



HAL
open science

Usages et apports du cadre de la problématisation à la didactique des mathématiques

Magali Hersant

► **To cite this version:**

Magali Hersant. Usages et apports du cadre de la problématisation à la didactique des mathématiques. Sylvain Doussot; Magali Hersant; Yann Lhoste; Denise Orange Ravachol. Le cadre de l'apprentissage par problématisation. Apports aux recherches en didactiques, Presses Universitaires de Rennes, pp.57-74, 2022, 978-2753586079. hal-03787217

HAL Id: hal-03787217

<https://hal.science/hal-03787217>

Submitted on 20 Jun 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Usages et apports du cadre de la problématisation à la didactique des mathématiques

Magali HERSANT

Introduction

La didactique des mathématiques a su développer depuis plus de 40 ans des cadres théoriques qui ont essaimé dans les autres didactiques (théorie des situations didactiques de Brousseau, théorie anthropologique du didactique de Chevallard en particulier). À l'inverse, peu de travaux de ce champ empruntent à d'autres didactiques. En particulier le cadre de la problématisation y est jusqu'ici encore très peu mobilisé. Il peut y avoir là des raisons épistémologiques ou pratiques : ce cadre développé pour les SVT est-il « compatible » avec les spécificités épistémologiques des mathématiques¹ ? Pourquoi aller chercher « ailleurs » un cadre théorique ? Que peut apporter le recours à un cadre constitué en dehors des problématiques propres à la didactique des mathématiques ? C'est à ces questions que nous chercherons à répondre dans cette contribution, en considérant l'intérêt du cadre de la problématisation, dans les travaux de didactique des mathématiques. Pour cela, nous nous appuyerons sur les travaux actuellement réalisés ; ils concernent l'analyse de l'activité mathématique d'élèves ou d'enseignants en situation de résolution de problèmes (Hersant, 2010b, 2011a, 2015, 2016b ; Hersant et Quiniou, 2017 ; Loisil, 2015 ; Planson, 2016 ; Zébiche, 2017 ; Hersant et Choquet, 2019), la construction de situations (Grau, 2017 ; Hersant, 2010b ; Dessoules, 2017 ; Hersant et Choquet, 2019), l'analyse de pratiques enseignantes (Addam, 2014 ; Hersant, 2010b, 2016b). Après avoir montré la pertinence épistémologique du cadre de la problématisation pour la didactique des mathématiques, nous mobiliserons ce cadre pour analyser, dans un exemple, l'activité mathématique de professeurs des écoles (PE) et, ainsi, illustrer son usage en didactique des mathématiques. Partant de cet exemple et, en nous appuyant plus largement sur les autres travaux réalisés, nous étudierons les apports possibles du cadre de la problématisation à la didactique des mathématiques.

1. Quelle pertinence du cadre de la problématisation pour analyser l'activité mathématique ?

La problématisation est définie comme un processus multidimensionnel impliquant position, construction et résolution de problèmes (Fabre et Orange, 1997) et opérant par une dialectique des faits et des idées (Orange, 2000). Ce processus est considéré comme caractéristique de l'activité scientifique. La possibilité de mobiliser le cadre de la problématisation en didactique des mathématiques renvoie donc à la question suivante : en quoi ce processus multidimensionnel et cette dialectique sont-ils pertinents pour les mathématiques ? Cette question est fondamentalement épistémologique avant d'être didactique. Appuyons-nous sur des écrits de mathématiciens à propos de la recherche mathématique pour l'étudier.

Concernant le processus multidimensionnel de l'activité mathématique, référons-nous à Poincaré (1905/1970) qui, par exemple, écrit (p. 35) :

¹ C'est évidemment, en partie, une fausse question sinon les cadres de la didactique des mathématiques n'auraient pas pu, eux-mêmes, migrer.

« En devenant rigoureuse la Science mathématique prend un caractère artificiel qui frappera tout le monde ; elle oublie ses origines historiques ; on voit comment les questions peuvent se résoudre on ne voit plus comment et pourquoi elles se posent. Cela montre que la logique ne suffit pas, que la Science de la démonstration n'est pas la Science tout entière et que l'intuition doit conserver son rôle comme complément, j'allais dire comme contrepoids ou comme contrepoison de la logique. J'ai déjà eu l'occasion d'insister sur la place que doit garder l'intuition dans l'enseignement des Sciences mathématiques. Sans elle, les jeunes esprits ne sauraient s'initier à l'intelligence des Mathématiques ; ils n'apprendraient pas à les aimer et n'y verraient qu'une vaine logomachie ; sans elle surtout, ils ne deviendraient jamais capables de les appliquer. »

Poincaré fait ainsi apparaître la complémentarité de l'intuition, « instrument de la création » (p. 37), et de la logique, « instrument de la démonstration » (p. 37), dans ce processus multidimensionnel : l'intuition aurait un rôle essentiel dans la position et la construction du problème (comment et pourquoi les questions se posent), tandis que la logique et, en particulier, la déduction, serait plutôt du côté de la solution (comment les questions peuvent se résoudre).

Ce processus multidimensionnel de l'activité mathématique renvoie à l'existence d'une dimension expérimentale en mathématiques (voir Perrin [2007] par exemple pour un texte contemporain), dimension qui, elle-même, sous-tend la dialectique fait – idée comme le développe de façon explicite le mathématicien Pòlya (1965). En effet, pour lui (p. 110-111) l'observation « par hasard » de faits mathématiques suggère des « questions générales » (position du problème), tout comme l'observation de plantes ou de formations géologiques peut conduire le « naturaliste » à se poser des questions qui dépassent cette observation. Alors, de façon similaire dans les deux disciplines pour Pòlya, l'étude de ces questions à partir d'« exemples particuliers » (données, faits) suggère des « significations nouvelles » (idées) qui permettent d'établir une hypothèse (idée) puis une preuve (nécessité) (Pòlya, 1965, p. 111) :

« Dans un cas similaire, le naturaliste n'aurait guère de doute sur l'exactitude de la loi générale que lui ont suggérés les cas particuliers observés par lui ; cette loi générale est presque prouvée par induction. Le mathématicien s'exprime avec plus de réserve bien qu'au fond il pense de même. Il se bornera à dire que l'induction suggère fortement le théorème. »

Il y a cependant des particularités, nous semble-t-il, dans cette dialectique en mathématiques par rapport aux SVT. La première concerne ce qui relève des faits. Relativement à un problème mathématique les faits sont ce qui apparaît comme non-questionné car non problématique (calculs avérées, constructions géométriques, connaissances anciennes, axiomes c'est-à-dire nécessités admises à partir desquelles on a construit un édifice mathématique cohérent, non contradictoire en son sein). Ces faits ont une dimension empirique qui n'est pas tout à fait identique à celle des SVT. En effet, il n'est pas rare qu'en SVT les élèves aient une certaine familiarité avec les faits (depuis tout-petits ils sont confrontés à la transformation des aliments ingérés, au mouvement du coude...). Ainsi la proximité avec des concepts quotidiens est peut-être plus grande qu'en mathématiques, tout au moins pour certains domaines. En ce qui concerne les idées, comme le soulignent Pòlya et Poincaré, pour les mathématiques, il semble nécessaire de distinguer la dialectique faits – idées à l'œuvre dans le processus multidimensionnel de position – construction - résolution du problème et celle à l'œuvre dans la preuve. En effet, la preuve a pour fonction d'établir le caractère vrai d'une proposition mathématique en démontrant son caractère nécessaire. Mais cela peut se faire, parfois, sans mettre en évidence le moteur du phénomène mathématique², c'est-à-dire les raisons profondes pour lesquelles il en est ainsi et pas autrement. Cela tient au

² On résume parfois cette idée dans l'opposition « preuves qui prouvent » vs « preuves qui expliquent ».

fait que la preuve mathématique vise, d'abord, à communiquer sur la validité d'un résultat (pourquoi c'est vrai / faux dans le champ mathématique considéré³), ce qui n'implique pas forcément de communiquer sur les nécessités construites lors de la recherche du problème ou sur pourquoi ça ne peut pas être autrement. Les preuves analytiques (avec le choix d'un repère et une mise en équation) des phénomènes géométriques sont à cet égard caractéristiques : la démarche analytique est calculatoire et masque les phénomènes géométriques à l'œuvre. En contrepartie, cette dimension calculatoire est puissante pour établir la validité de propositions ; elle a largement contribué au développement de la géométrie.

La démonstration de l'existence de seulement cinq polyèdres réguliers qui est au cœur de notre étude est aussi particulièrement intéressante de ce point de vue. Quatre polyèdres réguliers – cube, tétraèdre, octaèdre et icosaèdre – étaient connus très tôt, et associés aux quatre éléments. Mais le dodécaèdre n'a été découvert qu'au IV^e siècle avant J.C., tandis que la première preuve de l'existence de ces cinq seuls polyèdres réguliers est donnée par Euclide (livre XIII) (Dias, 2008, p. 71-74). Cette preuve repose sur deux nécessités fondamentales de la géométrie dans l'espace qui sont les nœuds du problème : de chaque sommet sont issues au moins trois faces ; la somme des angles des faces à un sommet est strictement inférieure à 360°. Beaucoup plus tard, le théorème de Descartes-Euler (XVIII^{ème} siècle), puis la relation d'Euler-Poincaré (fin du XIX^{ème} siècle) en apporteront une preuve combinatoire. Cette dernière inscrit le problème dit « des solides de Platon » dans des problématiques géométriques plus larges (aplatissement des solides sous forme de graphes par exemple⁴) mais elle ne permet pas d'accéder aux nécessités fondamentales de la géométrie dans l'espace.

Ces différences entre mathématiques et SVT dans la dialectique faits – idées et le processus multidimensionnel de la problématisation nous semblent provenir d'abord des différentes lectures possibles d'une situation mathématique. Ce que Douady exprimait avec l'idée de cadre (Douady, 1987) : dès lors qu'un phénomène mathématique peut se « lire » dans différents cadres il est normal qu'il puisse se prouver dans différents cadres et donc que différentes preuves, plus ou moins explicites par rapport aux phénomènes en jeu pour une personne donnée existent. Chacune de ces preuves sera acceptée par la communauté mathématicienne au regard des « normes » du cadre considéré.

Malgré ces différences, le cadre de l'apprentissage par problématisation apparaît pertinent pour l'étude de l'apprentissage des mathématiques à partir de la résolution de problèmes (Hersant, 2010a, 2010b ; Hersant et Orange-Ravachol, 2015). En effet, l'existence d'un processus multidimensionnel et d'une dialectique faits – idées dans l'activité mathématique autorise épistémologiquement la recherche et l'étude de problématizations chez les élèves. En particulier, nous considérons que les élèves problématisent lorsqu'ils construisent les nécessités d'un problème en référence à une exploration empirique, c'est-à-dire lorsqu'ils ont une compréhension du problème qui est de l'ordre du « pourquoi ça ne peut pas être autrement » qui émane d'un travail mobilisant des « faits » et une construction du problème. Cette exploration passe souvent par l'identification, plus ou moins explicite, de sous-problèmes. La modélisation de cette problématisation peut se faire avec un espace de contraintes (Orange, 2000) comprenant : le registre empirique constitué des faits déjà connus et non remis en cause (2 et 2 font 4, par exemple) ou issus d'observations ou d'expériences en lien direct avec le problème cherché ; le registre des nécessités, propositions tenues pour nécessaires et construites pour rendre compte des faits préjugés pertinents pour le problème ; le registre explicatif constitué des présupposés considérés comme allant de soi par les élèves et leur permettant de produire des explications, de s'expliquer les choses, dans le cadre (Douady,

³ par exemple, ce qui est considéré comme vrai en géométrie euclidienne ne l'est pas forcément dans une géométrie non euclidienne.

⁴ voir <http://www.lebesgue.fr/sites/default/files/video/5min-rogue.mp4> [consulté le 27 août 2021].

1987) qu'ils mobilisent. De l'articulation de ces trois registres mobilisés au cours de la recherche du problème émergent les nécessités associées au problème : c'est dans la confrontation de ce registre explicatif et des éléments empiriques que vont pouvoir se construire les explications et nécessités du problème.

2. Du point de vue de la problématisation, que peut-on dire de l'activité mathématique d'élèves en situation de résolution de problème ? Exemple de la situation des solides de Platon

Le problème des solides de Platon est un classique de la géométrie dans l'espace, il consiste à déterminer tous les polyèdres réguliers. Ce problème a fait l'objet de travaux dans le champ de la didactique des mathématiques (Dias, 2008, 2009 ; Dias et Durand-Guerrier, 2005 ; Bronner, 2006). En particulier, il a permis à Dias de mettre en évidence l'intérêt de la dimension expérimentale des mathématiques dans leur enseignement et en formation d'enseignants. Ainsi, d'une certaine façon, ce cas est représentatif des apprentissages mathématiques qui peuvent s'effectuer à partir de la résolution de problèmes.

Avec cet exemple, développé par ailleurs (Hersant, 2016b), nous montrons ici comment le cadre de la problématisation permet une étude fine de l'activité mathématique des PE dépassant la chronologie des solutions apportées au problème ou des obstacles et difficultés rencontrés. Nous reconstruisons la cinématique – c'est-à-dire le cheminement entre les sous-problèmes mathématiques rencontrés par les PE – et la dynamique de problématisation – c'est-à-dire les « forces » à l'origine de la problématisation – à l'œuvre dans l'activité mathématique des PE. Les espaces de contraintes permettent de rendre compte, d'une certaine façon, de cette dynamique mais ils ne mettent pas en évidence l'élément crucial qui la génère (par exemple, une question du formateur, un fait issu de l'expérience, une remise en cause d'une explication) et provoque un changement de regard sur la situation conduisant à une problématisation. Nous utiliserons pour cela la notion d'évènement de problématisation (Doussot, Hersant et Orange-Ravachol, 2013) qui se réfère au sens de l'évènement en sciences historiques et sociales (Bensa et Fassin, 2002 ; Orange-Ravachol et Orange, 2012 ; Orange-Ravachol, 2012). Ainsi un évènement de problématisation est d'abord un évènement qui « manifeste à lui seul une rupture d'intelligibilité » suspend « l'évidence habituelle de la compréhension » et nous plonge dans « un régime extraordinaire » où « nous ne sommes plus assurés de nos grilles de lecture » (Bensa et Fassin, 2002, p. 4). Nous qualifions cet évènement *de problématisation* parce qu'il est à l'origine de la construction des nécessités associées à un problème et qu'il contribue à la problématogenèse dans la mesure où cette rupture d'intelligibilité pose problème et amène à construire le problème fondamental de la situation, distinct du problème formulé par l'enseignant ou le formateur.

Le problème est formulé de la façon suivante à des professeurs des écoles en formation continue lors d'un stage sur la démarche d'investigation en sciences (physique, SVT, mathématiques).

Un polyèdre est un solide délimité par des faces planes. Un polyèdre régulier est un polyèdre convexe dont les faces sont des polygones réguliers (tous les côtés sont de même longueur et tous les angles ont la même mesure) deux à deux superposables tels que à tous les sommets corresponde un même nombre de faces. **Déterminer tous les polyèdres réguliers (documents non autorisés).**

La situation a pour objectif de provoquer chez les PE un changement de regard sur la géométrie qui est trop souvent pensée, donc enseignée, comme une suite d'éléments assertoriques. La situation vise à mettre en évidence que les constructions géométriques répondent à des nécessités et qu'à ce titre la géométrie doit être enseignée par des problèmes.

Les PE disposaient de matériel (papier, scotch, polydrons...) et travaillaient dans un premier temps en groupe. Il leur était demandé de produire à l'issue du travail de groupe deux affiches : l'une sur les résultats de leur recherche, l'autre sur la chronique de leur recherche. Ces affiches avaient vocation à nourrir un débat sur le problème et sur la démarche d'investigation en mathématique. Nous effectuons l'analyse à partir de la vidéo du travail d'un groupe composé de 4 PE et de la transcription associée.

2.1. Rapide analyse a priori du problème

Pour montrer comment peuvent s'articuler le cadre de la théorie des situations didactiques (TSD) et celui de l'apprentissage par problématisation nous proposons ici une brève analyse a priori du problème qui mêle, d'une part, des préoccupations liées au potentiel adidactique de la situation (les PE disposent-ils des connaissances pour entrer dans le problème ? quelles sont les rétroactions possibles du milieu et les PE ont-ils les connaissances qui leur permettent d'interpréter ces rétroactions et donc de progresser dans l'exploration du problème ?) et, d'autre part, des préoccupations liées à la possibilité de poser et construire le problème et les nécessités associées.

Le matériel proposé aux PE suggère, par un effet de contrat, une exploration empirique des possibles à partir de la construction de solides en polydrons ou en papier. L'existence de certains solides bien connus ne sera pas problématique (cube, tétraèdre). On peut penser que le cas des solides à faces pentagonales ne sera pas envisagé dès le début car le matériel ne propose pas de pentagones (il faut construire les faces en papier, les connaissances pour cela ne sont probablement pas très disponibles chez les PE). En revanche, le cas du solide à faces hexagonales sera traité plus tôt car les PE disposent de polydrons hexagonaux. Ce cas posera problème. En effet, ces hexagones assemblés pavent le plan mais le milieu n'est pas assez contraignant (Hersant, 2010a) de ce point de vue : si on a l'intention de former un solide, on peut assembler les pièces en faisant un angle très ouvert mais non plat et on ne « voit » pas le problème. En revanche, rapidement se pose la question du nombre de faces (on a l'impression qu'il en a énormément). Du point de vue du milieu, le peu de polydrons disponibles oblige à utiliser le papier, et donc à construire des hexagones. Cette tâche amène forcément à se questionner sur la valeur des angles au sommet de ce polygone (60°) et à l'introduire dans le milieu. Ce faisant cela permet d'introduire dans le milieu la notion d'angle qui est un levier de la situation. Par ailleurs, le coût de la construction de nombreux hexagones en papier constitue une rétroaction importante du milieu qui incite à poser et construire le problème : est-ce bien nécessaire de faire tous ces découpages ? Est-il vraiment possible de construire ce polyèdre ? Ces questions, associées aux éléments empiriques établis, devraient amener à la construction des nécessités du problème.

2.2. Identification d'un évènement de problématisation

L'affiche « résultats » du groupe présente deux « séries » à propos des mêmes objets et témoigne ainsi d'un changement de grille de lecture de la situation au cours de la résolution.

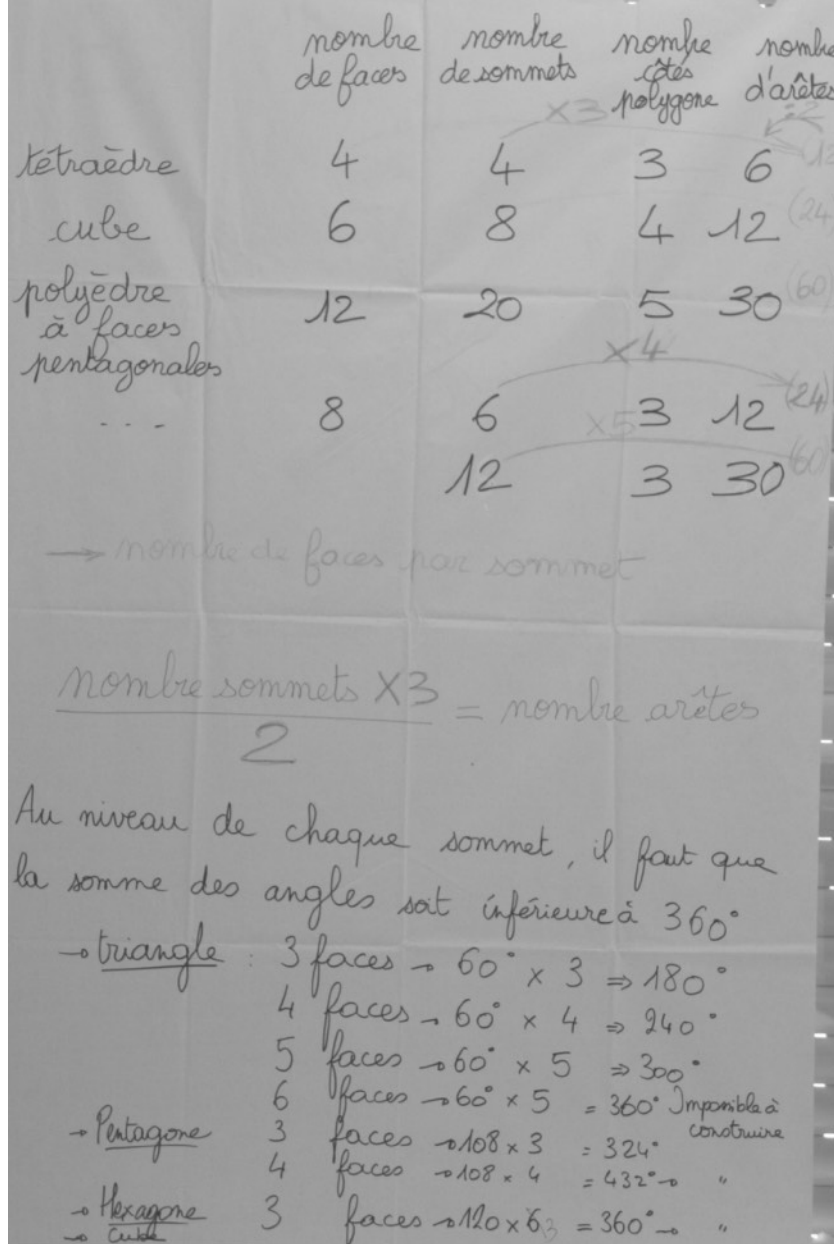


Figure 1 : l'affiche « résultats » du groupe

Dans la partie supérieure de l'affiche, un tableau décrit des caractères des polyèdres identifiés (forme des faces, nombre de faces, arêtes et sommets) ; des flèches et une formule indiquent la recherche de relations numériques (de proportionnalité) entre ces caractères. Cette trace de l'activité des PE rend compte d'un travail dans le cadre (Douady, 1987) de la géométrie affine, en appui sur l'observation de solides construits, avec le point de vue (Rogalski, 2001) de la recherche d'une définition en compréhension des solutions à partir d'une formule à définir. Dans la partie inférieure de l'affiche, figurent le texte d'une nécessité sur la somme des angles au sommet et une série (forme des faces, nombre de faces, somme des angles au sommet). Ces éléments témoignent d'un travail dans le cadre de la géométrie métrique et euclidienne, en appui sur l'observation du passage du solide au patron, avec le point de vue de la recherche d'une définition en extension de l'ensemble des solutions. Les changements de cadres et de points de vue entre les deux parties de l'affiche rendent compte d'une rupture d'intelligibilité, d'un changement de grille de lecture de la situation au cours de l'activité. Par ailleurs, il y a problématisation dans la mesure où les nécessités de la situation ont été construites à partir d'une exploration empirique des possibles. On peut donc parler d'un événement de problématisation au sens défini précédemment. Qu'est-ce qui génère cette rupture d'intelligibilité de la situation ? De quelle évolution des connaissances géométriques des PE cet événement de problématisation témoigne-t-il ?

2.3. Comment les professeures des écoles cheminent-elles dans le problème ? Cinématique de problématisation

Les éléments saillants de l'activité des PE peuvent se résumer ainsi. Deux principes, faux, plus ou moins implicites, mais tenus pour vrais pendant un certain temps et petit à petit mis en questionnement organisent leur activité dès le début : un *principe de bijectivité* (à chaque polygone régulier est associé un et un seul polyèdre régulier) et un *principe de régularité* (il y a exactement trois faces à chaque sommet). L'activité est aussi portée par une hypothèse sur la démarche à suivre pour obtenir l'ensemble des solutions : « il faut trouver une formule ». Cette volonté de trouver une formule s'érige pour le PE en un véritable problème, c'est pourquoi parlerons du *problème de la formule* ; elle peut être mise en relation avec la facette épistémologique du contrat didactique (Hersant, 2010a, 2014). Par ailleurs, l'activité est contrainte par la « difficulté » matérielle de construire un polyèdre régulier à faces hexagonales, ce qui génère de nombreux échanges et doutes et constitue ce que nous nommerons *le problème de l'hexagone*.

Le découpage en phases et épisodes du corpus⁵ et la représentation sous forme d'un graphe du cheminement, épisode (sous-problème) par épisode, entre les quatre aspects du problème permettent de rendre compte de la cinématique de la problématisation à l'œuvre dans le groupe (figure 2). Dans cette représentation, les épisodes entourés correspondent à un travail explicite sur la délimitation des possibles et la construction des nécessités (est-il nécessaire de construire le polyèdre à faces hexagonales ? pourquoi ça ne marche pas ? ; est-ce qu'on est sûrs de nos dénombrements ? pourquoi ne peut-on pas avoir plus de faces à un sommet ?). Les autres correspondent à une exploration des possibles (peut-on avoir un polyèdre avec les hexagones ? qu'est-ce qu'un ballon de foot ? peut-on avoir un autre polyèdre avec des triangles ? ...).

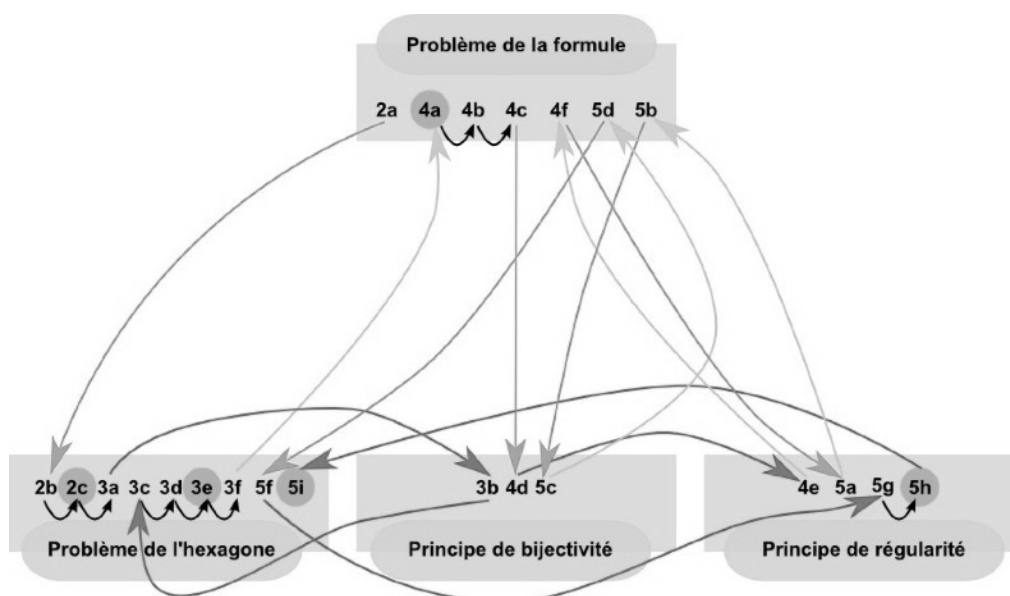


Figure 2 : cinématique des problèmes

La schématisation met bien en évidence que le problème de la formule est récurrent : les professeures des écoles y reviennent presque de façon obsessionnelle. Il est relié de façon chronologiquement dense aux trois autres pôles du problème puisqu'il est le point de départ et

⁵ Une phase correspond au travail d'un problème, éventuellement interrompu puis repris dans une phase ultérieure. Un épisode correspond à un sous-problème associé à un problème.

d'arrivée de nombreuses flèches qui relient des épisodes d'exploration des possibles. Ce problème semble donc jouer un rôle majeur dans l'exploration des possibles ; la première partie de l'affiche témoigne de l'activité associée.

Le problème de l'hexagone apparaît comme intrinsèquement dense et nodal. En effet, ce problème comprend le plus grand nombre de sous-problèmes distincts et de passages d'un sous-problème à un autre en son sein. Par ailleurs, il est le cœur des problèmes associés à une délimitation explicite des possibles et est aussi étroitement relié chronologiquement (allers-retours rapides) aux principes de bijectivité et de régularité. Il semble ainsi jouer un rôle majeur dans la remise en cause de ces principes et contribuer de façon privilégiée à la délimitation des possibles (trois épisodes entourés sur cinq au total). C'est une source importante de problématisation dans ce groupe.

2.4. Qu'est-ce qui génère la rupture d'intelligibilité de la situation ? Dynamique de la problématisation

L'espace de contraintes associé à l'activité des PE est représenté par la figure 3. Les couleurs des cases y codent le registre explicatif qu'ils mobilisent implicitement pour « observer » la réalité ou construire des nécessités.

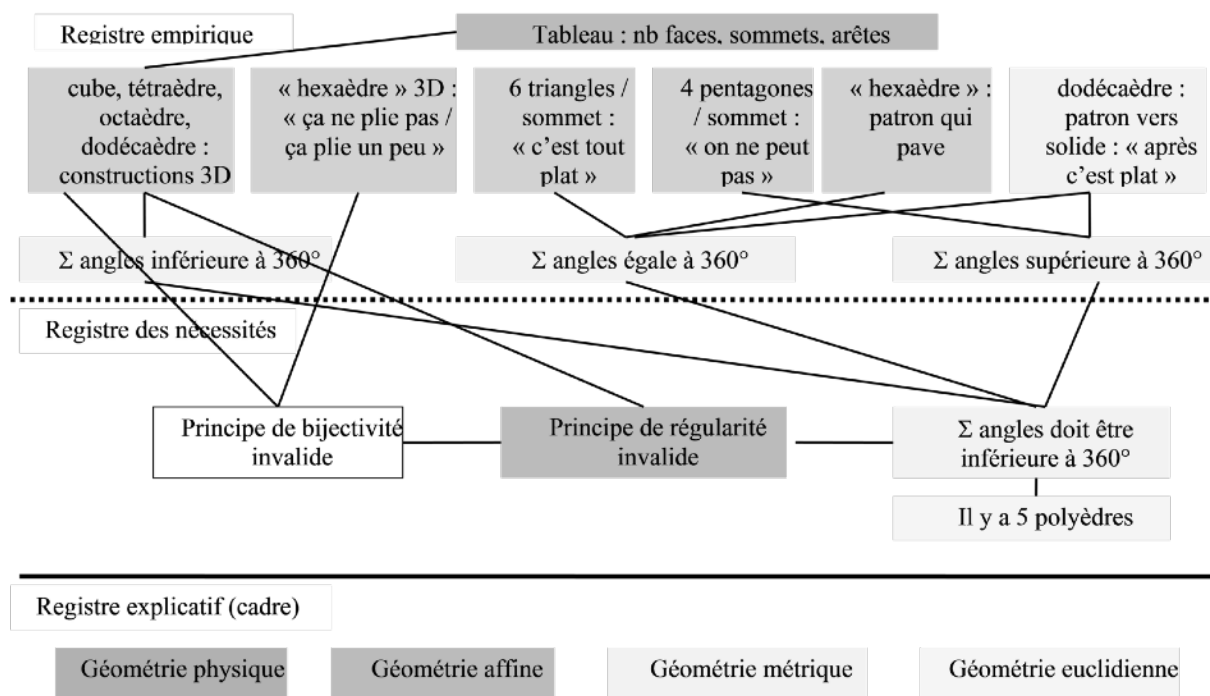


Figure 3 : espace de contraintes

Dans ce problème, les registres explicatifs (REX) renvoient à différents cadres (Douady, 1987). Ainsi, par exemple, « l'observation » des constructions avec le registre de la géométrie physique conduit une PE à dire que si on assemble des hexagones en papier « ça plie un peu » ou « ça pave », tandis que « l'observation » des mêmes constructions avec le registre de la géométrie métrique conduit une autre à « voir » dans le pavage des angles dont la somme vaut 360° . De la même façon, c'est bien la référence au cadre de la géométrie métrique qui permet de construire, en tension avec le registre empirique, la nécessité « il faut que la somme des angles soit inférieure à 360° » et par là, d'invalider le principe de régularité.

Au départ, les possibles sont nombreux pour les PE : autant de possibles que de polyèdres réguliers mais cela reste implicite et concevable (la limite est liée au nombre de polygones réguliers connus des PE) ; les PE utilisent implicitement le principe de bijectivité. La difficulté matérielle à construire « l'hexaèdre » (« ça plie un peu », « ça ne plie pas ») leur permet de mettre en doute ce principe, d'envisager d'autres possibles (plusieurs polyèdres réguliers pour un polygone régulier donné, pas de polyèdre régulier pour un polygone régulier donné) et les amène à invalider le principe de régularité. Dans le registre empirique, et en relation avec le REX de la géométrie physique, cela conduit à la construction matérielle de l'octaèdre, polyèdre régulier dont les faces sont des triangles équilatéraux, comme le tétraèdre, et qui comporte quatre faces à chaque sommet. Mais l'abandon du principe de régularité ouvre aussi d'autres possibles et amène les PE à construire de nouvelles nécessités. En effet, dès qu'elles imaginent qu'on peut placer plus de trois faces par sommet, elles perçoivent qu'il y doit bien y avoir une limite (au moins d'ordre physique). Elles réalisent aussi que la recherche d'une formule liant le nombre de faces, de sommets et d'arêtes dans le REX de la géométrie affine ne permettra ni de réduire les possibles⁶, ni d'identifier les nécessités de cette réduction. Finalement, c'est l'impossibilité empirique de construire un polyèdre avec quatre pentagones par sommet, alors qu'on peut en construire un avec quatre triangles par sommet, qui les conduit à la recherche de raisons et à des changements de registre, au sens de Duval (1995) (patron vers 3D et inversement) et de cadre, de l'afine vers le métrique. Le REX « géométrie métrique » constitue alors leur nouvelle grille de lecture de la réalité. Le mot « angle » apparaît dans les échanges, d'abord comme angle dans l'espace puis angle dans le plan. La nécessité d'avoir une somme des angles au sommet inférieure à 360° est établie et la liste des polyèdres en découle.

Ainsi, l'abandon du principe de régularité, lié en amont à l'abandon du principe de bijectivité, enclenche la nouvelle intelligibilité de la situation : les PE travaillent sur la même réalité (les mêmes objets) mais n'en n'ont pas la même lecture. Cela est bien mis en évidence par l'espace de contraintes où, dans le registre empirique, les mêmes objets (constructions 3D avec des polydrons ou du papier et « patrons » des figures) sont interprétés de façons différentes selon que le REX utilisé pour « voir » la réalité relève de la géométrie physique ou de la géométrie métrique.

4. Que peut apporter le cadre de la problématisation à la didactique des mathématiques ?

Cet exemple témoigne de la possibilité d'utiliser le cadre de la problématisation pour l'analyse de l'activité mathématique d'apprenants en situation de recherche – résolution de problème. D'autres analyses, dans d'autres domaines des mathématiques, effectuées avec des outils semblables (analyse a priori, puis analyse *a posteriori* avec un espace de contraintes) (Hersant, 2010b ; Hersant et Quiniou, 2017 ; Loasil, 2015 ; Planson, 2016 ; Dessoulles, 2017 ; Zébiche, 2017 ; Hersant et Choquet, 2019) permettent de conférer un caractère représentatif à cette étude. Tentons maintenant, à partir de cet exemple, d'explicitier ce que peut apporter l'usage du cadre de la problématisation à la didactique des mathématiques.

⁶ Une preuve avec la relation d'Euler-Poincaré existe mais cette formule n'est probablement pas connue des PE.

4.1. Une entrée par la construction des problèmes qui permet de préciser l'activité mathématique des apprenants et la nature des apprentissages

L'usage du cadre de la problématisation organise l'étude autour de l'identification des problèmes posés et construits par les apprenants et conduit, d'une part, à l'étude du cheminement entre les problèmes ainsi perçus, posés et construits et, d'autre part, à l'étude de la dynamique entre ces problèmes.

L'étude cinématique, en se centrant sur les relations entre les problèmes, permet de donner une épaisseur au rôle du problème de l'hexagone : ce n'est pas uniquement parce que les PE achoppent sur la construction physique d'un polyèdre avec des hexagones ou parce qu'il existe des avis différents dans le groupe quant à la possibilité de construire un tel polyèdre que ce problème est « nodal », mais, comme le montre la figure 2, parce ce problème permet de poser et de construire le problème en remettant en cause les principes de bijectivité et de la régularité tenus pour vrais au départ. D'une certaine façon, l'étude cinématique à partir de l'identification de l'existence d'un événement de problématisation, permet de déplacer le nœud du problème : le problème de l'hexagone apparaît crucial lorsque l'on observe l'activité des PE, mais il n'est que le reflet de deux autres nœuds problématiques, moins visibles mais tout autant cruciaux : la question de la bijectivité de la relation polygone – polyèdre et celle de la régularité du nombre de faces à chaque sommet.

L'étude dynamique montre comment ce problème de l'hexagone permet la déstabilisation puis l'invalidation des principes de bijectivité et de régularité tenus pour vrais au départ par les PE. En effet, l'espace de contraintes met en évidence comment des éléments empiriques entrent en tension avec des « modes de pensées » (registre explicatif) des PE et font évoluer, de façon dialectique, leurs registres explicatifs et leur compréhension du problème. Ainsi, l'étude dynamique permet de montrer que la résolution du problème de l'hexagone ne relève pas seulement de « l'articulation fait d'expérience / résultat mathématique » comme le proposent Dias et Durand Guerrier (2005, p. 75) mais aussi d'un changement de registre explicatif. Et, si nous avons pu le montrer, c'est bien parce que, dès le départ, nous considérons trois registres et pas seulement deux. La distinction entre registre des nécessités à l'intérieur d'un modèle et registre explicatif est de ce point de vue très féconde. Ainsi, cette étude, organisée comme la reconstruction d'un événement de problématisation, nous renseigne sur les relations entre les problèmes et, finalement, l'obstacle, dans la résolution du problème de solides de Platon. Cet obstacle ne réside pas dans l'impossibilité de construire un polyèdre avec des hexagones, il est de nature épistémologique et didactique. En effet, d'une part, il faut penser en termes de géométrie euclidienne (mesure des angles, nombre de faces par sommet) et non seulement en termes de géométrie affine (nombre de faces, nombre de sommet) et, d'autre part, il faut aborder ce problème de recherche de toutes les solutions non comme un problème combinatoire (recherche une formule), comme les PE ont l'habitude de le faire par contrat, mais comme un problème de recherche d'une condition de possibilité d'existence des polyèdres.

De façon duale, le fait de distinguer le registre explicatif permet de formuler les apprentissages géométriques initiés avec cette situation sans les restreindre à la solution du problème. En effet, comme le met en évidence l'espace de contraintes (figure 3) la construction des nécessités du problème est étroitement associée à un changement de registre explicatif, et donc à un événement de problématisation. C'est ainsi que nous pensons que cette situation a permis d'initier chez les PE un autre rapport à la géométrie dans l'espace, pas seulement dans la dimension expérimentale qu'elle peut prendre, mais dans le dépassement d'une pensée affine et descriptive de la géométrie vers une pensée euclidienne de la géométrie qui articule nécessairement ses objets premiers (arêtes, faces, sommets) avec des relations métriques. Par

ailleurs, l'usage du cadre de la problématisation permet de mettre en évidence que le savoir nouveau construit au sujet du problème des solides de Platon est un savoir apodictique, il nous renseigne sur la nature du savoir construit. Ce point de vue est assez différent de celui de Dias. Il considère en effet la propriété « la somme des angles au sommet est de 360° » comme un axiome (Dias, 2008, p. 93) qui permet d'obtenir la solution du problème alors que nous la considérons comme une nécessité construite et à construire pour accéder à un savoir problématisé sur le problème.

4.2. Relation avec les notions de contrat didactique et de milieu dans l'analyse de l'activité des élèves

Les notions de contrat didactique et de milieu sont deux concepts majeurs de la didactique des mathématiques pour l'analyse de l'activité des élèves⁷ en classe. L'analyse de l'activité de l'élève en terme de structuration du milieu (Margolinas, 1995) se distingue d'une analyse en termes de problématisation avec les notions d'espace de contraintes et d'évènement de problématisation au moins sur trois points.

La première différence concerne la place attribuée aux problèmes et sous-problèmes dans l'analyse et donc l'interprétation de l'activité des apprenants. Dans l'analyse avec le cadre de la problématisation la construction de problèmes constitue une partie de l'apprentissage et l'analyse en garde donc la trace à travers la dynamique et la cinématique des problèmes. En revanche, l'analyse en termes de milieu est organisée en référence à l'apprentissage d'un savoir décontextualisé qui, comme l'indique Perrin-Glorian (1999, p. 297) ne peut correspondre à la formulation d'un problème. Même si certaines analyses de problèmes complexes mettent en avant les différents problèmes que peuvent construire les élèves (voir par exemple l'analyse proposée par Perrin-Glorian du problème de l'abreuvoir dans Perrin-Glorian et Hersant, 2003) cette question n'est pas centrale et l'analyse en termes de milieu met donc plutôt en avant l'enchaînement des solutions et les connaissances mathématiques qu'elles impliquent que l'enchaînement des problèmes. De ce fait, l'analyse en termes de problématisation considère, tout au long de l'analyse, l'élève constructeur de problème, sans distinguer l'élève en situation d'action, de formulation ou de validation et s'intéresse finalement peu aux actions de l'élève et à leur nature pour se centrer sur ce que produisent ces actions (éléments des registres empirique, des nécessités ou explicatif) et leur contribution à la construction du problème.

Ensuite, l'analyse en termes de problématisation vise à mettre en évidence les tensions entre les différents types de connaissances des élèves (empiriques, apodictiques, de l'ordre explicatif) tandis l'analyse en termes de milieu nous semble plus organisée par la tension ancien / nouveau, même si on peut dire que, pour interpréter les rétroactions du milieu, l'élève met en relation les éléments du registre empirique / données et ceux du registre des nécessités / conditions. Par exemple, pour la situation du puzzle, l'élève interprète le chevauchement des pièces (registre empirique, connaissance nouvelle) comme une erreur car il sait (registre des nécessités, connaissance ancienne) que l'agrandissement est un puzzle de « même forme ». Ainsi, il pourrait figurer dans le registre empirique des éléments de l'ordre du milieu -2 (le puzzle initial, les pièces du puzzle initial), du milieu -1 (des pièces « agrandies », le puzzle « agrandi »), du milieu 0 (les pièces agrandies ne conviennent pas, la procédure est erronée).

Enfin, de façon essentielle, l'analyse en termes de milieu repose sur la distinction entre situation adidactique (niveaux M-3 à M-1 de la structuration du milieu) et situation didactique

⁷ Ce ne sont pas les seuls, on peut aussi citer les notions de théorèmes-en-actes et de schèmes développés par Vergnaud, celles de niveaux de mise en fonctionnement des connaissances de Robert et celles associées à la théorie anthropologique du didactique de Chevallard.

qui, elle-même, provient de la distinction essentielle entre connaissance et savoir en mathématiques dans la théorie des situations didactiques (Salin, 2002, p. 114) :

« L'apprentissage doit conduire à la maîtrise de savoirs mathématiques identifiés comme tels, et pas seulement de connaissances.

Les interactions sujet-milieu décrites ci-dessous [le milieu doit être facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres donc d'adaptation de l'élève ; le milieu doit permettre le fonctionnement "autonome" de l'élève] sont productrices de connaissances alors qu'une institution enseignante désigne des savoirs à enseigner. »

L'analyse de l'activité de l'élève avec la notion de milieu s'attache particulièrement à la propriété rétroactive du milieu (voir la thèse de Dias pour ce qui concerne la situation des polyèdres de Platon) qui enclenche cette production de connaissances. Dans les travaux, une importance moindre est attribuée aux possibilités qu'offre le milieu pour la construction des connaissances valides. Dans la construction du cadre de la problématisation, cette distinction connaissance / savoir n'a pas été un enjeu ; l'enjeu est de montrer quels problèmes et quelles nécessités construisent les élèves. En mathématiques, de ce fait, tout comme on le fait lorsqu'on analyse les situations ordinaires avec les outils contrat didactique et milieu (Hersant, 2001 ; Perrin-Glorian et Hersant, 2003 ; Hersant, 2014) on introduit dans l'espace de contraintes, le cas échéant, les éléments injectés par l'enseignant dans le milieu de l'élève dès lors qu'ils sont mobilisés par l'élève comme des nécessités apodictiques. En revanche, des nécessités admises, par exemple en lien avec un phénomène de contrat didactique de l'ordre du jeu sur la facette sociale du contrat, ne figureront pas dans l'espace de contraintes. On voit donc poindre ici une complémentarité des analyses en termes de (contrat didactique, milieu) et de problématisation. L'analyse de l'activité de l'élève du point de vue de la problématisation est essentiellement une analyse épistémologique, or, dans la classe de mathématiques, certains phénomènes didactiques concernant l'activité des élèves ne relèvent pas uniquement de l'épistémologie, l'élève peut essayer, aussi, de s'appuyer sur des éléments de contrat pour avancer dans la situation. Ces phénomènes ne sont pas pris en compte actuellement dans les études avec le cadre de la problématisation, seraient-ils spécifiques ou plus prégnants dans l'enseignement des mathématiques ?

Pour terminer, de façon très pragmatique, les analyses de l'activité de l'élève utilisant la structuration du milieu restent encore peu développées, probablement parce qu'elles sont très techniques (Margolinas, 1995) et qu'elles produisent des analyses à un niveau de granularité qui n'est pas toujours indispensable à la compréhension de l'activité de l'élève⁸. À titre d'exemple, dans sa thèse, Dias (2008) effectue l'analyse a priori avec les outils de la TSD mais ne s'engage pas dans une analyse fine de l'activité des élèves avec cette structuration. L'analyse en termes d'espace de contraintes nous semble moins technique, plus accessible dans la mesure où elle est organisée essentiellement sur des aspects épistémologiques.

4.3. Relation avec la notion de milieu dans l'analyse a priori des situations

La notion de milieu issue de la théorie des situations est aussi mobilisée, en didactique des mathématiques, en référence à ses trois propriétés – proactif, rétroactif et contraignant (Hersant, 2010a) – lors de la construction d'ingénieries didactiques, notamment pour l'analyse a priori des situations, et pour envisager les potentialités didactiques d'une situation de classe ordinaire (Perrin-Glorian et Hersant, 2003, p. 225-227). Notons que cette dernière caractéristique du milieu n'est apparue que très tardivement dans les travaux et en référence à des problèmes très ouverts où il s'agissait de comprendre si l'ouverture du problème autorisait

⁸ Ce qui n'est pas le cas pour les situations de dédoublements de situations et de bifurcations identifiées par Comiti, Genier et Margolinas (Comiti, Grenier, Margolinas, 1995 ; Margolinas, 2005).

toutefois la construction des connaissances visées (Perrin-Glorian et Hersant, 2003). Dans le cas général cette analyse vise à répondre à la question « les élèves disposent-ils des connaissances pour avancer dans la résolution du problème sans intervention du maître ? » En référence aux trois propriétés du milieu, cela implique que l'élève « entre » dans le problème, interprète correctement les rétroactions du milieu et que le milieu fournisse assez de rétroactions pour que l'élève produise la connaissance attendue. Pour le didacticien des mathématiques, souvent attaché à la construction d'un milieu aussi satisfaisant que possible, compte tenu des conditions de possibilité de réalisation de la situation dans les classes, l'utilisation du cadre de la problématisation n'implique pas forcément l'abandon du recours à la notion de milieu. Dans ce cas, l'ingénierie vise la construction de nécessités par les élèves (Hersant, 2010b, 2011) telles qu'on peut les penser dans le cadre de la problématisation et il s'agit alors de répondre à la question « les élèves peuvent-ils construire les nécessités intrinsèques au problème sans intervention du maître ? ». Alors, l'usage conjoint de la notion de milieu et des espaces de contraintes permet d'envisager l'effet des interventions de l'enseignant sur la problématisation des élèves. En particulier, lorsque le milieu n'est pas assez contraignant pour la production des nécessités associées au problème il est intéressant d'identifier si la faiblesse concerne le registre empirique (les élèves ne pourront pas produire les éléments empiriques nécessaires à l'établissement de la nécessité) ou (non exclusif) le registre des nécessités (les élèves ne pourront pas produire les nécessités attendues bien qu'ils disposent des éléments empiriques nécessaires car, par exemple, ils ne savent pas les interpréter). Cela permet des interventions de l'enseignant pour aménager le milieu, au niveau du registre empirique (introduire le fait voulu de façon directe ou en posant une question aux élèves par exemple) ou au niveau des nécessités (provoquer un changement de cadre pour amener les élèves à produire la nécessité voulue dans un cadre où elle apparaîtra plus facilement pour les élèves). Un aménagement du milieu empirique peut, indirectement, contribuer à un aménagement au niveau des nécessités dès lors qu'il rend disponible des faits nécessaires à la construction des nécessités du problème. La complémentarité des cadres apparaît ici : il est moins délicat d'aménager le milieu au niveau du registre empirique qu'au niveau du registre des nécessités, il apparaît donc très utile de savoir quel type d'aménagement est en jeu. Ces questions d'aménagement du milieu sont proches de celles travaillées par Musquer (Fabre et Musquer, 2009) avec les inducteurs de problématisation.

Conclusion : le double « jeu » de la résolution de problèmes en mathématiques, apprendre sur un cas, apprendre sur le général

Nous nous sommes attachés dans cette contribution à montrer en quoi et comment le cadre de la problématisation était adapté pour des études en didactique des mathématiques. Nous avons montré ce qu'il peut apporter à l'analyse de l'activité d'apprenants et comment, dans un espace de travail plus large, il pouvait s'articuler avec les notions de contrat didactique et de milieu issus de la théorie des situations didactiques. Il n'en reste pas moins qu'à travers les études mobilisant le cadre de la problématisation actuellement en cours nous nous confrontons à une question : comment apprendre sur un concept mathématique dans ses dimensions outil et objet à partir de l'étude de problèmes ? Autrement dit, comment apprendre sur les nécessités liées à un concept ou à un domaine des mathématiques à partir des nécessités intrinsèques à un problème singulier à partir d'un cas en mathématiques ? Par exemple, prenons la question de l'apprentissage de l'algèbre : il s'agit de faire comprendre les nécessités associées au langage algébrique à partir de problèmes se résolvant par une équation qui modélise les nécessités propres au problème traité (Planson, 2016). Il y a donc deux niveaux de nécessités à articuler et à travailler : celui des nécessités du problème à modéliser ; celui des nécessités du cadre algébrique. Une question analogue se pose concernant l'apprentissage du phénomène d'affinité (Grau, 2017). Ce problème n'est pas inédit. Brousseau indique bien qu'il faut que l'élève se confronte plusieurs fois au milieu et que le processus d'institutionnalisation

visé à opérer cette décontextualisation et désynchronisation. Par ailleurs, les dialectiques outil-objet et ancien-nouveau sur des ingénieries longues (Douady et Perrin-Glorian, 1989) traitent aussi de cette question. Elle n'est peut-être pas non plus totalement spécifique aux mathématiques. Cependant, il faudra le considérer en tant que telle avec le cadre de la problématisation. Pour la question de l'affinité, S. Grau y a travaillé dans sa thèse (Grau, 2017) à partir de « problématisation par analyse de production » à propos des fonctions affines. D'autres travaux sont à développer dans ce sens. Et, tout comme les didacticiens des mathématiques ont renoncé à trouver une situation fondamentale pour l'apprentissage de tous les savoirs mathématiques scolaires, probablement serons-nous amené à préciser le champ de validité de l'usage de la problématisation en mathématiques.

Bibliographie

- ADDAM John, 2014, *Le professeur de mathématiques face à la tâche complexe. De sa représentation à sa mise en application*, Master 2 enseignement expertise apprentissage, dir. Magali Hersant, Université de Nantes.
- BENSA Alban, FASSIN Éric, 2002, « Les sciences sociales face à l'événement », *Terrain. Revue d'ethnologie de l'Europe*, n°38, p. 5-20. [<https://doi.org/10.4000/terrain.1888>] [consulté le 27 août 2021].
- BRONNER Alain, 2006, « Installation et régulation par l'enseignant de l'espace « parole - pensée - actions - relations ». Gestes d'étude, gestes professionnels, événements et ajustements (corpus de mathématiques) », in Marie-Cécile Guernier, Viviane Durand-Guerrier, Jean-Pierre Sautot (dir), *Interactions verbales, didactiques et apprentissages*, Besançon, Presses Universitaires de Franche Comté, p. 115-136.
- BROUSSEAU Guy, 1998, *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD Yves, 1985, *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- COMITI Claude, GRENIER Denise ET MARGOLINAS Claire, 1995, « Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classes et modélisation de phénomènes didactiques », in Gilbert Arsac, Jean Gréa, Denise Grenier, Andrée Tiberghien (dir), *Différents types de savoirs et leur articulation*, Grenoble, La Pensée Sauvage, p. 92-113.
- DESSOULES Catherine, 2017, *Une situation de comparaison d'aires de surfaces planes construites et analysées dans le double cadre de la TSD et de de la problématisation*, Master 2 enseignement expertise apprentissage, Magali Hersant (dir.), Université de Nantes.
- DIAS Thierry, 2008, *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*, thèse de didactique des mathématiques, dir. Viviane Durand-Guerrier, Université Lyon 1.
- DIAS Thierry, 2009, « La dimension expérimentale en mathématiques. Un exemple avec la situation des polyèdres », *Grand N*, n°83, p. 63-83.
- DIAS Thierry, DURAND-GUERRIER Viviane, 2005, « Expérimenter pour apprendre en mathématiques ». *Repères IREM*, n°60, p. 61-78.

DOUADY Régine, 1987, « Jeux de cadres et dialectique outil-objet », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n°7, vol. 2, p. 5-31.

DOUADY Régine ET PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne, 1989, « Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane », *Educational Studies in Mathematics*, n° 20, p. 387-423.

DOUSSOT Sylvain, HERSANT Magali, ORANGE-RAVACHOL Denise, 2013, « Événement de problématisation et dynamiques de problématisation », *11^e colloque du réseau Probléma*, Bruxelles.

DUVAL Raymond, 1995, *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Berne, Peter Lang.

FABRE Michel, MUSQUER Agnès, 2009, « Les inducteurs de problématisation », *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle*, n° 42, vol. 3, p. 111-129.

FABRE Michel, ORANGE Christian, 1997, « Construction des problèmes et franchissements d'obstacles », *ASTER*, n°24, p. 37-57.

GRAU Sylvie, 2017, *Problématiser en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines*, thèse de sciences de l'éducation, dir. Magali Hersant, université de Nantes.

HERSANT Magali, 2001, *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*, thèse de didactique des mathématiques, université Paris 7.

HERSANT Magali, 2010a, *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir : de l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations didactiques*, Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches, université de Nantes.

HERSANT Magali, 2010b, *Empirisme et rationalité à l'école élémentaire, vers la preuve au cycle 3*, Mémoire complémentaire pour l'habilitation à diriger des recherches, université de Nantes.

HERSANT Magali, 2011a, « Correspondance mathématique et conditions d'une activité mathématique « créative » et problématisée à la fin du lycée », *Educational Studies in Mathematics*, n° 78, vol. 3, p. 343-370.

HERSANT Magali, 2011b, « Les ingénieries de développement : à la recherche de déterminants de situations, une étude de cas relative aux problèmes pour chercher », in Claire Margolinas, Maha Abboud-Blanchard, Laetitia Bueno-Ravel, Nadia Douek, Annick Fluckiger, Patrick Gibel, Fabrice Vandebrouck, Floriane Wozniak (dir.), *Actes de la 15^e école d'été de didactique des mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

HERSANT Magali, 2014, « Facette épistémologique et facette sociale du contrat didactique : une distinction pour mieux caractériser la relation contrat didactique milieu, l'action de l'enseignant et l'activité potentielle des élèves », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 34, vol. 1, p. 9-31.

HERSANT Magali, 2015, « Que reste-t-il de la formation ? L'organisation de la rencontre avec l'écriture fractionnaire d'un nombre au CM1 par des PE stagiaires », *Colloque OPEEn et REFORM*, Nantes.

HERSANT Magali, 2016a, « L'activité mathématique des élèves : nouveau regard sur les relations contrat didactique - milieu et perspective comparatiste », in Anne-Cécile Mathé et Éric Mounier (dir.), *Actes du séminaire national de l'ARDM 2015*, Paris, IREM Paris, p. 141–54

HERSANT Magali, 2016b, « Démarche d'investigation et apprentissages géométriques chez les professeurs des écoles. Problématisation à propos des « solides » de Platon », in Yves Matheron, Ghislaine Gueudet, Valentina Celi, Charlotte Derouet, Dominique Forest, Mariza Krysinska, Serge Quilio, Marc Rogalski, Tomás Ángel Sierra, Luc Trouche, Carl Winsløw, Sylvaine Besnier (dir.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques - Actes de la 18ème école d'été de didactique des mathématiques*, Grenoble, La Pensée sauvage, vol. 2, p. 758-765.

HERSANT Magali ET CHOQUET Christine, 2019, « Is Inquiry-Based Approach possible at the elementary school ? », in Peter Liljedahl et Manuel Santos-Trigo (dir.), *Mathematical Problem Solving. Current Themes, Trends, and Research*. Cham, Springer, p. 113-131

HERSANT Magali ET ORANGE-RAVACHOL Denise, 2015, « Démarche d'investigation et problématisation en mathématiques et en SVT : des problèmes de démarcation aux raisons d'une union », *Recherche en éducation*, n° 21, p. 95-108.

HERSANT Magali ET QUINIOU Anne-Claire, 2017, « Conditions didactiques d'une activité mathématique au lycée professionnel : deux études de cas », *Spirale*, n°59, p. 107-122.

LOISIL Jean-François, 2015, *Une situation problème au collège pour un savoir mathématique visé*, Master 2 enseignement expertise apprentissage, dir. Magali Hersant, Université de Nantes.

MARGOLINAS Claire, 1995, « La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori de situations », in Claire Margolinas (dir.), *Les débats en didactiques des mathématiques, Annales 1993-1994*, Grenoble, La Pensée Sauvage, p. 89-103.

MARGOLINAS Claire, 1999, « Le milieu et le contrat didactique, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement », in Robert Noïrfalise (dir.) *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques. Actes de l'Université d'été de la Rochelle*, Clermont-Ferrand, IREM, p. 89-103.

ORANGE Christian, 2000, *Idées et raisons*, Mémoire de recherche pour l'habilitation à diriger des recherches, université de Nantes.

ORANGE Christian, 2007, « Quel milieu pour l'apprentissage par problématisation en sciences de la Vie et de la Terre ? », *Education et didactique*, n°2, vol. 1, p. 37 – 56

ORANGE-RAVACHOL Denise, 2012, *Didactique des sciences de la vie et de la Terre : entre phénomènes et évènements*, Rennes, Presses Universitaires de Rennes

ORANGE-RAVACHOL Denise ET ORANGE Christian, 2012, « Étude comparative des contenus et des apprentissages en biologie et en géologie : entre phénomènes et événements », *Recherches en didactiques, Les cahiers Théodille*, n°13, p. 55-66.

PERRIN Daniel, 2007, « L'expérimentation en mathématiques », in Copirelem (dir.), *Actes du 33è colloque de la Copirelem*, Paris, IREM, p. 37-72.

PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne, 1999, « Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 19, vol. 3, p. 279-322.

PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne ET HERSANT Magali, 2003, « Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 23, no 2, p. 217-276.

PLANSON Géraldine, 2016, *En quoi le cadre didactique de la problématisation permet-il de renseigner les conditions d'entrée dans l'algèbre en classe de 5ème ?* Master 2 enseignement expertise apprentissage, dir. Magali Hersant, Université de Nantes.

POINCARÉ Henri, 1970, *La valeur de la science*, Paris, Champs-Flammarion.

PÒLYÀ George, 1965, *Comment poser et résoudre un problème*, Paris, Jacques Gabay

ROGALSKI Marc, 2001, « Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et les jeux de cadres de Régine Douady », in Didirem (dir.), *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, Paris, IREM Paris 7, p. 13-30

SALIN Marie-Hélène, 2002, « Repères sur l'évolution du concept de milieu », in Jean-Luc Dorier, Michel Artaud, Michel Artigue, René Berthelot, Ruhai Floris (dir.), *Actes de la 11ème Ecole d'Été de didactique des mathématiques*, Grenoble, La pensée Sauvage, p. 111-124.

ZEBICHE Nadia, 2017, *Calcul algébrique et preuve au cycle 4*, Master 2 enseignement expertise apprentissage, Magali Hersant (dir.), Université de Nantes.