) au problème pénalisé, qui appartient à un borné de  $W^{1,\infty}(0, T; X)$  (borné indépendant du paramètre de pénalisation). Par passage à la limite, on obtient alors une solution  $s(t)$  de (4).

Si  $s$  et  $s^*$  sont deux solutions, on considère la fonction numérique

$$h(t) = A(s(t))r(t) - r(t) \quad \text{où } r = s - s^*.$$

On a  $(A(s)\dot{s} - A(s^*)\dot{s}^*) \cdot r \leq 0$  p.p. Dans le cas classique, ceci suffit à conclure que  $r = 0$ . Ici, une étape supplémentaire pour obtenir l'unicité de la solution fait intervenir les estimations ainsi que la propriété de Lipschitz de  $A(\cdot)$  sur les bornés.

3. UNE APPLICATION. — Certains types de matériaux composites céramique-céramique présentent, lors d'un essai de traction dans une direction de fibre, le comportement avec endommagement schématisé sur la *figure* ci-contre [2]. Dans le cadre de modélisation précédent, définissons une loi de comportement *simplifiée* qui soit identifiable à l'aide des renseignements expérimentaux disponibles.

L'essai uniaxial permet de déterminer numériquement le module élastique  $E(\gamma)$  et le module tangent  $F(\gamma)$  en fonction de la variable  $\gamma$ , définie par la valeur actuelle du seuil en contrainte, comme le suggère la figure. Sous l'hypothèse des *contraintes planes* dans le plan défini par deux directions orthogonales de fibres, on pose  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  où  $\alpha_i$  joue le rôle de la variable  $\gamma$  dans la  $i$ -ième direction de fibre, tel que cela sera précisé plus loin.

Considérons la condition d'admissibilité sur  $\sigma$  (qui découle du choix de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ ) :

$$\sigma_{ii} \leq s_0 + \alpha_i, \quad i = 1 \text{ et } 2$$

où  $s_0$  est le seuil en contrainte initial (cf. *fig.*) et en se plaçant dans le repère défini par les directions de fibres. Cette condition peut être écrite sous la forme (1) en posant :

$$f(s) = \max(f_1(s), f_2(s)) \quad \text{où } f_i(\sigma, \alpha) = \sigma_{ii} - \alpha_i - s_0.$$

Concernant la spécification de la matrice des compliances élastiques  $L(\sigma, \alpha)$ , indiquons, par exemple, que les modules de Young directionnels  $E_i$  sont choisis ainsi :

$$E_1 = E(\alpha_1 + a\alpha_2) \quad \text{si } \sigma_{11} \geq 0, \quad E_1 = E^* \quad \text{si } \sigma_{11} < 0$$

où  $E^*$  est le module élastique en compression uniaxiale et  $a$  une constante de couplage phénoménologique donnée positive. La permutation des indices 1 et 2 fournit la définition de  $E_2$ .

Dans la loi d'écoulement (3) la matrice  $2 \times 2$   $M(\sigma, \alpha) = (M_{ij})$  est prise diagonale avec :

$$M_{ii} = N(\alpha_i) \quad \text{où } N(\gamma) = F(\gamma)^{-1} - E(\gamma)^{-1}.$$

Pour la loi de comportement ainsi particularisée on peut s'assurer de la validité des hypothèses introduites plus haut. En s'appuyant alors sur le théorème 1, on vérifie que l'on a, avec la notation  $x^+ = \max(x, 0)$  :

$$\alpha_i(t) = \max_{t' \leq t} (\sigma_{ii}(t') - s_0)^+.$$

Notons enfin que la cohérence du modèle spécifique avec l'expérience peut être justifiée à l'aide du théorème 2 ci-après.

4. ÉVOLUTION DE L'ENDOMMAGEMENT. — L'exemple précédent fait intervenir un critère de la forme  $f = \max(f_1, f_2)$  où les critères élémentaires  $f_i$  sont convexes et dérivables. Pour un tel critère  $f$  non dérivable la loi d'écoulement (3) s'écrit :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\epsilon}^{an}, -M(s)\dot{\alpha}) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \nabla f_i(s) \\ \lambda_i \geq 0, \quad f_i(s) \leq 0 \\ \lambda_i = 0 \quad \text{si } f_i(s) < 0 \end{array} \right.$$

en notant  $\nabla g = (\partial g / \partial \sigma, \partial g / \partial \alpha)$  le gradient d'une fonction dérivable  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Le multiplicateur  $\lambda_i$  attaché à  $f_i$  est, *a priori*, indéterminé.

D'une manière générale on se propose maintenant de déterminer l'évolution de l'irréversibilité régie par (1), (2) et (3). Soit  $t_0$  un instant donné dans  $[0, T]$ . La norme de l'énergie définie par la valeur en  $t_0$  des compliances élastiques généralisées est notée :

$$\|r\| = A(s(t_0))r \cdot r^{1/2}.$$

THÉORÈME 2. — *Supposons que  $\epsilon(t)$  est de classe  $C^1$  par morceaux dans  $[0, T]$ . Alors la solution  $s(t)$  du problème d'évolution (théorème 1) admet en  $t_0$  une dérivée à droite  $\dot{s}(t_0 + 0)$  qui minimise la fonction  $m \rightarrow \|m - A(s(t_0))^{-1} \dot{\epsilon}(t_0 + 0)\|^2$  sur le cône tangent  $T_K s(t_0)$  à  $K$  en  $s(t_0)$ .*

Par définition, si  $x \in K$ ,  $T_K x$  est l'ensemble (convexe fermé) des  $m$  pour lesquels il existe  $\epsilon_h > 0$  et  $x_h \in K$  ( $h > 0$ ) tels que  $x_h \rightarrow x$  et  $\epsilon_h^{-1}(x_h - x) \rightarrow m$  quand  $h \rightarrow 0$ .

Dans le cas (7), les scalaires  $\lambda_i$  s'interprètent comme les multiplicateurs de Kuhn-Tucker du problème de minimisation apparaissant dans le théorème ci-dessus, lequel permet de les calculer effectivement.

*Idée de la preuve.* — En utilisant les propriétés spécifiques du modèle étudié, on peut justifier les étapes suivantes. D'abord, grâce à l'égalité  $(A(s)\dot{s} - \dot{\epsilon}) \cdot \dot{s} = 0$  p.p., la famille  $h^{-1}(s(t_0 + h) - s(t_0))$ , pour  $h > 0$ , est bornée dans  $E$  et admet, quand  $h \rightarrow 0$ , une valeur d'adhérence  $\chi \in T_K s(t_0)$  qui satisfait (c'est le point délicat)  $(\dot{\epsilon}(t_0 + 0) - A(s(t_0))\chi) \cdot \chi \geq 0$ .

Les propriétés de  $\chi$  ci-dessus et le fait que  $\dot{\epsilon}(t_0 + 0) - A(s(t_0))\chi \in N_K s(t_0)$  fournissent une caractérisation de la solution du problème de minimisation énoncé. L'unicité de cette solution permet alors de conclure qu'il existe  $\dot{s}(t_0 + 0) = \chi$ .

Les démonstrations détaillées des résultats présentés dans cette Note se trouvent dans [4]. Cette référence présente d'autres développements, en particulier l'étude d'un algorithme en calcul de structures non linéaire adapté au modèle considéré ici.

(<sup>1</sup>) Par définition  $\phi \in W^{1,\infty}(0, T; X)$  si et seulement si  $\phi, \dot{\phi} \in L^\infty(0, T; X)$  espace des fonctions mesurables  $\psi : [0, T] \rightarrow X$  telles que  $|\psi(t)| \leq C$  p.p.t.

Note remise le 24 mars 1989, acceptée après révision le 10 octobre 1989.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] B. HALPHEN et Q. S. NGUYEN, Sur les matériaux standard généralisés, *J. Mécan.*, 14, 1975, p. 39-63.
- [2] P. LABORDE, *Modélisation et calcul du comportement des matériaux composites thermostructuraux*, Convention de recherche S.E.P., Le Haillan, 1987.
- [3] J. LEMAITRE et J.-L. CHABOCHE, *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris, 1985.
- [4] A. MICHRAFY, *Thèse*, Université Bordeaux-I, 1988.
- [5] J.-J. MOREAU, Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space, *J. Diff. Equ.*, 26, 1977, p. 347-374.