



**HAL**  
open science

# Manuel GALEJADE : S'initier aux mathématiques et à l'informatique en jouant avec les graphes.

Rose Desvents

► **To cite this version:**

Rose Desvents. Manuel GALEJADE : S'initier aux mathématiques et à l'informatique en jouant avec les graphes.. 2022. hal-03787593

**HAL Id: hal-03787593**

**<https://hal.science/hal-03787593>**

Submitted on 30 Sep 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Volume I de la Collection Terra Numerica

# GALEJADE

S'initier aux mathématiques et à l'informatique en jouant avec les graphes.

Rose Desvents



<https://terra-numerica.org>



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Quelques mots sur Terra Numerica et GALEJADE . . . . .	5
1.2	Objectifs du manuel GALEJADE . . . . .	6
1.2.1	Compétences . . . . .	6
1.3	Définitions . . . . .	9
1.3.1	Qu'est-ce qu'un graphe ? . . . . .	9
1.3.2	Qu'est-ce qu'un algorithme ? . . . . .	12
1.4	Comment utiliser ce document . . . . .	14
1.4.1	Les encarts . . . . .	14
1.4.2	Présentation des supports . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Dessins de graphes</b>	<b>17</b>
2.1	Construire un graphe . . . . .	17
2.1.1	Construire un graphe à partir d'une collection des degrés . . . . .	21
2.2	Dessiner un graphe sans lever le crayon . . . . .	29
2.3	Graphes isomorphes . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Ensemble indépendant de sommets</b>	<b>55</b>
3.1	Algorithme glouton . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Coloration des sommets</b>	<b>67</b>
4.1	Coloration avec couleurs données . . . . .	67
4.2	Coloration avec deux couleurs : algorithme . . . . .	75
4.3	Coloration avec le moins de couleurs possibles. . . . .	83
<b>5</b>	<b>Graphes planaires</b>	<b>99</b>
5.1	Dessins planaires . . . . .	99
5.2	Coloration des graphes planaires . . . . .	115



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Quelques mots sur Terra Numerica et GALEJADE

Terra Numerica (<http://terra-numerica.org>) s'inscrit dans la continuité des projets des acteurs de la diffusion de la culture des sciences du numérique dans les Alpes-Maritimes et le Var. C'est un projet fédérateur émanant du CNRS, d'Inria et Université Côte d'Azur, regroupant l'éducation Nationale et un grand nombre de partenaires importants, qui a comme objectif final la création d'une Cité du Numérique. Le but de Terra Numerica est d'accroître le capital de compétences numériques (dans son acception la plus large) de tous les citoyens (dont les scolaires), à travers une audience des plus vastes et diversifiées. Il se doit de répondre au besoin urgent de compréhension et d'appropriation des sciences du numérique par la société, de la sensibiliser et la responsabiliser aux forts enjeux sociétaux qui en découlent ainsi que de développer la pensée scientifique et de susciter les vocations. Terra Numerica développe un dispositif original, attractif et unique de diffusion, de partage, de rencontres, de convivialité entre les acteurs du numérique : chercheurs, enseignants-chercheurs, enseignants, associatifs, industriels, élèves, grand public et citoyens. Il comprend un lieu central (de type Palais de la Découverte des Sciences du numérique ou Cité du Numérique) et différents Espaces Partenaires à travers tout le territoire. TerraNumerica@Sophia, rampe de lancement vers une Cité du Numérique, a été inauguré le 11 juin 2022

Dans ce cadre, les membres de Terra Numerica créent depuis des années des ateliers qu'ils présentent régulièrement dans les classes (du primaire au secondaire et au-delà). Parmi eux se trouvent un riche ensemble d'ateliers autour des graphes et des algorithmes, développés au sein de Terra Numerica dans le cadre du projet GALEJADE (Graphes et ALgorithmes : Ensemble de Jeux À Destination des Ecoliers – mais pas que). Ces ateliers prennent la forme de jeux qui pour la plupart peuvent être réalisés selon plusieurs formats : sur feuille (ou tableau), sur plateau, grandeur nature ou via de petites applications en ligne (ce dernier format est en cours de réalisation).

## 1.2 Objectifs du manuel GALEJADE

Ce manuel recense les ateliers GALEJADE, les résultats mathématiques qui sont derrière, et les algorithmes. Différentes manières de présenter les ateliers, notamment en variant les supports, sont évoquées pour trouver des solutions ainsi que des manières de les présenter. Ce manuel s'adresse donc à toutes les personnes (professeurs, médiateurs scientifiques, animateurs, parents...) souhaitant proposer à leur public (aux enfants comme aux adultes) des activités ludiques permettant d'acquérir des compétences essentielles en mathématiques et informatique.

Les mathématiques étant malheureusement trop souvent réduites au calcul dans l'imaginaire collectif, nous avons délibérément décidé de présenter des activités qui ne requièrent pas (ou très peu) de calculs. L'idée est d'insister sur le fait que les mathématiques ne sont pas le calcul et que les techniques calculatoires ne sont qu'un outil, bien loin d'être toujours nécessaire. Ainsi, les activités décrites dans ce document ont pour but de développer toutes les compétences mathématiques, telles que décrites au Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale du 30 juillet 2020, mis à part Calculer. À savoir Chercher, Modéliser, Représenter, Reasonner et Communiquer.

D'autre part, les activités de ce manuel ont aussi pour but de se familiariser avec la notion de **graphes** et d'**algorithmes** qui sont au cœur de l'informatique. Cela contribue au développement des mêmes compétences globales avec quelques compétences supplémentaires qui apparaissent. Les graphes sont un excellent concept d'introduction aux mathématiques et à l'informatique : tout en étant une **abstraction**, ils ont une représentation graphique qui permet de les **manipuler concrètement**. De plus, ils permettent de modéliser un très grand nombre de situations de la vie courante.

Enfin, il est un point important que nous tenons à mettre en évidence dans ce manuel, à savoir la **grande multiplicité** aussi bien des représentations et des problèmes modélisés, que des solutions et des méthodes pour arriver à une solution.

Il est important de comprendre que **ce document se veut évolutif et une graine dans un travail collaboratif plus vaste**. En particulier, nous espérons de nombreux retours des lecteurs et utilisateurs de ce manuel (enseignants, médiateurs scientifiques, *etc.*) afin de l'améliorer. De plus, nous espérons qu'il se verra compléter par de nombreuses fiches pédagogiques expliquant comment mettre en œuvre l'ensemble des jeux dans différents contextes, avec des retours d'expérience détaillant ce qui a et ce qui n'a pas fonctionné.

### 1.2.1 Compétences

Nous détaillons maintenant de manière plus fine les compétences que les activités de ce manuel ont pour but de développer.

#### A. Chercher

- A.1 *S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses,*

*chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture.*

La manipulation et l'expérimentation sur une grande variété de supports nous paraît essentielle pour une meilleure appropriation d'un problème. Ainsi, la plupart des activités proposées dans ce manuel peuvent se faire sur trois supports de taille de différentes : soit sur une feuille de papier (pour une activité individuelle le plus souvent), soit sur un plateau de jeu spécialement conçu (pour une activité en petit groupe), soit en grandeur nature (pour une activité en groupe plus important). Occasionnellement, d'autres supports ou objets sont suggérés pour rendre les activités plus ludiques. Enfin, des jeux vidéos pédagogiques sont en cours de réalisation pour pouvoir faire certaines des activités sur ordinateur.

Il est essentiel de souligner l'importance de l'émission d'hypothèse(s) et de largement la valoriser. En aucun cas, émettre une hypothèse qui s'avérera fausse par la suite n'est une erreur. C'est même une des choses les plus importantes que doit faire un scientifique. La véritable erreur consisterait à maintenir une hypothèse alors que celle-ci est invalidée par un contre-exemple. C'est la raison pour laquelle, les scientifiques parlent des hypothèses qui sont vérifiées ou corroborées et très peu de celles qui sont invalidées.

#### *A.2 Tester, essayer plusieurs pistes de résolution.*

Comme dit précédemment, il est important d'investiguer plusieurs pistes de résolution pour un même problème. De plus, il est important de souligner qu'il y a le plus souvent de nombreuses méthodes pour le résoudre et que ces dernières sont toutes valables à condition bien évidemment d'être correctes.

#### *A.3 Décomposer un problème en sous-problèmes.*

C'est une des bases des mathématiques et de l'informatique. Pour résoudre un grand problème (difficile), il est très souvent pratique de décomposer celui-ci en des sous-problèmes plus petits (et plus faciles). C'est le principe même d'un algorithme qui n'est rien d'autre que la décomposition d'une tâche complexe en une succession d'opérations simples (pour résoudre des tâches simples).

### **B. Modéliser**

*B.1 Utiliser des outils mathématiques (les graphes dans ce manuel) pour résoudre des problèmes concrets.*

*B.2 Reconnaître des situations pouvant être modélisées par des graphes.*

*B.3 Traduire en langage mathématiques une situation réelle (ici à l'aide de graphes).*

Ce manuel essaie de rendre compte de la diversité des problèmes qui peuvent se modéliser à l'aide d'un même concept mathématique : celui de graphe. En particulier, les encarts rouges "Application" (voir Section 1.4), recensent de tels problèmes concrets.

### **C. Représenter**

C.1 *Produire et utiliser des représentations des graphes.*

C.2 *Identifier différentes représentations d'un même graphe.*

La représentation de ces objets mathématiques que sont les graphes (c'est-à-dire la manière de les dessiner sur une feuille) est très intéressante. Ce sont des objets simples (des sommets reliés par des arêtes, voir Section 1.3.1) et concrets dans le sens où il est facile et très visuel de représenter un graphe. Mais c'est aussi un objet abstrait (seule l'existence d'arêtes est importante, pas le positionnement des sommets, ni le tracé des arêtes) qui admet une infinité de représentations, et il n'est souvent pas facile de déterminer si deux représentations sont celles d'un même graphe ou non. Cela diffère ainsi des objets mathématiques auxquels les élèves sont habituellement confrontés. En effet, les nombres entiers ont une unique représentation (en système décimal) et les nombres rationnels une représentation canonique sous forme irréductible (par exemple  $\frac{3}{2}$  et  $\frac{6}{4}$  sont égaux mais leur forme canonique est  $\frac{3}{2}$ ); les figures géométriques ont une infinité de représentations mais il est facile de voir si deux dessins sont des représentations d'une même figure (par rotation et translation) en copiant une figure sur un calque et en essayant de la superposer à l'autre.

## D. Raisonner

D.1 *Comprendre et savoir appliquer un algorithme.*

D.2 *Résoudre des problèmes nécessitant la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement.*

D.3 *Reconnaître des schémas, des configurations, des invariants, des répétitions.*

D.4 *Démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion.*

D.5 *Généraliser et abstraire : repérer les enchaînements logiques et les traduire en instructions conditionnelles, traduire les schémas récurrents en boucles.*

D.6 *Concevoir des algorithmes : écrire des solutions modulaires à un problème donné, réutiliser des algorithmes déjà faits.*

**Ces six compétences sont véritablement le cœur des techniques en mathématiques et en informatique. Les activités proposées dans ce manuel permettent de les développer de manière graduelle et en s'amusant.**

D.7 *Tenir compte d'éléments divers (arguments d'autrui, résultats d'une expérience, etc.) pour modifier ou non son jugement.*

Cette compétence transverse est particulièrement importante. C'est la base de la démarche scientifique.

Même si ce n'est pas le cas en mathématiques, il est important de faire comprendre que les théories scientifiques (en physique, chimie, biologie, etc.) ne sont que des vérités *a priori* provisoires (elles ne sont valides que tant qu'aucune expérience ne les a invalidées), mais

cependant très fiables car vérifiées et étayées par un très grand nombre d'expériences. La relativité (restreinte ou générale) d'Albert Einstein est, à cet égard, une théorie extrêmement solide.

D.8 *Progresser collectivement dans une investigation.*

**Les différents supports pensés pour accueillir les jeux décrits dans ce manuel servent à favoriser la réflexion collective.** En particulier, jouer sur un plateau de jeux ou en grandeur nature est idéal pour aborder les jeux en groupes.

Il est important de faire passer l'idée que la science (et les mathématiques et l'informatique en particulier) sont des aventures collectives. L'image d'Epinal du chercheur seul dans sa tour d'ivoire est complètement erronée. Certes, un scientifique peut travailler seul, mais son travail ne vaudra que parce qu'il sera validé par ses pairs et s'intégrera dans tout un ensemble de travaux réalisés par une multitude de scientifiques.

D.9 *Prendre progressivement conscience de la nécessité et de l'intérêt de justifier ce qu'on affirme.*

D.10 *Justifier ses affirmations.*

Dans le manuel, nous appuyons énormément sur ces deux derniers points qui sont cruciaux en mathématiques et informatique, mais aussi plus généralement en science, et dans toute argumentation. En particulier, certains des jeux que nous proposons n'ont pas de solution. Nous insistons sur le fait que simplement dire qu'un jeu n'a pas de solution, n'est pas une réponse complète et reste au niveau de l'hypothèse ou de la conjecture. Pour que la réponse soit acceptable, il faut impérativement justifier pourquoi aucune solution n'existe.

## E. Communiquer

E.1 *Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation.*

Dans ce manuel, nous avons pris le parti d'utiliser assez peu de notions, mais de toujours utiliser le vocabulaire habituel utilisé par les chercheurs du domaine, avec les explications permettant au plus grand nombre de comprendre l'ensemble du document. Les premières sont données dans la Section 1.3.1. Il nous paraît important que les élèves utilisent dès le début le vocabulaire consacré.

E.2 *Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.*

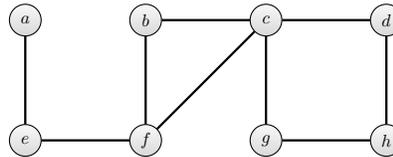
## 1.3 Définitions

### 1.3.1 Qu'est-ce qu'un graphe ?

Un **graphe** est défini par un ensemble d'éléments, appelés **sommets**, et un ensemble d'**arêtes** qui relie certaines paires de sommets. Notons que cette terminologie est identique à celle

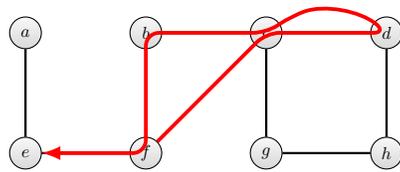
utilisée en géométrie (par exemple, les sommets et les arêtes d'un triangle ou d'un cube). Dans un graphe, entre deux sommets, il y a au plus une arête (soit aucune arête, soit une seule). Il existe une notion dans laquelle, il peut y avoir plusieurs arêtes entre deux sommets. Nous parlons alors de **multigraphe**. Dans ce manuel, nous nous intéressons quasi exclusivement aux graphes (les rares endroits qui concernent les multigraphes seront clairement mentionnés).

Graphes (et multigraphes) sont représentés de la manière suivante. Les sommets sont représentés par des cercles et les arêtes par des traits (droits ou courbes) entre les sommets qu'elles relient. Un graphe est dessiné ci-dessous. Il a huit sommets (nommés  $a, b, \dots, h$ ) et neuf arêtes. En particulier, le sommet  $b$  et le sommet  $f$  sont reliés par une arête.

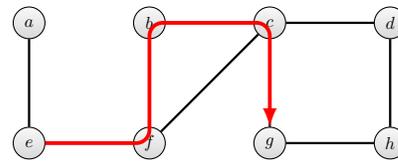


Deux sommets reliés par une arête sont **voisins** ou **adjacents**. Par exemple, nous pouvons voir les sommets comme des villes et les arêtes comme des routes reliant deux villes. Donc notre exemple, il y a donc huit villes et neuf routes, et en particulier une route reliant la ville  $b$  et la ville  $f$ .

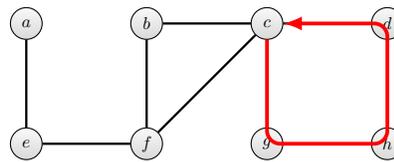
Les graphes sont des objets mathématiques très simples où beaucoup de notions sont très intuitives. Une **marche** dans un graphe est une séquence alternée de sommets et d'arêtes. Par exemple, si les sommets sont des villes et les arêtes sont des routes, alors une marche est une séquence alternée de villes et de routes. Dans un graphe, il y a au plus une arête entre deux sommets, et donc chaque arête est entièrement déterminée par les deux sommets qui l'encadrent dans la séquence (c'est-à-dire le sommet avant et le sommet après). Par simplicité, une marche sera alors abrégée en une séquence de sommets. Dans l'exemple précédent,  $f-c-d-c-b-f-e$  est une marche. Un **chemin** est une marche où les sommets sont tous distincts (nous ne passons pas deux fois par un même sommet). La marche évoquée précédemment  $f-c-d-c-b-f-e$  n'est pas un chemin car elle passe plusieurs fois par les sommets  $c$  et  $f$ . En revanche,  $e-f-b-c-g$  est un chemin. Un **cycle** est une marche où toutes les arêtes sont distinctes et où les sommets sont tous distincts mis à part le premier et le dernier qui sont égaux. Par exemple,  $c-g-h-d-c$  est un cycle, mais  $c-b-f-c-d-h-g-c$  n'en est pas un car cette marche repasse par  $c$  une première fois avant d'y revenir à la fin. Notons que, dans un graphe, un cycle a au moins trois sommets. En effet, une marche  $x-y-x$  utilise deux fois l'arête entre  $x$  et  $y$  et n'est donc pas un cycle. La **longueur** d'un cycle ou d'un chemin est son nombre d'arêtes.



Une marche de longueur 6.



Un chemin de longueur 4.



Un cycle de longueur 4.

La notion de graphe est très importante car les graphes permettent de modéliser un grand nombre de concepts et de réseaux de manière simple. Outre l'exemple des réseaux routiers que nous venons d'évoquer, les graphes peuvent représenter des réseaux informatiques (les sommets sont des ordinateurs ou routeurs ou data centers et les arêtes sont les liens entre eux, e.g., fibres optiques), des réseaux biologiques (les sommets sont des protéines ou des atomes et les arêtes représentent les actions chimiques entre eux), des réseaux sociaux (les sommets sont des individus et les arêtes représentent, par exemple, les liens d'amitié entre ces personnes), *etc.* Voir Figure 1.1.

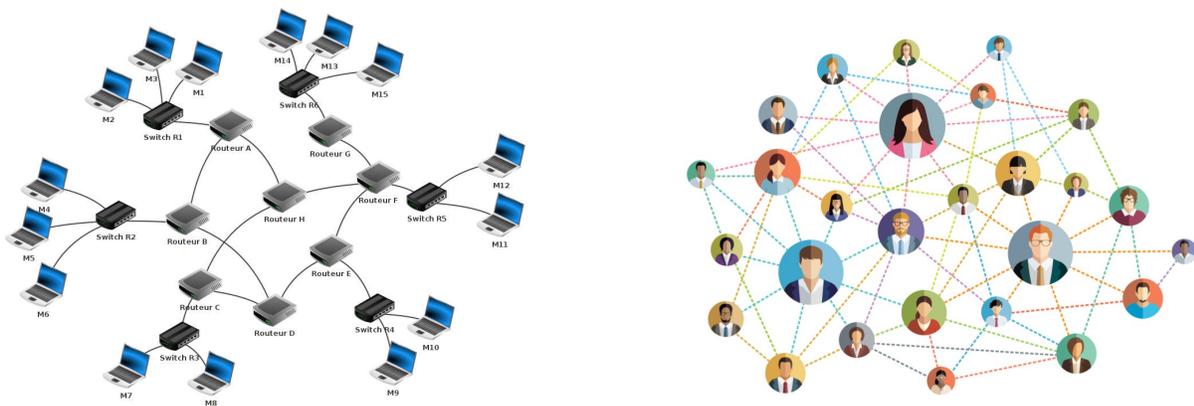


FIGURE 1.1 – Deux graphes représentant un réseau informatique (à gauche) et un réseau social (à droite).

Les graphes offrent un support pour un grand nombre d’algorithmes et permettent ainsi de résoudre un grand nombre de problèmes.

### 1.3.2 Qu’est-ce qu’un algorithme ?

Un **algorithme** est une suite d’instructions élémentaires qui, appliquée à un ensemble d’entrées, fournit des résultats en sortie. L’image souvent utilisée est celle de la recette de cuisine. Prenons l’exemple de la réalisation de crêpes. Les entrées sont les ingrédients : farine, lait, œufs, *etc.* Une instruction élémentaire est une phrase dans le livre de recette de cuisine : “Mettre la farine dans un saladier”. Le résultat est des crêpes.

Notons qu’en toute généralité, un algorithme n’a pas forcément besoin d’entrée, ni de sortie. La succession des instructions peut être la seule chose désirée. C’est par exemple le cas des danses chorégraphiées comme la Macarena ou le Madison. C’est aussi le cas de nombreux algorithmes en automatique ou robotique qui gèrent des mouvements.

Ce qu’est une instruction élémentaire est variable. Cela dépend bien entendu des algorithmes mais aussi par qui ou quoi ils doivent être effectués. Dans notre exemple de crêpes, nous avons cité “Mettre la farine dans un saladier” comme instruction élémentaire. C’est ce que nous trouvons dans les livres de recettes et qui est considéré comme une instruction élémentaire pour une personne normale. Mais, pour un jeune enfant ou un robot, cette instruction est loin d’être élémentaire. Il faudra lui donner l’algorithme détaillant comment faire avec la suite des instructions “Ouvrir le paquet de farine”, “Prendre une cuiller”. . . À l’inverse, pour un cuisinier un peu chevronné, “Faire de la pâte à crêpe” peut être considéré comme une instruction élémentaire et l’algorithme pour faire des crêpes ne contient alors que deux instructions “Faire de la pâte à crêpe” et “Cuire les crêpes”. Il en va de même en calcul mathématique. On considère souvent comme instructions élémentaires les quatre opérations élémentaires, à savoir l’addition, la soustraction, la multiplication et la division. Mais une partie de l’apprentissage à l’école élémentaire consiste justement à apprendre les algorithmes pour faire ces opérations élémentaires à partir d’opérations plus simples (tables, retenue. . .). À l’inverse, les instructions élémentaires d’un mathématicien ou numéricien chevronné sont des tâches plus complexes telles qu’inverser une matrice ou dériver une fonction.

En fait, peu importe ce qu’est une instruction élémentaire. En algorithmique, la science de la conception des algorithmes, **tout l’art consiste à diviser une instruction complexe en une suite d’instructions plus simples**. Si ces dernières ne sont pas suffisamment élémentaires pour être comprises par celui qui doit effectuer l’algorithme (ordinateur, humain, robot. . .) alors il faut diviser chacune d’elles en une suite d’instructions encore plus simples, et ainsi de suite jusqu’à arriver à des instructions élémentaires. Ainsi dans ce manuel, nous n’abordons pas cette notion d’instruction élémentaire. Celles que nous avons choisies pour détailler nos algorithmes (par exemple “*choisir un sommet*”, “*traverser une arête*”, ou “*colorer un sommet*”) sont suffisamment simples pour apparaître élémentaires et être facilement exécutables par toute personne, y compris un jeune enfant. En revanche, si ces instructions devaient être exécutées par une machine, par

exemple un ordinateur, alors il faudrait lui fournir un algorithme pour effectuer chacune d'entre elles.

En fonction de la tâche qu'il a à effectuer, concevoir un algorithme est plus ou moins ardu et l'algorithme lui-même peut être très simple ou très complexe. Mais quel qu'il soit, il faut montrer que l'algorithme est **valide**, c'est-à-dire qu'il s'arrête et qu'il a bien effectué la tâche désirée au moment où il s'arrête. Pour cela, même si c'est souvent intéressant, il ne suffit pas de donner un ou plusieurs exemples sur lesquels l'algorithme marche. Il faut montrer par le **raisonnement mathématique** que cela est vrai dans tous les cas.

Considérons par exemple la tâche qui consiste à colorer en rouge tous les sommets d'un graphe donné en entrée. Considérons les trois algorithmes suivants.

#### Algorithme 1.3.1.

1. Si tous les sommets sont rouges, l'algorithme est terminé.
2. S'il existe un sommet qui n'est pas rouge, en choisir un et le colorer en rouge.
3. Recommencer en 1.

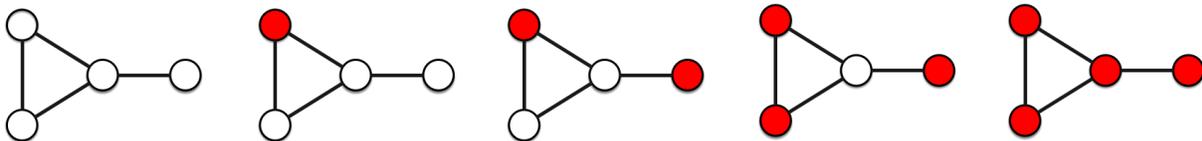
#### Algorithme 1.3.2.

1. Si tous les sommets sont rouges, l'algorithme est terminé.
2. S'il existe un sommet blanc, en choisir un et le colorer en rouge.
3. Recommencer en 1.

#### Algorithme 1.3.3.

1. Aucun sommet n'est blanc, l'algorithme est terminé.
2. S'il existe un sommet blanc, en choisir un et le colorer en rouge.
3. Recommencer en 1.

L'exemple ci-dessous décrit l'exécution de n'importe lequel de ces trois algorithmes pour le graphe de quatre sommets dessiné à gauche. Il y a quatre étapes avant que tous les sommets soient rouges et que l'algorithme s'arrête.



On peut facilement prouver que l'Algorithme 1.3.1 est correct. En effet, d'après l'instruction 1, si cet algorithme s'arrête alors tous les sommets sont rouges. De plus, un sommet qui n'est

pas rouge est coloré en rouge par l'instruction 2 à chaque boucle. Comme le nombre de sommets est fini, l'algorithme finira bien par avoir tous les sommets colorés rouge.

De la même manière, on peut montrer que les Algorithmes 1.3.2 et 1.3.3 sont valides, mais uniquement sur les graphes dont les sommets sont colorés en blanc ou en rouge au départ. Avec un graphe d'entrée ayant par exemple un sommet bleu, alors ces deux algorithmes ne sont pas valides. En effet, l'instruction 2 de ces deux algorithmes ne recoloré que les sommets blancs en rouge. Ainsi le sommet bleu de départ ne sera jamais recoloré en rouge. L'Algorithme 1.3.2 n'atteindra donc jamais sa condition d'arrêt et tournera indéfiniment. L'Algorithme 1.3.3 lui s'arrêtera lorsque tous les sommets blancs auront été recolorés en rouge, mais sans avoir effectué la tâche voulue car le sommet bleu (et plus généralement ceux qui ne sont ni rouges ni blancs au départ) ne sont pas colorés en rouge.

## 1.4 Comment utiliser ce document

### 1.4.1 Les encarts

Afin de faciliter la lecture et l'usage de ce livre, nous avons utilisé des encarts de couleurs pour faire ressortir un certain nombre de choses.

Tout d'abord, les énoncés des jeux sont dans des encarts bleus. Par exemple :

#### Jeu 1.4.1. Énoncé de jeu

Les encarts bleus contiennent les énoncés des jeux.

Nous donnons les solutions de tous les jeux. Elles ne sont pas dans un encart, mais leur début est indiqué clairement et un triangle en marque la fin, comme ci-dessous.

*Solution du Jeu.* On donne la solution. Elle se termine par ce symbole. <

Les algorithmes sont une des notions importantes du manuel. Nous les avons mis en exergue dans des encarts gris.

#### Algorithme 1.4.1. Comment trouver un algorithme

Les encarts gris contiennent les algorithmes. Pour trouver un algorithme dans ce manuel, il suffit donc d'appliquer celui qui suit.

1. Ouvrir le manuel.
2. Faire défiler les pages.
3. Repérer un encart gris.

Parfois, pour que les jeux ou les algorithmes soient bien compris, ils nous a semblé utile de donner des exemples. Ceux-ci sont dans des encarts verts.

**Exemple – Pour mieux comprendre**

Les encarts verts permettent de donner des exemples.

Les encarts violets permettent d’aller plus loin sur le sujet en question. Le plus souvent y sont donnés des théorèmes et leur démonstration (que ce soit pour les preuves mathématiques ou pour d’autres explications). Ils servent également à montrer la validité de certains algorithmes.

**Allons plus loin – Explications supplémentaires**

Ces encarts contiennent souvent des théorèmes dont les énoncés sont écrits en italique. Les théorèmes sont identifiés par deux nombres séparés par un point. Le premier est celui du chapitre dans lequel il se trouve, le second le numéro d’ordre dans ce chapitre.

**Théorème 1.1.** *L’identifiant de ce théorème est 1.1 car c’est le premier théorème du Chapitre 1.*

*Démonstration.* Les démonstrations des théorèmes commencent toujours par le mot “Démonstration” écrit en italique et se terminent par un carré. □

Les encarts jaunes donnent des indications d’ordre pédagogique sur les activités. Il en existe de deux types.

**Pédagogie – Conseils**

Les encarts jaunes “Pédagogie” contiennent des indications ou des suggestions pédagogiques.

**Mise en place – Quel matériel utiliser et comment**

Les encarts jaunes “Mise en place” donnent des indications sur le matériel à utiliser et comment. En particulier, il est souvent détaillé comment utiliser le plateau de jeu ou comment mettre en place des activités grandeur nature.

Comme nous l’avons écrit, les graphes peuvent être utilisés pour modéliser une très grande variété de problèmes. Les encarts rouges mettent en exergue certaines de ces applications.

Il en existe de deux types.

**Problème 1.4.1. Modéliser et résoudre des problèmes avec les graphes**

Les encarts rouges “Problème” présentent des problèmes qu’une modélisation en termes de graphes permet de résoudre, bien entendu en se ramenant à un des jeux qui précèdent.

**Application – Utilisons les graphes**

Les encarts rouges “Application” présentent des applications concrètes des différentes notions de graphes abordées dans ce manuel. Cela va de tours de magie ou d’énigmes à résoudre à des présentations d’utilisation industrielle.

**1.4.2 Présentation des supports**

La plupart des jeux peuvent se jouer sur différents supports à différente échelle :

- sur une feuille de papier ou les applications on-line pour jouer seul ;
- sur le plateau de jeu, des bâches souples ou de grandes feuilles plastifiées pour jouer en petit groupe ;
- en grandeur nature avec des cerceaux et des lattes ou des graphes peints au sol pour jouer en groupe d’une demi-classe.

Une idée sous-jacente à ce manuel étant que les mathématiques et l’algorithmique peuvent se trouver partout, la variation des supports est importante. Un certain nombre de jeux utilisent donc des supports alternatifs aux trois présentés ci-dessus : ballons de football ou de basket, échiquiers, cartes de géographie, ballons gonflables, dominos, arrosoir... Bien d’autres peuvent évidemment être utilisés. N’hésitez pas à faire preuve d’imagination.

## Chapitre 2

# Dessins de graphes

### 2.1 Construire un graphe

Le but des jeux de cette partie est de se familiariser avec les notions élémentaires des graphes. Il s'agira notamment de construire des graphes à partir de certaines informations, notamment liées aux degrés des sommets. Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes **incidentes** à (i.e., qui partent d') un sommet. Le degré d'un sommet est donc égal au nombre de ses voisins dans le graphe.

La plupart des jeux peuvent se jouer seul, mais il est possible de les faire faire par petits groupes ou faire des mises en commun après que chacun a réfléchi de son côté.

#### Jeu 2.1.1. Est-ce un graphe ?

Parmi les figures dessinées Figure 2.1, lesquelles représentent des graphes ?

*Solution du Jeu 2.1.1.* Les figures  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_4$  et  $F_5$  représentent des graphes. Les figures  $F_3$  et  $F_6$  non.

Notons que dans un graphe un sommet n'est pas forcément incident à une arête, c'est le cas du sommet en haut à gauche de la figure  $F_2$ . En revanche, une arête doit nécessairement relier un sommet à un autre. C'est la raison pour laquelle la figure  $F_3$  n'est pas un graphe : en effet, le segment en haut à gauche n'est pas une arête car une seule de ses extrémités est un sommet.

Aller d'un sommet à un autre est la seule contrainte pour une arête. Le tracé de celle-ci est indifférent. Le plus souvent, par souci de simplicité, on choisit de les tracer droites (ou à peu près), mais il est aussi valide de les faire courbes. La figure  $F_4$  est donc bien un graphe. C'est d'ailleurs le même graphe que celui de la figure  $F_1$ . (Pour en savoir plus sur quand un graphe est le même qu'un autre, voir la Partie 2.3.) Il est proscrit d'utiliser la règle pour dessiner des graphes, car la notion de droite n'existe pas dans ce modèle.

Les arêtes d'un graphe peuvent se croiser (sinon il y aurait des graphes que nous ne pourrions

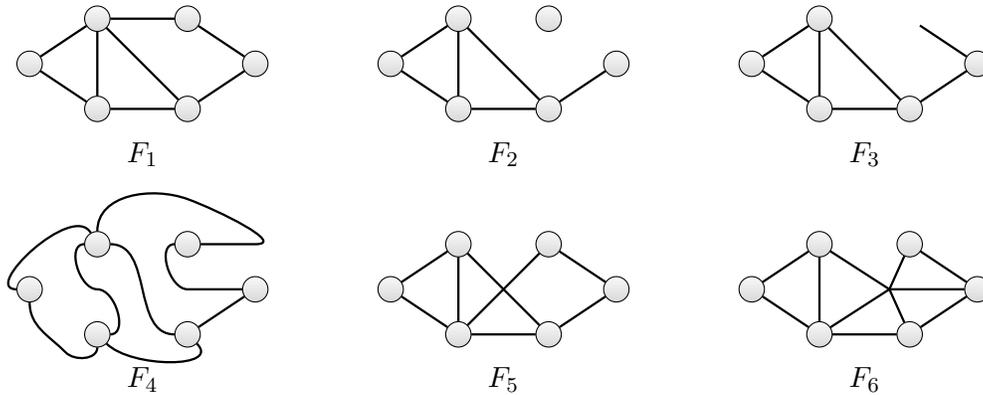
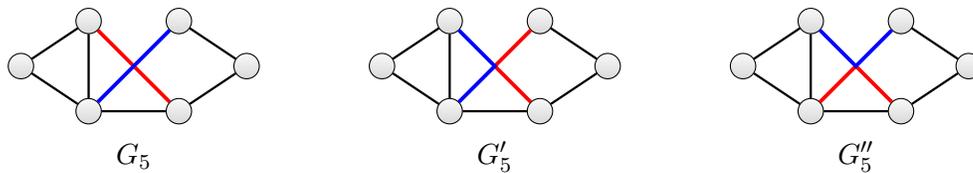


FIGURE 2.1 – Jeu 2.1.1 : Parmi ces figures, lesquelles représentent des graphes ?

pas dessiner sur une feuille, voir Chapitre 5). Cependant quand deux arêtes se croisent, aucune d'elles ne change de direction. Ainsi la figure  $F_5$  représente le graphe  $G_5$  de la Figure 2.2 où une des deux arêtes qui se croisent est en rouge et l'autre en bleu et pas le graphe  $G'_5$  ou le graphe  $G''_5$ .  $\triangleleft$

FIGURE 2.2 – Le graphe  $G_5$  représenté par  $F_5$  et deux graphes  $G'_5$  et  $G''_5$  non représentés par  $F_5$ .

### Jeu 2.1.2. Décrire un graphe

Le jeu se déroule avec au moins deux joueurs. Un des joueurs découvre un graphe. (Par exemple, un de ceux de la Figure 2.4). Il doit ensuite donner des indications aux autres joueurs, qui ne voient pas le graphe, afin que ces derniers le dessinent.

#### *Solution du Jeu 2.1.2.*

Un même graphe admet une infinité de représentations (de dessins) selon les différentes positions des sommets, les différents tracés possibles pour les arêtes... (voir Section 2.3). Ce jeu a pour but de montrer que "l'aspect" du dessin importe peu, mais que l'information fondamentale

véhiculée par un graphe est « qui est relié à qui ». Ainsi la Figure 2.3 montre trois dessins possibles pour un même graphe. ◁

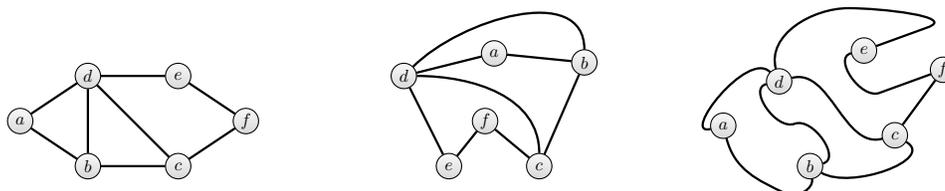


FIGURE 2.3 – Plusieurs dessins pour un même graphe

#### Pédagogie – Description relationnelle

Afin de décrire le graphe, il faut éviter que les élèves utilisent des instructions positionnant les sommets les uns par rapport aux autres du type « le sommet  $a$  est au dessus / à droite / à gauche, ... » du sommet  $b$  ». Autant que possible, le graphe doit uniquement être décrit par ses sommets et les arêtes les reliant à l'aide de phrases du type « Le sommet  $a$  est relié par une arête au sommet  $b$  ». Dans un premier temps, pour aider les élèves, on peut fournir des graphes dont les sommets ont des labels (lettres ou nombres) distinctifs, comme  $G_1$  et  $G_2$ .

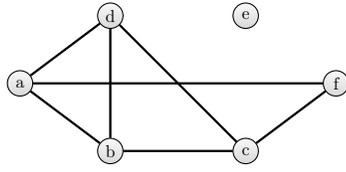
#### Pédagogie – Non utilisation de la règle

Le tracé d'une arête n'ayant aucune importance, l'usage de la règle (ou de tout autre ustensile) pour tracer les arêtes est à proscrire. Cela pourrait faire naître l'idée fausse que le tracé a de l'importance.

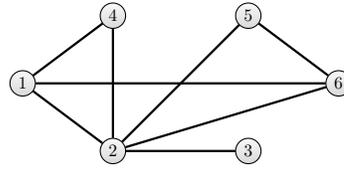
#### Jeu 2.1.3. Sommets, arêtes, et degré

Représenter chacun des graphes de la Figure 2.4 sur un plateau (sur une feuille ou un autre support) et donner le nombre de sommets, le nombre d'arêtes et les degrés des sommets.

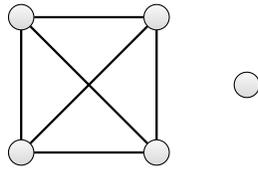
*Solution du Jeu 2.1.3.* Le graphe  $G_1$  a 6 sommets et 7 arêtes. Le graphe  $G_2$  a 6 sommets et 8 arêtes. Les graphes  $G_3$  et  $G_4$  ont 5 sommets et 6 arêtes. Les graphes  $G_5$  et  $G_6$  ont 5 sommets et 5 arêtes. Dans la figure ci-dessous, les degrés des sommets sont indiqués à l'intérieur du cercle correspondant à chaque sommet. Par exemple, la collection des degrés du graphe  $G_1$  est  $(0, 2, 3, 3, 3, 3)$  et la collection des degrés du graphe  $G_2$  est  $(1, 2, 2, 3, 3, 5)$ . ◁



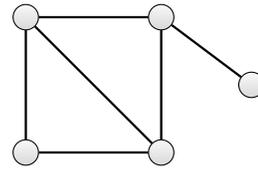
Graphe  $G_1$



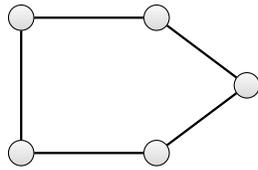
Graphe  $G_2$



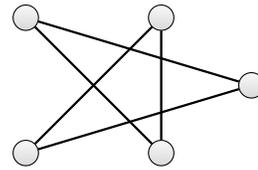
Graphe  $G_3$



Graphe  $G_4$

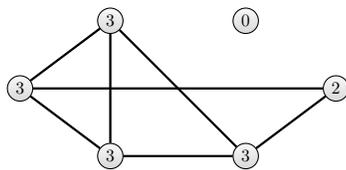


Graphe  $G_5$

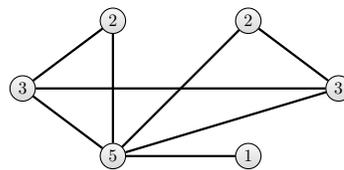


Graphe  $G_6$

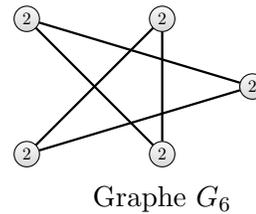
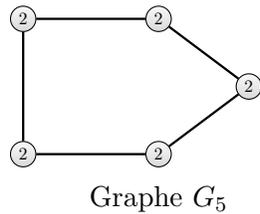
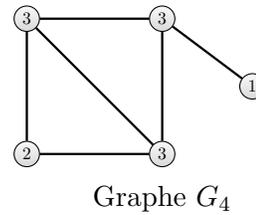
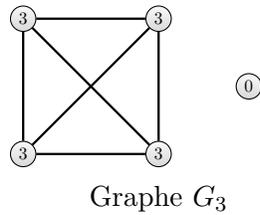
FIGURE 2.4 – Quelques graphes pour les Jeux 2.1.2 et 2.1.3



Graphe  $G_1$



Graphe  $G_2$



### Pédagogie

On peut faire découvrir la notion de degré par les élèves eux-mêmes. On leur montre les graphes avec le degré inscrit sur chaque sommet et on leur demande ce qu'ils peuvent en dire.

#### 2.1.1 Construire un graphe à partir d'une collection des degrés

La collection des degrés d'un graphe ne peut pas être quelconque. Les jeux suivants illustrent ce fait et permettent aux élèves de découvrir par eux-mêmes les propriétés des collections des degrés.

##### Jeu 2.1.4. Construire un graphe de degrés donnés

Le premier joueur choisit cinq nombres  $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ . Le deuxième joueur doit alors construire un graphe à cinq sommets avec un sommet de degré chacun de ces nombres, c'est-à-dire un sommet de degré  $n_1$ , un sommet de degré  $n_2$ , un sommet de degré  $n_3$ , un sommet de degré  $n_4$ , et un sommet de degré  $n_5$ . Si le deuxième joueur arrive à dessiner le graphe, il a gagné. Sinon, c'est le premier joueur qui gagne.

**Exemple – Jeu 2.1.4**

Par exemple, si le premier joueur choisit les cinq nombres  $(1, 2, 3, 3, 3)$ , alors le deuxième joueur peut gagner en construisant le graphe  $G_4$  du Jeu 2.1.3. Dans cet exemple,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2$ ,  $n_3 = 3$ ,  $n_4 = 3$  et  $n_5 = 3$ . Notons que l'ordre des nombres choisis n'a aucune importance. En effet, l'exemple précédent est strictement identique si le premier joueur choisit  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 1$ ,  $n_3 = 3$ ,  $n_4 = 2$  et  $n_5 = 3$ .

**Pédagogie – Evolution du Jeu 2.1.4**

Il est ensuite possible d'introduire des restrictions sur les nombres donnés pour éviter que le premier joueur ne gagne trop facilement. L'idée est de trouver des conditions sur les nombres qui rendent impossible la construction d'un graphe avec de tels degrés et de les interdire. Pour le Jeu 2.1.4, les élèves sont amenés à trouver ces conditions et dans la mesure du possible à les montrer ou à défaut à expérimenter pour voir si elles sont valides. Un des buts est d'ancrer l'idée que si quelque chose est impossible, il ne suffit pas de le prétendre (et de s'arrêter de réfléchir) mais qu'il faut le prouver.

Une des premières conditions sur les degrés d'un graphe est la suivante : le degré de tout sommet est au moins 0 (aucune arête ne part de ce sommet) et est au plus le nombre total de sommets moins un (une arête vers tous les autres sommets).

**Allons plus loin – Bornes sur le degré**

**Théorème 2.1.** *Dans un graphe à  $n$  sommets, le degré de tout sommet est compris entre 0 et  $n - 1$ .*

*Démonstration.* Un sommet peut n'être incident à aucune arête. C'est par exemple le cas d'un sommet du graphe  $G_1$  du Jeu 2.1.3.

Au maximum, un sommet est relié à tous les autres. Il y a  $n - 1$  autres sommets. Le degré maximal est donc au plus  $n - 1$ . C'est le cas d'un sommet du graphe  $G_2$  du Jeu 2.1.3 qui est de degré 5. □

Au vu de cette condition, il est donc possible de proposer le jeu suivant qui ajoute au Jeu 2.1.4 la contrainte que les degrés soient choisis dans le domaine du possible, à savoir entre 0 et 4.

**Jeu 2.1.5. Construire un graphe de degrés donnés bornés**

Le premier joueur choisit cinq nombres  $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$  entre 0 et 4. Le deuxième joueur doit alors construire un graphe à cinq sommets avec un sommet de degré chacun de ces nombres, c'est-à-dire un sommet de degré  $n_1$ , un sommet de degré  $n_2$ , un sommet de degré  $n_3$ , un sommet de degré  $n_4$ , et un sommet de degré  $n_5$ . Si le deuxième joueur arrive à dessiner le graphe, il a gagné. Sinon, c'est le premier joueur qui gagne.

La condition du Théorème 2.1 n'est pas la seule que la collection des degrés doit vérifier. Les jeux suivants vont l'illustrer.

**Jeu 2.1.6. Nombre de degrés impairs et somme des degrés**

Pour chacun des graphes du Jeu 2.1.3, compter le nombre de sommets dont le degré est impair et calculer la somme des degrés des sommets. Que remarquez-vous ?

*Solution du Jeu 2.1.6.* Pour chaque graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair. De plus, pour chaque graphe, si nous faisons la somme des degrés de tous les sommets, le résultat est égal à deux fois le nombre d'arêtes du graphe.  $\triangleleft$

**Allons plus loin – Somme des degrés**

**Théorème 2.2.** *La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois son nombre d'arêtes. Le nombre de sommets de degré impair est pair.*

*Démonstration.* Lorsque nous faisons la somme des degrés, chaque arête est comptée deux fois, une pour chacune de ses extrémités. Ainsi la somme des degrés est paire. Cela implique que le nombre de sommets de degré impair est pair, car une somme de nombres est paire si, et seulement si, parmi ces nombres il y en a un nombre pair qui sont impairs.  $\square$

Les remarques possibles sont donc que :

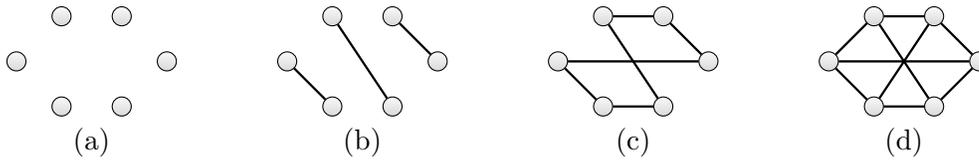
- le nombre de sommets impairs est toujours pair ;
- la somme des degrés est toujours paire et vaut deux fois le nombre d'arêtes.

**Jeu 2.1.7. Graphes réguliers à six sommets**

- (a) Construire un graphe à six sommets dont tous les sommets sont de degré 0.
- (b) Construire un graphe à six sommets dont tous les sommets sont de degré 1.
- (c) Construire un graphe à six sommets dont tous les sommets sont de degré 2.
- (d) Construire un graphe à six sommets dont tous les sommets sont de degré 3.

*Solution du Jeu 2.1.7.* Des réponses possibles à ces quatre questions sont dessinées ci-dessous.

Comme dans beaucoup de jeux de ce livre, la solution n'est pas unique (pour les questions (c) et (d)). Il est important d'insister que, contrairement aux calculs, de très nombreux problèmes mathématiques n'ont pas une solution unique. Encore plus important, la manière d'arriver à une solution n'est pas unique.  $\triangleleft$



### Jeu 2.1.8. Graphes réguliers à sept sommets

- (a) Construire un graphe à sept sommets dont tous les sommets sont de degré 0.
- (b) Construire un graphe à sept sommets dont tous les sommets sont de degré 1.
- (c) Construire un graphe à sept sommets dont tous les sommets sont de degré 2.
- (d) Construire un graphe à sept sommets dont tous les sommets sont de degré 3.

*Solution du Jeu 2.1.8.* Les questions (b) et (d) sont impossibles car il y aurait alors un nombre impair de sommets de degré impair. Deux réponses possibles sont dessinées ci-dessous pour les questions (a) et (c).  $\triangleleft$

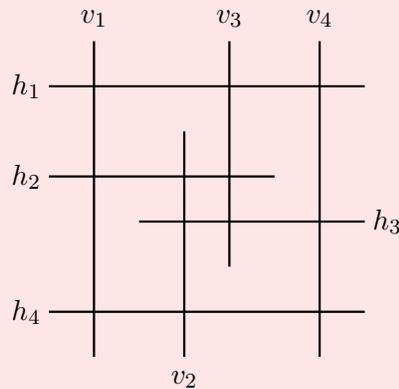


### Application – Utilisons les graphes en géométrie

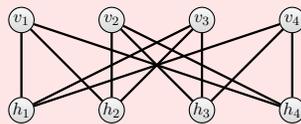
Essayons de trouver une solution aux deux questions suivantes, dont les énoncés sont très proches.

- Tracer sur une feuille 7 segments de sorte que chaque segment en coupe exactement trois autres.
- Tracer sur une feuille 8 segments de sorte que chaque segment en coupe exactement trois autres.

*Solution du Jeu.* En réfléchissant un peu, nous pouvons trouver une solution à la deuxième question :



La première question n'a en revanche pas de solution. Le démontrer n'est à première vue pas si simple. Mais cela le devient en utilisant des graphes. À chaque ensemble de segments, nous pouvons associer un graphe dont les sommets sont les segments et tel que deux sommets sont reliés par une arête si les segments associés s'intersectent. Par exemple, le graphe associé à la solution de la deuxième question ci-dessus est le suivant.



Le graphe associé à une hypothétique solution à la première question serait un graphe à 7 sommets dont tous les sommets sont de degré 3. La somme des degrés d'un tel graphe serait donc  $7 \times 3 = 21$ , un nombre impair. Ceci est impossible par le Théorème 2.2.  $\triangleleft$

**Jeu 2.1.9. Tous les degrés différents**

Construire un graphe à cinq sommets ayant un sommet de degré 0, un sommet de degré 1, un sommet de degré 2, un sommet de degré 3, et un sommet de degré 4.

*Solution du Jeu 2.1.9.* Cela est impossible. En effet, le sommet de degré 0 ne doit être relié à aucun sommet. Il ne faut donc pas d'arête entre le sommet de degré 0 et celui de degré 4. À l'inverse, le sommet de degré 4 doit être relié à tous les sommets. Il faut donc une arête entre le sommet de degré 0 et celui de degré 4. C'est une contradiction.  $\triangleleft$

**Allons plus loin – Deux sommets de même degré**

Le Jeu 2.1.9 peut se généraliser de la manière suivante. Existe-t-il un graphe (avec au moins deux sommets) tel que les degrés des sommets sont tous différents ? La réponse est non et nous le prouvons dans le théorème suivant.

**Théorème 2.3.** *Dans tout graphe avec au moins deux sommets, il y a deux sommets de même degré.*

*Démonstration.* Nous allons faire une preuve par l'absurde, c'est-à-dire supposer qu'il y ait un graphe dans lequel tous les degrés sont différents et arriver à une contradiction. Cette contradiction montrera que notre hypothèse (il y a un graphe dans lequel tous les degrés sont différents) est fausse.

Supposons donc qu'il y ait un graphe dans lequel tous les degrés sont différents. Soit  $n$  son nombre de sommets. D'après le Théorème 2.1, tous les degrés sont compris entre 0 et  $n-1$ . Comme il doit y avoir  $n$  valeurs distinctes et qu'il n'y a que  $n$  valeurs possibles, pour chaque nombre entier entre 0 et  $n-1$ , il y a un sommet dont le degré vaut ce nombre. En particulier, il y a un sommet de degré 0 (qui n'est relié à aucun autre) et un sommet de degré  $n-1$  (qui doit être relié à tout le monde). Ces deux sommets doivent donc à la fois être reliés et ne pas l'être ; c'est une contradiction.  $\square$

**Application – Utilisons les graphes pour les réseaux sociaux**

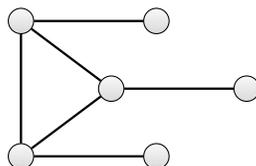
Nous pouvons notamment modéliser les amitiés dans un groupe par un graphe. Les sommets du graphe sont les membres du groupe et deux sommets sont reliés par une arête si les personnes correspondantes sont amies. Ainsi, le degré d'un sommet est exactement le nombre d'amis de la personne qu'il représente.

Le Théorème 2.3 nous dit alors que, dans tout groupe, il existe deux personnes qui ont le même nombre d'amis dans ce groupe. C'est en particulier le cas sur Facebook qui a 2,3 milliards d'utilisateurs : il y a au moins deux personnes qui ont le même nombre d'amis sur Facebook.

**Jeu 2.1.10. Trois de degré 1 et trois de degré 3**

Construire un graphe à six sommets ayant trois sommets de degré 1 et trois sommets de degré 3.

*Solution du Jeu 2.1.10.* Il est possible de voir qu'il faut absolument qu'il y ait trois arêtes entre les sommets de degré 1 et ceux de degré 3 (si deux sommets de degré 1 sont adjacents, parmi les quatre sommets restant, trois sont liés à chacun des autres sommets, ce qui exclut la possibilité d'avoir un sommet de degré 1). Ainsi, les sommets de degré 3 doivent tous être reliés deux à deux et chacun est relié à un sommet de degré 1. Le graphe est donc forcément le suivant à la manière de dessiner près (i.e. à isomorphisme près, voir Section 2.3).



◁

**Jeu 2.1.11. Quatre de degré 1 et trois de degré 4**

Construire un graphe à sept sommets ayant quatre sommets de degré 1 et trois sommets de degré 4.

*Solution du Jeu 2.1.11.* Ceci est impossible (bien que la collection de degrés ne contredise ni le Théorème 2.1, ni le Théorème 2.2). En effet, considérons les arêtes entre les sommets de degré 1 et ceux de degré 4 et comptons leur nombre. Chacune de ces arêtes a pour extrémité un sommet de degré 1. Il y en a donc au plus 4 (une par sommet de degré 1). Maintenant, chaque sommet de degré 4 est relié à quatre sommets différents de lui, donc deux d'entre eux au moins sont de

degré 1. Il y a donc au moins  $3 \times 2 = 6$  arêtes entre les sommets de degré 4 et ceux de degré 1. C'est une contradiction : un nombre ne peut pas à la fois être inférieur ou égal à 4 et supérieur ou égal à 6.  $\triangleleft$

### Problème 2.1.1. Identifier des fainéants

Aujourd'hui, la professeuse Jade Galet a mis en place un atelier de dessin collaboratif à deux, auquel elle assigne un groupe d'élèves à différents moments de la journée. Lorsqu'un groupe va sur l'atelier, ses membres s'assoient autour d'une table ronde et chaque élève a la consigne de faire deux dessins, un en collaboration avec son voisin de droite et un en collaboration avec son voisin de gauche. À la fin de la séance, les élèves signent les deux dessins auxquels ils ont contribué et les posent au centre de la table.

À la fin de la journée, Jade prend la pile de dessins au centre de la table et l'examine. Elle trouve un dessin signé par chacune des paires d'élèves suivantes : Alice et Ben, Ben et Chantal, Chantal et David, Alice et David, Ilona et Joris, Elsa et Fred, Garance et Hervé, Hervé et Ilona, Fred et Garance, Alice et Garance, Ben et Garance, Elsa et Joris, Ben et Hervé, Alice et Chantal, Chantal et Ilona, David et Ilona, David et Joris, Alice et Joris, Alice et Fred, Fred et Joris.

Jade Galet s'aperçoit alors que deux élèves n'ont pas rendu leur dessin commun, et va demander aux deux intéressés pourquoi ils ne l'ont pas fait.

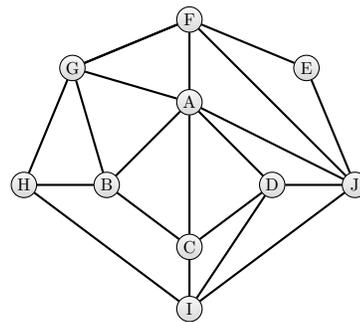
À quels élèves Jade Galet est-elle allée parler ?

#### *Solution du Problème 2.1.1.*

On peut modéliser ce problème avec un graphe. Les élèves sont les sommets et on met une arête entre deux sommets s'ils ont fait un dessin en commun. On obtient alors le graphe ci-contre, où chaque sommet est identifié par l'initiale de l'élève correspondant.

À chaque fois qu'un élève est envoyé sur l'atelier de dessin, un élève doit faire deux dessins. Il devra donc avoir fait un nombre pair de dessins à la fin de la journée. Ainsi son degré dans le graphe devra être pair.

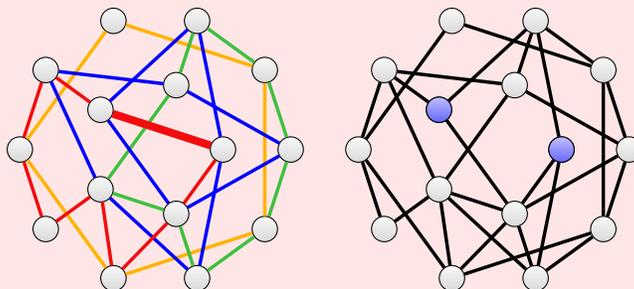
Or, dans le graphe, le sommet H est de degré 3 et le sommet J est de degré 5. Ce sont donc Joris et Hervé qui n'ont pas fait leur dessin commun, et c'est à eux que Jade Galet s'est adressée.  $\triangleleft$



**Application – Magie eulérienne**

Pendant que le mathémagicien est en dehors de la pièce, ou les yeux bandés, quelqu'un demande au public de dessiner un certain nombre de sommets sur un tableau. Il demande ensuite à certaines personnes de dessiner des cycles, de telle sorte que deux cycles n'utilisent pas la même arête. Enfin, on demande à une personne d'effacer une des arêtes du graphe ainsi obtenu.

Par exemple, si quatre personnes ont successivement dessiné les cycles en rouge, orange, vert et bleu pour obtenir la figure ci-contre, et que l'arête effacée est celle qui apparaît en gras, on obtient le graphe tout à droite.



On fait alors entrer le mathémagicien qui rapidement identifie les sommets bleus qui étaient reliés par l'arête effacée.

C'est en fait assez simple pour le mathémagicien. À chaque fois qu'on ajoute un cycle, le degré des sommets traversés par ce cycle augmente de 2. Ainsi, avant d'ôter une arête, tous les sommets sont de degré pair. En ôtant une arête, ses deux extrémités deviennent les deux seuls sommets de degré impair dans le graphe que le mathémagicien peut donc identifier. Par exemple, dans le graphe ci-dessus, les deux sommets bleus sont de degré 3, alors que tous les autres sont de degré 2, 4 ou 6.

**2.2 Dessiner un graphe sans lever le crayon****Mise en place – Supports**

Les jeux de cette partie consistent à décider s'il est possible de dessiner certains graphes sans lever le crayon, le plus souvent sans repasser deux fois par une même arête. Cela peut bien évidemment se faire sur une feuille. Il est également possible de le faire sur un plateau. Il faut alors prendre un (grand) élastique (ou une grande ficelle) et voir si on peut faire toutes les arêtes de ce graphe avec cet élastique. Il est également possible de le faire en grandeur nature. Un élève doit parcourir en traversant toutes les arêtes du graphes (sans repasser deux fois par une même arête). Il peut être muni de feuilles numérotées qu'il pose successivement sur les arêtes qu'il traverse afin de se rappeler par quelles arêtes il est passé et de pouvoir revenir en arrière pour repartir différemment si nécessaire.

### Jeu 2.2.1. Dessiner en repassant

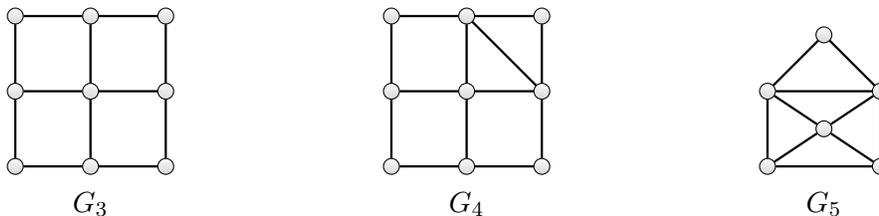
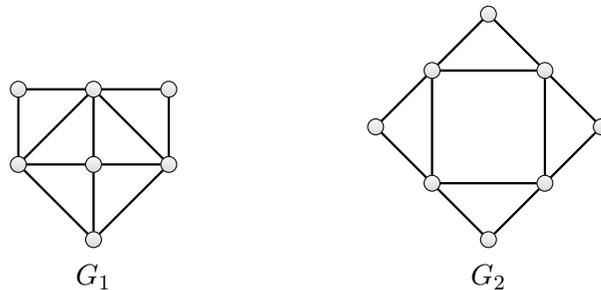
Pouvez-vous dessiner les graphes ci-dessous sans lever le crayon ? (il n'est pas interdit de traverser plusieurs fois une arête.)

Ce jeu très simple permet de mettre en évidence la notion de graphe **connexe**. Un graphe est **connexe** si on peut aller de tout sommet à tout autre en suivant des arêtes. Autrement dit, un graphe est connexe si on peut le dessiner sans lever le crayon (en repassant si nécessaire plusieurs fois sur des arêtes). Pour en savoir plus sur la notion de connexité, voir le Chapitre ??.

Dans la suite de cette section, nous chercherons à dessiner le graphe en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête. Evidemment, pour que ce soit possible, il faut que le graphe soit connexe. Ainsi dans tous les jeux proposés dans la suite de cette partie les graphes sont connexes. Il n'est cependant pas nécessaire de connaître cette notion pour jouer aux jeux. En revanche, la notion de connexité est essentielle dans le Théorème 2.4 qui donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit dessinable sans le lever le crayon. En effet, ce théorème est faux pour des graphes non-connexes. Il n'est cependant pas nécessaire d'explicitier ce détail à moins que le cas de graphes non-connexes soit soulevé.

### Jeu 2.2.2. Dessin sans lever le crayon I

Pouvez-vous dessiner les graphes suivants sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête ?



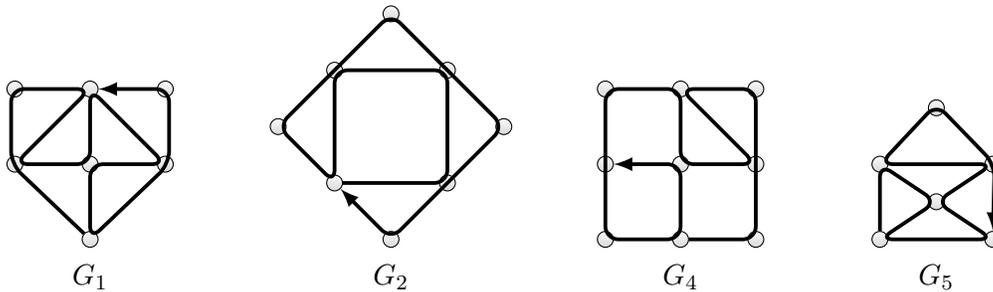
## Pédagogie – Codage des solutions

Si un élève a trouvé une solution, il est possible de lui demander de la coder pour que les autres la décodent et vérifient sa solution.

Un codage possible est similaire à l'algorithme que nous donnerait un navigateur GPS si les arêtes étaient des routes et les sommets des rond-points. On indique un sommet de départ et une suite de nombres. Chaque nombre correspond à la position relative de la prochaine arête à prendre quand on arrive au sommet suivant par une arête. Ainsi 1 correspond à l'arête qui suit celle par laquelle on arrive dans le sens anti-horaire (le sens de nos rond-points en France), 2 correspond à la deuxième arête dans le sens anti-horaire à partir de celle par laquelle on arrive, *etc.* Pour la première arête, on peut soit indiquer l'arête, soit décider d'une direction par défaut (par exemple vers le haut) à partir de laquelle numérotter les arêtes.

Un autre codage possible est similaire à celui des navigateurs. On donne un sommet de départ et une suite de caps (N, NO, O, SO, S, SE, E, NE) à prendre à chaque sommet.

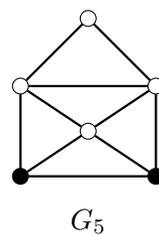
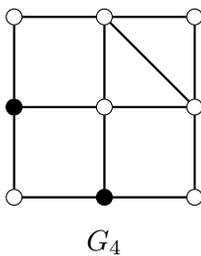
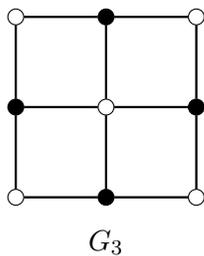
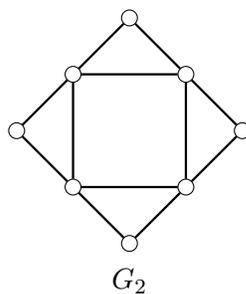
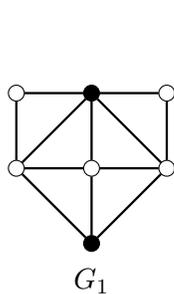
*Solution du Jeu 2.2.2.* Il est possible de le faire pour les graphes  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_4$  et  $G_5$ . Des manières de les dessiner sont données ci-dessous.



Le fait que ce soit impossible pour le graphe  $G_3$  découle du théorème suivant dû à Euler. Le fait que ce soit possible pour  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_4$  et  $G_5$  aussi d'ailleurs, mais sans que celui-ci ne donne la manière de faire.

**Théorème 2.4** (Euler, 1736). *Il est possible de dessiner un graphe connexe sans lever le crayon et sans repasser deux fois sur une même arête si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2.*

On peut voir que les graphes  $G_1$ ,  $G_4$ , et  $G_5$  ont deux sommets de degré impair et que  $G_2$  n'en a pas. Ces sommets (de degré impair) sont colorés en noir dans la figure ci-dessous.



◁

Si on ne peut demander à ce que les élèves donne une démonstration du Théorème 2.4, on peut leur faire deviner la condition nécessaire (le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2). C'est d'ailleurs le fait que cette condition soit nécessaire qui permet de conclure qu'il est impossible de dessiner  $G_3$  sans lever le crayon. On peut également le démontrer comme ci-dessous ou l'expliquer de manière informelle.

**Allons plus loin – Preuve de la condition nécessaire du Théorème 2.4**

Dans la démonstration suivante, nous utilisons le mot “tracé” car nous devons dessiner un graphe et que cela se comprend de manière naturelle. Mais cela correspond à la notion de “marche” définie en introduction.

*Démonstration.* Supposons que l’on puisse dessiner le graphe sans lever le crayon et sans repasser deux fois sur une même arête. Examinons le tracé effectué par le crayon. Mis à part au début et à la fin, à chaque fois que le tracé arrive sur un sommet par une arête, il en repart par une autre. Comme le tracé ne passe qu’une et une seule fois par chaque arête, les sommets qui ne sont ni le sommet de début ni celui de fin, sont forcément de degré pair. On distingue alors deux cas :

Cas 1 : Si jamais le sommet de début et le sommet de fin sont différents, alors le sommet de départ est de degré impair. En effet, il est incident à l’arête de début puis à deux arêtes à chaque autre fois que le tracé passe par ce sommet. De même, le sommet de fin est de degré impair, car il est incident à l’arête de fin et à deux arêtes à chaque autre fois que le tracé est passé par ce sommet. Ainsi, tous les sommets sont de degré pair sauf deux, celui de début et de fin, qui sont de degré impair.

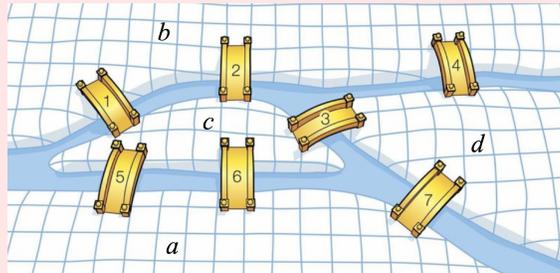
Cas 2 : Si jamais le sommet de début est aussi celui de fin, il est alors de degré pair, car il est incident à l’arête de début, à celle de fin et à deux arêtes à chaque autre fois que le tracé passe par ce sommet. Ainsi tous les sommets sont de degré pair.

Ceci montre que pour que l’on puisse dessiner un graphe sans lever le crayon et sans repasser deux fois sur une même arête, il faut qu’il ait 0 ou 2 sommets de degré impair.  $\square$

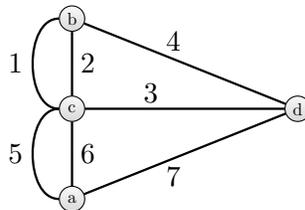
Le Théorème 2.4 a été établi en 1736 pour résoudre le fameux problème des Ponts de Königsberg.

### Problème 2.2.1. Les sept ponts de Königsberg

Cette ville de Prusse-Orientale (aujourd'hui en Russie) est construite sur la rivière Pregel. Elle possède sept ponts qui relient les quatre quartiers (les rives  $a$  et  $b$  et les deux îles  $c$  et  $d$ ), comme représentés sur le plan ci-dessous. Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts.



*Solution du Problème.* Ce problème peut être modélisé à l'aide d'un graphe. Les sommets du graphe sont les quartiers  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  et on ajoute une arête par pont entre deux quartiers.

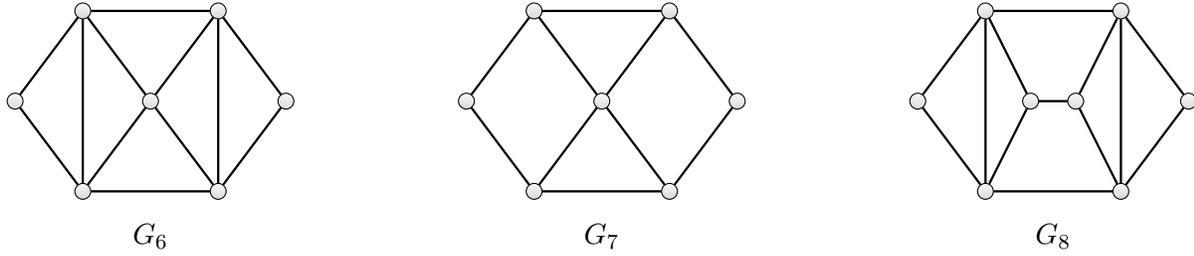


En fait, ce n'est pas un graphe, mais un **multigraphe** (il peut y avoir plusieurs arêtes entre deux sommets), mais le Théorème 2.4 reste valide pour les multigraphes. Or les quatre sommets sont de degré impair. Ce théorème nous dit donc qu'il n'y a pas de promenade passant par tous les ponts une et une seule fois.  $\triangleleft$

La condition nécessaire (démontrée) du Théorème 2.4 est importante : si elle n'est pas vérifiée, cela prouve qu'il n'y a pas de solution. Dans le cas où il y a une solution, il faut cependant la trouver. On y arrive en général sur de petits graphes.

### Jeu 2.2.3. Dessin sans lever le crayon II

Pouvez-vous dessiner les graphes suivants sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête ?



*Solution du Jeu 2.2.3.* Le graphe  $G_6$  n'a aucun sommet de degré impair, le graphe  $G_7$  a 4 sommets de degré impair, et le graphe  $G_8$  a 2 sommets de degré impair. Ainsi, d'après le Théorème 2.4, c'est possible pour  $G_6$  et  $G_8$  et impossible pour  $G_7$ . Des manières de dessiner les graphes  $G_6$  et  $G_8$  sont données ci-dessous.



◁

Pour les graphes de plus grande taille, il peut être à première vue assez difficile de trouver comment les dessiner (sans lever le crayon en ne passant qu'une et une seule fois par une arête) même si le Théorème 2.4 nous dit que c'est possible. Il est toutefois très facile de le faire en appliquant l'algorithme suivant.

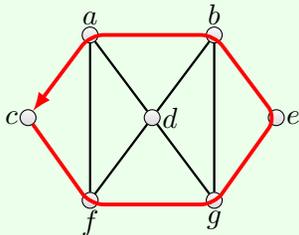
**Algorithme 2.2.1. Dessiner un graphe sans lever le crayon**

0. Vérifier que le graphe possède 0 ou 2 sommets de degré impair. Si ce n'est pas le cas, écrire "Impossible".
1. **Si** le graphe a 2 sommets de degré impair,  
    **alors** partir de l'un d'eux,  
    **sinon** partir de n'importe quel sommet.
2. **Tant qu'**il est possible d'avancer le faire. C'est-à-dire :  
    **si** du sommet sur lequel on se trouve, part une arête non encore empruntée,  
    **alors** on emprunte cette arête pour aller à un nouveau sommet, et on continue.  
    *(À la fin de cette boucle, on ne peut plus avancer du sommet où on est arrivé.)*
3. **Si** le tracé passe par toutes les arêtes,  
    **alors** terminer,  
    **sinon** trouver un sommet  $x$  déjà visité duquel part une arête non empruntée.
4. Rallonger le tracé, c'est-à-dire :
  - 4.1 Couper le tracé en  $x$ .
  - 4.2 Emprunter une arête partant de  $x$  non encore empruntée.
  - 4.3 **Tant qu'**on n'est pas revenu en  $x$ , avancer.
  - 4.4 **Si** on est revenu en  $x$ , alors insérer le nouveau tracé au milieu de l'ancien là où on a coupé.
  - 4.5 Aller en 3.

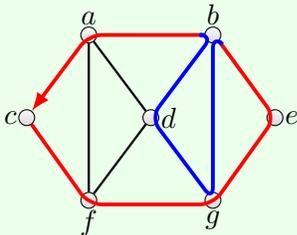
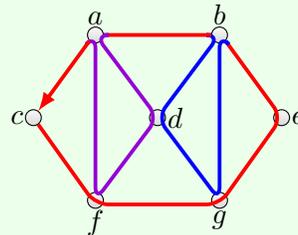
## Exemple – Déroulement de l’Algorithme 2.2.1

Pour bien comprendre cet algorithme, déroulons le sur le graphe  $G_6$  du Jeu 2.2.3. Voir figure ci-dessous. Comme tous les sommets sont de degré pair, on peut partir de n’importe quel sommet, disons  $c$  (Etape 1). On avance ensuite tant que c’est possible (Etape 2). On peut par exemple emprunter l’arête de  $c$  à  $f$ , puis celles de  $f$  à  $g$ , de  $g$  à  $e$ , de  $e$  à  $b$ , de  $b$  à  $a$  et enfin de  $a$  à  $c$ . On ne peut alors plus avancer. On a alors fait le tracé  $c-f-g-e-b-a-c$  dessiné sur la figure (i).

On passe alors à l’Etape 3. Comme on est pas passé par toutes les arêtes, on prend un sommet duquel part une arête non-empruntée. On peut par exemple prendre le sommet  $b$ . On va alors effectuer une rallonge depuis  $b$  (Etape 4). On coupe d’abord le tracé en  $b$  (Etape 4.1), ce qui nous donne une première partie de tracé  $c-f-g-e-b$  et une deuxième  $b-a-c$ . On peut alors emprunter l’arête de  $b$  vers  $g$  (Etape 4.2), puis celles de  $g$  vers  $d$ , puis de  $d$  vers  $b$  (Etape 4.3). On s’arrête alors car on est revenu en  $b$ . On a ainsi obtenu la rallonge  $b-g-d-b$ . On insère alors cette rallonge au milieu des deux parties de tracé précédentes. On obtient alors le tracé  $c-f-g-e-b-g-d-b-a-c$ . Voir figure (ii) où la rallonge est dessinée en bleu. On revient alors à l’Etape 3. Comme on n’est pas passé par toutes les arêtes, on prend un sommet duquel part une arête non-empruntée. On peut par exemple prendre le sommet  $a$ . On coupe d’abord le tracé en deux parties  $c-f-g-e-b-g-d-b-a$  et  $a-c$ . On peut aller de  $a$  vers  $d$ , puis  $f$ , puis retourner en  $a$ , pour obtenir la rallonge  $a-d-f-a$ . En insérant cette rallonge au milieu des deux parties, on obtient le tracé  $c-f-g-e-b-g-d-b-a-d-f-a-c$ . Voir figure (iii) où la deuxième rallonge est dessinée en violet.



(i) Tracé après l’Etape 2.

(ii) 1ère rallonge depuis  $b$ .(iii) 2ème rallonge depuis  $a$ .

### Allons plus loin – Validité de l’Algorithme 2.2.1

Comme pour tout algorithme, on doit montrer que l’Algorithme 2.2.1 est valide, c’est-à-dire qu’il termine et avec le résultat attendu.

Lors du déroulement de l’algorithme, le nombre d’arêtes par lequel le tracé passe ne fait qu’augmenter. Comme le nombre d’arêtes est fini, l’algorithme finira bien par s’arrêter.

La condition l’Etape 3 fait que l’Algorithme termine uniquement si le tracé passe par toutes les arêtes. De plus, tout au long de l’algorithme, on ne prend que des arêtes non encore empruntées. Le tracé final ne passe donc qu’une seule fois par chaque arête.

Un petit détail reste à vérifier cependant. En effet, à l’Etape 4.3, on continue à avancer tant qu’on n’est pas revenu en  $x$ . Il faut vérifier que cela est possible. Pour cela, nous allons montrer la chose suivante.

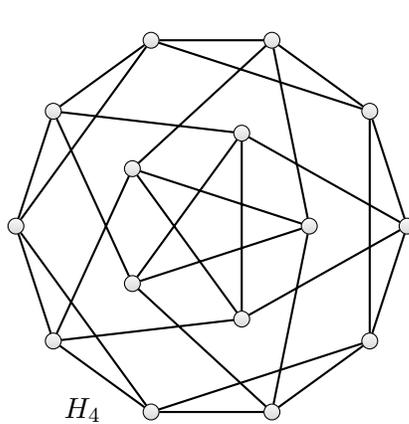
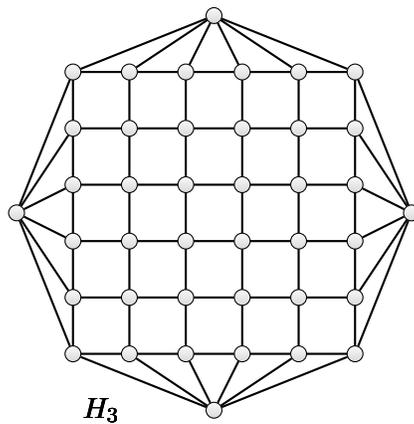
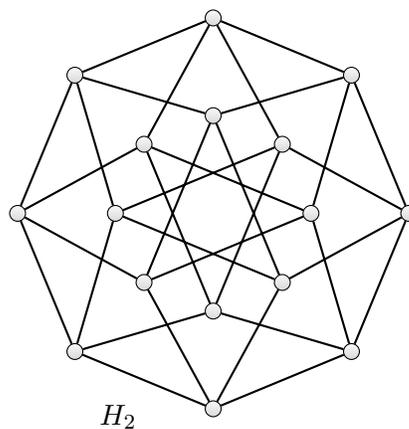
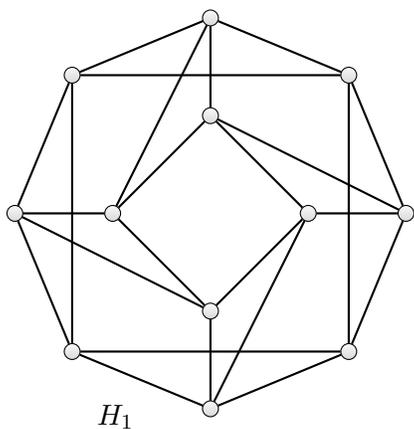
**Proposition 2.5.** *A chaque passage à l’Etape 3, chaque sommet est incident à un nombre pair d’arêtes non-empruntées.*

*Démonstration.* Considérons le tracé effectué à l’Etape 2. De même que dans la preuve de la condition nécessaire du Théorème 2.4, ce tracé part et finit au même sommet si tous les sommets de  $G$  sont de degré pair, et ce tracé commence en un des sommets de degré impair et finit en l’autre si tous les sommets sauf deux sont de degré impair. Ainsi les possibles deux sommets de degré impair dans le graphe original sont de degré impair dans le graphe du tracé et les autres sommets sont de degré pair dans le graphe original et le graphe du tracé. Donc le nombre d’arêtes non empruntées partant d’un sommet est pair. La proposition est donc vraie au premier passage à l’Etape 3. Elle est ensuite vraie à chaque nouveau passage car celui-ci se fait après une rallonge qui utilise un nombre pair d’arêtes incidentes à chaque sommet puisqu’elle revient à son point de départ.  $\square$

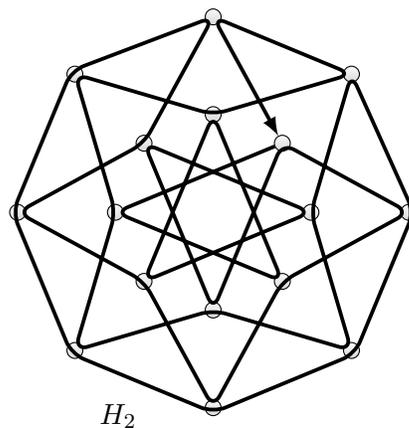
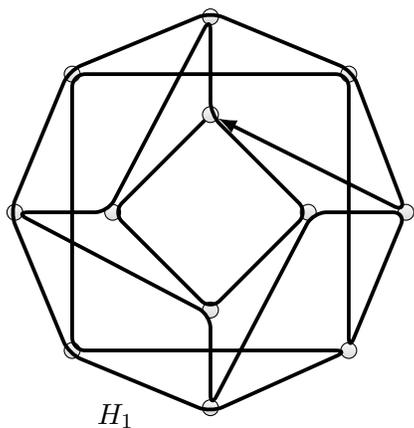
Maintenant, au cours d’une rallonge depuis un sommet  $x$ , lorsqu’on arrive en un sommet  $y$  différent de  $x$ , alors comme il y avait un nombre pair d’arêtes non-empruntées incidentes à  $y$  avant de faire la rallonge et que la rallonge emprunte un nombre impair d’entre elles (deux à chaque précédent passage plus la dernière pour y arriver) il reste au moins une arête non-empruntée incidente à  $y$  et on peut avancer.

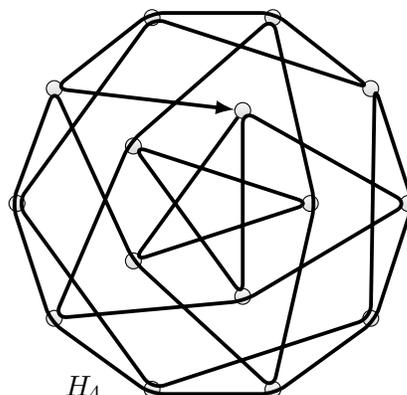
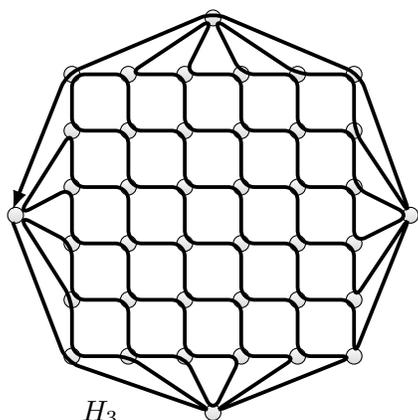
### Jeu 2.2.4. Dessin sans lever le crayon III

Pouvez-vous dessiner les graphes  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  et  $H_4$  ci-dessous sans lever le crayon et en ne passant qu’une seule fois sur chaque arête ?



Solution du Jeu 2.2.4. Les réponses sont représentées dans les schémas ci-dessous.



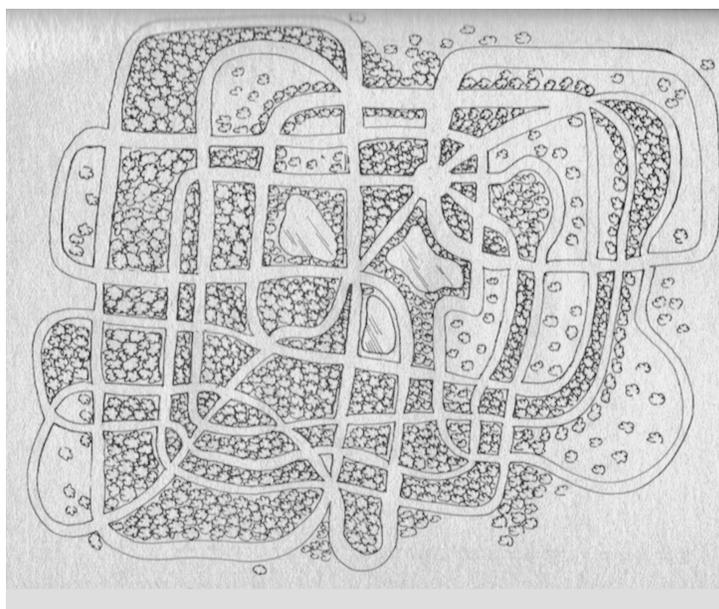


△

### Jeu 2.2.5. Balade en forêt

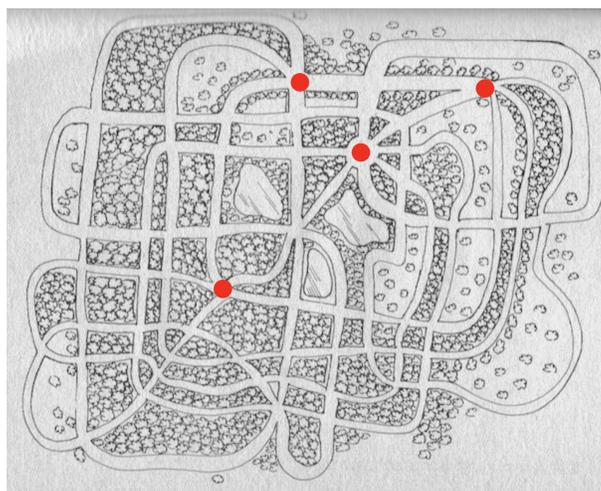
Est-il possible de parcourir tous les chemins de la forêt ci-dessous en ne passant qu'une et une seule fois par chaque chemin ?

Si oui, pouvez-vous donner un tel parcours ?



*Solution du Jeu 2.2.5.* Il y a quatre croisements desquels partent un nombre impair de chemins.

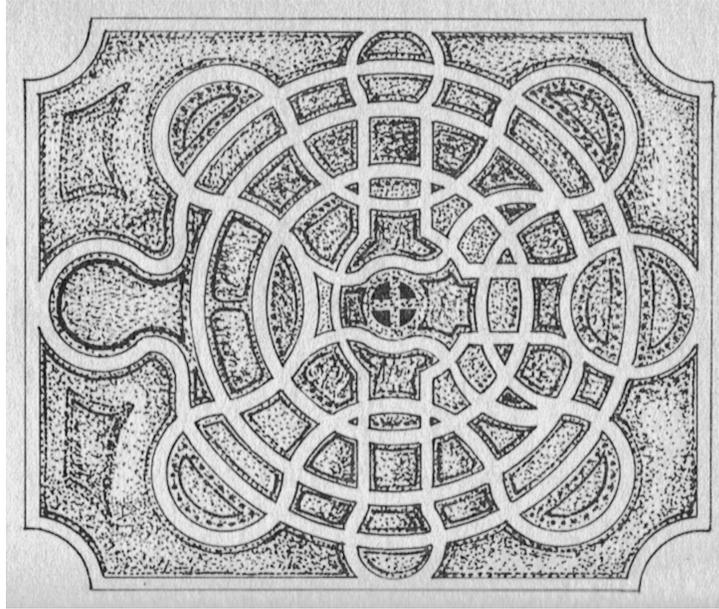
Ils sont indiqués en rouge sur la figure ci-dessous. Le Théorème 2.4 nous dit donc que c'est impossible.



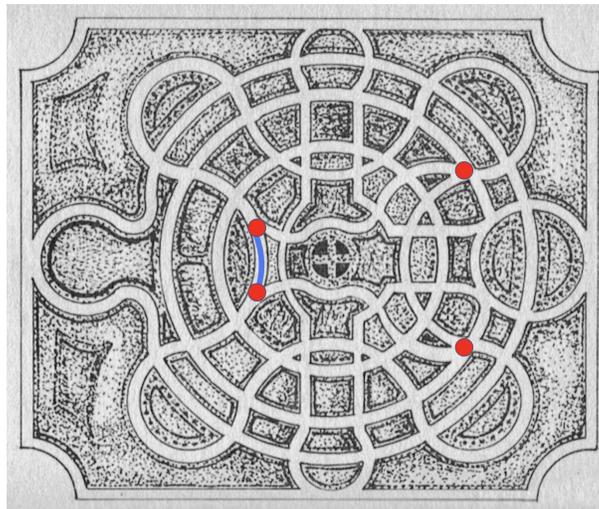
◁

### Jeu 2.2.6. Promenade dans le jardin

- Dites pourquoi il est impossible de parcourir toutes les allées du jardin ci-dessous en ne passant qu'une et une seule fois par chaque allée.
- Trouver une allée dont la suppression rend un tel parcours alors possible. Trouver un parcours qui passe par toutes les allées sauf celle que l'on vient de supprimer.



*Solution du Jeu 2.2.6.* Il y a quatre croisements desquels partent un nombre impair d'allées. Ils sont indiqués en rouge sur la figure ci-dessous. Le Théorème 2.4 nous dit donc que c'est impossible. En ôtant l'allée en bleu (qui relie deux de ces sommets), il ne reste plus que 2 sommets de degré impair. On peut donc parcourir toutes les allées du jardin (sauf celle qui vient d'être ôtée) en ne passant qu'une et une seule fois par chaque allée.

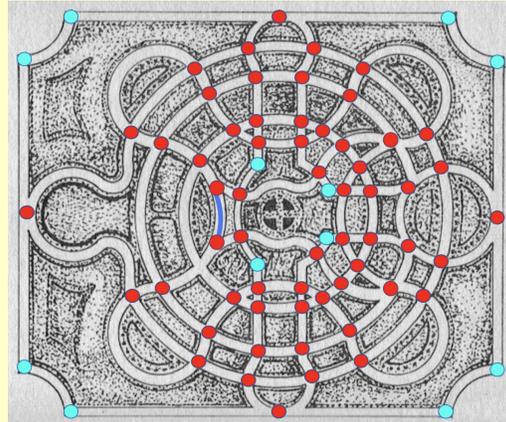
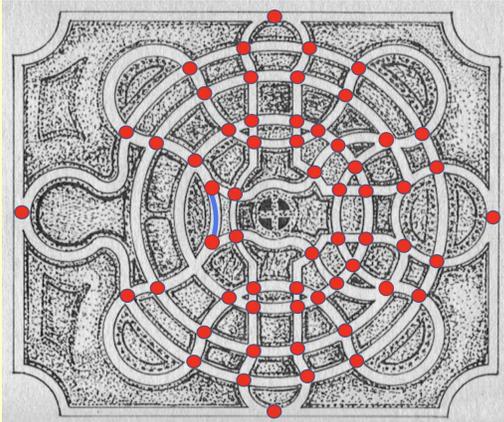


La recherche d'un tel parcours (à l'aide de l'Algorithme 2.2.1) est laissée au lecteur.

<

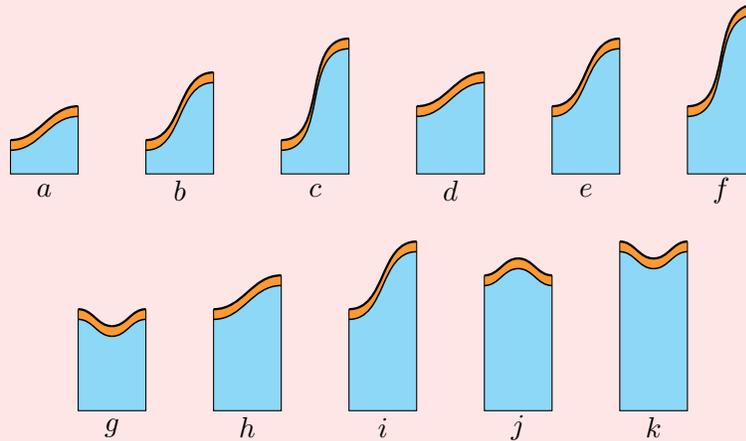
**Pédagogie – Plus ou moins de sommets**

Pour trouver la solution à la question b) du Jeu 2.2.6, il faut placer des sommets sur les carrefours c'est-à-dire les endroits d'où partent au moins 3 allées. C'est ce qui est fait sur la figure à gauche ci-dessous. Il est cependant possible que certains élèves ajoutent des sommets supplémentaires sur des endroits d'où partent 2 allées. Par exemple, certains des sommets en bleu sur la figure de droite sont souvent ajoutés car les allées changent de direction en ces endroits. Bien évidemment, cela est tout aussi correct. On pourrait d'ailleurs ajouter des sommets n'importe où au milieu des allées. Cela peut être l'occasion d'insister sur le fait qu'un même problème peut être modélisé de plusieurs façons différentes et que les sommets de degré 2 (donc pair) ne jouent aucun rôle ici d'après le Théorème 2.4.



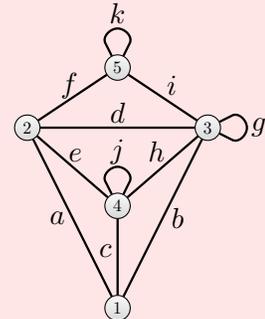
### Application – Reconstituer une ligne de crête

On dispose des pièces ci-dessous. On doit les positionner les unes à côté des autres de manière à reconstituer une ligne de crête (en orange) continue. (Les bas des pièces doivent être alignés.) Pour cela, on peut retourner chaque pièce horizontalement (pour obtenir le symétrique par rapport à la verticale).

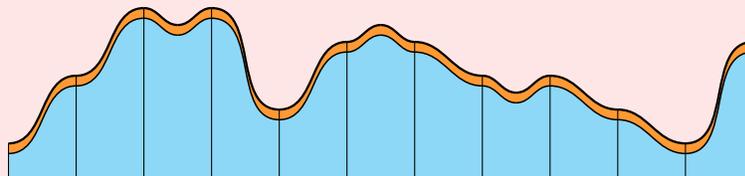


Ce problème se modélise à l'aide d'un graphe. Ses sommets sont les hauteurs des côtés des pièces et chaque pièce est une arête dont les extrémités sont les sommets correspondant aux hauteurs de ses côtés.

On obtient alors le graphe dessiné à droite. Notons que les arêtes  $g$ ,  $j$  et  $k$  sont des *boucles* : elles relient un sommet à lui-même. Reconstituer la ligne de crête revient alors à dessiner le graphe sans lever le crayon. Les boucles ne sont pas un problème : on peut passer par une boucle à n'importe quel moment où on passe sur le sommet qu'elle relie.

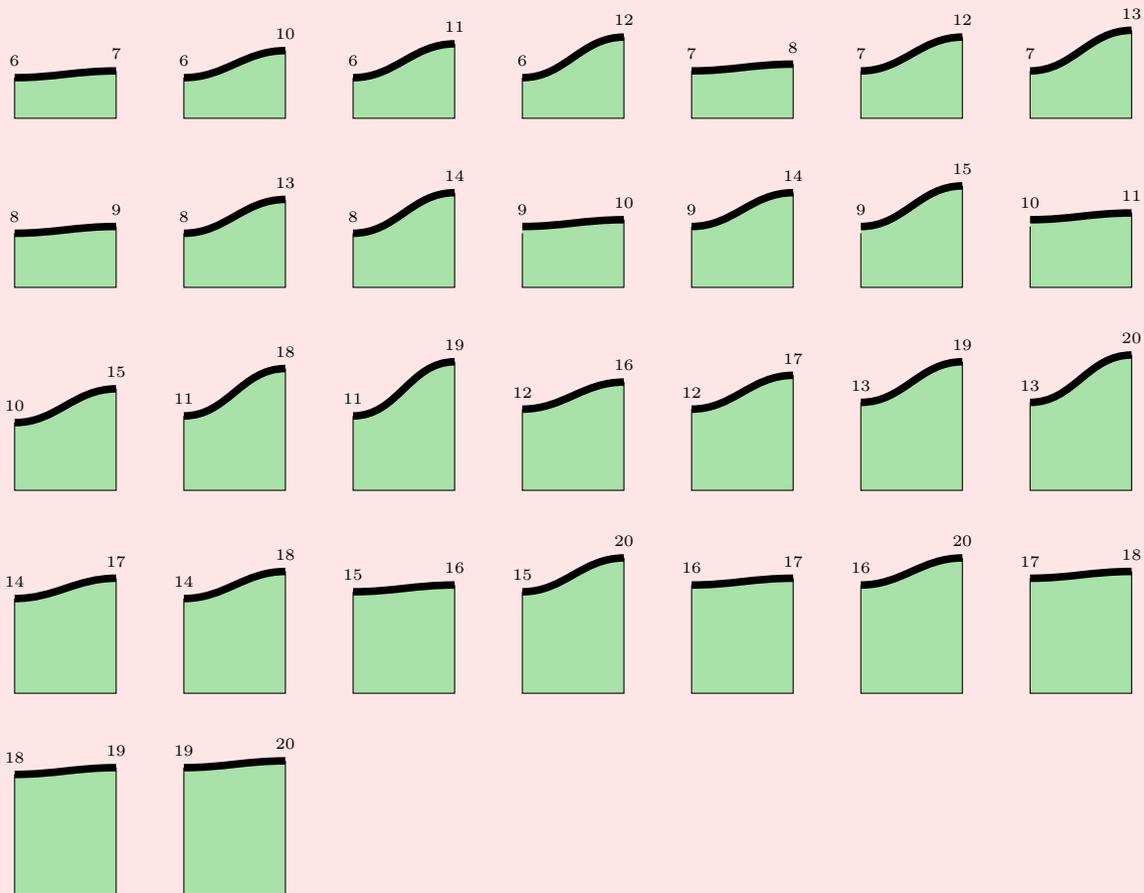


On peut donc appliquer l'Algorithme 2.2.1 pour trouver une solution. Une des solutions est  $b-i-k-f-e-j-h-g-d-a-c$ . Elle est dessinée ci-dessous.



### Application – Reconstituer une ligne de crête (suite)

Inversement, chacun des jeux précédents peut être modifié en un jeu de reconstitution de ligne de crête. Par exemple, dessiner le graphe  $H_4$  du Jeu 2.2.4 sans lever le crayon revient à reconstituer la ligne de crête avec les pièces ci-dessous.

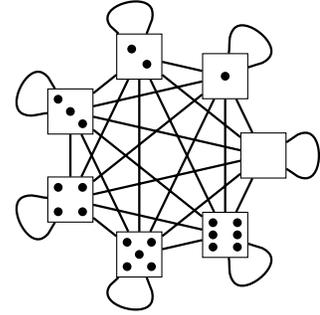


### Jeu 2.2.7. Ligne de domino

Prendre un jeu de domino. Tirer un ensemble de domino au hasard. Faire le plus long chemin de dominos possible avec ceux-ci. (Deux dominos peuvent être placés l'un après l'autre, si les nombres de points inscrits sur les moitiés qui se touchent sont égaux.)

*Solution du Jeu 2.2.7.* De même que pour la reconstitution de ligne de crête, chaque domino peut être vu comme une arête reliant les sommets identifiés par le nombre de points.

Par exemple, si on prend tous les dominos du jeu classique (28), représentant toutes les paires possibles de valeurs entre 0 et 6 (double compris), on obtient le graphe dessiné à droite, où les boucles (arêtes qui vont d'un sommet à lui-même) représentent les doubles. Chaque valeur (= sommet) est incidente à huit côtés de dominos (1 côté pour six dominos non-doubles et 2 côtés pour un double). Comme 8 est pair, d'après le Théorème 2.4, on peut faire une ligne avec tous les dominos. Pour en trouver une, on peut appliquer l'Algorithme 2.2.1.



En revanche, si on prend tous les dominos qui ont au moins un point de chaque côté, alors les valeurs (entre 1 et 6 points) vont chacune être incidente à 7 côtés (5 de non-double et 2 du double). D'après le Théorème 2.4, on ne peut pas faire une ligne avec tous ces dominos. Si on enlève un seul, il restera 4 valeurs incidentes à 7 côtés, et ce sera encore impossible. En enlevant deux dominos bien choisis (par exemple le [1,2] et le [3,4]), cela devient possible, et l'Algorithme 2.2.1 nous donne une solution. ◁

### Pédagogie – Parler ou non de graphe

Pour la reconstitution de lignes de crête ou la ligne de domino, il n'est pas obligatoire d'avoir recours au graphe sous-jacent. On peut présenter le Théorème 2.4 et l'Algorithme 2.2.1 directement sur les pièces ou les dominos. Par exemple, pour chaque valeur  $p$ , on compte le nombre  $d(p)$  de moitié de dominos ayant  $p$  points (ainsi un domino double ayant ses deux moitiés avec  $p$  points contribue pour 2 à  $d(p)$ ). Si le nombre de valeurs  $p$  pour lesquelles  $d(p)$  est impair est différent de 0 ou 2 alors c'est impossible. Sinon, on construit la ligne de domino en la faisant grandir le plus possible, puis à chaque fois qu'on est bloqué, on ouvre la ligne pour y insérer un morceau de ligne supplémentaire (une rallonge).

Il est cependant important de passer par les graphes pour montrer que reconstituer une ligne de crête, faire une ligne de dominos et dessiner une figure sans lever le crayon ne sont en fait qu'un seul et même jeu, présenté de manières différentes.

### Application – Sculpture de ballon

Sculpter un ballon (gonflable allongé) consiste à le tordre afin de délimiter des « segments », puis d'attacher certaines des extrémités de ces segments pour obtenir une forme évoquant le plus souvent un animal ou un objet. Une des plus simples et sûrement la plus connue de telles sculptures est celle du « chien » (à droite) qui a été immortalisée par les sculptures *Balloon Dogs* de Jeff Koons.



A chaque sculpture de ballon, on peut associer un graphe : les arêtes sont les « segments » du ballon et les sommets sont les rétrécissements obtenus par torsion et attache. Ainsi, les formes que l'on peut contruire avec un ballon correspondent aux graphes qui peuvent être dessinés sans lever le crayon ni repasser par une arête. Tous les jeux de cette partie demandent si on peut sculpter un ballon pour réaliser un graphe donné. Par exemple, la photo de gauche montre une sculpture en ballon du graphe  $G_5$  du Jeu 2.2.2.



Certains graphes ne peuvent pas être réalisés avec un seul ballon. Mais on peut les réaliser avec plusieurs ballons. Evidemment, on pourrait utiliser un ballon par arête, mais cela est peu intéressant, et on peut utiliser beaucoup moins de ballons. Mais combien faut-il de ballons au minimum ? La réponse est assez simple, il en faut  $p/2$  avec  $p$  le nombre de sommets de degré impair dans le graphe. En effet, comme dans la preuve du Théorème 2.4, en chaque sommet de degré impair, il faut placer l'extrémité d'un ballon, il en faut donc au moins  $p/2$ . Pour voir que  $p/2$  ballons suffisent, il suffit d'ajouter  $p/2 - 1$  arêtes supplémentaires entre autant de paires disjointes de sommets de degré impair. Les sommets reliés par ces arêtes sont désormais de degré pair. Il ne reste donc que deux sommets de degré impair, donc par le Théorème 2.4, on peut réaliser ce graphe avec un seul ballon. En enlevant les  $p/2 - 1$  arêtes ajoutées, on obtient au plus  $p/2$  ballons.

Un cas intéressant est celui des solides de Platon, à savoir, le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, l'icosaèdre et le dodécaèdre qui ont respectivement 4, 6, 8, 12 et 20 sommets. L'octaèdre a tous ses sommets de degré pair et peut donc se faire avec un ballon. Tous les autres ont tous leurs sommets de degré impair. On peut donc faire le tétraèdre avec 2 ballons, le cube avec 3, l'icosaèdre avec 6 et le dodécaèdre avec 10. Y arriverez-vous ?



cube  
4 ballons



octaèdre  
1 ballon



icosaèdre  
6 ballons

## 2.3 Graphes isomorphes

Si on bouge les sommets tout en gardant accroché à eux les arêtes dont ils sont extrémités, cela ne change pas le graphe. Un même graphe peut donc être dessiné de nombreuses façons. Deux dessins peuvent donc représenter le même graphe.

Il est ainsi possible de définir une sorte d'égalité entre graphes. De manière informelle, deux graphes sont « égaux » si nous pouvons bouger les sommets de l'un (en gardant les arêtes qui leur sont attachées) pour le transformer en l'autre. Plutôt que de dire égaux, les mathématiciens disent alors que les graphes sont **isomorphes** et ils définissent cette notion à l'aide de la notion d'étiquetage. Un **étiquetage** d'un graphe consiste simplement à donner à chaque sommet d'un graphe une étiquette (en général, on utilise des lettres ou des nombres) de telle sorte que deux sommets différents n'aient pas la même étiquette. Deux graphes sont **isomorphes** s'il existe un étiquetage de chacun des graphes avec les mêmes étiquettes de telle sorte que pour toute arête d'un des deux graphes, il y a une arête dans l'autre graphe qui a les mêmes étiquettes à ses extrémités.

### Exemple – Deux graphes isomorphes

Les deux graphes ci-dessous sont isomorphes. L'étiquette de chaque sommet est à l'intérieur du cercle qui le représente.



Il découle de la définition que deux graphes isomorphes ont le même nombre de sommets, le même nombre d'arêtes, et la même répartition de degré, mais cela ne suffit pas toujours.

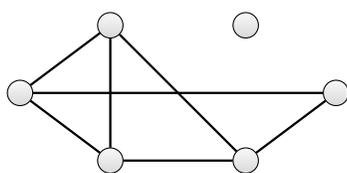
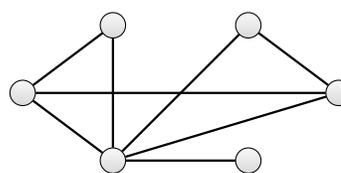
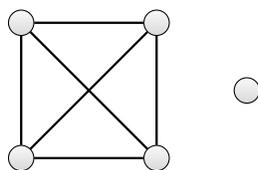
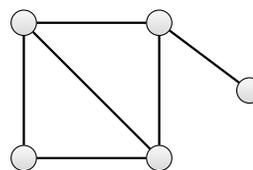
### Mise en place

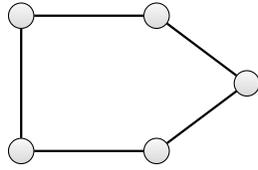
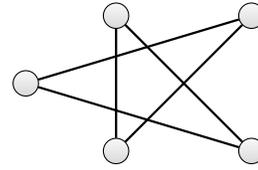
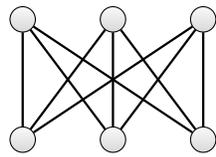
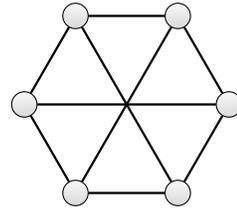
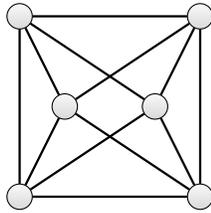
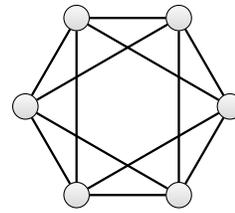
Le jeu consiste à décider si des graphes sont isomorphes. Cela peut se faire sur papier. Les élèves cherchent alors les étiquetages qui prouvent que deux graphes sont isomorphes (ou des raisons pour qu'ils ne le soient pas). Mais cela peut se faire plus simplement sur un plateau avec des élastiques pour les arêtes. En bougeant les sommets, les arêtes qui lui sont indicentes bougent également. Il faut cependant faire attention aux croisements possibles entre élastiques. Plusieurs possibilités sont possibles pour régler ce problème. L'une d'entre elles consiste à autoriser (lorsqu'il y a un croisement) à détacher un élastique d'un cylindre (sommets) pour le démêler et de l'y rattacher ensuite. Dans une deuxième, avant de déplacer un cylindre, on détache tous les élastiques qui lui sont attachés et les lui rattache une fois le cylindre dans sa nouvelle position.

Pour chaque paire de graphes, on peut demander aux élèves de représenter l'un des deux sur le plateau et d'essayer de passer à l'autre en bougeant les cylindres un par un. En étiquetant les cylindres au départ, par exemple en écrivant sur les capuchons, on obtient à la fin un étiquetage du deuxième qui prouve l'isomorphisme (s'il existe).

### Jeu 2.3.1. Isomorphes ? I

- Les graphes  $G_1$  et  $H_1$  ci-dessous sont-ils isomorphes ?
- Les graphes  $G_2$  et  $H_2$  ci-dessous sont-ils isomorphes ?
- Les graphes  $G_3$  et  $H_3$  ci-dessous sont-ils isomorphes ?
- Les graphes  $G_4$  et  $H_4$  ci-dessous sont-ils isomorphes ?
- Les graphes  $G_5$  et  $H_5$  ci-dessous sont-ils isomorphes ?

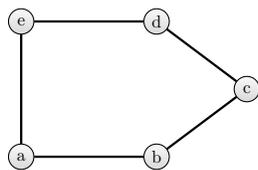
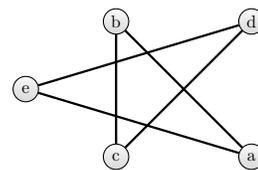
Graphe  $G_1$ Graphe  $H_1$ Graphe  $G_2$ Graphe  $H_2$

Graphe  $G_3$ Graphe  $H_3$ Graphe  $G_4$ Graphe  $H_4$ Graphe  $G_5$ Graphe  $H_5$ 

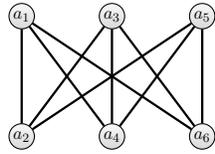
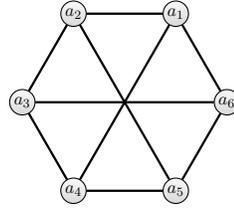
*Solution du Jeu 2.3.1.* (a) Les graphes  $G_1$  et  $H_1$  ne sont pas isomorphes. Ils n'ont pas le même nombre d'arêtes.

(b) Les graphes  $G_2$  et le graphe  $H_2$  ne sont pas isomorphes. Le graphe  $G_2$  a un sommet de degré 0 mais pas  $H_2$ .

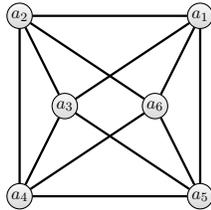
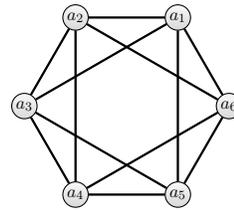
(c) Les graphes  $G_3$  et  $H_3$  sont isomorphes. Un isomorphisme est donné ci-dessous.

Graphe  $G_3$ Graphe  $H_3$ 

(d) Les graphes  $G_4$  et  $H_4$  sont isomorphes. Un isomorphisme est donné ci-dessous.

Graphe  $G_4$ Graphe  $H_4$ 

(e) Les graphes  $G_5$  et  $H_5$  sont isomorphes. Un isomorphisme est donné ci-dessous.

Graphe  $G_5$ Graphe  $H_5$ 

◁

### Jeu 2.3.2. Graphes non-isomorphes

- (a) Construire deux graphes à six sommets dont tous les sommets sont de degré 1 qui ne sont pas isomorphes.  
 (b) Construire deux graphes à six sommets dont tous les sommets sont de degré 2 qui ne sont pas isomorphes.

*Solution du Jeu 2.3.2.* (a) est impossible. Un graphe à six sommets dont tous les sommets sont de degré 1 est constitué de trois arêtes qui n'ont pas d'extrémité en commun. On peut alors toujours nommer les sommets  $a, b, c, d, e, f$  de telle sorte que les arêtes relient  $a$  et  $b$ ,  $c$  et  $d$ , et  $e$  et  $f$ .

(b) Les deux graphes ci-dessous ne sont pas isomorphes et ont tous leurs sommets de degré 2.



◁

### Jeu 2.3.3. Isomorphes ? (en face à face)

Le premier joueur dessine deux graphes. Le deuxième joueur doit décider si les deux graphes sont isomorphes. Si le deuxième joueur trouve la bonne réponse en la justifiant (i.e. en trouvant un isomorphisme ou une raison pour laquelle il n'y en a pas), il a gagné. Sinon (i.e. s'il ne trouve pas la bonne réponse ou n'arrive pas à la justifier), le premier joueur gagne à condition de donner la bonne réponse en la justifiant. Dans le cas contraire, c'est un match nul.

Ce jeu a pour objectif de faire découvrir des différences de plus en plus subtiles entre deux graphes non isomorphes. En effet, deux graphes isomorphes sont les “mêmes” et donc vérifient les mêmes propriétés.

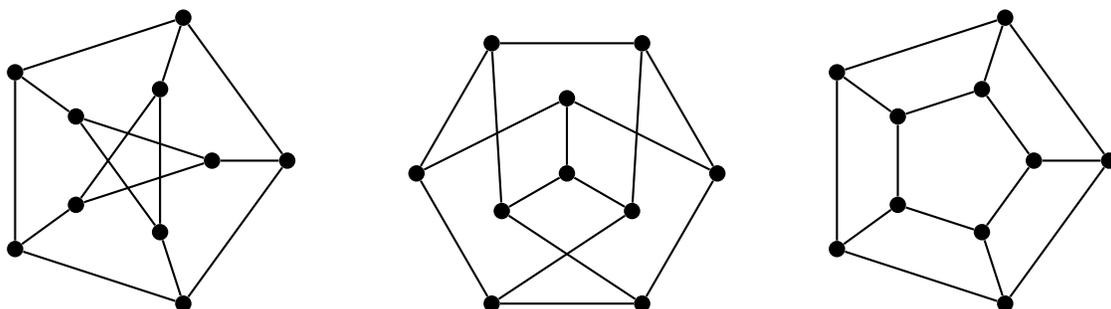
### Allons plus loin – Conditions nécessaires pour être isomorphes

**Théorème 2.6.** *Deux graphes isomorphes ont :*

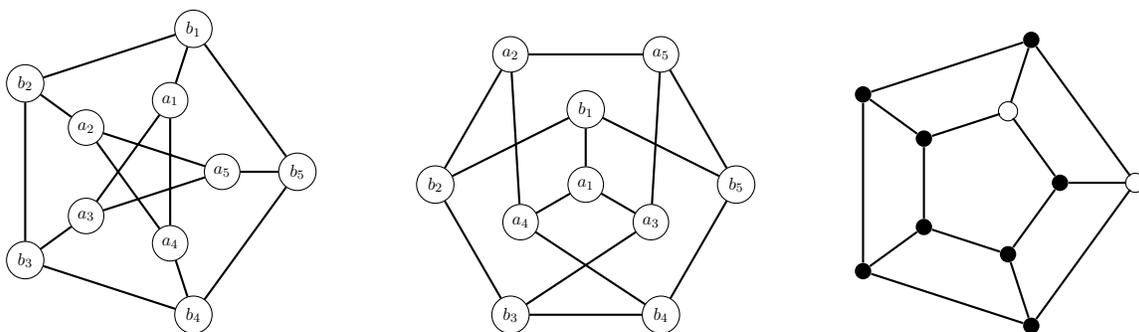
- *le même nombre de sommets,*
- *le même nombre d'arêtes,*
- *la même liste de degrés,*
- ...

### Jeu 2.3.4. Isomorphes ? (bis)

Parmi les graphes ci-dessous, lesquels sont isomorphes ?



*Solution du Jeu 2.3.4.* Le graphe de gauche et celui du milieu sont isomorphes comme le montrent les étiquetages suivants.

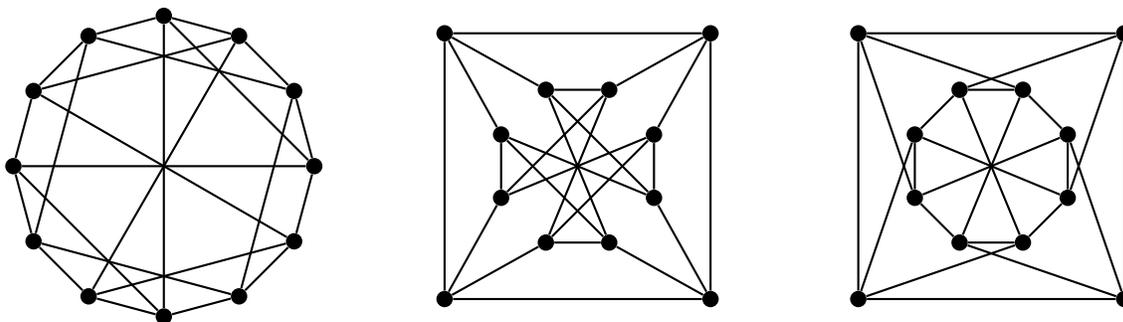


Le graphe de droite n'est pas isomorphe aux autres. Par exemple, les deux sommets blancs ont deux voisins en commun. Aucune paire de sommets n'a cette propriété dans les graphes précédents.

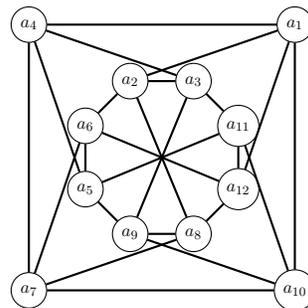
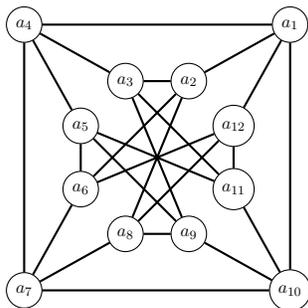
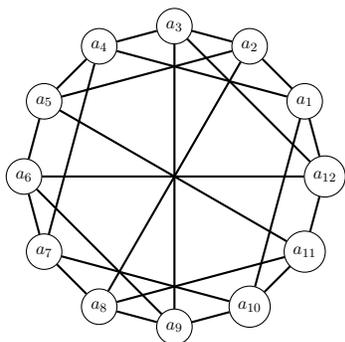
◁

**Jeu 2.3.5. Isomorphes ? (ter)**

Parmi les graphes ci-dessous, lesquels sont isomorphes ?



*Solution du Jeu 2.3.5.* Les trois graphes sont isomorphes comme le montrent les étiquetages suivants.

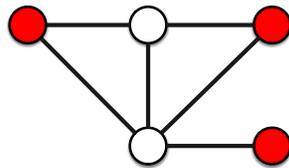


◁

## Chapitre 3

# Ensemble indépendant de sommets

Un **ensemble indépendant** dans un graphe est un ensemble de sommets tel qu'aucune arête n'ait ses deux extrémités dans cet ensemble. Par exemple, dans le graphe ci-dessous les sommets rouges forment un ensemble indépendant, mais pas les blancs.

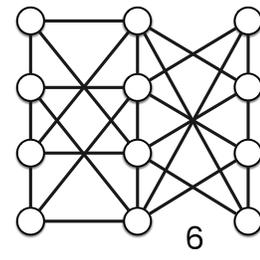
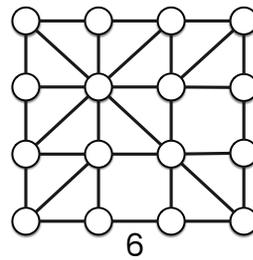
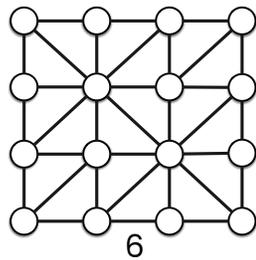
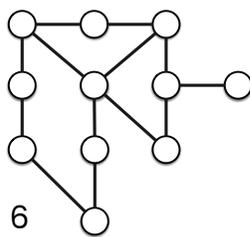
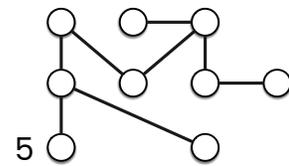
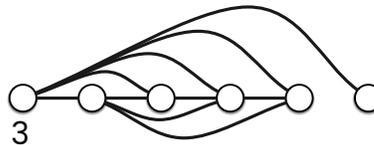
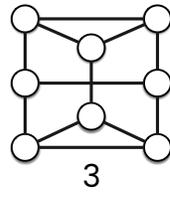
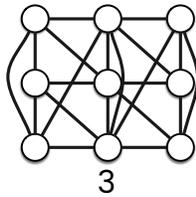
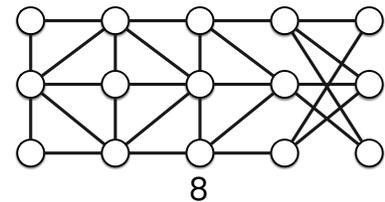
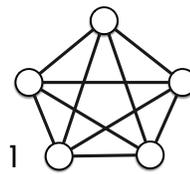
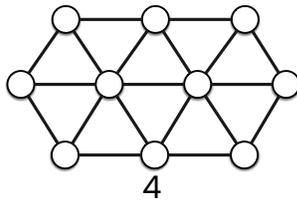
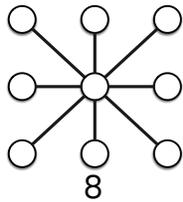
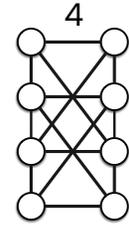
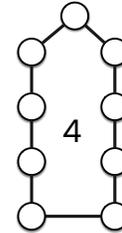
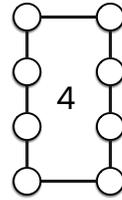
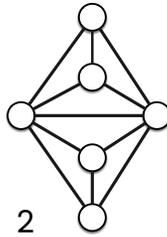
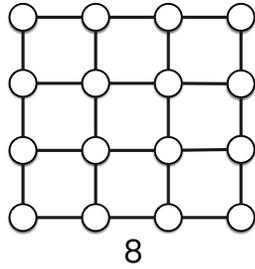
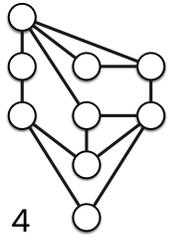


### Mise en place

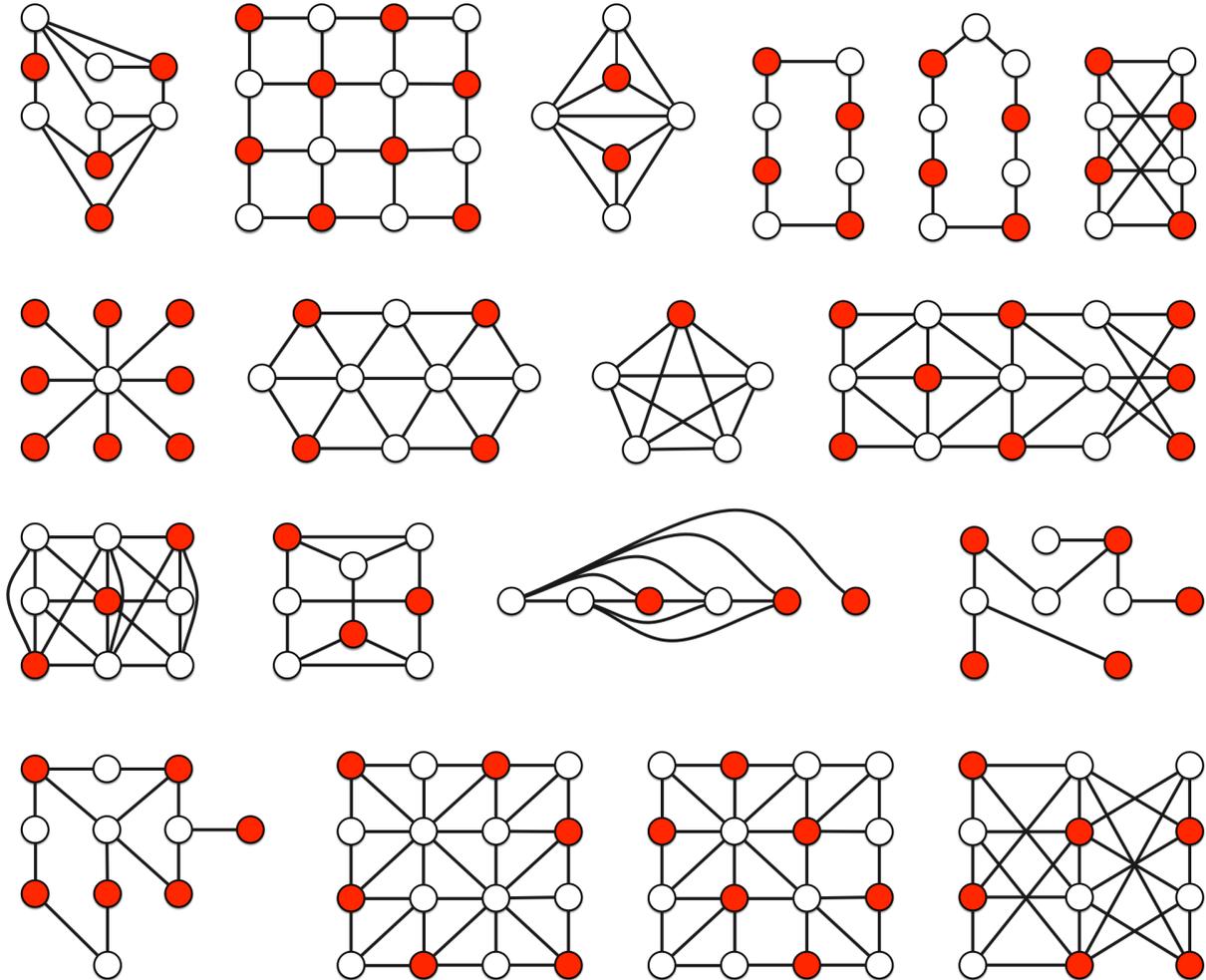
Les deux jeux suivants (Jeux 3.0.1 et 3.0.2) peuvent se proposer aussi bien sur feuille que sur plateau ou en grandeur nature. Sur feuille, chaque élève individuellement cherche un ensemble indépendant. Avec le plateau, les élèves peuvent utiliser des capuchons de couleur pour identifier les sommets de l'ensemble indépendant et réfléchir seul ou en petit groupe. En grandeur nature, les jeux deviennent un jeu collaboratif. Les sommets sont modélisés par des cerceaux et les arêtes par des lattes (ou des bouts de ficelle, ou dessinées sur le sol, *etc.*) On désigne un nombre d'élèves égal au nombre indiqué sur la figure. Les élèves désignés doivent ensuite se positionner sur des cerceaux (= sommets) de manière à former un ensemble indépendant (il ne doit pas y avoir d'arête entre des sommets occupés par des élèves).

### Jeu 3.0.1. Indépendant de taille donnée

Pour chacun des graphes de la figure suivante, trouver un ensemble indépendant ayant le nombre de sommets indiqué à côté du graphe.



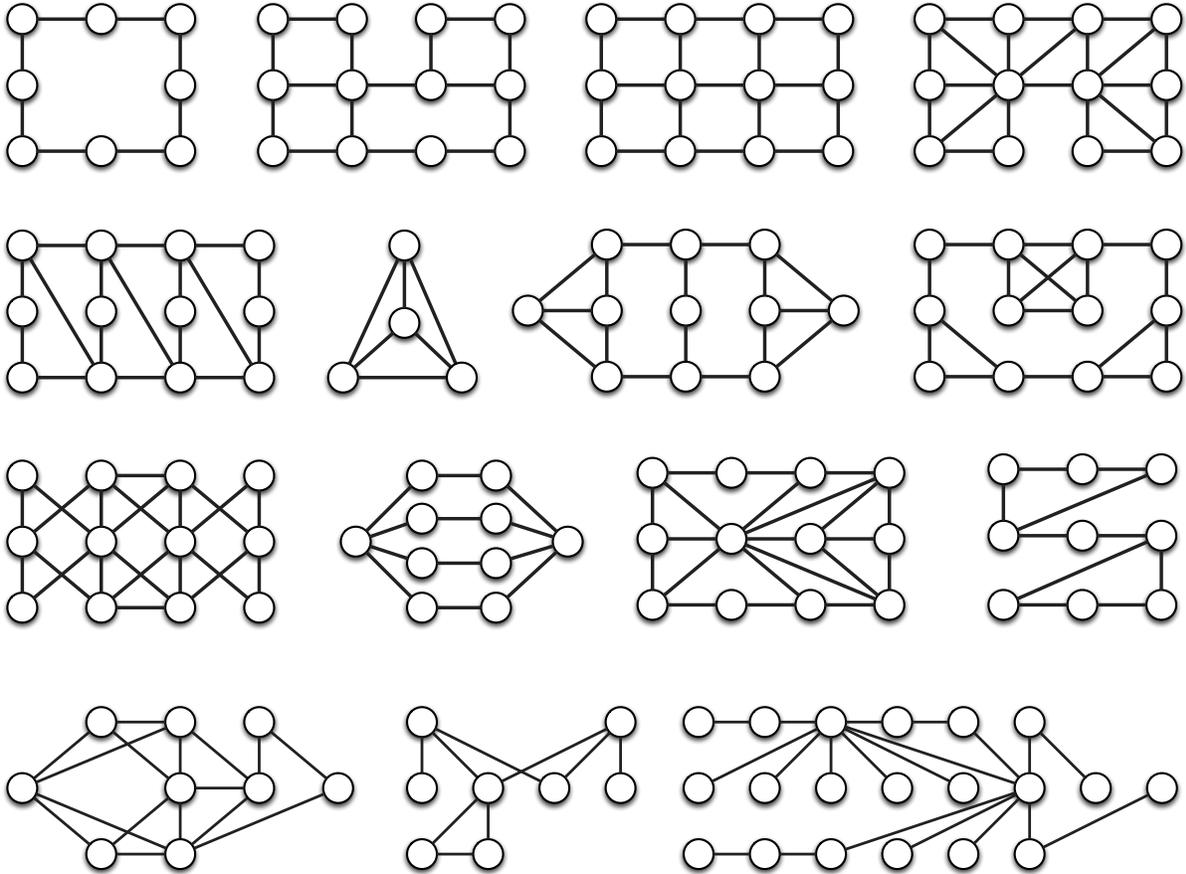
*Solution du Jeu 3.0.1.* Une solution pour chaque graphe est donnée dans la figure suivante : l'ensemble des sommets rouges est un ensemble indépendant de la taille requise (ce n'est en général pas le seul).



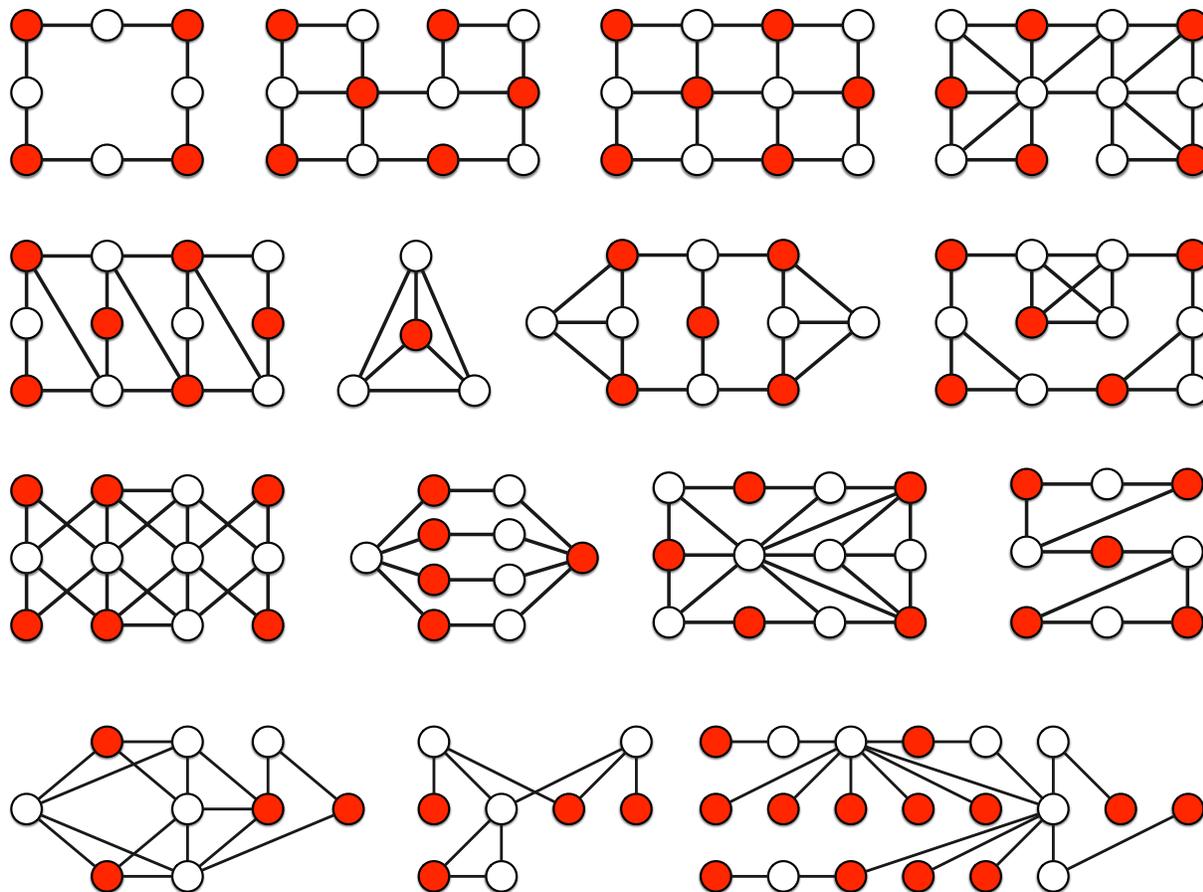
◁

### Jeu 3.0.2. Indépendant maximum

Pour chacun des graphes de la figure suivante, trouver un ensemble indépendant de taille maximum.



*Solution du Jeu 3.0.1.* Une solution pour chaque graphe est donnée dans la figure suivante (celle-ci n'est en général pas la seule). Prouver que les ensembles proposés sont indépendants est facile. En revanche, montrer qu'il n'existe pas d'ensemble indépendant plus grand est une autre paire de manches... Cela peut se faire au cas par cas avec des raisonnements ad-hoc.



◁

De nombreux problèmes reviennent à trouver un ensemble indépendant le plus grand possible dans un graphe. C'est notamment le cas quand on veut prendre parmi un ensemble donné le plus possible d'éléments sous la contrainte qu'ils soient compatibles deux à deux. Chaque élément de l'ensemble est alors un sommet du graphe et on relie deux éléments s'ils sont incompatibles. Un ensemble indépendant de sommets correspond alors à un ensemble d'éléments deux à deux compatibles. Le problème suivant est un exemple de tel problème.

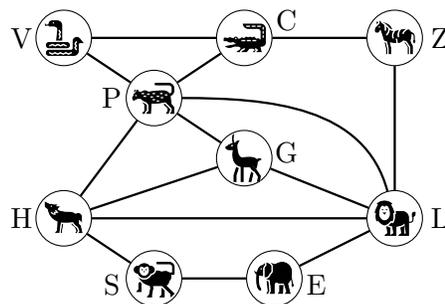
**Problème 3.0.1. Utilisons les graphes au zoo**

Un directeur de zoo veut maximiser le nombre d'espèces qu'il mettra dans un enclos. Evidemment, il ne peut pas mettre dans cet enclos deux espèces qui ne cohabitent pas, typiquement parce qu'une espèce mange l'autre (impossible de mettre un lion avec une gazelle). Pour résoudre ce problème, on construit un graphe dont les sommets sont les espèces disponibles. Deux sommets sont reliés par une arête si les deux espèces ne peuvent pas cohabiter. Il faut alors trouver le plus grand ensemble indépendant du graphe.

Les espèces disponibles sont les suivantes : crocodile, éléphant, gazelle, hyène, lion, panthère, singe, vipère, zèbre. Le crocodile est incompatible avec la panthère, la vipère, et le zèbre. L'éléphant est incompatible avec le lion et le singe. La gazelle est incompatible avec la hyène, le lion et la panthère. La hyène est incompatible avec la gazelle, le lion, la panthère et le singe. Le lion est incompatible avec l'éléphant, la gazelle, la hyène, la panthère et le zèbre. La panthère est incompatible avec le crocodile, la gazelle, la hyène, le lion et la vipère. Le singe est incompatible avec l'éléphant et la hyène. La vipère est incompatible avec le crocodile et la panthère. Le zèbre est incompatible avec le crocodile et le lion.

Combien d'espèces au maximum peuvent être mises dans un même enclos ?

*Solution du Problème 3.0.1.* Le graphe des incompatibilités est le suivant (le sommet correspondant à un animal est indiqué par l'initiale de celui-ci) :



Un ensemble indépendant de ce graphe contient au plus 4 sommets : un parmi  $\{C, P, V\}$ , un parmi  $\{G, H, L\}$ , un parmi  $\{S, E\}$  et éventuellement  $Z$ . D'autre part,  $\{E, G, V, Z\}$  et  $\{S, G, V, Z\}$  sont des ensembles indépendants de taille 4. Il est facile de se convaincre que ce sont les seuls. Donc, au plus quatre animaux peuvent être dans l'enclos : la gazelle, la vipère et le zèbre avec soit l'éléphant, soit le singe.  $\triangleleft$

### 3.1 Algorithme glouton

Un **algorithme glouton** est un algorithme qui à chaque étape fait un choix localement optimal, sur lequel on ne peut pas revenir, dans l'espoir d'obtenir un résultat optimal globalement.

Pour des problèmes sur les sommets des graphes, cela revient souvent à considérer les sommets du graphe suivant un ordre (arbitraire ou bien choisi), de parcourir les sommets dans l'ordre et de prendre une décision (irrévocable) pour chacun à son tour. Pour le problème consistant à trouver un ensemble indépendant le plus grand possible, l'algorithme glouton est donné ci-dessous. Dans celui-ci à chaque fois, lorsqu'un sommet est examiné, on décide d'ajouter ce sommet à l'indépendant (i.e. de le sélectionner) s'il est possible de l'ajouter à l'indépendant déjà construit, c'est-à-dire s'il n'a aucun voisin sélectionné.

#### Algorithme 3.1.1. Algorithme glouton pour l'ensemble indépendant

1. Choisir un ordre sur les sommets. (*Par exemple, on numérote les sommets 1, 2, 3, ... ou on les nomme avec les lettres de l'alphabet et on utilise l'ordre alphabétique.*)
2. Considérer chaque sommet à son tour dans l'ordre choisi. Si le sommet considéré n'a pas de voisin sélectionné, alors le sélectionner.
3. Retourner l'ensemble des sommets sélectionnés.

Dans toute la suite, on identifiera les sommets avec des lettres et **on utilisera l'ordre alphabétique pour l'algorithme glouton.**

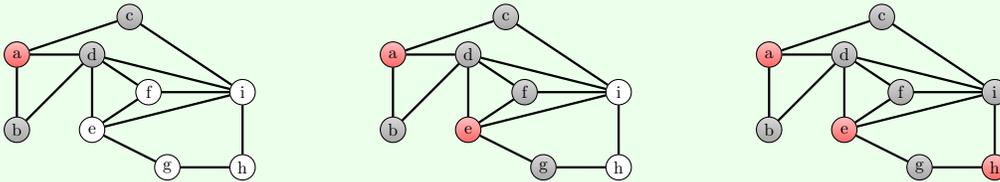
## Exemple – Déroulement de l’Algorithme glouton 3.1.1

Appliquons l’Algorithme glouton 3.1.1 au graphe ci-dessous.

On considère d’abord le sommet  $a$ . On le sélectionne pour l’ensemble indépendant. On considère ensuite le sommet  $b$ . Comme il est relié au sommet  $a$  qui a été sélectionné, on ne le sélectionne pas. On considère ensuite  $c$  et  $d$  qui de même que  $b$  ne sont pas sélectionnés. On se retrouve donc dans la situation dessinée ci-dessous à gauche. (Les sommets rouges sont les sommets sélectionnés dans l’indépendant, les sommets gris les sommets non-sélectionnés et les sommets blancs les sommets non-encore considérés.)

On considère ensuite  $e$ . Il n’est pas relié à  $a$ , le seul sommet sélectionné pour l’instant. On sélectionne donc  $e$ . On considère ensuite  $f$  et  $g$  qui ne sont pas sélectionnés car ils sont reliés au sommet sélectionné  $e$ . On se retrouve donc dans la situation dessinée ci-dessous au centre.

On considère enfin  $h$  qui est sélectionné car il n’est relié à aucun des sommets sélectionnés ( $a$  et  $e$ ), puis  $i$  qui n’est pas sélectionné car relié à un et même deux sommets sélectionnés, à savoir  $e$  et  $h$ . On a ainsi la situation finale dessinée ci-dessous à droite avec l’ensemble indépendant  $\{a, e, h\}$ .



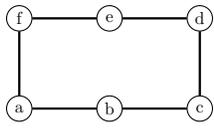
## Jeu 3.1.1. Indépendant glouton

Pour chacun des graphes de la figure suivante, utiliser l’Algorithme glouton 3.1.1 pour trouver un ensemble indépendant.

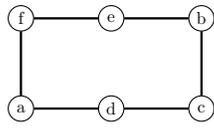
*Solution du Jeu 3.1.1.* Les ensembles indépendants que donne l’Algorithme glouton 3.1.1 pour les graphes sont donnés dans la figure suivante. Ce sont les ensembles de sommets rouges.

On peut remarquer que l’ordre sur les sommets peut influencer de manière importante sur l’ensemble indépendant retourné par l’Algorithme glouton 3.1.1. Plusieurs choses peuvent se produire. Appliqué avec deux ordres différents, l’Algorithme glouton 3.1.1 peut retourner :

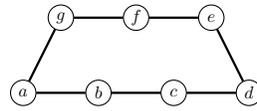
- des ensembles indépendants de tailles différentes. C’est le cas par exemple pour  $G_1$  et  $G_2$  qui sont les mêmes (isomorphes). C’est aussi le cas avec les graphes  $G_5$ ,  $G_6$ , et les graphes  $G_8$ ,  $G_9$  et  $G_{10}$ . Les différences de taille peuvent même être très importantes comme entre  $G_5$  et  $G_6$ .
- des ensembles indépendants différents mais de taille identique. C’est le cas avec les graphes  $G_6$  et  $G_7$ .



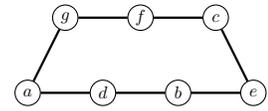
$G_1$



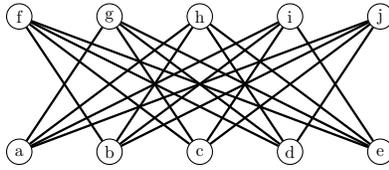
$G_2$



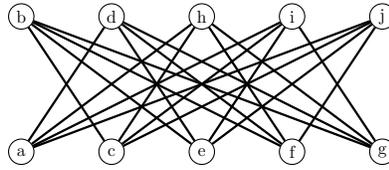
$G_3$



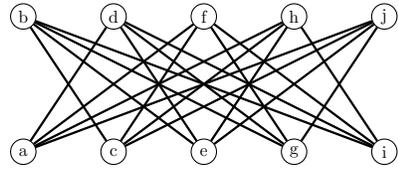
$G_4$



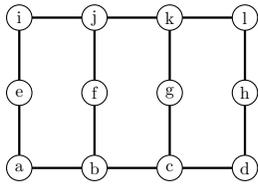
$G_5$



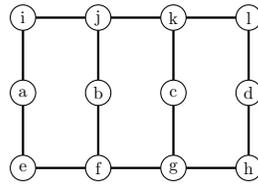
$G_6$



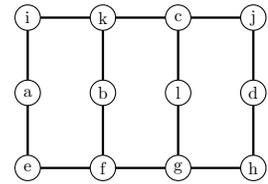
$G_7$



$G_8$



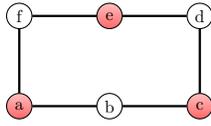
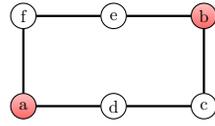
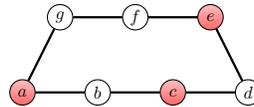
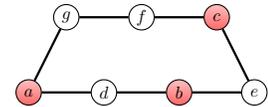
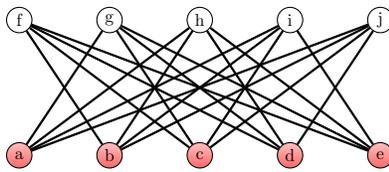
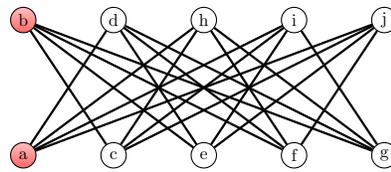
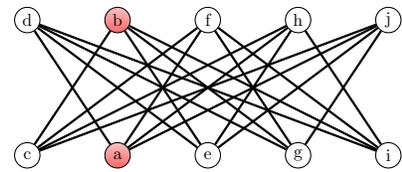
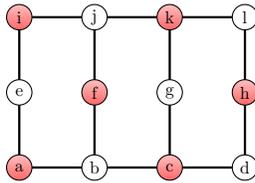
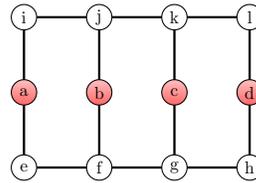
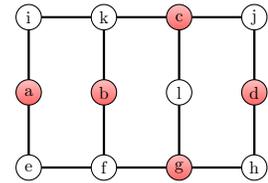
$G_9$



$G_{10}$

- des ensembles indépendants identiques. C'est le cas avec les graphes  $G_3$  et  $G_4$ .

◁

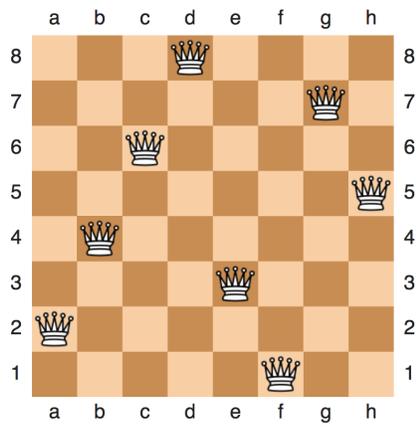
 $G_1$  $G_2$  $G_3$  $G_4$  $G_5$  $G_6$  $G_7$  $G_8$  $G_9$  $G_{10}$ 

### Jeu 3.1.2. des 8 reines

Placer huit reines d'échecs sur un échiquier de  $8 \times 8$  cases sans qu'il y ait deux reines qui se menacent l'une l'autre. (C'est le cas si elle sont sur une même ligne, une même colonne, ou une même diagonale).

*Solution du Jeu 3.1.2.* Ce jeu peut se modéliser comme celui de trouver un indépendant de taille 8 dans le graphe des menaces. Les sommets de ce graphe sont les cases de l'échiquier et deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les deux cases correspondantes se menacent. Mais, ce graphe a 64 sommets et 728 arêtes. Ce très grand nombre d'arêtes rend ce graphe difficilement lisible pour un humain. Il est donc préférable de chercher une solution en travaillant sur la version originale du problème.

Le jeu des huit reines a 92 solutions distinctes (ou seulement 12 solutions à rotation et symétrie près). Une des solutions est donnée ci-dessous.

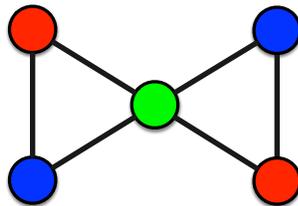




## Chapitre 4

# Coloration des sommets

Une **coloration** d'un graphe est une attribution de couleur aux sommets de ce graphe de telle sorte que chaque arête ait ses deux extrémités colorées différemment. Par exemple, la figure ci-dessous montre une coloration avec trois couleurs (rouge, vert, bleu) d'un graphe à cinq sommets.



Remarquons que dans une coloration, les sommets qui sont colorés d'une même couleur forment un ensemble indépendant (notion découverte dans le Chapitre 3). Par exemple, dans la figure précédente, l'ensemble des sommets bleus est un ensemble indépendant.

Dans toute cette partie, les jeux ont pour but de trouver des colorations de graphes.

### 4.1 Coloration avec couleurs données

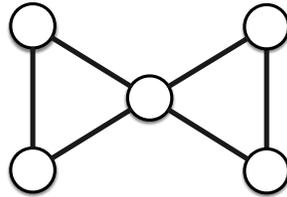
Dans les premiers jeux, les couleurs et leur répartition sont données.

**Mise en place**

Les cinq jeux suivants (Jeux 4.1.1 à 4.1.5) peuvent se proposer aussi bien sur feuille que sur plateau, poster ou en grandeur nature. Sur feuille, chaque élève individuellement cherche une coloration des graphes à l'aide de crayons de couleur. Avec le plateau, les élèves peuvent utiliser les capuchons des sommets comme couleur et réfléchir seul ou en petit groupe. Avec le poster, les élèves peuvent utiliser des objets (e.g. des pions) de couleur et réfléchir seul ou en petit groupe. En grandeur nature, les jeux deviennent collaboratifs. On distribue des chasubles de couleurs de la quantité indiquée (au total il y a autant de chasubles que de sommets). Les élèves qui ont une chasuble doivent ensuite se positionner sur les cerceaux (= sommets) de manière à former une coloration (il ne doit pas y avoir d'arête entre des sommets occupés par des élèves ayant la même couleur de chasuble).

**Jeu 4.1.1. Coloration du papillon**

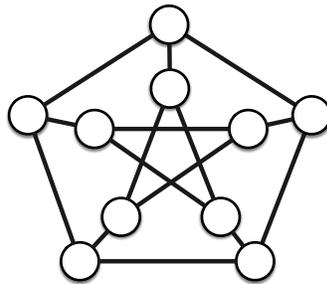
Colorer le graphe ci-dessous en utilisant deux fois la couleur rouge, deux fois la couleur bleue, et une fois la couleur verte.



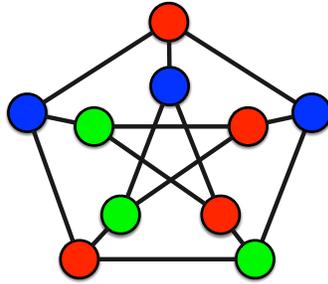
*Solution du Jeu 4.1.1.* Une solution a été donnée dans l'exemple de coloration ci-dessus. <

**Jeu 4.1.2. Coloration du graphe de Petersen**

Colorer le graphe ci-dessous en utilisant quatre fois la couleur rouge, trois fois la couleur bleue et trois fois la couleur verte.

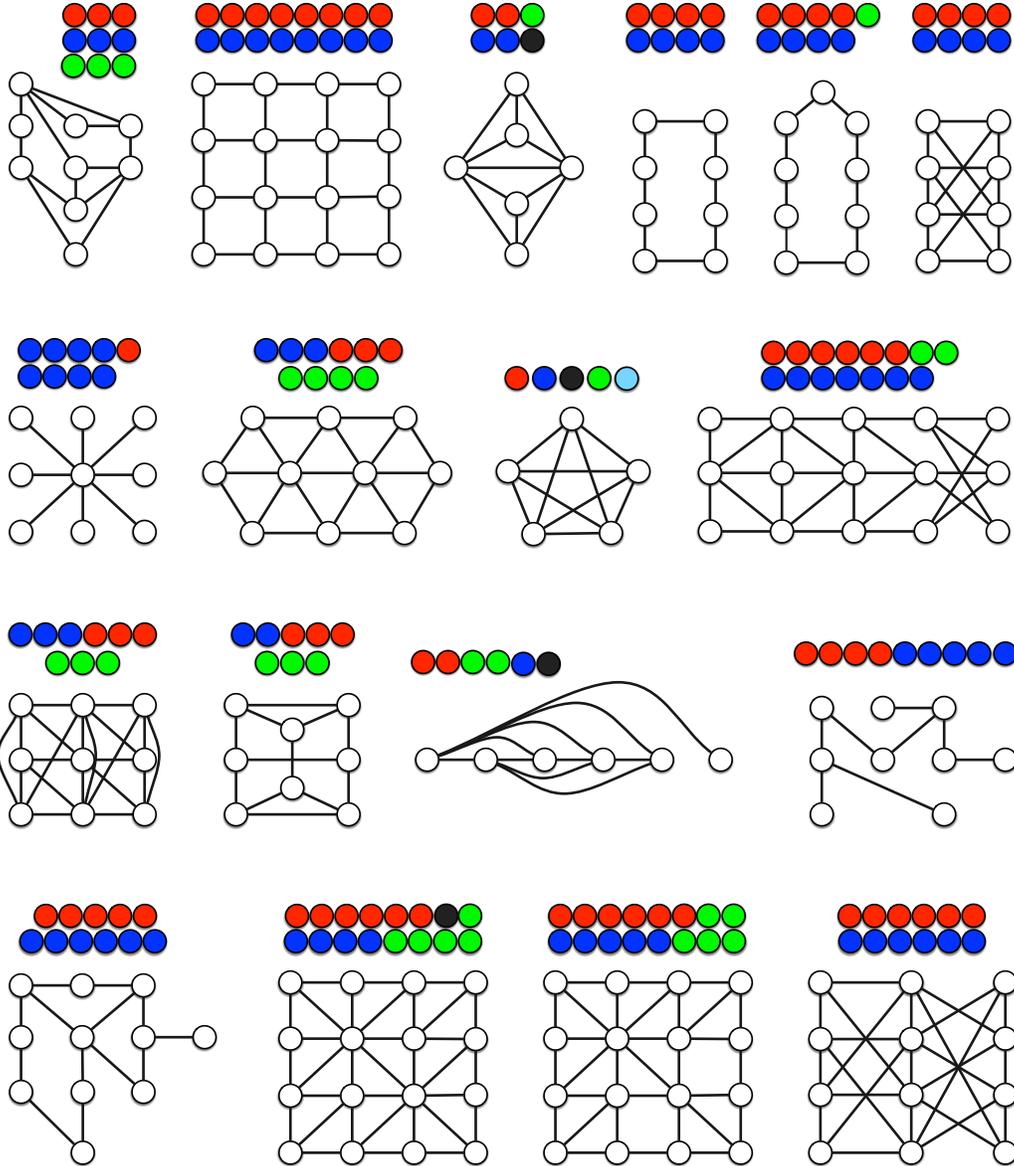


*Solution du Jeu 4.1.2.* Une solution possible est décrite dans la figure ci-dessous. Il existe de nombreuses autres solutions. Il est, par exemple, possible de permuter les couleurs vert et bleu ; on peut également effectuer une ou plusieurs rotations d'un cinquième de tour pour passer d'une solution à une autre. ◁

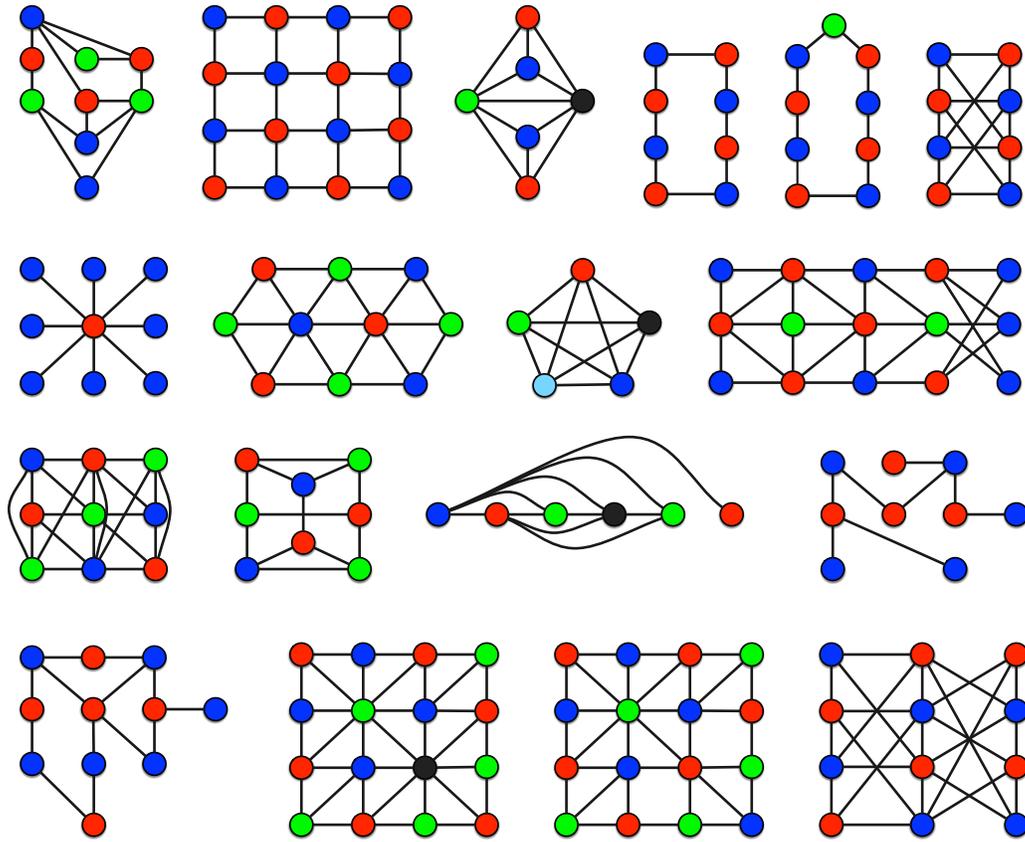


### Jeu 4.1.3. Coloration à couleurs données (1)

Colorer chacun des graphes de la figure suivante à l'aide des couleurs données au-dessus de lui.

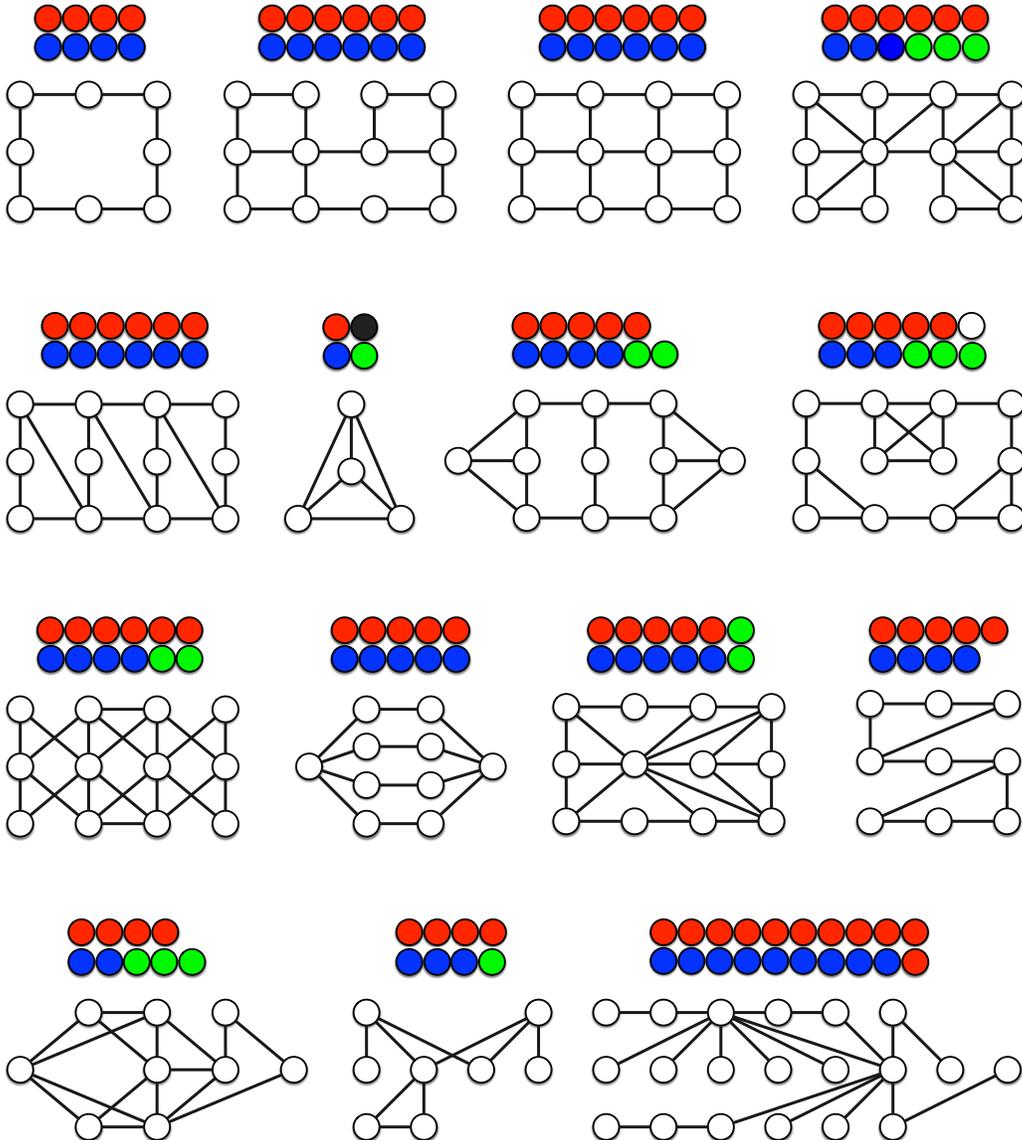


*Solution du Jeu 4.1.3.* Une solution pour chaque graphe est donnée dans la figure suivante (celle-ci n'est en général pas la seule). ◁

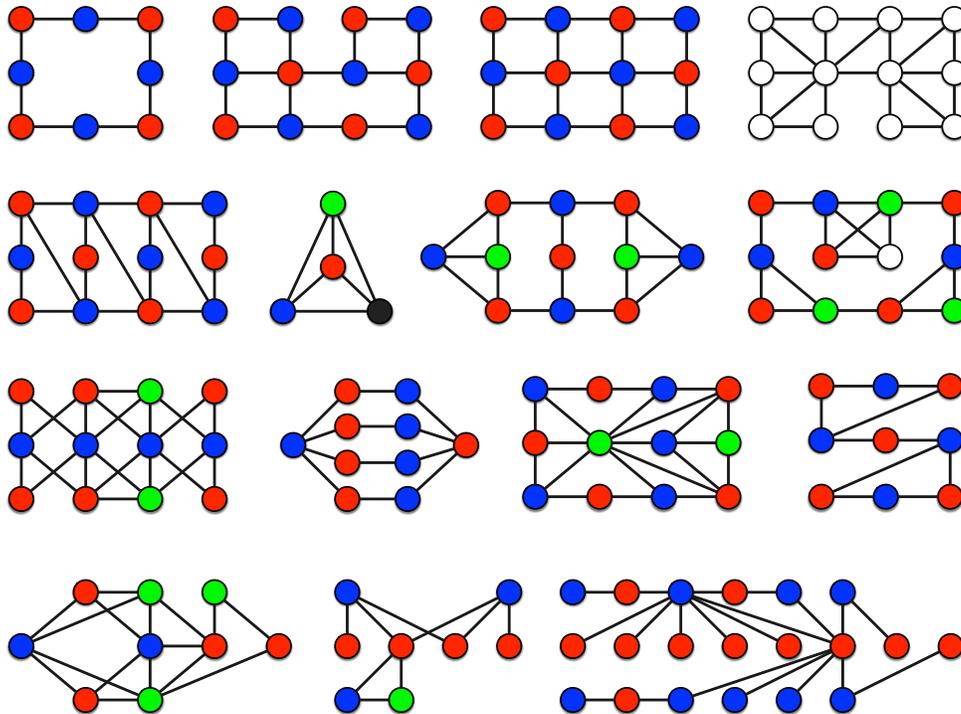


### Jeu 4.1.4. Coloration à couleurs données (2)

Colorer chacun des graphes de la figure suivante à l'aide des couleurs données au dessus de lui. Attention, un graphe est impossible à colorer avec les couleurs indiquées... Saurez-vous le retrouver et prouver qu'il est impossible ?



*Solution du Jeu 4.1.4.* Une solution pour chaque graphe est donnée dans la figure suivante (celle-ci n'est en général pas la seule). Le quatrième graphe (en haut à droite) n'est pas colorable avec les couleurs données. En effet, pour tout ensemble de six sommets, au moins deux d'entre eux sont adjacents (dit autrement, il n'existe pas d'ensemble de six sommets indépendants), et la couleur rouge ne peut donc pas être attribuée.

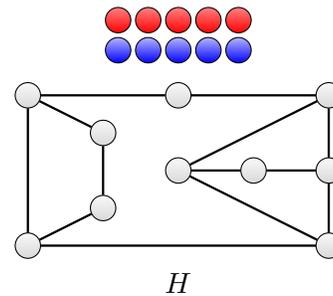
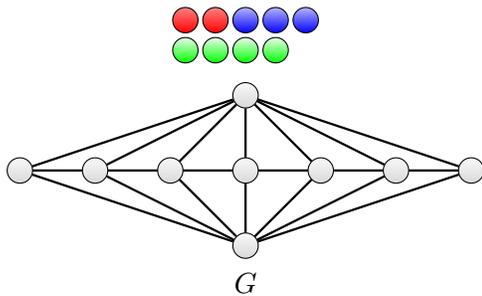


△

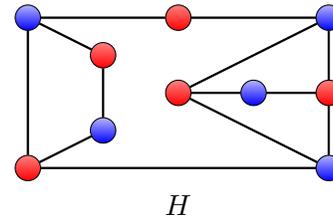
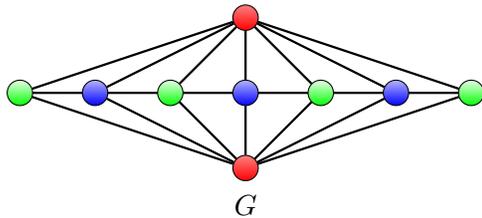
**Jeu 4.1.5. Coloration à couleurs données (3)**

Colorer le graphe  $G$  en utilisant deux fois la couleur rouge, trois fois la couleur bleue et quatre fois la couleur verte. Donner toutes les solutions.

Colorer le graphe  $H$  en utilisant cinq fois la couleur rouge et cinq fois la couleur bleue. Donner toutes les solutions.



*Solution du Jeu 4.1.5.* Des colorations de  $G$  et  $H$  sont données ci-dessous.



Pour  $G$ , c'est la seule coloration possible. En effet, les deux sommets du haut et du bas (en rouge) sont adjacents à tous les sommets du milieu (en vert et bleu). Ils ne peuvent donc pas être dans un ensemble indépendant de taille 3 ou 4, et donc doivent être colorés en rouge. Reste alors les sommets du milieu à colorer en vert et bleu. Ils forment un chemin donc les couleurs doivent alterner, en commençant et terminant forcément par la couleur verte qui a un sommet de plus que la couleur bleue. Pour  $H$ , la seule autre solution possible est celle obtenue en permutant les couleurs. Voyez-vous pourquoi ? (voir la solution du jeu 4.2.2).  $\triangleleft$

## 4.2 Coloration avec deux couleurs : algorithme

Un problème très classique, et qui revient dans de très nombreuses applications, consiste à trouver le plus petit nombre de couleurs avec lequel on peut colorer un graphe. Tout d'abord, il est très facile de savoir si un graphe est colorable avec une couleur.

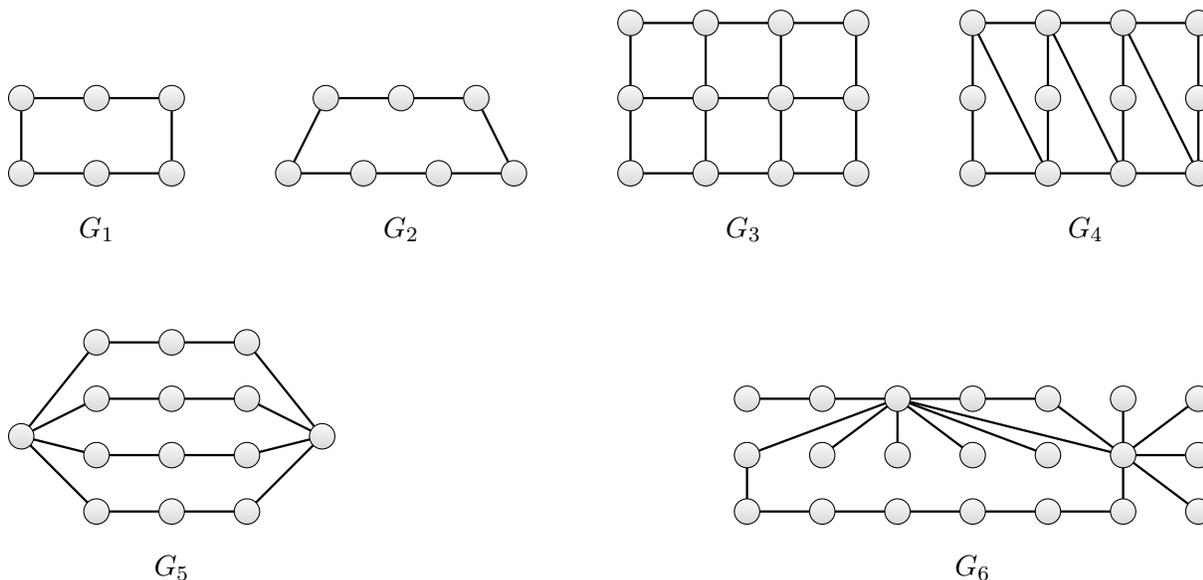
### Jeu 4.2.1. Colorer avec une seule couleur

Quels sont les graphes que l'on peut colorer avec une seule couleur ?

*Solution du Jeu 4.2.1.* Un graphe est colorable avec une couleur si, et seulement si, il n'a pas d'arête. ◀

### Jeu 4.2.2. Colorer avec deux couleurs

Est-il possible de colorer les graphes de la figure suivante avec deux couleurs ? Pour chaque graphe, justifier votre réponse.



*Solution du Jeu 4.2.2.* Les graphes  $G_1$ ,  $G_3$ ,  $G_4$  et  $G_5$  peuvent être colorés avec deux couleurs comme visibles dans la Figure 4.1.

Pour les deux autres,  $G_2$  et  $G_6$ , c'est impossible. Pour s'en convaincre, il faut observer que dès que la couleur d'un sommet est fixée, bleu ou rouge, alors tous ses voisins doivent être colorés de la couleur opposée, rouge ou bleu. Mais ces sommets nouvellement colorés imposent que leurs voisins soient colorés de la couleur opposée, et ainsi de suite.

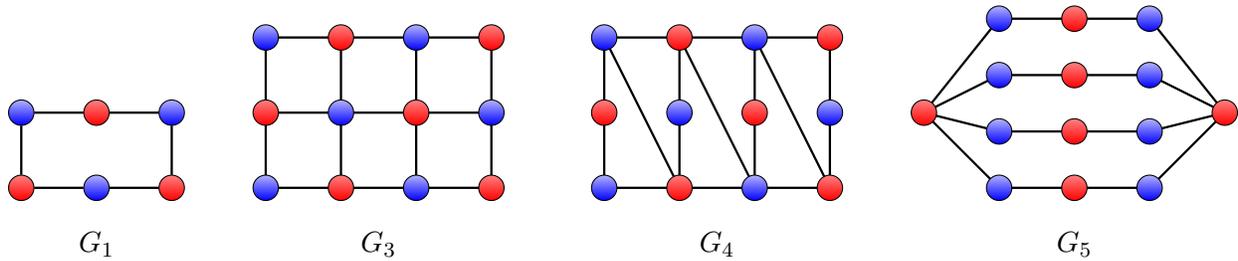


FIGURE 4.1 – Solution du Jeu 4.2.2 : cas possibles.

Ainsi, pour le graphe  $G_2$  (voir Figure 4.2), si on colore le sommet  $a$  en rouge, le sommet  $b$  doit nécessairement être coloré en bleu, puis le sommet  $c$  en rouge, le sommet  $d$  en bleu, le sommet  $e$  en rouge et le sommet  $f$  en bleu. Mais alors le sommet  $g$  ne peut pas être coloré. Le graphe  $G_2$  ne peut donc pas être coloré.

Plus généralement, suivre cette procédure permet de démontrer que tout graphe contenant un cycle de longueur impaire ne peut pas être coloré avec seulement deux couleurs. Rappelons qu'un **cycle** est une suite  $v_1-v_2-\dots-v_n-v_1$  de sommets telle que deux sommets consécutifs sont reliés par une arête jusqu'à revenir au sommet de départ. La **longueur** d'un cycle est le nombre d'arêtes de la suite. Par exemple, dans le graphe  $G_2$  (voir Figure 4.2),  $a-b-c-d-e-f-g-a$  est un cycle de longueur 7.

Le graphe  $G_6$  contient un cycle de longueur 9, à savoir le cycle  $a_1-a_2-a_3-a_4-a_5-a_6-a_7-a_8-a_9-a_1$  représenté avec des sommets blancs sur la Figure 4.2.  $\triangleleft$

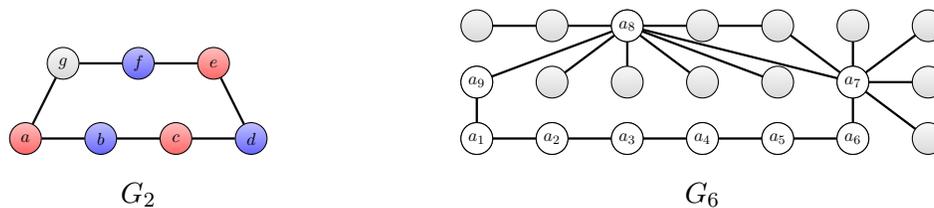


FIGURE 4.2 – Solution du Jeu 4.2.2 : cas impossibles.

De manière générale, il existe un algorithme simple pour déterminer si un graphe est colorable avec deux couleurs. On peut proposer aux élèves de trouver cet algorithme par eux-mêmes. L'algorithme suivant est correct pour tout graphe connexe.

**Algorithme 4.2.1. Coloration en deux couleurs**

1. Choisir un sommet de départ. Le colorer en bleu.
2. Si tous les sommets sont colorés, renvoyer “Oui, on peut colorer ce graphe avec deux couleurs.” et s’arrêter.
3. Sinon, choisir un sommet non-coloré  $v$  qui est voisin d’au moins un sommet coloré.
  - 2.1 Si tous les voisins de  $v$  qui sont colorés le sont en bleu, colorer  $v$  en rouge.
  - 2.2 Si tous les voisins de  $v$  qui sont colorés le sont en rouge, colorer  $v$  en bleu.
  - 2.3 Si  $v$  a un voisin coloré en bleu et un coloré en rouge, renvoyer “Non, on ne peut pas colorer ce graphe avec deux couleurs.” et s’arrêter.
4. Retourner à l’étape 2.

**Allons plus loin – Preuve de la validité de l’Algorithme 4.2.1**

*Démonstration.* À l’étape 1, on commence par choisir un sommet arbitraire et le colorer en bleu. Ceci est valide car s’il existe une coloration telle que le sommet soit coloré rouge, alors en inversant les couleurs de tous les sommets, on obtient une coloration dans laquelle le sommet est coloré bleu.

L’Algorithme 4.2.1 colore ensuite les sommets l’un après l’autre, de proche en proche (étape 3). Notons qu’à chaque étape 3, soit on colore le sommet choisi de la couleur forcée pour lui (en 3.1 et 3.2), soit on s’arrête car il y a un conflit. Ainsi, à chaque passage par l’étape 3, soit on colore un sommet de plus, de manière forcée sans qu’aucun conflit (une arête avec ses deux extrémités de même couleur) n’apparaisse, soit on trouve une impossibilité. Ainsi, l’Algorithme 4.2.1 s’arrête soit à une étape 3.3, quand on trouve une impossibilité, soit à une étape 2. Dans ce dernier cas, tous les sommets sont colorés sans aucun conflit : en d’autres termes, nous avons une coloration du graphe avec deux couleurs. □

L’Algorithme 4.2.1 permet de répondre oui ou non à l’existence d’une coloration à deux couleurs. Mais comment convaincre une autre personne que cette réponse est bien la bonne ? Dans le cas où la réponse est “oui”, l’algorithme a trouvé une coloration du graphe avec deux couleurs. Il peut donc la retourner. L’autre personne n’a qu’à vérifier que cette coloration est bien valide, ce qui se fait facilement.

Dans le cas où la réponse est “non”, cela est moins évident. On voudrait cependant éviter à l’autre personne d’appliquer l’algorithme elle-même jusqu’à trouver une impossibilité. Dans la solution du Jeu 4.2.2, nous avons justifié le fait que  $G_2$  et  $G_6$  ne sont pas colorables avec deux couleurs par le fait qu’ils contenaient un cycle impair. En fait, cela est toujours le cas comme nous allons le démontrer. Il suffit donc de montrer un cycle de longueur impaire. La démonstration ci-dessous explicite comment en trouver un lorsque l’Algorithme 4.2.1 découvre

une impossibilité (à l'étape 3.3).

#### Allons plus loin

**Théorème 4.1.** *Un graphe n'est pas colorable avec deux couleurs, si et seulement si, il contient un cycle de longueur impaire.*

*Démonstration.* Le fait qu'un graphe contenant un cycle de longueur impaire ne peut pas être coloré avec deux couleurs a été expliqué dans la solution du Jeu 4.2.2. La preuve de ce théorème revient alors à voir que l'Algorithme 4.2.1 arrive à une impossibilité lorsque le graphe contient un cycle impair.

Supposons maintenant qu'un graphe ne soit pas colorable avec deux couleurs. Alors l'Algorithme 4.2.1 découvre une impossibilité à l'étape 3.3. Il y a donc un sommet  $v$  qui a un voisin, appelons le  $u$ , qui est coloré en bleu et un voisin, appelons le  $w$ , qui est coloré en rouge. Comme l'Algorithme colore les sommets de proche en proche, il existe un chemin de  $u$  à  $w$  n'ayant que des sommets colorés. Observons que le long de ce chemin, les couleurs bleu et rouge alternent. De plus, ce chemin commence par un sommet bleu et termine par un sommet rouge. Il y a donc un nombre pair de sommets et un nombre impair d'arêtes. En ajoutant le sommet  $v$  et les arêtes  $uv$  et  $vw$  à ce chemin, on obtient alors un cycle impair.  $\square$

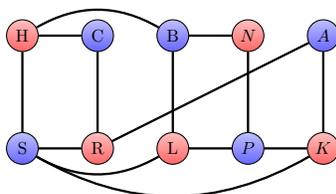
**Problème 4.2.1. Les deux groupes de Didier**

Didier, sélectionneur de football, veut répartir en deux groupes les joueurs suivants : les deux gardiens Hugo et Steve, les deux défenseurs Clément et Raphaël, les deux latéraux Benjamin et Lucas, les deux milieux N’Golo et Paul et les deux attaquants Antoine et Kylian. Didier ne veut pas que, dans un groupe, il y ait deux joueurs du même poste (gardien, défenseur, latéral, milieu, attaquant), ni deux joueurs qui ont fait des exercices ensemble. Or

- Hugo a fait un exercice avec Benjamin et un avec Clément ;
- Steve a fait un exercice avec Kylian, un avec Lucas et un avec Raphaël ;
- Clément a fait un exercice avec Hugo ;
- Raphaël a fait un exercice avec Antoine et un avec Steve ;
- Benjamin a fait un exercice avec Hugo et un avec N’Golo ;
- Lucas a fait un exercice avec Paul, et un avec Steve ;
- N’Golo a fait un exercice avec Benjamin, et un avec Paul ;
- Paul a fait un exercice avec Lucas, un avec N’Golo et un avec Kylian ;
- Antoine a fait un exercice avec Raphaël ;
- Kylian a fait un exercice avec Steve et un avec Paul.

Didier peut-il répartir ses dix joueurs en deux groupes qui vérifient ces contraintes ? Si oui, comment ?

*Solution du Problème 4.2.1.* On peut modéliser le problème à l’aide d’un graphe. Les sommets sont les joueurs et on met une arête entre deux joueurs s’ils ne peuvent pas jouer ensemble. On obtient alors le graphe ci-dessous où les sommets sont identifiés par l’initiale du joueur. Ce graphe peut être coloré en deux couleurs, comme on peut le voir sur la figure. La coloration correspond à une répartition, chaque couleur correspondant à un groupe. Ainsi, Didier peut répartir ses joueurs suivant les groupes Hugo, Raphael, Lucas, N’Golo et Kylian d’un côté, et Steve, Clément, Benjamin, Paul et Antoine de l’autre.



### Pédagogie – Coloration des multigraphes

Dans le graphe de la solution du Jeu 4.2.1, nous n'avons qu'une seule arête entre N et P (N'Golo et Paul) même s'il ne peuvent être ensemble pour deux raisons : ils ont le même poste et ils ont fait un exercice ensemble. On pourrait très bien mettre deux arêtes entre eux. On obtiendrait alors un **multigraphe**. Mais cela ne change rien. Il faut que les deux sommets soient colorés de manière différente peu importe le nombre d'arêtes entre eux. De manière plus générale, colorer un multigraphe est équivalent à colorer le graphe obtenu en remplaçant les arêtes multiples entre deux sommets par une seule. Ainsi, tout ce qui est fait dans cette partie peut être généralisé aux multigraphes.

### Application – Utilisons les graphes pour démasquer un menteur

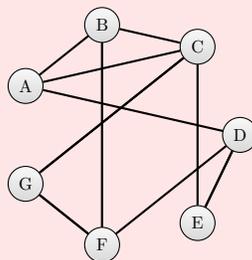
Lors d'une classe de mer, la professeuse Jade Galet envoie sept élèves d'une chambre se brosser les dents dans deux salles de bain, une de chaque côté du bâtiment. En inspectant les salles de bain après leur passage, elle n'aperçoit que trois brosses à dent dans chacune d'elles. Un des élèves ne s'est donc pas brossé les dents. Jade Galet interroge les sept élèves. Pour protéger leur camarade, ceux-ci refusent de dire quels élèves étaient dans la même salle de bain qu'eux, mais chacun accepte de donner le nom de deux élèves qui n'étaient pas avec lui.

	n'était pas avec	
<b>Anna</b>	Benjamin	Djibril
<b>Benjamin</b>	Clémence	Franck
<b>Clémence</b>	Anna	Greg
<b>Djibril</b>	Elsa	Franck
<b>Elsa</b>	Clémence	Djibril
<b>Franck</b>	Benjamin	Greg
<b>Greg</b>	Clémence	Franck

En analysant ce tableau, Jade Galet réussit à déterminer l'élève qui ne s'est pas brossé les dents (et qui est le seul à avoir menti). Êtes-vous capable d'en faire autant ?

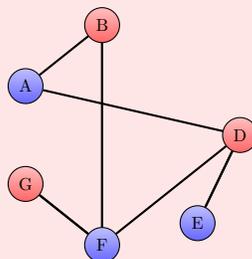
**Application – Utilisons les graphes pour démasquer un menteur (suite)**

*Solution de l'énigme :* On peut modéliser le problème avec un graphe. Les sommets sont les élèves et on met une arête entre deux élèves s'il l'un d'entre eux a déclaré ne pas avoir été dans la même salle que l'autre. On se retrouve alors avec le graphe suivant. (Chaque sommet est identifié par l'initiale de l'élève correspondant.)



Si tous les élèves étaient allés dans une salle de bain, on aurait alors un graphe colorable avec deux couleurs (correspondant aux deux salles de bain), avec des arêtes entre des élèves étant allés dans des salles de bains opposées. Mais là, le sommet de l'élève qui ne s'est pas lavé les dents rend le graphe non colorable avec deux couleurs. Il s'agit de le retrouver, à savoir de trouver un élève dont la suppression rende le graphe colorable avec deux couleurs.

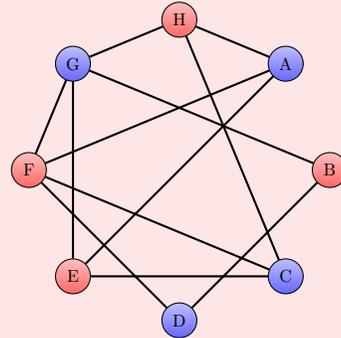
Observons que A-B-C-A est un cycle de longueur 3 (impaire). Comme un graphe colorable avec deux couleurs ne contient pas de cycle de longueur impaire, il faut enlever (au moins) un sommet de ce cycle impair pour rendre le graphe colorable avec deux couleurs. Donc le sommet recherché doit faire partie de  $\{A, B, C\}$ . De même C-G-F-D-E-C est un cycle de longueur 5 (impaire); donc le sommet recherché doit faire partie de  $\{C, D, E, F, G\}$ . Le sommet C est le seul à appartenir aux deux ensembles, c'est donc le sommet recherché. On vérifie bien que le graphe privé de C est colorable avec deux couleurs avec les deux ensembles de couleurs ( $\{A, E, F\}$ ,  $\{B, D, G\}$ ).



### Application – La magie des graphes : la traque

Préparation du tour. Prenez autant de sommets bleus que de sommets rouges. Ajoutez des arêtes uniquement entre les sommets bleus et les sommets rouges, de manière à obtenir un graphe colorable avec deux couleurs. Choisissez un sommet de départ parmi les sommets bleus. Prenez un ordre sur les sommets alternant sommets bleus et sommets rouges, tel qu'en supprimant ces sommets suivant cet ordre, le graphe reste connexe (i.e. en un seul morceau) à chaque étape.

Par exemple, on peut prendre quatre sommets bleus, quatre sommets rouges et construire le graphe dessiné à droite. On peut ensuite choisir comme point de départ le sommet A et un ordre possible est (D, E, C, B, A, F, G, H).



Déroulement du tour. Montrez le graphe (sans les couleurs) et indiquez le point de départ. À chaque tour, vous demandez au public d'effectuer mentalement et sans le dire la traversée de 3 arêtes depuis le sommet où il était. Au départ, il doit partir du sommet choisi. Dans notre exemple, en partant de A, le public peut effectuer le déplacement A-F-D-B. Il devra alors repartir de B au tour suivant. On peut éventuellement revenir sur ses pas. Ainsi A-H-A-E est également une traversée de trois arêtes possible.

Prétendez avoir le pouvoir à chaque tour de détecter un sommet sur lequel le public n'est pas arrivé et de le condamner. Le public ne pourra ensuite plus y passer. Otez les sommets dans l'ordre donné par la suite. Ainsi le public fait une traversée de 3 arêtes à partir du sommet de départ. Vous retirez un sommet (dans notre exemple D). Le public fait une nouvelle traversée de 3 arêtes (en partant de là où il était arrivé après la première traversée) dans le graphe où ce sommet est supprimé. Vous retirez un autre sommet (E dans l'exemple), et ainsi de suite.

Quand il ne reste plus qu'un seul sommet, vous savez où est arrivé le public. Ce sommet est forcément le dernier de la suite. Dans notre exemple, le dernier sommet à rester sera donc H.

Explication du tour. Le tour fonctionne car dans un graphe coloré avec deux couleurs, à chaque fois que l'on traverse trois (et plus généralement un nombre impair) arêtes, le sommet sur lequel on arrive est de la couleur différente de celle du sommet où on est parti. Ainsi à chaque tour, le sommet sur lequel arrive le public change de couleur. En partant d'un sommet bleu, on sait donc qu'il arrivera à un sommet rouge après la première traversée de 3 arêtes. Le magicien supprime donc un sommet bleu (D dans notre exemple). Lors de la deuxième traversée de 3 arêtes, le public part d'un sommet rouge pour arriver sur un sommet bleu, le magicien enlève donc un sommet rouge (E dans notre exemple). Et ainsi de suite.

Une excellente vidéo sur ce tour est accessible ici [https://www.youtube.com/watch?v=\\_dThSQgq\\_vQ](https://www.youtube.com/watch?v=_dThSQgq_vQ)

### 4.3 Coloration avec le moins de couleurs possibles.

Pour trouver le plus petit nombre de couleurs avec lequel on peut colorer un graphe, une idée est de tester si on peut colorer avec une couleur, puis deux, puis trois, etc ..., et de s'arrêter dès qu'on trouve une coloration. Malheureusement, s'il existe des algorithmes efficaces (ceux que nous venons de voir) pour décider s'il existe une coloration avec une ou deux couleurs (et la trouver le cas échéant), ce n'est pas le cas pour trois couleurs ou plus. En fait, on ne peut pas vraiment faire mieux que de tester toutes les possibilités, c'est-à-dire de prendre toutes les combinaisons de couleurs possibles pour les sommets et de voir si l'une d'entre elle est une coloration (i.e. il n'y a pas d'arêtes avec les deux extrémités de la même couleur). Malheureusement, dès que le graphe a un nombre un peu important de sommets, le nombre de combinaisons devient gigantesque et rend la tâche impossible. Par exemple, si on veut décider si un graphe à  $n$  sommets est colorable avec 3 couleurs il faut considérer  $\underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{n \text{ fois}} = 3^n$  possibilités. Pour  $n = 170$ , ce nombre ( $3^{170}$ ) est astronomique et est environ le nombre estimé d'atomes dans l'univers!!!

#### Allons plus loin – NP-complétude

Un des grands problèmes mathématiques du millénaire identifiés par l'Institut Clay, et pour la résolution desquels un prix d'un million de dollars est offert, est le fameux problème  $\mathcal{P} \stackrel{?}{=} \mathcal{NP}$ .

Les problèmes de  $\mathcal{P}$  sont les problèmes de décision auxquels on peut répondre *rapidement*, c'est-à-dire pour lesquels il existe un algorithme en temps polynomial). C'est le cas du problème de décider si un graphe est colorable avec 2 couleurs : l'Algorithme 4.2.1 permet d'y répondre en un temps proportionnel au nombre de sommets et d'arêtes du graphe.

Les problèmes de  $\mathcal{NP}$  sont les problèmes de décision pour lesquels il existe des *certificats* (de réponse positive) qui sont vérifiables rapidement, c'est-à-dire pour lesquels il existe un algorithme de vérification en temps polynomial. Cependant aucun algorithme rapide n'a encore été trouvé pour calculer une solution à ces problèmes. C'est le cas de la coloration avec 3 couleurs. Une coloration (valide) avec 3 couleurs est alors un certificat. Si on nous donne une telle coloration, on peut rapidement vérifier si elle est correcte en contrôlant pour chaque arête si ses deux extrémités sont de couleurs différentes.

Clairement les problèmes de  $\mathcal{P}$  sont dans  $\mathcal{NP}$  car l'entrée elle-même est un certificat.

Le problème  $\mathcal{P} \stackrel{?}{=} \mathcal{NP}$  consiste à savoir si l'inverse est vrai, c'est-à-dire, si tous les problèmes de  $\mathcal{NP}$  sont dans  $\mathcal{P}$ . Une chose intéressante est l'existence de problèmes (dit  $\mathcal{NP}$ -complets) tels que  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$  si et seulement si l'un de ces problèmes peut être résolu rapidement. Décider si un graphe est colorable avec 3 couleurs est l'un deux.

La majeure partie des algorithmiciens pensent que  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$  et qu'en particulier, le problème de décider de si un graphe est 3-colorable ne peut pas se faire rapidement.

On a donc recours à des algorithmes qui permettent de colorer les graphes avec peu de couleurs, souvent sans garantie que cela soit la meilleure coloration possible. De même que pour le problème de l'ensemble indépendant, on peut utiliser un algorithme glouton. Là aussi, il nous faut ordonner les sommets. Par exemple, on les numérote  $1, 2, 3, \dots$  ou on les nomme avec les lettres de l'alphabet et on utilise l'ordre alphabétique. Mais il faut également choisir un ordre sur les couleurs.  $c_1 < c_2 < \dots$  ou *bleu* < *rouge* < *vert* < *jaune* < *marron* < *mauve*.

#### Algorithme 4.3.1. Algorithme glouton de coloration

1. Choisir un ordre sur les couleurs. (Par exemple,  $c_1 < c_2 < \dots$  ou *rouge* < *bleu* < *vert* < *jaune* < *marron* < *mauve*.)
2. Choisir un ordre sur les sommets.
3. Colorer les sommets dans l'ordre : colorer chaque sommet avec la plus petite couleur admissible, c'est-à-dire la première couleur dans l'ordre des couleurs qui ne soit pas attribuée à un voisin.

Dans toute la suite, **on utilisera comme ordre de couleurs**, *rouge* < *bleu* < *vert* < *jaune* < *marron* < *mauve*.

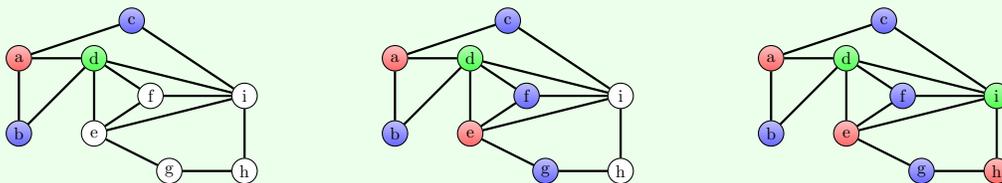
## Exemple – Déroulement de l’Algorithme glouton 4.3.1

Appliquons l’Algorithme glouton 4.3.1 au graphe ci-dessous, avec l’ordre alphabétique pour les sommets

On considère d’abord le sommet  $a$ . On le colore avec la première couleur dans l’ordre, c’est-à-dire rouge. On considère ensuite le sommet  $b$ . On ne peut le colorer rouge car il est relié au sommet  $a$  qui est rouge. On peut en revanche le colorer avec la deuxième couleur, bleu. On considère ensuite  $c$  qui comme  $b$  est coloré bleu, puis  $d$  ne peut être coloré ni en rouge, ni en bleu car il est relié à  $a$  et  $b$ . On le colore alors en vert. On se retrouve donc dans la situation dessinée ci-dessous à gauche. (Les sommets blancs sont les sommets non-encore considérés.)

On considère ensuite  $e$ . Il n’est pas relié à  $a$  le seul sommet rouge pour l’instant. On le colore donc en rouge. On considère ensuite  $f$  qui est adjacent au sommet  $e$  rouge, mais aucun sommet bleu, on le colore donc en bleu. Puis, on considère  $g$  qui de même est coloré bleu. On se retrouve donc dans la situation dessinée ci-dessous au centre.

On considère enfin  $h$  qui est coloré rouge car n’est relié à aucun des sommets rouges ( $a$  et  $e$ ), puis  $i$  qui ne peut être coloré ni rouge car relié à  $e$  et  $h$ , ni bleu car relié à  $c$  et  $g$ . On a ainsi la coloration finale dessinée ci-dessous à droite.



**Pédagogie – Variante de l’algorithme glouton**

Pour trouver une coloration avec le moins de couleurs, une stratégie naturelle est de prendre les couleurs les unes après les autres et à chaque étape de colorer le plus de sommets possibles (non-encore colorés). Notons que les sommets colorés de la même couleur forment un indépendant ; pour trouver un indépendant le plus grand possible on peut utiliser l’Algorithme 3.1.1. On a alors l’algorithme suivant pour colorer un graphe  $G$ .

1. Initialiser le graphe courant à  $G$ .
2. Tant que le graphe courant (des sommets non-colorés) a un sommet faire :
  - 2.1 Prendre une nouvelle couleur  $c$ .
  - 2.2 Trouver un ensemble indépendant  $S$  du graphe courant avec l’Algorithme 3.1.1.
  - 2.3 Colorer les sommets de  $S$  avec la couleur  $c$  et les ôter les sommets de  $S$  du graphe courant.

Si à chacune des étapes 2.2, on utilise le même ordre sur les sommets du graphe, alors l’algorithme ci-dessus calcule la même coloration que l’Algorithme 4.3.1. En revanche, il visite tous les sommets pour chaque nouvelle couleur utilisée, là où l’Algorithme 4.3.1 ne les visite qu’une fois. Ce dernier est donc plus rapide.

Il peut donc être intéressant de pratiquer les deux algorithmes et de les étudier pour leur faire remarquer cela.

**Jeu 4.3.1. Coloration gloutonne**

Colorer chacun des graphes de la Figure 4.3 en utilisant l’Algorithme glouton 4.3.1 avec l’ordre alphabétique pour les sommets.

*Solution du Jeu 4.3.1.* Les colorations des graphes que donne l’Algorithme glouton 4.3.1 sont données dans la Figure 4.4.

On peut remarquer plusieurs choses :

- L’ordre sur les sommets a une importance sur le nombre de couleurs de la coloration produite par l’Algorithme glouton 4.3.1. Par exemple, les graphes  $G_1$  et  $G_2$  sont les mêmes (isomorphes), mais en colorant avec l’ordre des sommets de  $G_1$  on colore le graphe avec deux couleurs alors qu’avec l’ordre du graphe  $G_2$  on utilise trois couleurs. Même chose avec les graphes  $G_5$ ,  $G_6$ ,  $G_7$ , et les graphes  $G_8$ ,  $G_9$ ,  $G_{10}$ .
- Deux ordres peuvent donner la même coloration, c’est le cas avec les graphes  $G_3$  et  $G_4$ .

◁

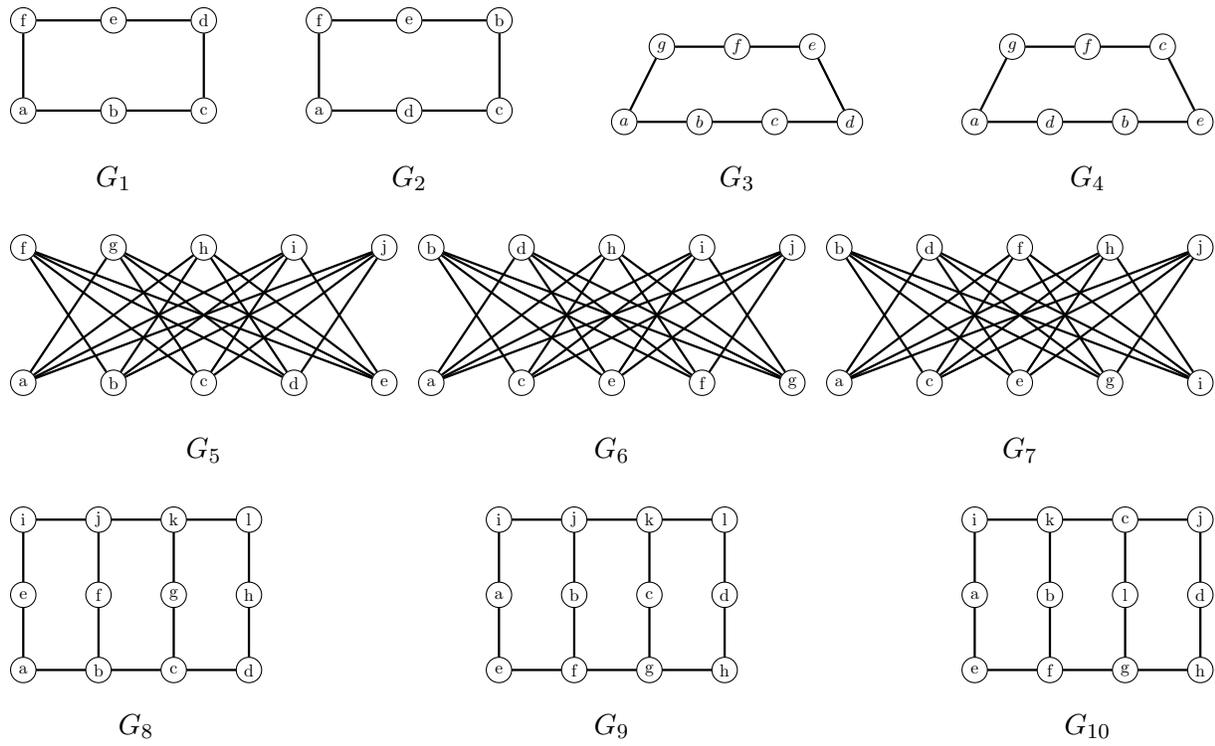


FIGURE 4.3 – Colorer ces graphes en appliquant l’algorithme glouton.

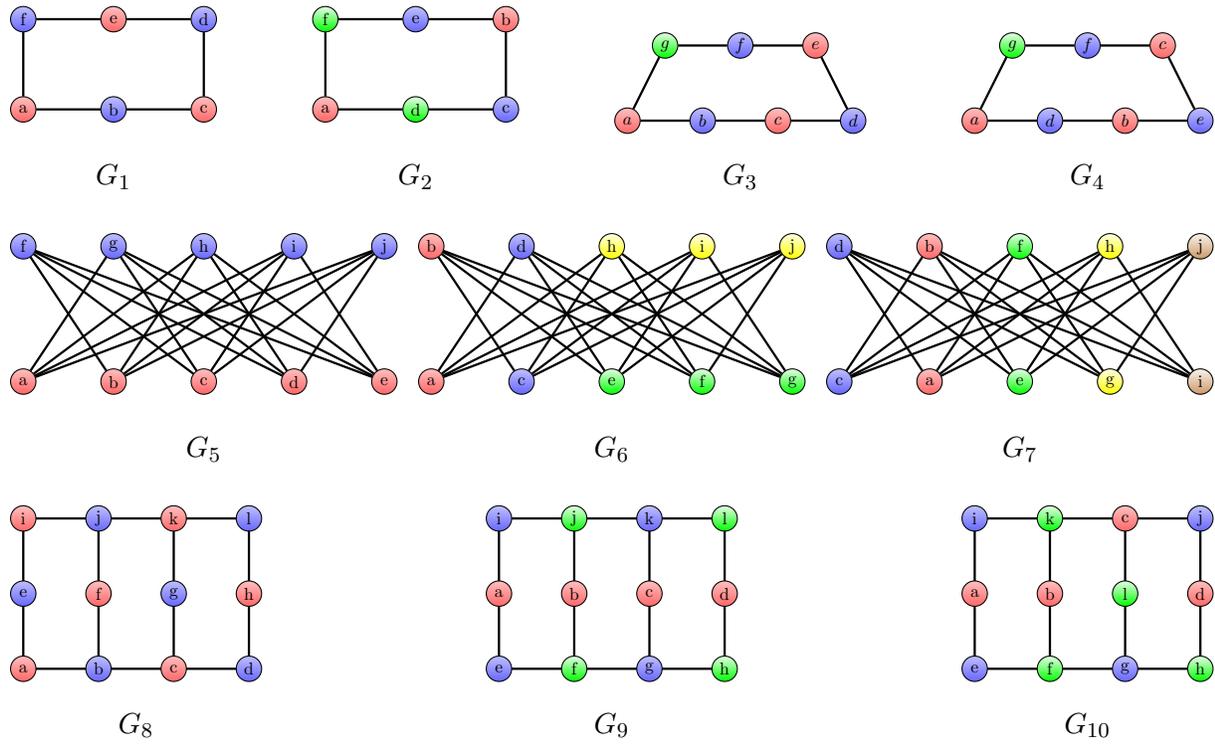


FIGURE 4.4 – Solution du Jeu 4.3.1.

**Jeu 4.3.2. Ordre glouton**

Pour chacune des colorations de la Figure 4.5, retrouver un ordre sur les sommets tel qu'en appliquant l'Algorithme glouton 4.3.1 avec cet ordre on obtienne la coloration donnée.

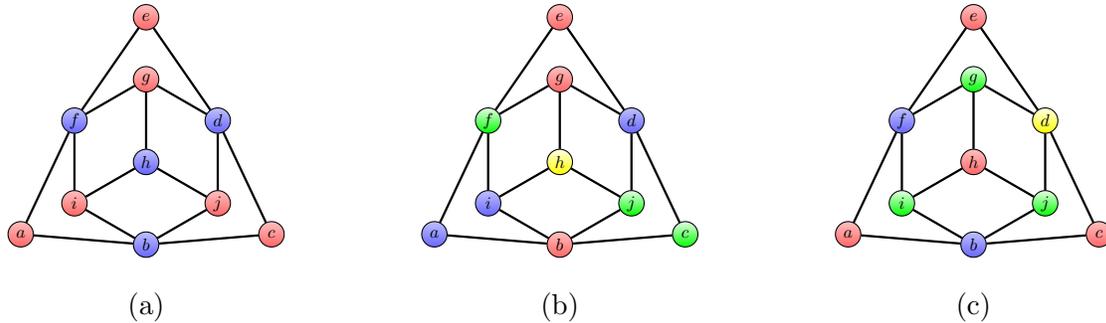


FIGURE 4.5 – Jeu 4.3.2 : Retrouver un ordre sur les sommets tel que l'Algorithme glouton 4.3.1 avec cet ordre donne la coloration représentée.

*Solution du Jeu 4.3.2.* Dans une coloration gloutonne (i.e. produite par l'algorithme glouton), un sommet a une couleur seulement si il a un voisin de chaque couleur plus petite (dans l'ordre des couleurs). Ainsi un sommet bleu doit avoir un voisin rouge ; un sommet vert doit avoir un voisin rouge et un voisin bleu ; un sommet jaune doit avoir un voisin rouge, un voisin bleu, et un voisin vert.

Si une coloration vérifie cette propriété, alors en prenant un ordre tel que tous les sommets rouges sont au début, suivis par tous les sommets bleus, puis tous les sommets verts, ... on obtiendra forcément un ordre pour lequel l'algorithme glouton renvoie la coloration donnée.

Dans la coloration (a), tous les sommets bleus ont un voisin rouge. C'est donc une coloration gloutonne. Un ordre pour lequel l'Algorithme glouton 4.3.1 renvoie cette coloration est par exemple  $a < c < e < g < i < j < b < d < f < h$ . (Les premiers sommets  $a, c, e, g, i$  et  $j$ , sont rouges et les autres sont bleus.)

De même, dans la coloration (b) tout sommet a un voisin de chaque couleur plus petite que la sienne. C'est une coloration gloutonne et un ordre pour lequel l'Algorithme glouton 4.3.1 renvoie cette coloration est par exemple  $b < e < g < a < d < i < c < f < j < h$ . (Les premiers sommets  $b, e, g$ , sont rouges, les suivants  $a, d, i$  sont bleus,  $c, j$  et  $f$  sont verts, et le dernier  $h$  est jaune.)

La coloration (c) n'est elle pas gloutonne. En effet, le sommet  $d$  est coloré en jaune, mais n'a pas de voisin bleu. On ne peut donc pas trouver d'ordre glouton pour lequel l'Algorithme glouton 4.3.1 renvoie cette coloration.  $\triangleleft$

Au vu du Jeu 4.3.1 et de ses solutions, il est clair que tout le problème revient à trouver un

bon ordre avec lequel appliquer l'Algorithme glouton 4.3.1. Malheureusement, pour un graphe ayant  $n$  sommets, il y a  $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ . Cette fonction de  $n$  croît très vite :  $10! = 3628800$  et pour  $n \geq 50$   $n!$  est déjà plus grande que le nombre d'atomes dans l'univers. Plutôt que d'essayer tous ces ordres, ce qui est et restera impossible même pour une machine, une approche est de trouver facilement des ordres qui puissent garantir que l'algorithme glouton renvoie une coloration ayant peu de couleurs. Intuitivement, on aurait envie de garder pour la fin les sommets qu'il sera plus facile de colorer, à savoir ceux qui sont de petit degré. Cela est capturé par la notion de *k-dégénérescence*. Un graphe est *k-dégénéré* s'il existe un ordre d'élimination des sommets, appelé *ordre de k-dégénérescence*, tel qu'à chaque étape le sommet qu'on élimine a au plus  $k$  voisins non éliminés. Autrement dit, si  $v_1 < v_2 < \dots < v_n$  est un ordre de *k-dégénérescence*, alors tout sommet  $v_i$  a au plus  $k$  voisins dans  $\{v_{i+1}, \dots, v_n\}$ .

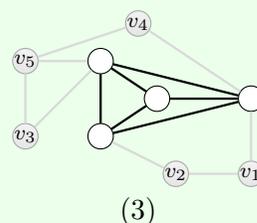
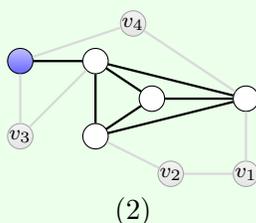
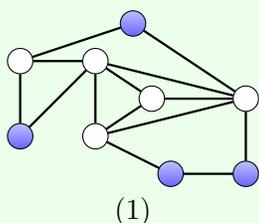
Il est facile de savoir si un graphe est *k-dégénéré* et de trouver l'ordre associé. Il suffit d'appliquer l'algorithme suivant.

#### Algorithme 4.3.2. Algorithme de *k-dégénérescence*

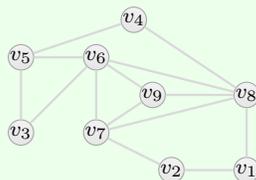
0. Initialisation :  $i = 1$ , aucun sommet n'est éliminé.
1. Si tous les sommets ne sont pas éliminés, alors
  - 1.1 Si un sommet non éliminé a au plus  $k$  voisins non éliminés, alors nommer ce sommet  $v_i$ , incrémenter  $i$  ( $i$  devient  $i + 1$ ), l'éliminer et retourner à l'étape 1.
  - 1.2 Sinon renvoyer "Le graphe n'est pas *k-dégénéré*."
2. Retourner l'ordre  $v_1 < v_2 < \dots < v_n$ .

## Exemple – Déroulement de l'Algorithme 4.3.2

Appliquons l'Algorithme 4.3.2 pour  $k = 2$  au graphe  $G$  ci-dessous. Les quatre sommets en bleus sur la figure (1) sont de degré 2 dans le graphe. On peut donc les éliminer l'un après l'autre (dans un ordre quelconque) en les numérotant. On se retrouve avec le graphe de la figure (2) dans lequel le sommet bleu est de degré 1 (donc  $\leq 2$ ). On peut donc éliminer ce sommet en lui assignant le numéro suivant  $v_5$ . On se retrouve alors avec le graphe de la figure (3) dans lequel tous les sommets sont de degré 3. Le graphe n'est donc pas 2-dégénéré et l'algorithme s'arrête.



Appliquons maintenant l'Algorithme 4.3.2 pour  $k = 3$  à ce même graphe  $G$ . On peut bien entendu éliminer les cinq sommets comme pour  $k = 2$  et se retrouver avec le graphe de la figure (3). Les quatre sommets de ce graphe sont de degré 3. On peut donc les éliminer l'un après l'autre et se retrouver avec le un ordre de dégénérescence décrit dans la figure ci-dessous.



La *dégénérescence* d'un graphe  $G$ , notée  $\delta^*(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  soit  $k$ -dégénéré. Comme on peut le voir dans l'exemple ci-dessus, pour trouver la dégénérescence d'un graphe, il n'est pas nécessaire d'appliquer plusieurs fois l'Algorithme 4.3.2. On commence avec une petite valeur de  $k$  et si jamais on est bloqué, on augmente cette valeur pour pouvoir continuer. On obtient alors l'algorithme suivant.

**Algorithme 4.3.3. Algorithme de dégénérescence**

0. Initialisation :  $i = 1$ ,  $\delta^* = 0$ , aucun sommet n'est éliminé.
1. Tant que tous les sommets ne sont pas éliminés, faire :
  - 1.1 Parmi les sommets non éliminés, en choisir un qui a le moins de voisins non-éliminés. Le nommer  $v_i$  et noter  $p$  son nombre de voisins non-éliminés.
  - 1.2 Eliminer  $v_i$ , incrémenter  $i$  ( $i$  devient  $i + 1$ ).
  - 1.3 Si  $p > \delta^*$ , alors  $p$  devient la nouvelle valeur de  $\delta^*$ .
2. Retourner  $\delta^*$  pour la dégénérescence et  $v_1 < v_2 < \dots < v_n$  comme ordre associé.

Une manière de trouver une coloration d'un graphe avec peu de couleurs est donc de suivre l'algorithme suivant :

**Algorithme 4.3.4. Colorer avec peu de couleurs**

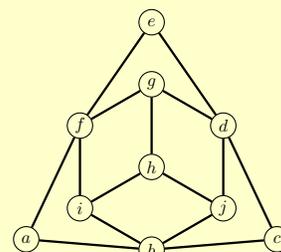
1. Trouver la dégénérescence  $\delta^*$  du graphe et un ordre  $v_1 < v_2 < \dots < v_n$  associé à l'aide de l'Algorithme 4.3.3
2. Appliquer l'Algorithme glouton 4.3.1 sur l'ordre inverse  $v_n < \dots < v_2 < v_1$ .

Cet algorithme ne donne généralement pas une coloration avec le nombre minimum de couleurs. Il peut même parfois donner une coloration utilisant énormément plus de couleurs qu'une coloration optimale. Cependant, il donne de bons résultats. C'est en particulier le cas pour les graphes planaires (Voir Section 5.2).

### Mise en place – Coloration en grandeur nature

En grandeur nature, les jeux des Parties 4.2 et 4.3 se font de manière différente de ceux de la partie Partie 4.1. Pour ces derniers, on donnait aux élèves une couleur (chasuble) fixe et chacun devait trouver la bonne position. Ici c'est l'inverse, chaque élève sera assigné à un sommet donné, et il disposera de plusieurs couleurs (feuille de couleurs différentes). Le but est alors pour chaque élève de choisir une couleur de manière à ce que ses voisins dans le graphe n'aient pas la même couleur que lui, de manière libre, puis en suivant des algorithmes.

On peut par exemple partir sur le graphe dessiné à droite. On commence par la coloration libre. La consigne pour chaque élève est de choisir une couleur différente de celles de ses voisins. On donne d'abord 4 (feuilles de) couleurs à chaque élève sur son sommet.



Une fois qu'une coloration est trouvée, on retire une des couleurs, et on leur demande de recommencer.

Une fois la nouvelle coloration trouvée, on retire encore une couleur (il ne leur reste plus que deux) et on leur demande de recommencer.

À chaque étape, on peut forcer des problèmes en imposant des couleurs (initiales) à certains sommets. On peut par exemple, forcer les sommets  $a$ ,  $c$ ,  $i$  et  $j$  à avoir des couleurs différentes pour qu'il y ait un problème en  $b$  nécessitant des recolorations.

On présente ensuite les différents algorithmes de coloration. On commence par l'Algorithme 4.2.1 qui permet de voir que le graphe se colore avec deux couleurs. Pour expliquer le Théorème 4.1, on peut modifier le graphe en remplaçant l'arête  $jb$  par l'arête  $jc$  pour faire apparaître le cycle de longueur 3  $j-c-d-j$ . Si on ne veut plus de cycle de longueur 3, on peut également ôter l'arête  $jd$ . Il n'y a plus de cycle de longueur 3, mais il reste des cycles de longueur impaire, e.g.  $j-c-d-g-h-j$ .

On explique l'Algorithme glouton 4.3.1 et on le fait tourner avec différents ordres de sommets. Avec l'ordre alphabétique, on obtiendra une coloration avec deux couleurs, avec l'ordre  $b < a < g < i < d < c < e < j < f < h$ , on obtient une coloration avec 4 couleurs (la (b) de la Figure 4.5).

Enfin on peut leur montrer comment trouver un ordre 2-dégénéré avec l'Algorithme 4.3.2. Au départ, tous les élèves sont debout. Ensuite, quand ils seront "éliminés", il se baisseront. La consigne pour chacun est alors la suivante. S'il a au plus deux voisins dans le graphe qui sont debout, alors il prend le numéro suivant qu'il annonce aux autres et se baisse. Le premier à se baisser annoncera 1, le second 2, et ainsi de suite. (On peut demander aux élèves de noter sur une feuille (ou ardoise) leur numéro pour être sûr qu'ils s'en souviennent.) On leur fait ensuite appliquer l'Algorithme glouton 4.3.1 dans l'ordre décroissant.

**Problème 4.3.1. Planning du Bac**

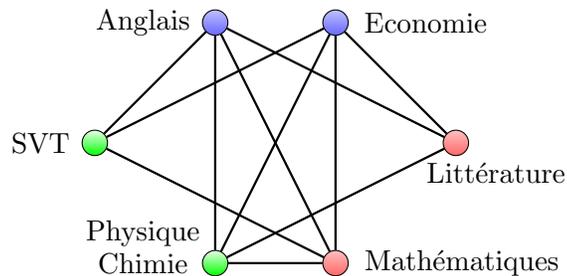
Au lycée Terra Numerica, on organise un Bac blanc pour préparer les élèves de sept classes de Terminale. On organise une épreuve pour chacune des spécialités “Anglais”, “Economie”, “Littérature”, “Mathématiques”, “Physique-Chimie”, “Science de la Vie et de la Terre”. Chaque épreuve doit avoir lieu en même temps pour tous les élèves qui ont choisi la spécialité. Des épreuves peuvent avoir lieu le même jour, mais une classe ne peut pas faire deux épreuves le même jour. La liste des spécialités suivies par tous les élèves de chaque classe est donnée dans le tableau ci-dessous.

Spécialités	T. 1	T. 2	T. 3	T. 4	T. 5	T. 6	T. 7
Anglais	×		×		×		×
Economie		×		×		×	
Littérature			×			×	
Mathématiques	×	×		×	×		×
Physique-Chimie					×	×	
Science de la Vie et de la Terre	×	×					×

Combien de jours faut-il au minimum pour programmer toutes les épreuves avec les contraintes ci-dessus? Donner un programme des épreuves avec ce nombre de jours.

*Solution du Problème 4.3.1.*

Pour résoudre ce problème, on peut le modéliser à l'aide d'un graphe. Les sommets de ce graphe sont les spécialités et deux sommets sont reliés par une arête si elle ne peuvent pas se tenir le même jour, c'est-à-dire, si une classe suit les deux spécialités correspondantes. On obtient alors le graphe dessiné à droite.



Une programmation des épreuves correspond alors à une coloration du graphe, chaque couleur correspondant à un jour. Le graphe est colorable avec trois couleurs comme montré sur le dessin. On ne peut pas faire mieux car les trois sommets “Economie”, “Mathématiques” et “SVT” sont reliés deux à deux. Ces trois sommets doivent donc être colorés différemment.

Un programme possible, correspondant à la coloration du dessin est le suivant : Anglais et Economie le premier jour, Littérature et Mathématiques le deuxième jour et Physique-Chimie et SVT le troisième jour. ◁

La coloration de graphes modélise très bien tous les problèmes d'allocation de ressources : on dispose de ressources d'un certain type (que l'on veut minimiser) et on veut attribuer une

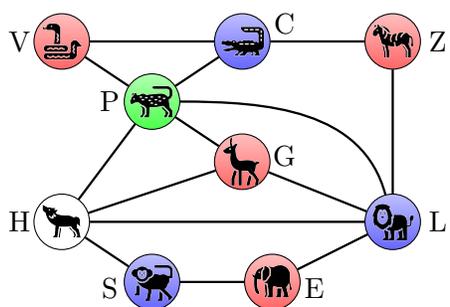
ressource à chaque élément d'un ensemble. Une même ressource peut être attribuée à plusieurs éléments de l'ensemble à condition qu'il n'y ait pas d'incompatibilité. Les problèmes d'allocations sont très nombreux. Un premier exemple est celui d'un zoo. Les ressources sont les enclos et les éléments sont les espèces.

### Problème 4.3.2. Utilisons les graphes au zoo (II)

On retrouve le directeur du zoo du Problème 3.0.1. Il dispose des espèces suivantes : crocodile, éléphant, gazelle, hyène, lion, panthère, singe, vipère, zèbre. Le crocodile est incompatible avec la panthère, la vipère, et le zèbre. L'éléphant est incompatible avec le lion et le singe. La gazelle est incompatible avec la hyène, le lion et la panthère. La hyène est incompatible avec la gazelle, le lion, la panthère et le singe. Le lion est incompatible avec l'éléphant, la gazelle, la hyène, la panthère et le zèbre. La panthère est incompatible avec le crocodile, la gazelle, la hyène, le lion et la vipère. Le singe est incompatible avec l'éléphant et la hyène. La vipère est incompatible avec le crocodile et la panthère. Le zèbre est incompatible avec le crocodile et le lion.

Le directeur souhaite construire le moins d'enclos possible pour contenir toutes les espèces de telle sorte qu'aucun enclos ne contienne deux espèces incompatibles. Saurez-vous l'aider ?

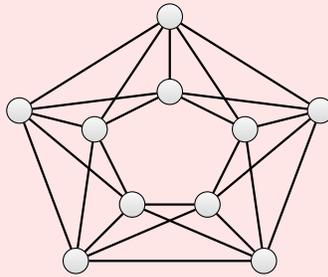
*Solution du Problème.* Comme pour le Problème 3.0.1, on construit le graphe dont les sommets sont les espèces et dans lequel on relie deux sommets par une arête si les espèces correspondantes sont incompatibles. Les couleurs représentent alors les enclos. Trouver le nombre minimum d'enclos pour accueillir toutes les espèces, revient alors à trouver le nombre minimum de couleurs pour colorer le graphe. Voici une coloration avec quatre couleurs.



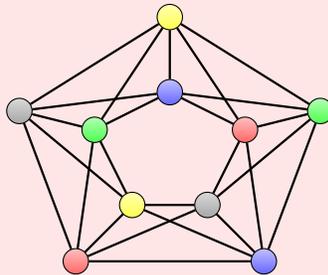
C'est optimal : il faut au minimum quatre couleurs. En effet, les quatre animaux gazelle, hyène, lion, panthère sont incompatibles deux à deux (en termes de graphe, on dit que les sommets G, H, L et P forment une clique). Ils doivent donc tous être dans des enclos différents. Il faut donc au moins quatre enclos. ◁

### Application – Utilisons les graphes pour les réseaux radio

Un autre exemple d'utilisation de la coloration de graphes est celui de l'allocation de fréquences dans les réseaux radio. Dans ce type de réseaux, deux émetteurs trop proches (dont les zones d'émission se recoupent) ne peuvent pas émettre sur une fréquence identique, car sinon les récepteurs situés dans l'intersection des deux zones d'émissions auraient des interférences et ne capteraient plus les communications correctement. Dans ce cas, il faut alors attribuer des fréquences différentes aux deux émetteurs. On cherche à attribuer une fréquence à tous les émetteurs, en évitant les interférences. En outre, on cherche à minimiser le nombre de fréquences utilisées car les opérateurs payent pour chaque fréquence. Ce problème est modélisé par un problème de coloration de sommets dans un graphe construit à partir du réseau. Il y a un sommet par émetteur et il y a une arête entre deux sommets si et seulement si les deux émetteurs correspondants à ces deux sommets sont trop proches pour utiliser la même fréquence. Le problème revient alors à donner une couleur à chacun des sommets (deux sommets reliés par une arête ont des couleurs différentes) tout en minimisant le nombre total de couleurs utilisées. Les couleurs représentent dans ce contexte les fréquences. Par exemple, si le réseau correspond au graphe dessiné ci-dessous, sauriez-vous dire quel est le nombre minimum de fréquences nécessaires ?



*Solution.* La coloration suivante utilise 5 couleurs.

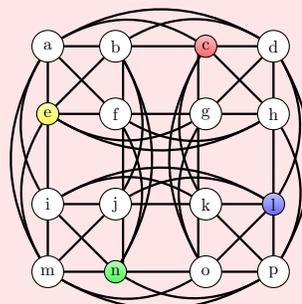


On ne peut pas faire avec moins de cinq couleurs. En effet, les sommets colorés d'une même couleur doivent former un ensemble indépendant. Or on peut facilement voir qu'un ensemble indépendant du graphe contient au plus 2 sommets. (Autrement dit, dès que l'on prend trois sommets, au moins deux d'entre eux sont reliés par une arête.) Dans une coloration, chaque couleur est donc utilisée au plus deux fois. Comme il y a 10 sommets, il faut au moins  $10/2 = 5$  couleurs.

### Application – Étendre une coloration partielle et sudoku

Dans de nombreuses applications, on ne part pas de rien. Très souvent, certains sommets du graphe sont déjà colorés et il faut colorer les autres sommets (en respectant la contrainte que deux sommets reliés doivent recevoir des couleurs différentes). C'est en particulier ce qui se passe quand on résout un sudoku. Prenons par exemple le sudoku représenté ci-dessous à gauche. On peut construire un graphe associée à cette grille : les sommets sont les cases de la grille (identifiées ici par la lettre dans leur coin en haut à gauche) ; deux sommets sont reliés par une arête si les cases correspondantes sont sur la même ligne, sur la même colonne, ou dans le même sous-carré  $2 \times 2$ . Autrement dit, deux sommets sont adjacents si on ne peut pas mettre le même chiffre dans les cases correspondantes. On obtient ainsi le graphe dessiné à droite. De plus, à chaque chiffre, on peut faire correspondre une couleur (1=bleu rouge ; 2=rouge bleu ; 3=vert ; 4=jaune). Ainsi la grille de gauche correspond au graphe de droite avec 4 sommets déjà colorés, et trouver une solution à la grille de sudoku revient à compléter la coloration avec 4 couleurs du graphe.

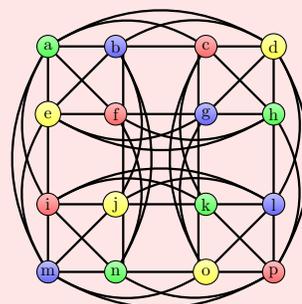
a	b	c 1	d
e 4	f	g	h
i	j	k	l 2
m	n 3	o	p



Saurez-vous trouver la solution à la grille de sudoku, ou de manière équivalente colorer les sommets non encore colorés du graphe afin d'obtenir une coloration avec 4 couleurs ?

*Solution.*

a 3	b 2	c 1	d 4
e 4	f 1	g 2	h 3
i 1	j 4	k 3	l 2
m 2	n 3	o 4	p 1

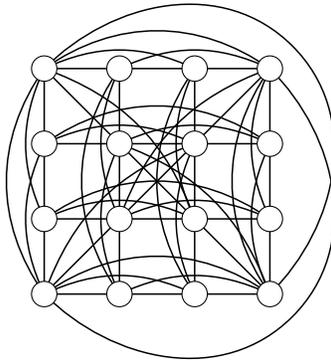


**Jeu 4.3.3. de cartes de Jacques Ozanam (1640–1718)**

Placer les quatre Rois, les quatre Reines, les quatre Valets et les quatre As d'un jeu de cartes dans un carré  $4 \times 4$  de telle sorte que chaque ligne, chaque colonne et chacune des deux diagonales principales ait une carte de chaque valeur. Pouvez-vous faire de même et qu'en plus il y ait une seule carte de chaque couleur dans chaque ligne, chaque colonne et chacune des deux diagonales principales ?

*Solution du Jeu 4.3.3.* Sans tenir compte des couleurs, cela revient à trouver une coloration en quatre couleurs (Roi, Dame, Valet, As) du graphe ci-dessous à gauche. Celui-ci est peu lisible du fait de son grand nombre d'arêtes, et il est plus facile (pour un humain) de travailler sur un carré en se rappelant des contraintes.

Avec la contrainte supplémentaire des couleurs c'est également possible. Il existe plus d'une centaine de solutions. Une d'entre elles est donnée ci-dessous à droite.



R♠	A♣	D♣	V♥
D♥	V♣	R♠	A♠
V♠	D♠	A♥	R♣
A♣	R♥	V♠	D♠

◁

## Chapitre 5

# Graphes planaires

Un graphe est **planaire** s'il peut être dessiné dans le plan (par exemple, sur une feuille de papier ou un tableau) sans croisement d'arêtes. C'est-à-dire que chaque arête doit être représentée par un trait qui ne touche que les deux sommets qu'elle lie (ni autre sommet, ni autre arête). Notons que les arêtes ne sont pas nécessairement représentées par des segments de droites mais peuvent être représentées par des lignes courbes.

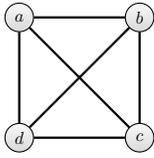
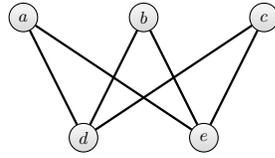
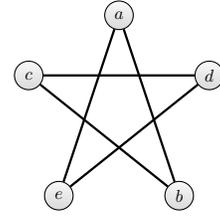
### 5.1 Dessins planaires

#### Mise en place – Divers supports possibles

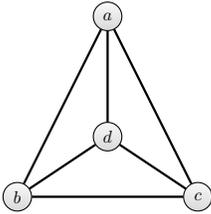
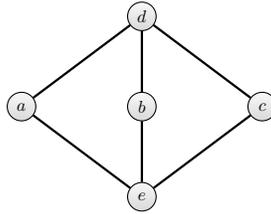
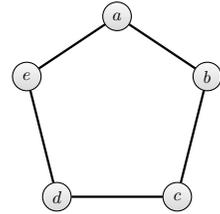
Comme dans pour les jeux d'isomorphisme, les jeux de cette partie peuvent se faire sur papier. Les élèves doivent alors donner les étiquetages des sommets qui permettent de vérifier que le dessin proposé est bien isomorphe à celui de départ. Mais cela peut se faire plus simplement sur un plateau avec des élastiques pour les arêtes. En bougeant les sommets, les arêtes qui lui sont incidentes bougent également. Il faut donc bouger les sommets jusqu'à obtenir un dessin planaire. On peut également le faire en grandeur nature avec des cerceaux et des ficelles.

#### Jeu 5.1.1. Dessin planaire

Proposez un dessin planaire (sans croisements d'arêtes) des graphes suivants.

Graphe  $G_1$ Graphe  $G_2$ Graphe  $G_3$ 

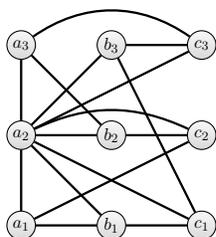
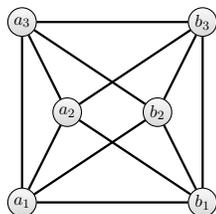
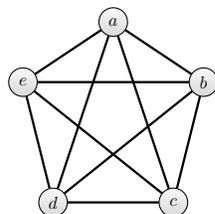
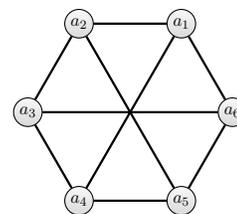
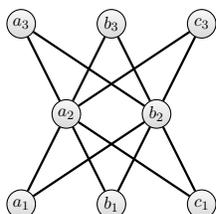
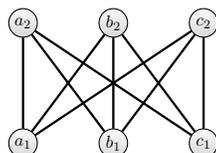
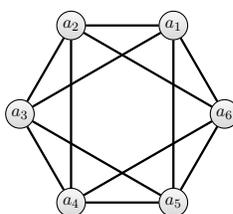
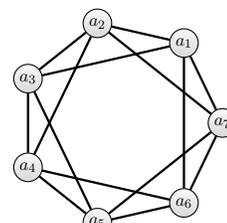
*Solution du Jeu 5.1.1.* Il y a une infinité de solutions possibles. En voici une par graphe. Les noms des sommets permettent de retrouver l'isomorphisme avec le dessin initial du graphe.

Graphe  $G_1$ Graphe  $G_2$ Graphe  $G_3$ 

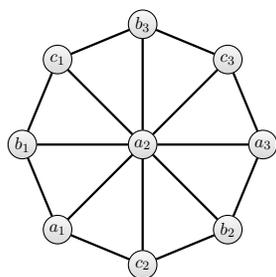
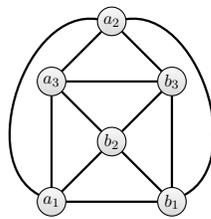
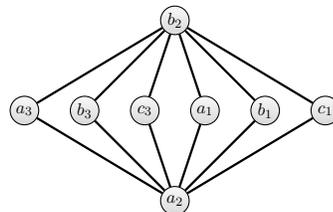
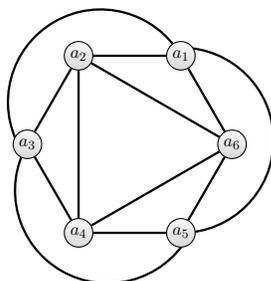
◁

### Jeu 5.1.2. Planaire ou pas planaire ? (I)

Parmi les graphes  $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7$  et  $H_8$  dessinés ci-dessous, trouver ceux qui sont planaires et ceux qui ne le sont pas. Pour prouver qu'un graphe est planaire, il faut proposer un dessin planaire (sans croisements d'arêtes) du graphe. Sinon, il faut expliquer pourquoi le graphe n'admet aucun dessin planaire.

Graphe  $H_1$ Graphe  $H_2$ Graphe  $H_3$ Graphe  $H_4$ Graphe  $H_5$ Graphe  $H_6$ Graphe  $H_7$ Graphe  $H_8$ 

*Solution du Jeu 5.1.2.* Les graphes  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_5$  et  $H_7$  sont planaires. Un dessin planaire de chacun d'eux est donné ci-dessous. En fait, les graphes  $H_2$  et  $H_7$  sont isomorphes (i.e., ce sont deux dessins différents du même graphe) comme montré au Jeu 2.3.1 (e). Un dessin planaire de l'un est donc un dessin planaire de l'autre (au renommage des sommets indiqué par l'isomorphisme près). Il est cependant souvent plus simple de trouver un dessin planaire que de trouver un isomorphisme vers un graphe et d'utiliser le dessin planaire de ce dernier. Le dessin planaire trouvé dépend souvent du dessin non planaire original. Par exemple, pour obtenir le dessin planaire de  $H_2$ , l'idée a été de sortir le sommet  $a_2$  à l'extérieur du carré formé par le cycle  $(a_1, b_1, b_3, a_3, a_1)$ ; pour obtenir le dessin planaire de  $H_7$  (qui est pourtant le même graphe), l'idée a été de mettre les arêtes du cycle  $(a_1, a_3, a_5, a_1)$  à l'extérieur de l'hexagone formé par le cycle  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_1)$ . Nous avons donc obtenu deux dessins planaires différents.

Graphe  $H_1$ Graphe  $H_2$ Graphe  $H_5$ Graphe  $H_7$

## Pédagogie – Dessin avec arêtes rectilignes

Les dessins ci-dessus des graphes  $H_2$  et  $H_7$  ont des arêtes courbes. Cependant tout graphe planaire peut se dessiner dans le plan avec des arêtes rectilignes qui ne se croisent pas. Nous donnons ci-dessous le même dessin planaire avec des arêtes rectilignes de  $H_2$  et  $H_7$ .



La recherche d'un dessin planaire peut donc se faire sur le plateau de jeux avec les élastiques (qui restent rectilignes) figurant les arêtes sans souci. Le joueur commence par construire le graphe sur le plateau tel qu'il est dessiné dans l'énoncé du jeu, puis déplace les sommets (comme dans les jeux d'isomorphisme) jusqu'à obtenir un dessin planaire.

Trouver un dessin planaire avec des arêtes rectilignes est parfois plus compliqué que de trouver un dessin planaire avec des courbes. Voir par exemple le graphe  $J_4$  du Jeu 5.1.4. Trouver un dessin planaire avec des arêtes rectilignes peut donc être une question supplémentaire à poser une fois un dessin planaire (avec des arêtes courbes) trouvé.

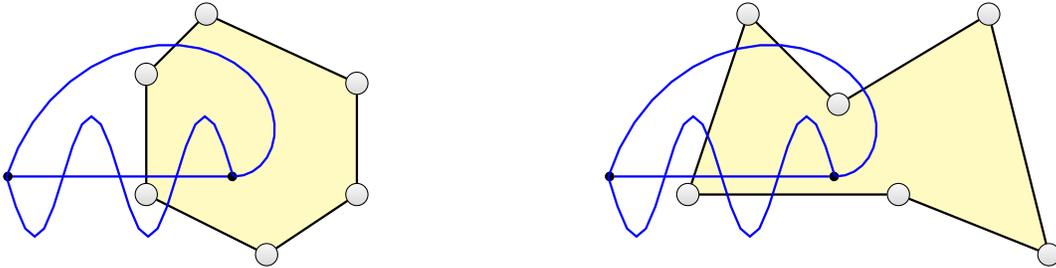
Les graphes  $H_3, H_4, H_6$  et  $H_8$  ne sont pas planaires. Il n'existe aucune manière de les dessiner sans que deux arêtes se croisent.

Démontrer qu'un graphe n'est pas planaire semble *a priori* difficile. On peut cependant s'en convaincre de manière assez simple et naturelle.

Cela nécessite l'énoncé suivant. Celui-ci est très intuitif et il sera admis. Les mathématiciens ont d'ailleurs fait de même jusqu'au XIX<sup>ème</sup> siècle. Mais sa démonstration est tout sauf évidente. C'est le célèbre Théorème de Jordan.

**Théorème 5.1** (Théorème de Jordan). *Un cycle dessiné sans croisement sépare le plan en deux parties : l'intérieur et l'extérieur du cycle. Toute courbe qui relie un point de l'extérieur à un point de l'intérieur croise une arête du cycle.*

Par exemple, la figure ci-dessous montre deux dessins sans croisement d'un cycle de longueur 6. Pour chacun d'eux, l'intérieur a été coloré en jaune. L'extérieur est le reste du plan. Pour chacun d'eux, trois courbes bleues relient un point à l'extérieur du cycle à un point à l'intérieur du cycle, et on peut vérifier que ces courbes croisent au moins une fois une arête du cycle.



Pour montrer qu'un graphe n'est pas planaire, nous allons utiliser le **raisonnement par l'absurde** : pour montrer que quelque chose est faux, on suppose que c'est vrai et on arrive à une contradiction, qui montre que notre hypothèse est fautive.

Supposons donc que le graphe  $H_3$  admette un dessin planaire. Le cycle  $C_0 = (a, b, c, d, e, a)$  est dessiné sans croisement dans le plan. D'après le Théorème de Jordan, celui-ci sépare le plan en deux parties l'intérieur et l'extérieur. De plus, une arête (autre que celle de  $C_0$ ) a tous ses points (hormis les extrémités) soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de  $C_0$ .

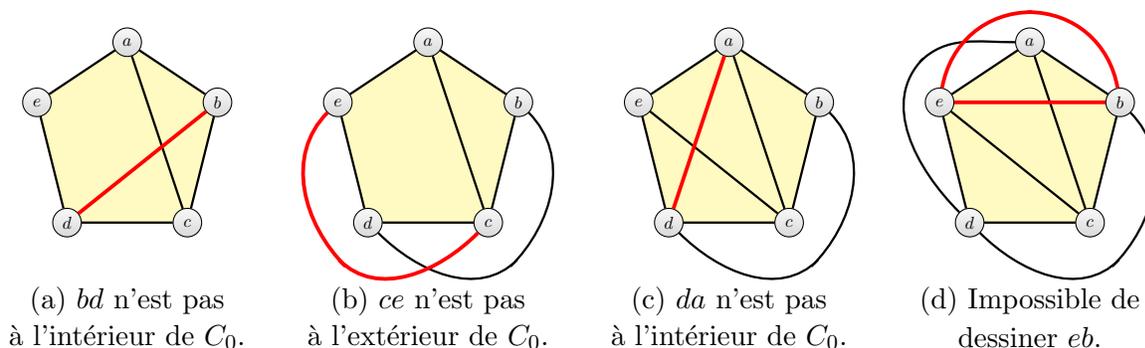
Supposons que l'arête  $ac$  soit à l'intérieur du cycle  $C_0$ . Alors, l'arête  $bd$  doit être à l'extérieur de  $C_0$ . En effet, si elle était à l'intérieur, ses points proches de  $b$  sont à l'intérieur du cycle  $C_1 = (a, b, c, a)$  et ses points proches de  $d$  à l'extérieur de ce cycle. Par le théorème de Jordan, l'arête  $bd$  devrait donc croiser les arêtes du cycle  $C_1$  (et plus particulièrement  $ac$ ). Voir Figure 5.1 (a). C'est une contradiction. L'arête  $bd$  étant à l'extérieur de  $C_0$ , l'arête  $ce$  doit elle être à l'intérieur de  $C_0$  car si elle était à l'extérieur, elle devrait croiser  $bd$ . Voir Figure 5.1 (b). De même, l'arête  $da$  doit être à l'extérieur de  $C_0$  car sinon elle croiserait l'arête  $ce$ . Voir Figure 5.1 (c). Mais alors on ne peut pas dessiner  $cb$ . En effet, si on la dessine à l'intérieur de  $C_0$ , elle croise  $ac$  et si on la dessine à l'extérieur de  $C_0$ , elle croise  $ad$ . On a donc obtenu la contradiction souhaitée.

Si jamais  $ac$  est à l'extérieur du cycle  $C_0$ , un raisonnement similaire en inversant « intérieur » et « extérieur » donne également une contradiction. L'hypothèse que nous avons faite (dessin planaire de  $H_3$ ) est donc fautive. Le graphe  $H_3$  n'est pas planaire.

Pour montrer que  $H_4$  n'est pas planaire, on procède de façon similaire. On suppose qu'il est planaire. Le cycle  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_1)$  est dessiné sans croisement dans le plan. Chacune des trois arêtes  $a_1a_4$ ,  $a_2a_5$  et  $a_3a_6$  est donc soit à l'intérieur, soit à l'extérieur du cycle. Deux d'entre elles sont donc forcément dans la même partie et donc se croisent nécessairement, c'est donc une contradiction.

Le graphe  $H_6$  est isomorphe au graphe  $H_4$ . (Voir Jeu 2.3.1). Ce sont donc deux dessins du même graphe. Comme le graphe  $H_4$  n'est pas planaire, le graphe  $H_6$  ne l'est pas non plus.

Pour montrer que  $H_8$  n'est pas planaire, on procède de manière quasi-identique à celle pour montrer que  $H_3$  ne l'est pas. On suppose qu'il est planaire. Le cycle  $C_0 = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_1)$  est dessiné sans croisement dans le plan. Si  $a_1a_3$  est à l'intérieur de  $C_0$ , on déduit que  $a_2a_4$  doit être à l'extérieur de  $C_0$ , puis que  $a_3a_5$  est à l'intérieur,  $a_4a_6$  à l'extérieur,  $a_5a_7$  à l'intérieur et

FIGURE 5.1 – Pourquoi  $H_3$  n'est pas planaire.

$a_6a_1$  à l'extérieur ; on ne peut pas dessiner  $a_7a_2$  car à l'intérieur de  $C_0$  elle croiserait  $a_1a_3$  et à l'extérieur de  $C_0$  elle croiserait  $a_6a_1$ . De même, si  $a_1a_3$  est à l'extérieur de  $C_0$ , on arrive à une impossibilité.  $\triangleleft$

### Pédagogie – Réduire un problème

Les deux jeux suivants ont deux objectifs.

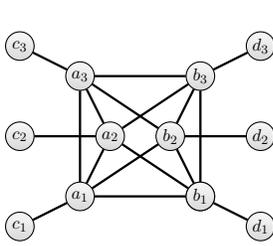
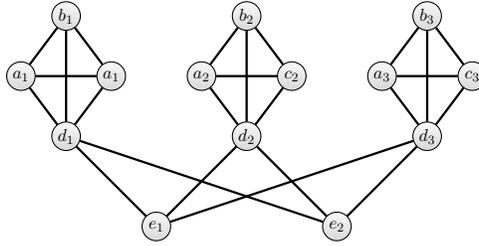
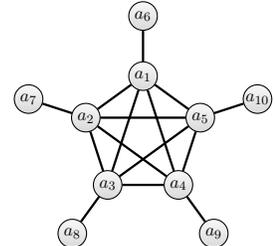
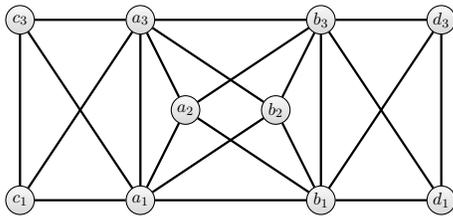
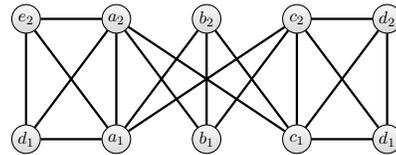
Le premier est d'amener les élèves à réfléchir à des conditions qui font qu'un graphe est planaire ou pas, et éventuellement formuler des conjectures qui pourront être testées ou démontrées et de s'approcher petit à petit d'une caractérisation comme celle donnée par le Théorème 5.4. (Il en existe d'autres.)

Le deuxième est de trouver des manières simples de réduire le problème, soit en se ramenant à un ou des problèmes plus petits. Cette manière de procéder est fondamentale, aussi bien en mathématiques pour démontrer des énoncés, qu'en informatique dans la conception d'algorithmes.

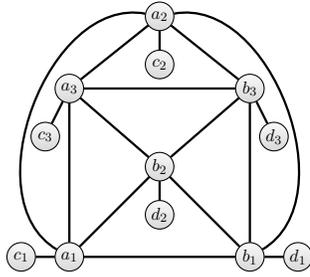
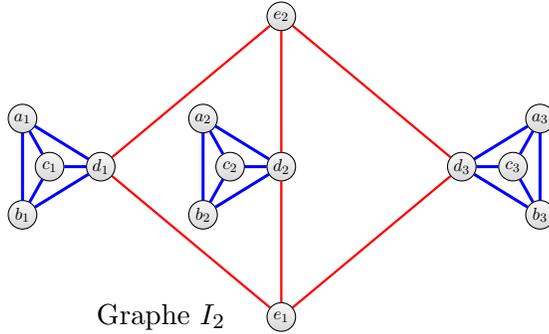
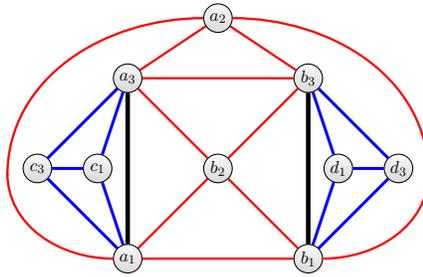
Plusieurs réductions peuvent être ainsi découvertes, expérimentées, et démontrées : il est possible de supprimer un sommet de degré 1, et plus généralement de séparer le problème en plusieurs sous-problèmes si le graphe a été obtenu par "collage" de graphes sur un sommet ou une arête. (Voir solution du Jeu 5.1.3 et Théorème 5.2) ; il est possible de faire disparaître les sommets de degré 2 (Voir solution du Jeu 5.1.4 et Théorème 5.3).

### Jeu 5.1.3. Planaire ou pas planaire ? (II)

Parmi les graphes  $I_1, I_2, I_3, I_4$  et  $I_5$  dessinés ci-dessous, trouver ceux qui sont planaires et ceux qui ne le sont pas.

Graphe  $I_1$ Graphe  $I_2$ Graphe  $I_3$ Graphe  $I_4$ Graphe  $I_5$ 

*Solution du Jeu 5.1.3.* Les graphes  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_4$  sont planaires. Un dessin planaire de chacun de ces graphes est donné dans la figure ci-dessous.

Graphe  $I_1$ Graphe  $I_2$ Graphe  $I_4$ 

En fait, le graphe  $I_1$  est obtenu à partir du graphe  $H_2$  du Jeu 5.1.2 en rajoutant sur chaque sommet ( $a_i$  ou  $b_i$ ) une arête vers un nouveau sommet ( $c_i$  ou  $d_i$ ) relié uniquement à lui. On peut donc utiliser un dessin du graphe  $H_2$  et positionner chaque nouveau sommet ( $c_i$  ou  $d_i$ ) très près de celui auquel il est relié ( $a_i$  ou  $b_i$ ) afin de pouvoir tracer l'arête entre ces deux points sans croiser d'autre arête. Voir figure ci-dessus.

De même, le graphe  $I_2$  est obtenu à partir du graphe  $G_2$  du Jeu 5.1.1 en collant sur chacun des trois sommets ( $a, b, c$  sur le dessin de  $G_2$  et  $d_1, d_2, d_3$  sur le dessin de  $I_2$ ) une copie du (i.e. un graphe isomorphe au) graphe  $G_1$  du Jeu 5.1.1. On peut donc utiliser un dessin planaire de  $G_2$  (arêtes rouges) puis positionner sur chacun des  $d_i$  un dessin planaire de  $G_1$  (arêtes bleues) suffisamment petit pour ne pas que ses arêtes croisent celle du graphe  $G_2$ . Voir figure ci-dessus.

Le graphe  $I_4$  lui peut être vu comme le graphe  $H_2$  (les sommets  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  et les arêtes entre ces sommets) auquel on a collé deux copies du graphe  $G_1$ , l'une sur l'arête  $a_1a_3$  et l'autre sur l'arête  $b_1b_3$ . On peut donc partir d'un dessin planaire de  $H_2$  (arêtes rouges et noires sur la figure ci-dessus) et ensuite coller des dessins planaires de  $G_1$  (arêtes bleues) sur les arêtes  $a_1a_3$  et  $b_1b_3$  suffisamment petits pour ne pas que leurs arêtes croisent celles du graphe  $G_2$ .

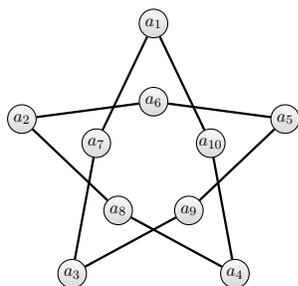
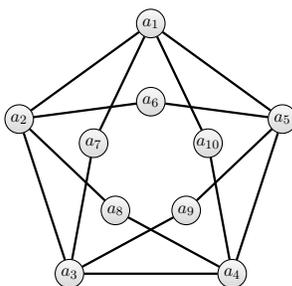
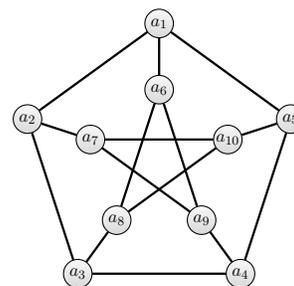
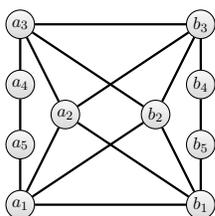
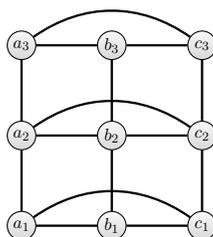
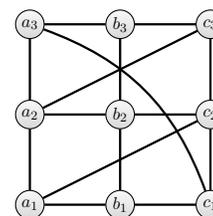
### Allons plus loin – Décomposition d'un graphe planaire

**Théorème 5.2.** Soit  $H$  un graphe obtenu à partir de deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  en les collant sur un sommet ou sur une arête.  $H$  est planaire si et seulement si  $G_1$  et  $G_2$  sont planaires.

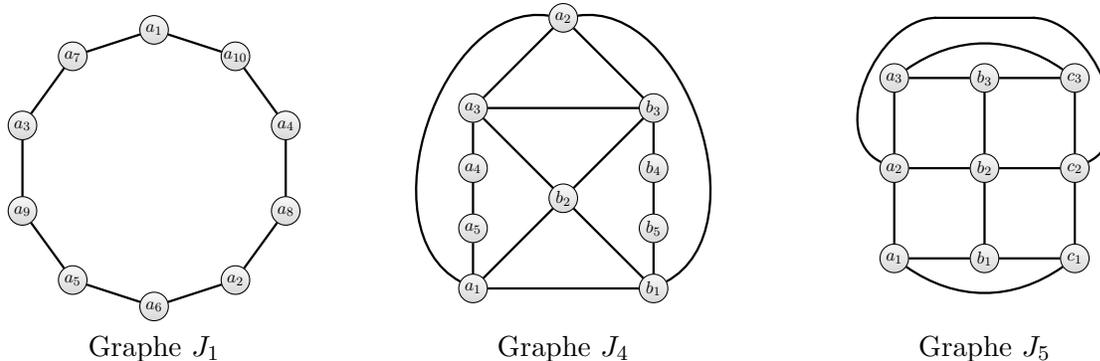
Les graphes  $I_3$  et  $I_5$  ne sont pas planaires. En effet,  $I_3$  contient le graphe  $H_3$  du Jeu 5.1.2. Pour pouvoir dessiner  $I_3$  sans que les arêtes se croisent, il faudrait d'abord pouvoir dessiner  $H_3$  de la sorte. Mais cela est impossible comme nous l'avons vu dans la solution au Jeu 5.1.2. De même,  $I_5$  contient le graphe  $H_6$  du Jeu 5.1.2. Ce dernier n'étant pas planaire, (voir solution du Jeu 5.1.2), le graphe  $I_5$  n'est pas planaire non plus.  $\triangleleft$

### Jeu 5.1.4. Planaire ou pas planaire ? (III)

Parmi les graphes  $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5$  et  $J_6$  ci-dessous, trouver ceux qui sont planaires et ceux qui ne le sont pas.

Graphe  $J_1$ Graphe  $J_2$ Graphe  $J_3$ Graphe  $J_4$ Graphe  $J_5$ Graphe  $J_6$ 

*Solution du Jeu 5.1.4.* Les graphes  $J_1, J_4$  et  $J_5$  sont planaires. Un dessin planaire de chacun d'entre eux est donné ci-dessous.



Pour trouver les dessins de  $J_1$  et  $J_4$ , il est pratique d'utiliser les opérations d'apparition et disparition de sommets sur une arête, et la notion de *subdivision*.

L'*apparition* d'un sommet  $w$  sur une arête  $uv$  consiste à ajouter  $w$  au milieu de l'arête : formellement, on supprime l'arête  $uv$  et on ajoute le sommet  $w$  et les arêtes  $uw$  et  $vw$ . La *disparition* d'un sommet  $w$  de degré 2 dont les deux voisins sont  $u$  et  $v$  est l'opération inverse. On supprime le sommet  $w$  et les arêtes  $uw$  et  $vw$  et on ajoute l'arête  $uv$ . Voir Figure 5.2

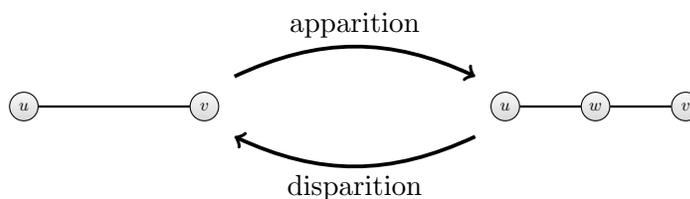
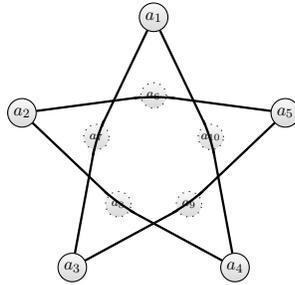
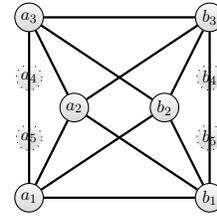


FIGURE 5.2 – Apparition et disparition d'un sommet sur une arête.

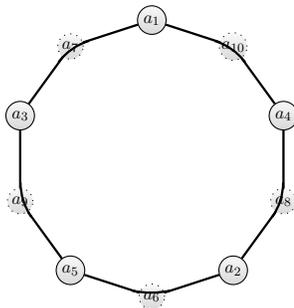
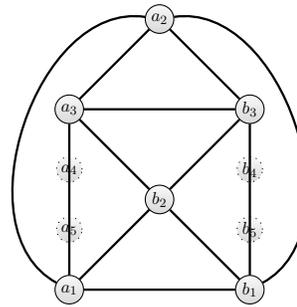
Une *subdivision* d'un graphe est obtenue à partir de ce graphe en faisant apparaître un ou plusieurs sommets sur une ou plusieurs arêtes. Ainsi le graphe  $J_1$  est une subdivision du graphe  $G_3$  du Jeu 5.1.1 et  $J_4$  est une subdivision du graphe  $H_2$  du Jeu 5.1.2. Voir la figure ci-dessous où sont représentés en pointillé les sommets à faire apparaître pour obtenir  $J_1$  (resp.  $J_4$ ) à partir de  $G_3$  (resp.  $H_2$ ).

De  $G_3$  à  $J_1$ De  $H_2$  à  $J_4$ 

Or il est facile de voir que partant d'un dessin planaire d'un graphe, faire apparaître un sommet sur une arête ou à l'inverse faire disparaître un sommet de degré 2, donne un dessin planaire du graphe obtenu. Ainsi, on a le théorème suivant.

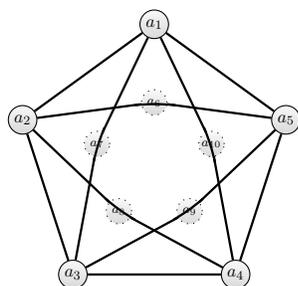
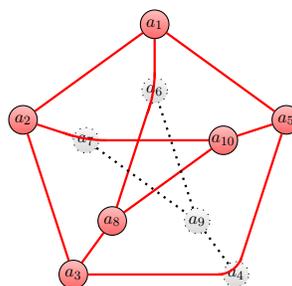
**Théorème 5.3.** *Soit  $G$  un graphe et  $H$  une subdivision de  $G$ . Le graphe  $G$  est planaire si et seulement si  $H$  est planaire.*

De plus, en partant d'un dessin planaire d'un graphe  $G$  on trouve immédiatement un dessin planaire d'une subdivision en faisant apparaître des sommets. (Et inversement, en partant d'un dessin planaire d'une subdivision de  $G$ , on trouve immédiatement un dessin de  $G$  en faisant disparaître des sommets.) Ainsi les dessins planaires de  $J_1$  et  $J_4$  ont été obtenus à partir des dessins planaires de  $G_3$  et  $H_2$  donnés dans les solutions des jeux 5.1.1 et 5.1.2, comme montré ci-dessous. Les sommets à faire apparaître sont représentés en pointillés.

De  $G_3$  à  $J_1$ De  $H_2$  à  $J_4$ 

Les graphes  $J_2$ ,  $J_3$  et  $J_6$  ne sont pas planaires. On peut bien évidemment le montrer en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans la solution au Jeu 5.1.2, mais il est plus facile d'utiliser les subdivisions.

Le graphe  $J_2$  est une subdivision du graphe  $H_3$  du Jeu 5.1.2. Comme  $H_3$  n'est pas planaire (voir solution du Jeu 5.1.2), alors  $J_2$  n'est pas planaire d'après le Théorème 5.3.

De  $H_3$  à  $J_2$ Subdivision de  $H_6$  dans  $J_3$ 

&lt;

### Allons plus loin – Caractérisation des graphes planaires par subdivision

Le graphe  $H_3$  du Jeu 5.1.2 est le graphe *complet* à cinq sommets (il y a une arête reliant n'importe quelle paire de sommets) ; il est usuellement noté  $K_5$ . Le graphe  $H_4$  et  $H_6$  du Jeu 5.1.2 est le *graphe biparti complet avec trois sommets dans chaque partie et toutes les arêtes entre les parties* ; il est usuellement noté  $K_{3,3}$ .

**Théorème 5.4** (Kuratowski, 1930). *Un graphe est planaire si, et seulement si, il ne contient ni subdivision de  $K_5$ , ni subdivision de  $K_{3,3}$ .*

La démonstration de ce théorème dépasse le cadre de cet ouvrage. En revanche, son utilisation est simple et il permet de donner un certificat de non-planarité.

Ainsi, étant donné un graphe  $G$ , on peut montrer qu'un graphe est planaire en donnant un dessin planaire, ou bien qu'il n'est pas planaire en exhibant une subdivision de  $K_5$  ou une subdivision de  $K_{3,3}$ .

### Problème 5.1.1. Gaz-eau-électricité

Trois maisons doivent chacune être connectées à la centrale électrique, au fournisseur de gaz et au fournisseur d'eau. Est-il possible d'établir ces connexions sans qu'aucune des lignes électriques, canalisations d'eau et de gaz ne se croisent ?

*Solution du Problème 5.1.1.* Il est possible de modéliser le problème à l'aide d'un graphe. Représentons les maisons par trois sommets  $a_1, b_1$  et  $c_1$  et les fournisseurs d'eau, de gaz et d'électricité par les sommets  $a_2, b_2$  et  $c_2$ . Chaque maison est liée par une arête à chacun des fournisseurs. On obtient alors le graphe  $H_6$  du Jeu 5.1.2 qui n'est autre que  $K_{3,3}$ . D'après la réponse à la solution de ce jeu (ou le Théorème de Kuratowski 5.4), ce graphe n'est pas planaire et donc il est donc impossible d'établir les connexions désirées sans croisement.

&lt;

**Jeu 5.1.5. Duel planaire**

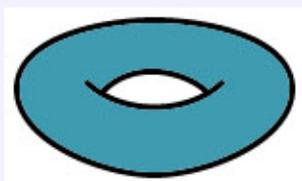
Le premier joueur dessine un graphe. Le deuxième joueur doit décider si le graphe est planaire ou non. Si le deuxième joueur trouve la bonne réponse en la justifiant (i.e. en trouvant un dessin sans croisements d'arêtes ou une raison pour laquelle il n'y en a pas), il a gagné. Sinon (i.e. s'il ne trouve pas la bonne réponse ou n'arrive pas à la justifier), le premier joueur gagne à condition de donner la bonne réponse en la justifiant. Dans le cas contraire, c'est un match nul.

**Application – Conception de circuits imprimés**

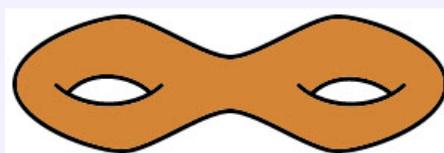
explication + grand circuit imprimé à dessiner de manière planaire.

## Allons plus loin – Dessin sur d'autres surfaces

Nous avons vu que certains graphes ne peuvent pas être dessinés dans le plan sans croisement d'arêtes (ils ne sont pas planaires) comme, par exemple,  $K_5$  le graphe complet à 5 sommets (graphe  $H_3$  du Jeu 5.1.2) et  $K_{3,3}$  ( $H_4$  et  $H_6$  du Jeu 5.1.2). Cependant, ces graphes peuvent être dessinés sans croisements d'arêtes sur d'autres surfaces comme le tore ou le double tore.



Le tore.



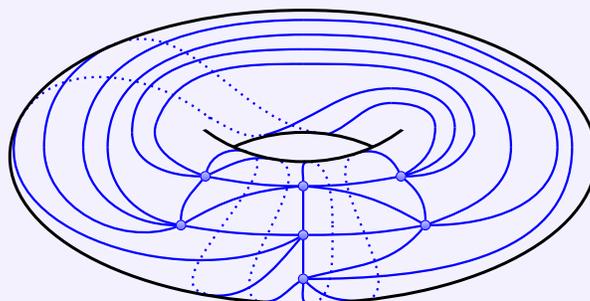
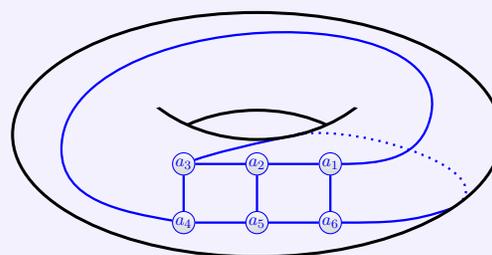
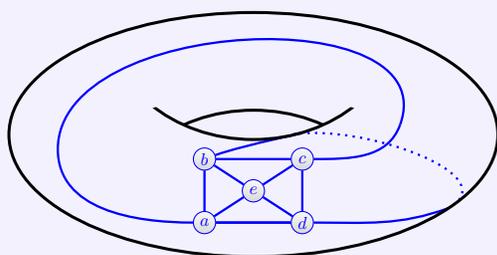
Le double tore.

## Jeu 5.1.6.

- Dessiner  $K_5$  (graphe  $H_3$  du Jeu 5.1.2) sur un tore (un donuts) sans croisement d'arêtes.
- Dessiner  $K_{3,3}$  (graphe  $H_4$  et  $H_6$  du Jeu 5.1.2) sur un tore (un donuts) sans croisement d'arêtes.
- Dessiner  $K_7$ , le graphe à sept sommets et toutes les arêtes possibles sur un tore sans croisement d'arêtes.
- Dessiner  $K_8$ , le graphe à huit sommets et toutes les arêtes possibles sur un double tore (un donuts avec deux trous) sans croisement d'arêtes.

*Solution du Jeu 5.1.6.* Nous ne donnons ci-dessous que les réponses aux questions a), b) et c). La partie des arêtes qui est dessinée sur la partie non visible du tore est en pointillé.

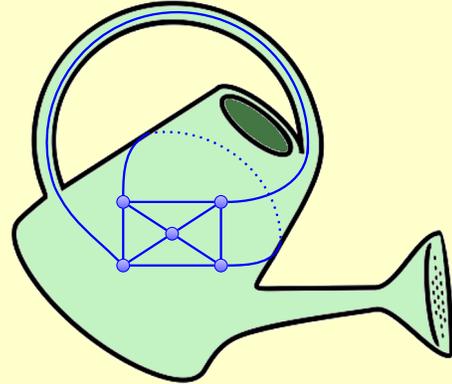
◁



**Mise en place – Dessiner sur des surfaces**

Dans le Jeu 5.1.6, il est proposé de dessiner sur le tore ou des doubles tores. Une manière de faire est de construire de telles surfaces, par exemple à l'aide de tuyaux que l'on recolle ensemble.

Il est également possible de prendre des objets existants. Ceux qui ont une anse forment des surfaces qui ne sont en fait des tores déformés (si un tore était en matière élastique, on pourrait le déformer pour obtenir ces objets). Ceux qui ont deux anses sont des doubles tores déformés. Une manière amusante de pratiquer le Jeu 5.1.6 consiste donc à dessiner les graphes sur des objets du quotidien qui ont une ou plusieurs anses. Par exemple, à droite, nous avons dessiné le graphe  $K_5$  sur un arrosoir.



## 5.2 Coloration des graphes planaires

### Jeu 5.2.1. Colorer des cartes

Pouvez-vous colorer les cartes de la Figure 5.3 de manière à ce que deux régions voisines soient toujours de couleurs différentes en utilisant 4 couleurs ? 3 couleurs ? 2 couleurs ?

*Solution du Jeu 5.2.1.* Les quatre cartes peuvent être colorées avec quatre couleurs. Il existe de nombreuses colorations avec quatre couleurs et il est assez facile d'en obtenir une, en utilisant un algorithme glouton par exemple.

Chacune des cartes requiert 4 couleurs et ne peut donc pas être colorées avec seulement 3 couleurs (et encore moins 2 couleurs). Cela peut se voir de la façon suivante :

- Pour la cartes des anciennes régions françaises, le Limousin est entouré des régions Centre, Auvergne, Midi-Pyrénées, Aquitaine et Poitou-Charentes qui forment un cycle de longueur 5 (impaire). Ainsi, il faut au moins trois couleurs différentes pour colorer les régions de ce cycle, et ces trois couleurs doivent être différentes de celle du Limousin.
- Pour la carte des départements français, les quatre départements Paris (75), Hauts de Seine (92), Seine Saint Denis (93) et Val de Marne (94) sont deux à deux voisins. Ils doivent donc avoir des couleurs différentes.
- Pour la carte d'Italie, les quatre régions de Toscane, Ombrie, Marches et Latium, sont deux à deux voisines.
- Pour la carte d'Europe, les quatre pays Allemagne, Belgique, France et Luxembourg sont deux à deux voisins.

◁

### Jeu 5.2.2. Colorer des régions déterminées par 6 droites

(1) Prendre une feuille de papier et tracer 6 droites dessus (qui vont d'un bord à un autre bord de la feuille). Ces droites délimitent un ensemble de *régions* du plan. Deux régions sont *voisines* si elles ont une "*frontière*" (i.e. un segment de droite) en commun. Un point ne suffit pas. Par exemple, sur la Figure 5.5, il y a 15 régions ; la région  $R_1$  est voisine de  $R_2$  et  $R_{10}$ , mais pas de  $R_9$ .

(2) Colorer les régions avec deux couleurs *convenablement*, c'est-à-dire de telle sorte que deux régions voisines sont de couleurs différentes.

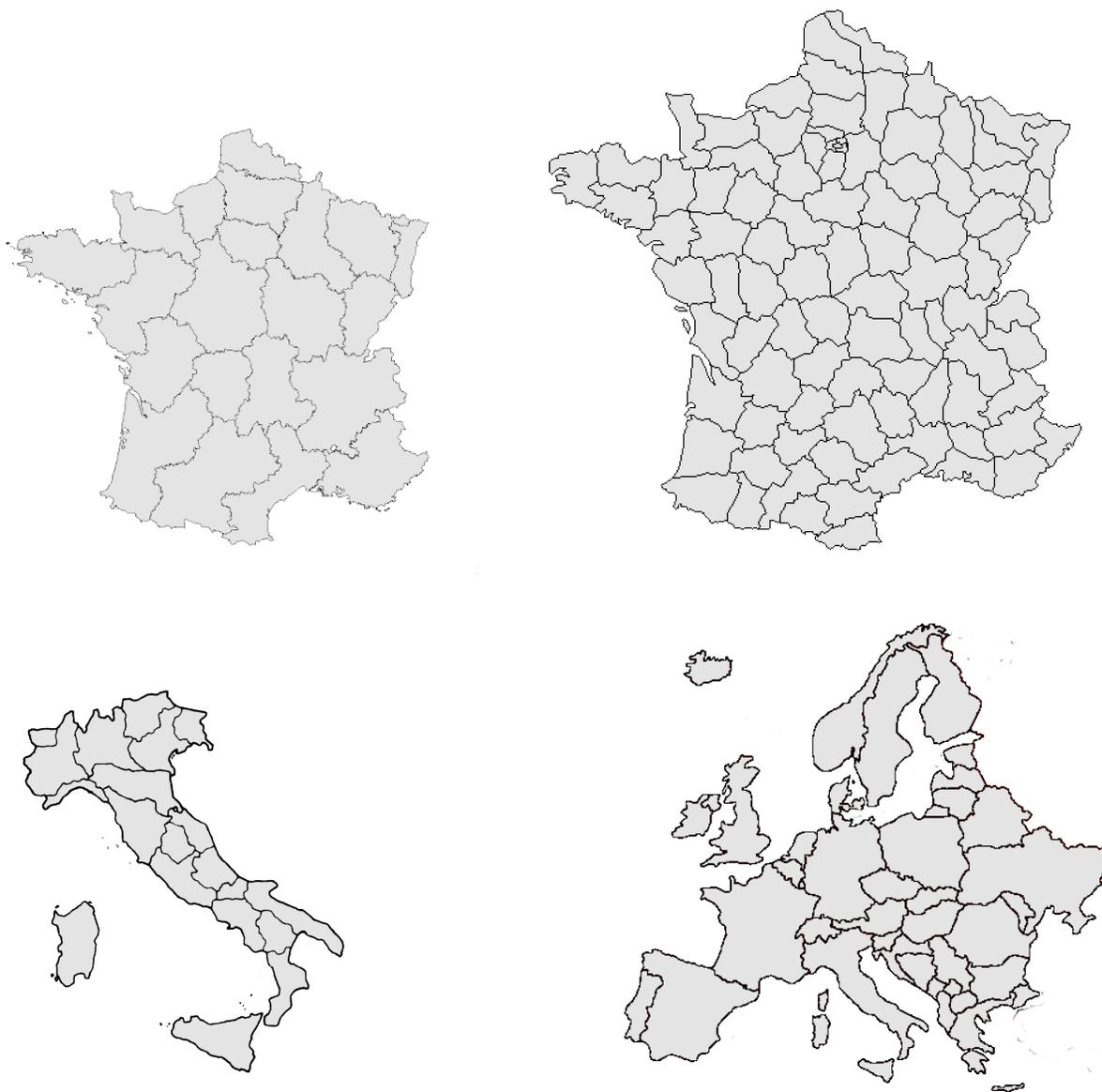


FIGURE 5.3 – Pouvez-vous colorer ces cartes avec 4 couleurs ? 3 couleurs ? 2 couleurs ?

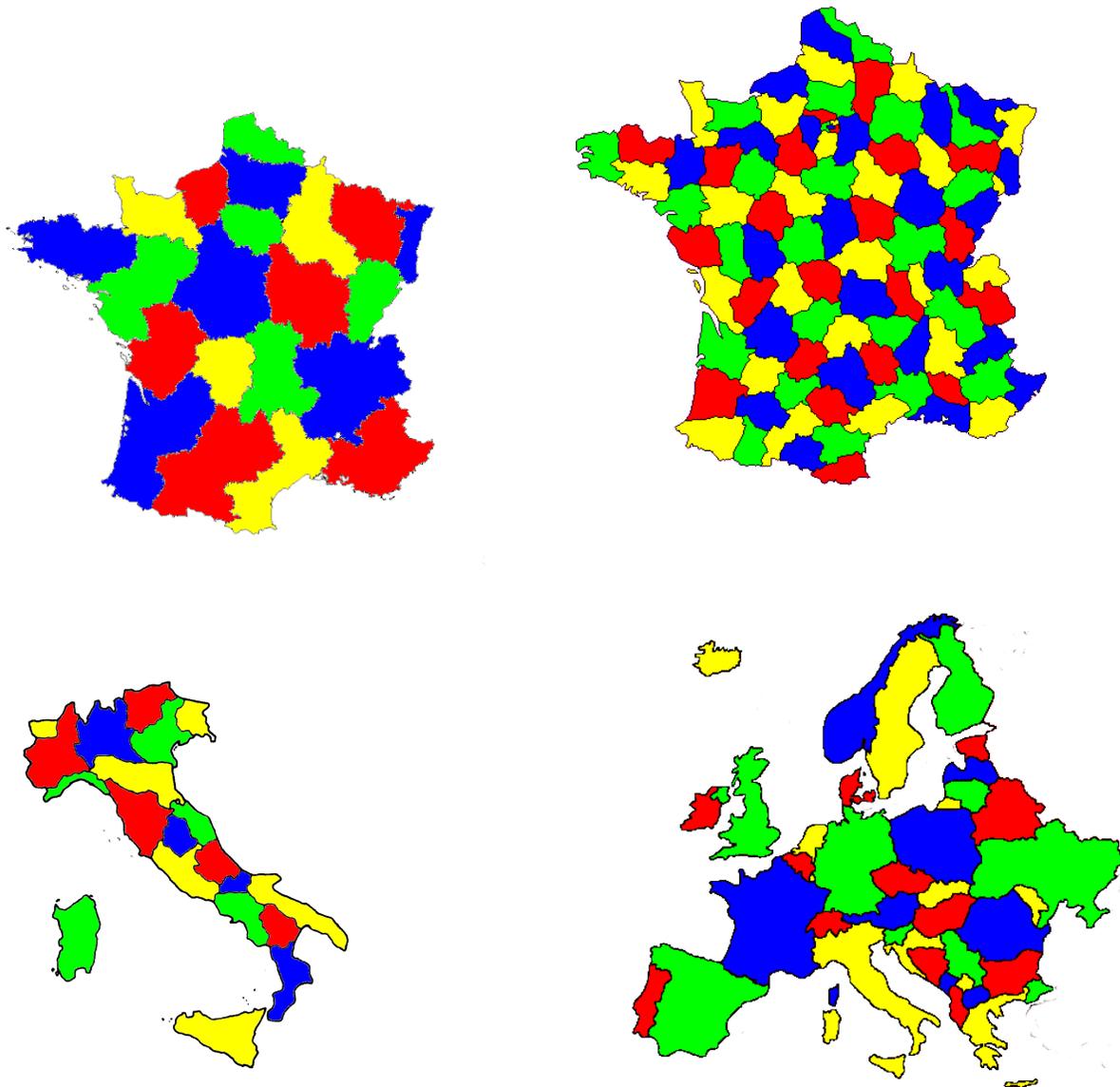


FIGURE 5.4 – Les cartes de la Figure 5.3 coloriées avec 4 couleurs.

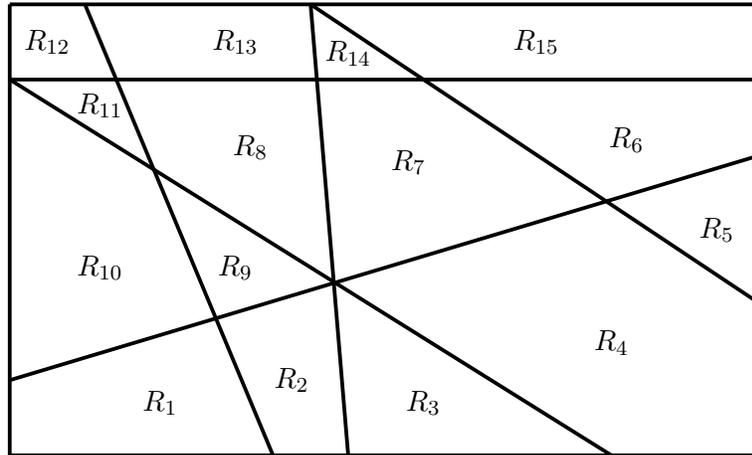


FIGURE 5.5 – Une configuration pour le jeu 5.2.2.

### Jeu 5.2.3. Colorer des régions déterminées par des droites

Mêmes questions que pour le Jeu 5.2.2 avec 9 droites, 12 droites...

Montrer que, quel que soit le nombre de droites et leurs positions, il est toujours possible de convenablement colorer les régions délimitées par les droites avec deux couleurs.

*Solution du Jeu 5.2.2 et 5.2.3.* Trouver des colorations convenables est facile. Il est possible de le faire par tâtonnement, ou bien en utilisant (une variation de) l'Algorithme 4.2.1. En fait, pour appliquer cet algorithme directement, il faut ramener le problème de coloration des régions à un problème de coloration d'un graphe associé. Celui-ci se construit aisément de la manière suivante. On met un sommet dans chaque région et on relie deux sommets si les régions correspondantes sont voisines. Voir Figure 5.6.

Montrer que quel que soit le nombre de droites et leurs positions, on peut toujours convenablement colorer les régions délimitées par les droites avec deux couleurs, est un bon moyen de faire découvrir le **principe de récurrence**.

Le principe de récurrence est le suivant :

- (i) Si une assertion est vraie pour un nombre entier  $n_0$  (le plus souvent  $n_0 = 0$  ou  $n_0 = 1$ ), et
- (ii) si lorsque cette assertion est vraie pour un entier  $n$  alors elle est vraie également pour  $n + 1$ ,

alors l'assertion est vraie pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ .

Pour répondre à la dernière question du Jeu 5.2.3, nous pouvons appliquer ce principe avec  $n$  le nombre de droites dessinées sur la feuille.

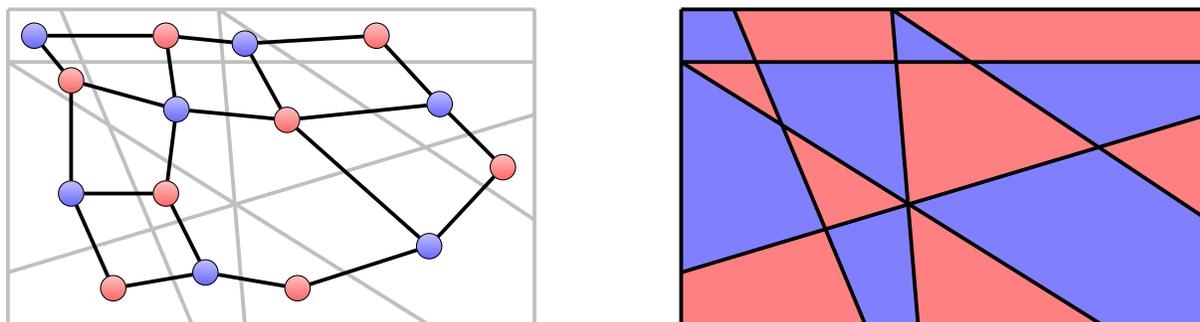


FIGURE 5.6 – Le graphe associé à la configuration de la Figure 5.5, et une coloration en deux couleurs de cette configuration.

- (i) Tout d'abord il est facile de voir que le (i) est vrai. En effet, pour  $n_0 = 0$ , c'est à dire qu'il n'y a pas de droite, alors il y a une seule région à laquelle on peut donner une couleur. De même si  $n_0 = 1$ , il y a une seule droite qui partage la feuille en deux régions ; il suffit alors de colorer les deux régions avec des couleurs différentes.
- (ii) Supposons maintenant que l'on ait tracé  $n$  droites et qu'on ait coloré convenablement les régions ainsi délimitées. On trace maintenant une  $(n + 1)^{\text{e}}$  droite. Celle-ci coupe la feuille en deux parties. En inversant les couleurs sur une seule des deux parties, on obtient une coloration convenable des régions délimitées par les  $n + 1$  droites. Voir Figure 5.7.

◁

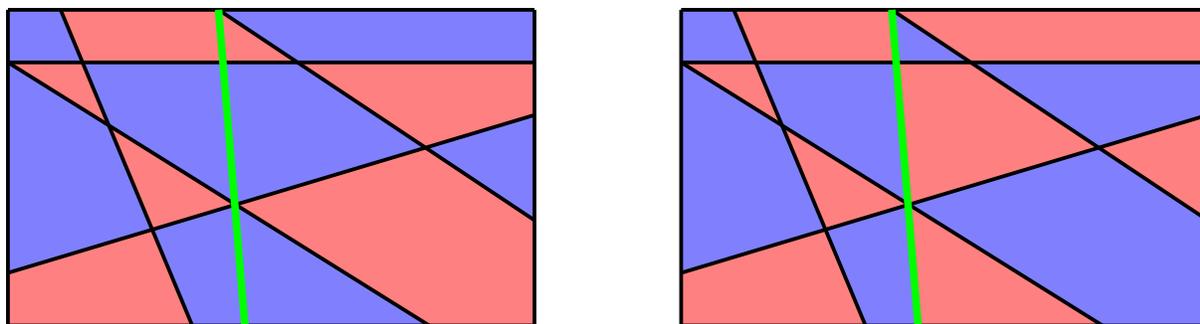


FIGURE 5.7 – A gauche une configuration avec 5 droites (en noir) dont les régions sont convenablement colorées avec 2 couleurs et à laquelle on ajoute une droite (en vert). En inversant les couleurs à droite de la droite verte, on obtient une coloration convenable avec deux couleurs de la configuration avec 6 droites.

Le jeu précédent peut se faire avec des courbes à la place des droites. Pour que la démonstration ci-dessus soit encore valable et que les régions puissent être convenablement coloriées, il faut cependant que les courbes s'intersectent "correctement", c'est-à-dire en des points isolés et ne partagent pas de portion de courbes. Cette propriété est vérifiée par des cercles. On a donc le jeu suivant.

#### Jeu 5.2.4. Colorer des régions déterminées par des cercles

Prendre une feuille de papier et tracer plusieurs cercles dessus. Colorer les régions avec deux couleurs *convenablement*, c'est-à-dire de telle sorte que deux régions voisines sont de couleurs différentes.

#### Jeu 5.2.5. Colorer des ballons

- (1) Prendre un ballon de basket classique (voir Figure 5.8). De combien de couleurs avez-vous besoin pour colorer ses régions convenablement (deux régions qui se touchent ont des couleurs différentes) ?
- (2) Même question avec le ballon de football classique (voir Figure 5.8).

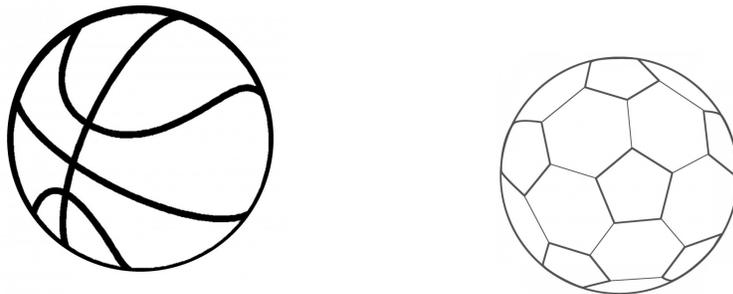


FIGURE 5.8 – Ballon de basket et ballon de football classiques

**Mise en place**

On peut bien évidemment prendre de vrais ballons pour les faire colorier. Pour que les élèves puissent tâtonner et procéder par essai/erreur, on peut simplement leur faire utiliser des gommettes recollables. Pour le ballon de basket, on peut prendre une balle de ping-pong, ou une boule de polystyrène et demander aux élèves de dessiner les traits dessus. On peut même leur faire dessiner n'importe quelles courbes fermées (i.e. trait qui revient à son point de départ) si on veut.

En ce qui concerne le ballon de foot, les élèves peuvent le construire en papier ou carton, soit à l'aide du patron de la Figure 5.9, soit à partir de douze pentagones et de vingt hexagones augmentés représentés Figure 5.10 que l'on assemble à l'aide d'élastiques.

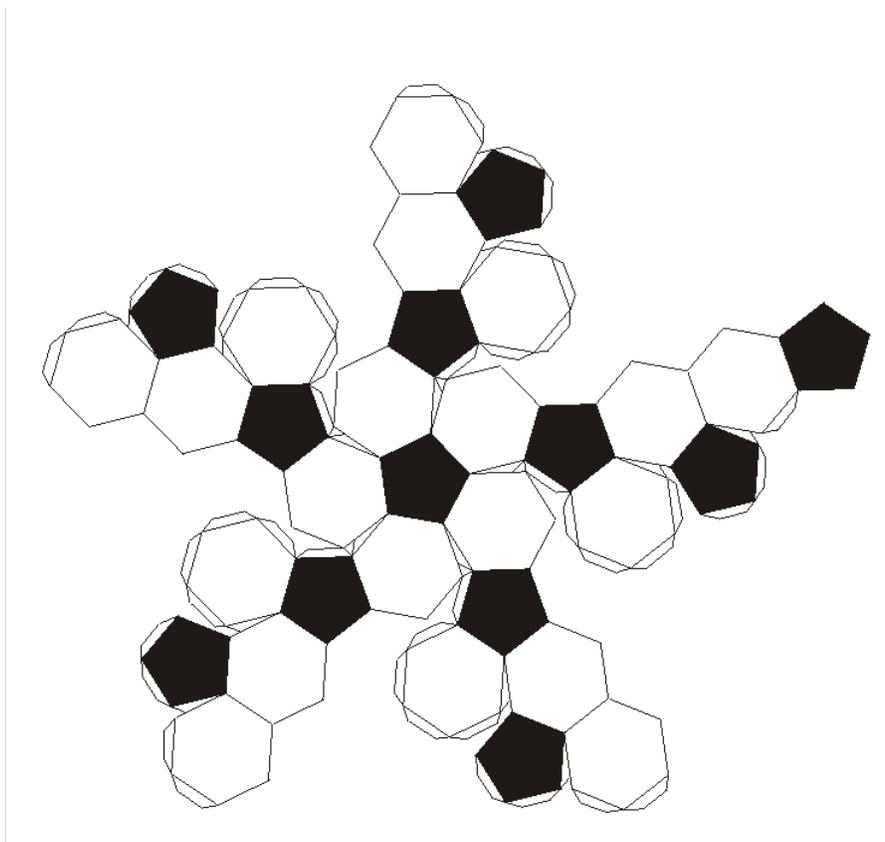


FIGURE 5.9 – Patron d'un ballon de foot.

*Solution du Jeu 5.2.5.* On peut facilement colorer le ballon de basket avec deux couleurs.

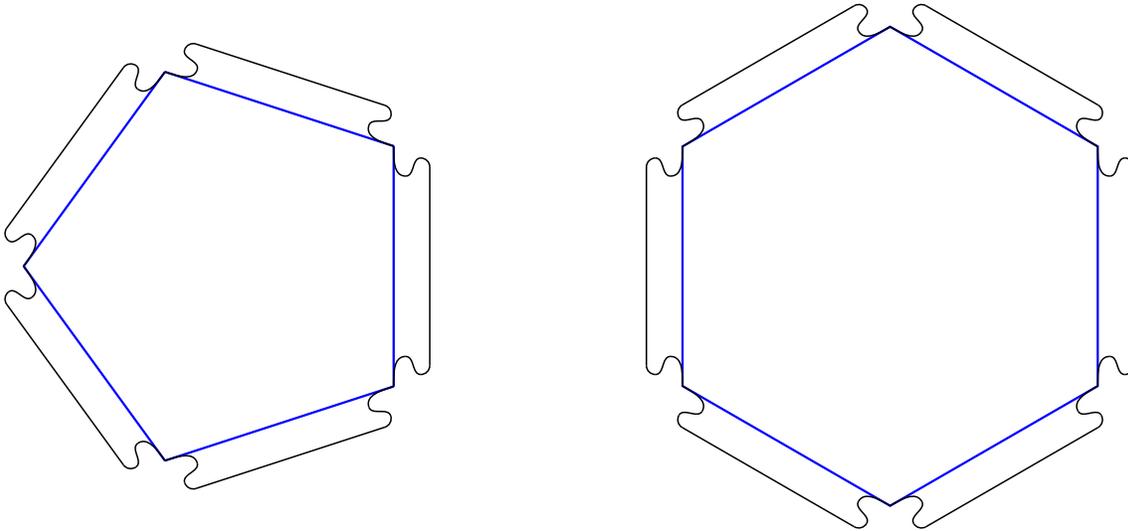
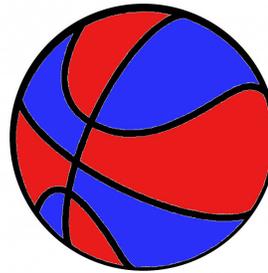


FIGURE 5.10 – Pièces pour fabriquer un ballon de foot. Les excroissances sur chacun des côtés des polygones permettent de les assembler entre eux en mettant deux excroissances l’une contre l’autre et les entourer d’un élastique.

En fait, on peut appliquer (une variation de) l’Algorithme 4.2.1. On obtient ainsi la coloration dessinée à droite.



Pour le ballon de football, c’est plus compliqué. On peut facilement voir qu’on ne peut pas colorer avec deux couleurs. En effet, si on prend trois faces (deux hexagones et un pentagone) qui se touchent en un point, chacune des faces est voisine des deux autres et donc les trois faces doivent avoir des couleurs différentes. Ce n’est pas non plus possible avec trois couleurs. En effet, considérons un pentagone et les 5 hexagones qui lui sont voisins. La couleur utilisée pour le pentagone ne peut être utilisée sur aucun des hexagones. Or ceux-ci forment un cycle de longueur impaire (5 pour être exact), et il faut donc trois couleurs pour les colorer. Avec celle du pentagone cela fait donc quatre. Avec un peu de réflexion, on peut colorer le ballon de football avec 4 couleurs. Une solution est donnée dans la Figure 5.11.

*Trouver une solution n’étant pas très facile, on peut indiquer qu’il existe une solution où les*

*pentagones sont tous de la même couleur.*

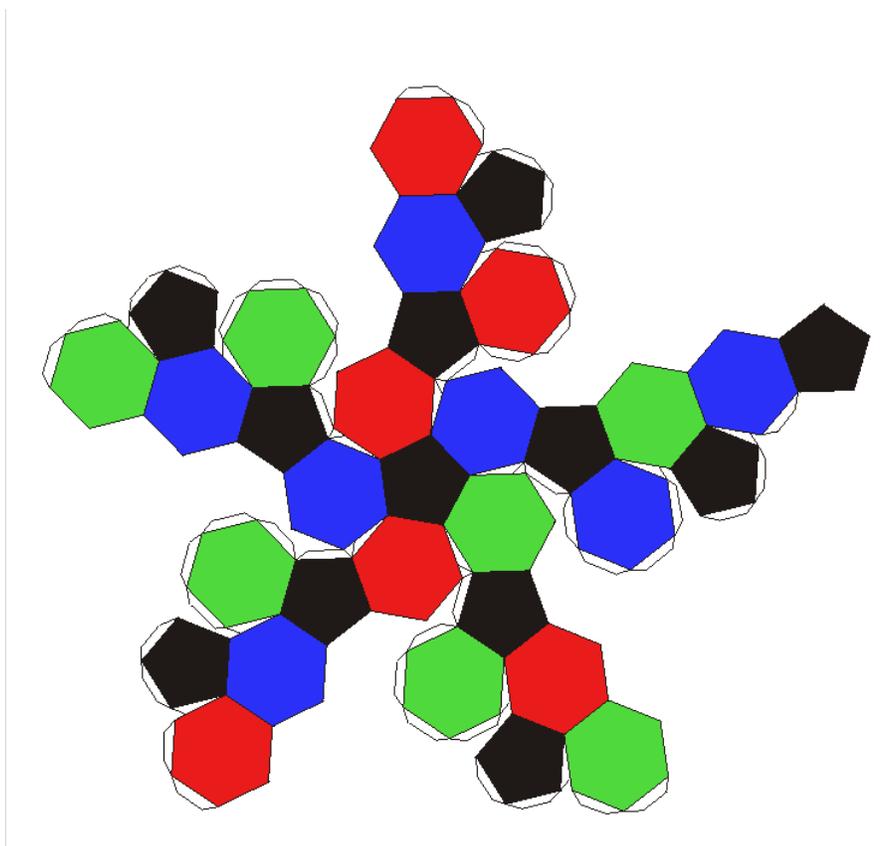


FIGURE 5.11 – Ballon de football coloré avec 4 couleurs.

### Allons plus loin – Théorème des 4 couleurs

En 1852, le mathématicien et botaniste Francis Guthrie se demande combien de couleurs un géographe doit utiliser pour colorer une carte des pays de sorte que deux pays ayant une frontière commune (techniquement, une frontière commune ne peut être réduite à un seul point, et on “oublie” les enclaves) reçoivent des couleurs différentes. Il conjecture que 4 couleurs sont toujours suffisantes. Cette question a seulement été résolue par l’affirmative en 1976 par Appel et Haken et constitue le premier résultat mathématique célèbre à avoir été prouvé à l’aide de la puissance des ordinateurs. Ce résultat a fait polémique et une autre preuve plus “convaincante” (mais toujours utilisant l’informatique) a été proposée en 1997 par Robertson, Sanders, Seymour et Thomas.

**Théorème 5.5.** *Tout graphe planaire peut être coloré avec au plus 4 couleurs.*

Bien que la preuve du théorème précédent soit très compliquée, il est possible de montrer simplement le résultat (plus faible) suivant.

**Théorème 5.6.** *Tout graphe planaire peut être coloré avec au plus 6 couleurs.*

En fait, ce théorème vient du fait que tout graphe planaire a un sommet de degré au plus 5. En supprimant ce sommet de degré 5, on obtient un graphe planaire, qui donc a lui aussi un sommet de degré au plus 5, et ainsi de suite. Ainsi en appliquant l’Algorithme 4.3.2 pour  $k = 5$ , on trouve un ordre de 5-dégénérence pour le graphe, et en appliquant l’Algorithme glouton 4.3.1 suivant l’ordre inverse, on obtient alors une coloration du graphe avec au plus 6 couleurs.

### Jeu 5.2.6. Finir de colorer des cartes

Pouvez-vous finir de colorer les cartes de la Figure 5.12 avec les quatre couleurs (bleu, jaune, rouge, vert) de manière à ce que deux régions voisines soient toujours de couleurs différentes ?

*Solution du Jeu 5.2.6.* Une fois n’est pas coutume, toutes les instances du Jeu 5.2.6 ont une unique solution. Elles sont données dans la Figure 5.13 ◁

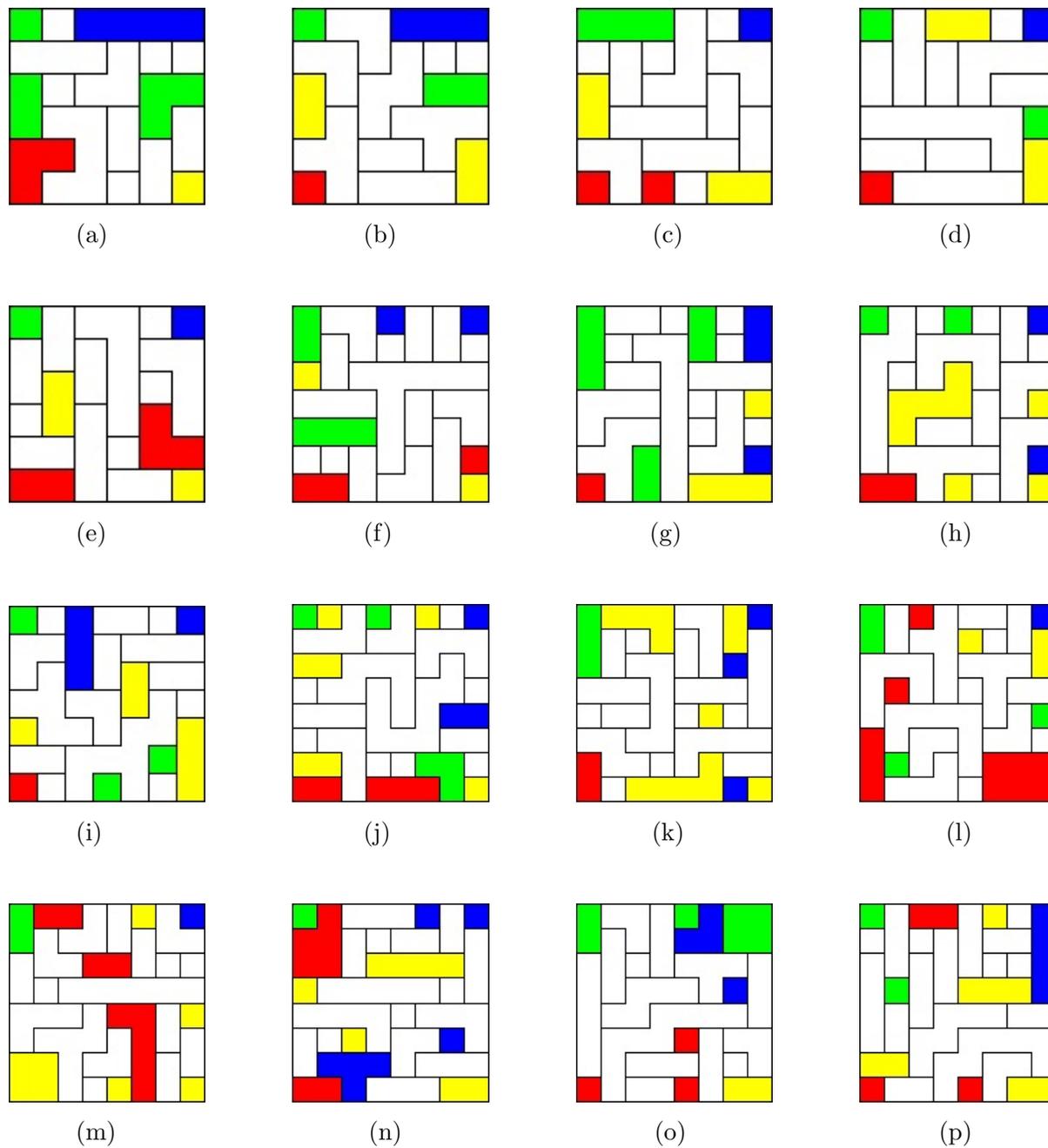
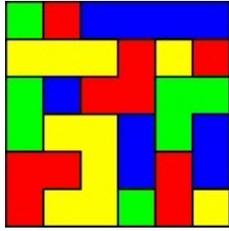
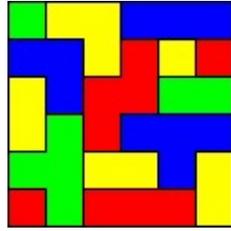


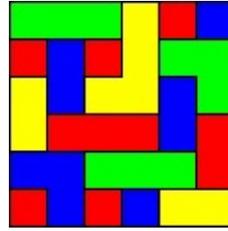
FIGURE 5.12 – Jeu 5.2.6 : Finir de colorer ces cartes avec 4 couleurs.



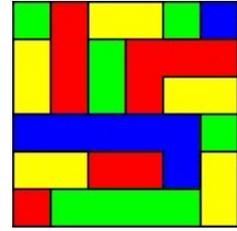
(a)



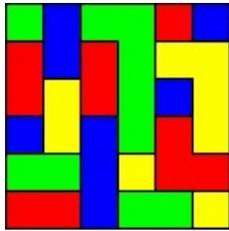
(b)



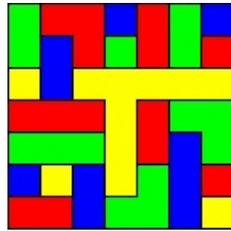
(c)



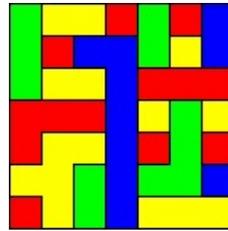
(d)



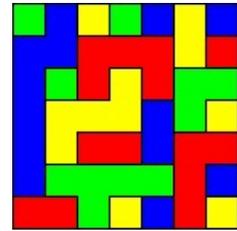
(e)



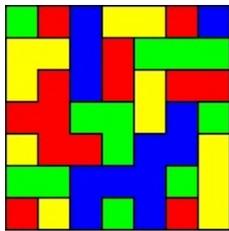
(f)



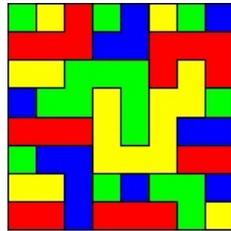
(g)



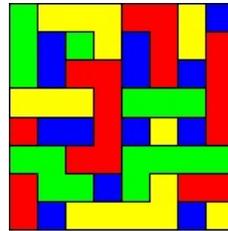
(h)



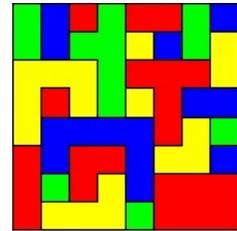
(i)



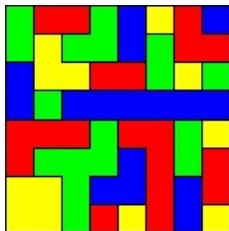
(j)



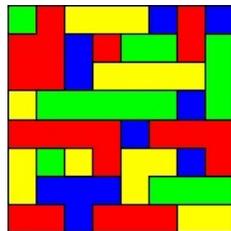
(k)



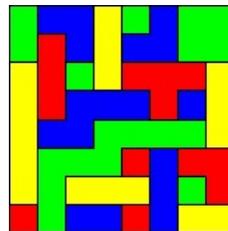
(l)



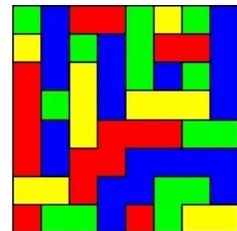
(m)



(n)



(o)



(p)

FIGURE 5.13 – Solutions du Jeu 5.2.6.