HAL open science

Groupoïdes d'holonomie de feuilletages singuliers

Claire Debord

▶ **To cite this version:**

Claire Debord. Groupoïdes d'holonomie de feuilletages singuliers. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, 2000, 330 (5), pp.361-364. 10.1016/S0764-4442(00)00184-1 . hal-03789482

HAL Id: hal-03789482

https://hal.science/hal-03789482v1

Submitted on 3 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 361–364, 2000
Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Groupoïdes d'holonomie de feuilletages singuliers

Claire DEBORD

Département de mathématiques, université d'Orléans, B.P. 6759, 45067 Orléans cedex 02, France
Courriel : claire.debord@labomath.univ-orleans.fr

(Reçu le 15 décembre 1999, accepté le 10 janvier 2000)

Résumé. Nous étendons ici la notion de groupoïde d'holonomie différentiable à certains feuilletages singuliers de type Stefan. Nous donnons un critère d'existence ainsi qu'une construction explicite d'un tel groupoïde. Cela passe par un résultat d'intégrabilité pour les algébroïdes de Lie de fléchage presque injectif. Nous obtenons notamment une nouvelle description des résultats de J. Pradines [4,5]. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Holonomy groupoids for singular foliations

Abstract. *We define a notion of differentiable holonomy groupoid for some Stefan singular foliations. We have a necessary and sufficient condition for the existence of such a groupoid and a construction of it. This involves a result of integrability for Lie algebroids for which the anchor is almost injective. In particular we get a new description of J. Pradines' results* [4,5]. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Les feuilletages considérés

Une *distribution généralisée* $\mathcal{D} = \bigcup_{x\in M} \mathcal{D}_x \subset \mathrm{T}M$ sur une variété M est *différentiable* lorsque pour tout $(x,v) \in \mathcal{D}_x$, il existe un champ de vecteurs local X sur M tel que : $x \in \mathrm{Dom}(X)$, $X(x) = (x,v)$ et $\forall y \in \mathrm{Dom}(X)$, $X(y) \in \mathcal{D}_y$. Elle est *intégrable* si pour tout $x \in M$, il existe une sous-variété immergée F_x de M contenant x et telle que $\mathrm{T}_y F_y = \mathcal{D}_y$ pour tout $y \in F_x$.

Un *feuilletage de Stefan* $\mathcal{F}$ sur une variété M est une partition de M par les sous-variétés intégrales connexes maximales d'une distribution différentiable intégrable. Les éléments de la partition sont appelés les *feuilles* et contrairement au cas régulier leur dimension peut varier [7]. Lorsque l'union M_0 des feuilles de dimension maximale est un ouvert dense de M, nous dirons que le feuilletage de Stefan $(M,\mathcal{F})$ est *presque régulier*. La restriction $\mathcal{F}_0$ du feuilletage $\mathcal{F}$ à M_0 est alors un feuilletage régulier appelé *le sous-feuilletage régulier maximal* de $(M,\mathcal{F})$.

Exemples 1. – 1. Les composantes connexes des orbites d'une action différentiable d'un groupe de Lie sur une variété M sont les feuilles d'un feuilletage de Stefan. Lorsque l'action est preque libre, c'est-à-dire libre sur une partie dense, le feuilletage est presque régulier.

2. Les sphères concentriques dans $\mathbb{R}^3$ sont les feuilles d'un feuilletage presque régulier.

3. Soit N une sous-variété plongée de M. La partition $\mathcal{F}_N$ de M suivant N et les composantes connexes de $M \smallsetminus N$ est un feuilletage presque régulier.

Note présentée par Alain CONNES.

S0764-4442(00)00184-1/FLA
© 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

4. Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux feuilletages réguliers sur une variété M, $\mathcal{F}_1$ étant un sous-feuilletage de $\mathcal{F}_2$. Le feuilletage $\mathcal{F}$ sur $M \times \mathbb{R}$ défini par $\mathcal{F}_1 \times \{0\}$ et $\mathcal{F}_2 \times \{t\}$ pour $t \neq 0$ est presque régulier.

5. Soient $\mathcal{A}$ un algèbroïde de Lie sur M de fléchage $p : \mathcal{A} \to \mathrm{T}M$. La distribution $p(\mathcal{A})$ est intégrable et définit un feuilletage de Stefan $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ sur M. Lorsque $\mathcal{A}$ est l'algèbroïde de Lie d'un groupoïde différentiable G sur M, les feuilles de $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ sont les composantes connexes des orbites de G.

2. Les quasi-graphoïdes

Nous recherchons des groupoïdes différentiables dépourvus d'isotropie superflue. Cela nous amène à poser la :

DÉFINITION-PROPOSITION 1 ([1]). – *Un groupoïde différentiable $G \rightrightarrows G^{(0)}$ de source α et de but β est un quasi-graphoïde s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes* :

1. *si $\nu : O \to G$ est une section locale de α, alors $\beta \circ \nu = 1_O$ si et seulement si ν est la restriction à O de l'inclusion des unités* ;
2. *si S est une variété munie de deux submersions surjectives a et b sur $G^{(0)}$, il existe au plus une application différentiable $\phi : S \to G$ qui vérifie $\alpha \circ \phi = a$ et $\beta \circ \phi = b$.*

Lorsque $G \rightrightarrows G^{(0)}$ est un groupoïde différentiable local [2], on dira que c'est un *quasi-graphoïde local* s'il vérifie l'assertion 2 ci-dessus.

La structure algébrique d'un quasi-graphoïde (local) est entièrement déterminée par ses applications source et but. De plus, on montre la :

PROPOSITION 1. – *Soient G_1 et G_2 deux quasi-graphoïdes α-connexes de base M. Les assertions suivantes sont équivalentes* :

1. *les groupoïdes G_1 et G_2 sont isomorphes* ;
2. *il existe un voisinage V_i des unités dans G_i, $i = 1, 2$ et un difféomorphisme $\phi : V_1 \to V_2$ qui respecte la source et le but* ;
3. *les algèbroïdes de Lie de G_1 et de G_2 sont isomorphes.*

Ces groupoïdes sont très liés aux feuilletages presque réguliers. On montre que lorsque G est un quasi-graphoïde, le flèchage de son algèbroïde de Lie est injectif en restriction à un ouvert dense de la base. On déduit alors la :

PROPOSITION 2. – *Soit G un quasi-graphoïde α-connexe de base M.*

1. *Les orbites de G sont les feuilles d'un feuilletage presque régulier $\mathcal{F}_G$ sur M.*
2. *Si $(M_0, \mathcal{F}_0)$ est le sous-feuilletage régulier maximal de $(M, \mathcal{F}_G)$ la restriction de G à M_0 est isomorphe à $\mathrm{Hol}(M_0, \mathcal{F}_0)$, le groupoïde d'holonomie de $(M_0, \mathcal{F}_0)$.*

Par analogie avec le cas des feuilletages réguliers, on pose la :

DÉFINITION 1. – Un groupoïde G de base M est un *groupoïde d'holonomie* du feuilletage presque régulier $(M, \mathcal{F})$ si c'est un quasi-graphoïde α-connexe dont les orbites sont les feuilles de $\mathcal{F}$.

Contrairement au cas des feuilletages réguliers, il n'y a généralement pas unicité du groupoïde d'holonomie d'un feuilletage presque régulier.

3. Groupoïde d'holonomie

Le flèchage $p : \mathcal{A} \to \mathrm{T}M$ d'un algébroïde de Lie $\mathcal{A}$ sur M est dit *presque injectif* lorsqu'il est injectif en restriction à un ouvert dense de la base M.

THÉORÈME 1. – *Les algèbroïdes de Lie dont le fléchage est presque injectif sont intégrables.*

COROLLAIRE 1. – *Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage presque régulier et k la dimension du sous-feuilletage régulier maximal. Les assertions suivantes sont équivalentes* :
1. $(M, \mathcal{F})$ *admet un groupoïde d'holonomie* ;
2. *il existe un algèbroïde de Lie $\mathcal{A}$ sur M de dimension k qui définit le feuilletage $\mathcal{F}$.*

Exemples 2. – 1. Soit $\mathcal{F}_H$ le feuilletage presque régulier sur M défini par une action différentiable et presque libre $\Phi : M \times H \to M$ d'un groupe de Lie connexe H sur M. Notons $\mathcal{H}$ l'algèbre de Lie de H. Soit

$$\begin{aligned} p : \mathcal{A}_H := M \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathrm{T}M, \\ (x, v) &\longmapsto (\Phi)_*(x, v). \end{aligned}$$

Il existe une unique structure d'algèbroïde de Lie sur $\mathcal{A}_H$ de fléchage p. Cet algèbroïde définit le feuilletage $\mathcal{F}_H$ et son fléchage est presque injectif. Le groupoïde d'holonomie correspondant est le goupoïde produit croisé $M \ltimes H \rightrightarrows M$.

2. Puisque la sphère S^2 n'est pas parallélisable, le feuilletage de $\mathbb{R}^3$ par les sphères concentriques n'admet pas de groupoïde d'holonomie.

3. Soit N une sous-variété de M de codimension 1 et $\mathcal{F}_N$ la partition de M suivant N et les composantes connexes de $M \smallsetminus N$. Supposons pour simplifier que $M = N \times \mathbb{R}$. Soit

$$\begin{aligned} p : \mathcal{A}_N := \mathrm{T}\,M \simeq \mathrm{T}\,N \times \mathrm{T}\,\mathbb{R} &\longrightarrow \mathrm{T}\,M \simeq \mathrm{T}\,N \times \mathrm{T}\,\mathbb{R}, \\ (x, v; t, \lambda) &\longmapsto (x, v; t, t \cdot \lambda). \end{aligned}$$

Il existe une unique structure d'algèbroïde de Lie sur $\mathcal{A}_N$ de fléchage p. Cet algèbroïde de Lie définit $\mathcal{F}_N$ et son fléchage est presque injectif. Le groupoïde d'holonomie correspondant est le groupoïde de l'éclatement de la sous-variété N, c'est-à-dire le produit du groupoïde des couples sur N et du groupoïde de l'action de $\mathbb{R}_*^+$ sur $\mathbb{R}$ par multiplication.

4. Reprenons les notations de l'exemple 4 du paragraphe 1. Soit G_1 (resp. G_2) le groupoïde d'holonomie de $\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_2$) et $\varphi : G_1 \to G_2$ l'immersion induite par l'inclusion de $\mathcal{F}_1$ dans $\mathcal{F}_2$. On se donne une métrique euclidienne sur $\mathrm{T}\,\mathcal{F}_2$ et on note N l'orthogonal de $\mathrm{T}\,\mathcal{F}_1$ dans $\mathrm{T}\,\mathcal{F}_2$. Alors $\mathrm{T}\,\mathcal{F}_2$ s'identifie à $\mathrm{T}\,\mathcal{F}_1 \oplus N$. On munit $\mathcal{A} = (\mathrm{T}\,\mathcal{F}_1 \oplus N) \times \mathbb{R}$ de la structure d'algèbroïde de Lie sur $M \times \mathbb{R}$ admettant pour fléchage

$$\begin{aligned} p : \mathcal{A} = (\mathrm{T}\,\mathcal{F}_1 \oplus N) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathrm{T}(M \times \mathbb{R}) = \mathrm{T}\,M \times \mathrm{T}\,\mathbb{R}, \\ (v_1, v_2, t) &\longmapsto (v_1 + t v_2, (t, 0)). \end{aligned}$$

Cet algèbroïde de Lie définit $\mathcal{F}$ et son fléchage est presque injectif. Le groupoïde d'holonomie correspondant est le groupoïde normal de φ [3]. Lorsque $\mathcal{F}_1$ est le feuilletage de M par ses points et $\mathcal{F}_2$ le feuilletage de M admettant pour unique feuille M, on obtient le groupoïde tangent de M.

Idée de la démonstration du théorème 1. – Soit $\mathcal{A}$ un algèbroïde de Lie sur une variété M de fléchage p presque injectif. L'intégration de $\mathcal{A}$ se fait en deux temps.

Passage de l'infinitésimal au local. – Soient O un ouvert de M, $\{Y_1, \ldots, Y_k\}$ une base de sections locales de $\mathcal{A}$ définies sur O et $X_i = p(Y_i)$ le champ de vecteurs sur M correspondant. On suppose que X_i est complet et on note φ_i^t le flot de X_i. Pour tout $i, j = 1, \ldots, k$ on note f_{ij}^ℓ la famille de fonctions différentiables sur O telle que $[Y_i, Y_j] = \sum_{\ell=1}^k f_{ij}^\ell\, Y_\ell$.

On définit les submersions surjectives

$$\begin{aligned} \alpha := \mathrm{pr}_1 : O \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow O \quad \text{et} \quad \beta : O \times \mathbb{R}^k \longrightarrow O, \\ (x, t_1, \ldots, t_k) &\longmapsto \varphi_1^{t_1} \circ \cdots \circ \varphi_k^{t_k}(x). \end{aligned}$$

La presque-injectivité de p assure qu'il existe un ouvert D de $O \times \mathbb{R}^k$ contenant $O \times \{0\}$ tel que toute section locale à la fois de α et de β et à valeurs dans D est une restriction de la section nulle.

On construit ensuite une famille $\{Z_1, \ldots, Z_k\}$ de champs de vecteurs sur $\mathcal{A}|_O$ qui vérifient (moyennant l'identification de $\mathcal{A}|_O$ à $O \times \mathbb{R}^k$) :

(i) $\mathrm{T}\alpha(Z_i) = 0$ et $\mathrm{T}\beta(Z_i)(x,t) = p(Y_i(\beta(x,t))) = X_i(\beta(x,t))$, $\forall (x,t) \in O \times \mathbb{R}^k$;

(ii) $[Z_i, Z_j](x,t) = \sum_{\ell=1}^k f_{ij}^\ell(\beta(x,t)) Z_\ell(x,t)$, $\forall (x,t) \in O \times \mathbb{R}^k$.

Il existe un ouvert G de $O \times \mathbb{R}^k$ contenant $O \times \{0\}$ et une unique structure de quasi-graphoïde local sur G de source α et de but β, les flots des champs Z_i étant des translations locales à gauche de ce groupoïde local.

On obtient ainsi une famille $\mathcal{U} = \{G_i \rightrightarrows O_i\,;\, i \in I\}$, où $\{O_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de M, $G_i \rightrightarrows O_i$ est un quasi-graphoïde local et qui satisfait à de bonnes conditions de recollement : il existe un quasi-graphoïde local $G_{\mathcal{U}}$ de base M tel que chaque G_i est un sous-quasi-graphoïde local de $G_{\mathcal{U}}$. Par construction, $G_{\mathcal{U}}$ intègre $\mathcal{A}$.

Passage du local au global. – On étend la notion d'équivalence de Morita [6] aux quasi-graphoïdes locaux ; on parle alors d'*isomorphisme Morita local*. On montre alors le :

LEMME 1. – *Si $(b,a) : Z \to O_0 \times O_1$ est un graphe d'un isomorphisme Morita local entre deux quasi-graphoïdes locaux alors Z peut être recouvert par des ouverts $\{V_j\,;\, j \in J\}$ tels que si S est une variété muni de deux submersions surjectives a_S et b_S sur $a(V_j)$ et $b(V_j)$, il existe au plus une application différentiable $\phi : S \to V_j$ telle que $b \circ \phi = b_S$ et $a \circ \phi = a_S$.*

L'ensemble $P_{\mathcal{U}}$ de tous les isomorphismes Morita locaux entre éléments de $\mathcal{U}$ se comporte presque comme un pseudogroupe. La différence essentielle réside dans le fait que l'on n'a pas une composition globale : si f et g sont deux éléments de $P_{\mathcal{U}}$, certaines restrictions de f sont composables avec certaines restrictions de g, mais il n'y a pas de meilleur choix.

On définit la notion de *germe d'isomorphisme Morita local* : soient $(b_f, a_f) : Z_f \to O_0 \times O_1$ et $(b_g, a_g) : Z_g \to O_0' \times O_1'$ des graphes respectivement de f et g deux isomorphismes Morita locaux entre éléments de $\mathcal{U}$. Soit $\gamma_f \in Z_f$ et $\gamma_g \in Z_g$. On dira que le *germe* de f en γ_f, noté $[f]_{\gamma_f}$, est égal au germe de g en γ_g, s'il existe un voisinage ouvert V_{γ_f} de γ_f dans Z_f (resp. V_{γ_g} de γ_g dans Z_g) et un difféomorphisme $\Phi : V_{\gamma_f} \to V_{\gamma_g}$ qui envoie γ_f sur γ_g et tel que $a_g \circ \Phi = a_f$ et $b_g \circ \Phi = b_f$. Cela signifie qu'il existe une restriction de f égale à une restriction de g admettant pour graphe $(b_f, a_f) : V_{\gamma_f} \to b_f(V_{\gamma_f}) \times a_f(V_{\gamma_f})$. La *source* de $[f]_{\gamma_f}$ est $a_f(\gamma_f)$ et son *but* est $b_f(\gamma_f)$.

On construit ainsi le groupoïde des germes du « pseudogroupe » $P_{\mathcal{U}}$. Le lemme précédent garantit que ce groupoïde est différentiable et qu'il s'agit d'un quasi-graphoïde. De plus il « contient » $G_{\mathcal{U}}$ et intègre $\mathcal{A}$ par construction.

Références bibliographiques

[1] Bigonnet B., Holonomie et graphe de certains feuilletages avec singularités, Université Paul-Sabatier, 1986.

[2] van Est W.T., Rapport sur les S-atlas, Astérisque 116 (1984) 235–292.

[3] Hilsum M., Skandalis G., Morphismes K-orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 20 (4e série) (1987) 325–390.

[4] Pradines J., How to define the differentiable graph of a singular foliation, C. de Top. et Geom. Differ. Cat. XXVI (4) (1985) 339–381.

[5] Pradines J., Troisième théorème de Lie pour les groupoïdes différentiables, C. R. Acad. Sci. Paris 267 (1968) 21–23.

[6] Renault J., C^*-algebras of groupoids and foliations, Proc. Sym. Pure Math. 38 (1982) 339–350.

[7] Stefan P., Accessible sets, orbits and foliations with singularities, Proc. of the London Math. Soc. 29 (1974) 699–713.