



**HAL**  
open science

## Dynamique de Dirac pour les problèmes mécaniques

O Cosserat, A Kotov, C Laurent-Gengoux, L Ryvkin, Vladimir Salnikov

► **To cite this version:**

O Cosserat, A Kotov, C Laurent-Gengoux, L Ryvkin, Vladimir Salnikov. Dynamique de Dirac pour les problèmes mécaniques. 2022. hal-03782507

**HAL Id: hal-03782507**

**<https://hal.science/hal-03782507>**

Submitted on 21 Sep 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Dynamique de Dirac pour les problèmes mécaniques

O. COSSERAT<sup>a</sup>, A. KOTOV<sup>b</sup>, C. LAURENT-GENGOUX<sup>c</sup>, L. RYVKIN<sup>d</sup>,  
V. SALNIKOV<sup>e</sup>

a. CNRS / La Rochelle Université, oscar.cosserat@univ-lr.fr

b. Université de Hradec Králové, oleksii.kotov@uhk.cz

c. Université de Lorraine, camille.laurent-gengoux@univ-lorraine.fr

d. Université de Gottingen, leonid.ryvkin@mathematik.uni-goettingen.de

e. CNRS / La Rochelle Université, vladimir.salnikov@univ-lr.fr

## Résumé :

*Les structures de Dirac sont les sous-fibrés de la somme directe de fibrés tangent et cotangent d'une variété, avec certaines propriétés. Leur cadre permet de donner une description unifiée entre autres de la géométrie symplectique et de Poisson, de certaines classes de feuilletages. On va commencer par un rappel des situations où les structures de Dirac apparaissent naturellement pour les problèmes mécaniques. Ensuite on va adresser la question de la formulation variationnelle de la dynamique sur les structures de Dirac. Les obstructions à cette formulation peuvent être caractérisées par une classe de cohomologie basique des algebroides de Lie. Une telle formulation variationnelle implique la possibilité de construction des intégrateurs géométriques, notamment la construction des schémas numériques (variationnels) qui préservent les propriétés physiques du système "encodées" par la structure de Dirac – on va la survoler rapidement.*

## Abstract :

*Dirac structures are the subbundles of the direct sum of the tangent and cotangent bundles to a smooth manifold, subject to some properties. Their framework permits to provide a unified description of symplectic and Poisson structures (among others), as well as a certain class of foliations. We will start by recalling several instances of Dirac structures appearing naturally for mechanical problems. Then we will address the question of variational formulation of dynamics on Dirac structures. The obstructions to such a formulation can be characterized by a class in basic cohomology of Lie algebroids. And the formulation itself implies the possibility to construct geometric integrators, namely (variational) numerical methods that preserve physical properties of the system, encoded by the Dirac structure – we will briefly sketch the idea.*

**Mots clés : Structures de Dirac, formulation variationnelle, intégrateurs géométriques.**

## Remerciements.

Ce travail est en partie soutenu par le projet CNRS MITI "GraNum" et le PHC Procope "GraNum 2.0".

## 1 Introduction

Ce papier fait partie de la série des travaux sur la géométrisation de la mécanique, c'est-à-dire de l'étude des structures géométriques pertinentes pour la description efficace des propriétés des systèmes des équations différentielles (ordinaires et aux dérivées partielles) issues des modèles mécaniques, ou bien pour la déduction de ces équations. L'exemple historique d'une telle approche est la géométrie symplectique et le formalisme Hamiltonien pour les systèmes conservatifs en dimension finie, qui fait maintenant partie de folklore en mécanique théorique. Différentes structures géométriques s'avèrent pertinentes pour prendre en compte les phénomènes autre que la conservation d'énergie, nous avons fait un survol concernant la géométrie généralisée et graduée dans [1].

Dans ce papier on s'intéresse en particulier aux structures de Dirac. Conçues initialement avec la motivation mécanique elles ont d'abord été étudiées dans le contexte purement géométrique ([2]), comme une structure qui généralise simultanément la géométrie symplectique, les structures de Poisson, les feuilletages. Pour les applications mécaniques assez directes on peut citer par exemple les systèmes dits Hamiltoniens à ports ([3]) et les systèmes avec les contraintes ([4]). Les structures de Dirac peuvent aussi être utilisées comme espaces de cible pour les théories de jauge ([5]), et décrivent l'algèbre des symétries des sigma-modèles les plus généraux (dans un certain sens) en dimension 2 d'espace-temps ([6]). Mais dans la plupart de ces travaux la structure est en quelque sorte lue du système, c'est-à-dire pour chaque système donnée, on peut dire que les variables dynamiques (dans les exemples mécaniques) ou les champs et les symétries (pour les théories de jauge) appartiennent à une structure de Dirac, qui est chaque fois différente. Ici on se pose la question dans l'autre sens : étant donnée une structure de Dirac, qu'est-ce qu'on a besoin comme information pour définir une dynamique là-dessus.

## 2 Bases géométriques – structures de Dirac

Dans cette section on donne la définition de la structure de Dirac, et récapitule certains résultats et constructions nécessaires pour la compréhension de la formulation variationnelle de la section 3. On ne va pas entrer dans les détails géométriques trop techniques, par exemple l'expression précise du crochet de Courant ci-dessous ne va pas être utilisée explicitement, néanmoins un lecteur motivé est invité à consulter [7] pour une présentation simplifiée des objets géométriques.

Pour une variété lisse  $M$ , on considère le fibré vectoriel  $\mathbb{T}M \equiv TM \oplus_M T^*M$ . Pour les sections de ce fibré, c'est-à-dire les couples (*champ de vecteurs, champ de covecteurs*) on définit deux opérations naturelles : le couplage symétrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et le crochet dit de Courant  $[\cdot, \cdot]$  :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{T}M \otimes \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{R}; \langle (v, \alpha), (w, \beta) \rangle = \alpha(w) + \beta(v)$$

$$[\cdot, \cdot] : \Gamma(\mathbb{T}M) \otimes \Gamma(\mathbb{T}M) \rightarrow \Gamma(\mathbb{T}M); [(v, \alpha), (w, \beta)] = ([v, w], L_v\beta - L_w\alpha - \frac{1}{2}d(\iota_v\beta - \iota_w\alpha)).$$

**Définition.** Une *structure de Dirac* est un sous-fibré  $D \subset \mathbb{T}M$  de rank égal à  $\dim(M)$ , qui est isotrope (i.e.  $\langle D, D \rangle = 0$ ) et involutive (i.e.  $[\Gamma(D), \Gamma(D)] \subset \Gamma(D)$ ).

Pour les structures de Dirac on peut définir deux constructions :

**Définition.** Soit  $D \subset \mathbb{T}M$  un sous-fibré,

1. Pour tout  $\phi : M' \rightarrow M$ , on note  $\phi^!D$  l'ensemble

$$\phi^!D_{m'} := \left\{ (X, \phi^*\beta) \text{ with } X \in T_{m'}M', \beta \in T_{\phi(m')}^*M \text{ t.q. } (\phi_*(X), \beta) \in D_{\phi(m')} \right\}$$

Si  $D$  est une structure de Dirac on appelle  $\phi^!D$  le *tiré-en-arrière (pullback)* de  $D$ .

2. Soit  $\omega$  une 2-forme  $\omega \in \Omega^2(M)$ , on note  $e^\omega D$  l'ensemble

$$e^\omega D = \{(v, \beta + \iota_v \omega) \mid (v, \beta) \in D\}$$

et on l'appelle le *transformé de jauge* de  $D$ .

A chaque structure de Dirac on peut associer une 2-forme différentielle  $\omega_D \in \Gamma(\Lambda^2 D^*)$

$$\omega_D((v, \alpha), (w, \beta)) = \alpha(w) - \beta(v).$$

Dans [8] nous avons défini la notion de la cohomologie basique des algèbroïdes de Lie. Comme chaque structure de Dirac fournit un exemple d'algèbroïde de Lie, on peut considérer la forme  $\omega_D$  comme un cocycle dans cette cohomologie. Pour la construction qui suit il est important de savoir que cette forme  $\omega_D$  peut être intégrée vers une 1-forme  $\theta \in \Gamma(D^*)^{hor}$ , quand l'obstruction cohomologique est absente, c'est-à-dire la 2-classe basique  $[\omega_D]$  s'annule. C'est le cas pour une classe large d'exemples, y compris des feuilletages associés aux systèmes avec les contraintes, des structures de Poisson (sous certaines conditions).

### 3 Formulation variationnelle

On peut maintenant utiliser les constructions de la section précédente pour formuler les résultats variationnels concernant la dynamique sur les structures de Dirac : on va obtenir les analogues des formalismes Hamiltonien et Lagrangien.

**Théorème 1.** Soit  $D \subset \mathbb{T}M$  une structure de Dirac sur  $M$ ,  $H \in C^\infty(M)$  une fonction d'Hamilton et  $\gamma$  un chemin dans  $M$ . On suppose que la 2-classe basique  $[\omega_D]$  s'annule, et que  $\theta \in \Gamma(D^*)^{hor}$  est la primitive de  $\omega_D$ . Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (i) Le chemin  $\gamma$  est une courbe Hamiltonienne, i.e.  $(\dot{\gamma}(t), dH_{\gamma(t)}) \in D$  pour tout  $t$ .
- (ii) Tous les chemins de Dirac  $\zeta : I \rightarrow D$  au dessus de  $\gamma$  (c'est-à-dire tels que  $\rho(\zeta) = \dot{\gamma}$ , où  $\rho$  est une projection sur  $TM$ ) sont les extrema parmi les chemins de Dirac avec les extrémités fixées, de la fonctionnelle suivante :

$$\zeta \mapsto \int_I (\theta_{\gamma(t)}(\zeta(t)) + H(\gamma(t))) dt \quad (1)$$

Pour formuler la contrepartie Lagrangienne du Théorème 1, on va rappeler la construction du transformé de Legendre et de la différentielle de Tulczyjew.

Soit  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  un Lagrangien.

**Définition.** On appelle la *différentielle de Tulczyjew* l'application  $u \mapsto \mathcal{D}_u L := \beta(d_u L)$ , où  $\beta : T^*TQ \rightarrow T^*T^*Q$  est l'isomorphisme de Tulczyjew<sup>1</sup>. Son image est une sous-variété de  $T^*T^*Q$ .

**Définition.** On définit une application de  $TQ$  vers  $T^*Q$ , notée  $\mathbb{F}L(v)$  comme suit : pour tout  $v \in T_q Q$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} L(v + tw) = \langle \mathbb{F}L(v), w \rangle$$

- a) On note  $\mathcal{L}eg = \mathbb{F}L(TQ) \subset T^*Q$  l'image de  $\mathbb{F}L$ .
- b) On appelle le champ de vecteurs partiel sur  $\mathcal{L}eg$  une section dans  $\Gamma(T(T^*Q))|_{\mathcal{L}eg}$ .

1. Cf. l'annexe dans [9] ou [7] pour une explication simplifiée

c) Une courbe intégrale d'un champ de vecteurs partiel  $X$  sur  $\mathfrak{L}eg$  est un chemin  $t \mapsto u_t \in TQ$  t.q.

$$\frac{d}{dt} \mathbb{F}L(u_t) = X_{\mathbb{F}L(u_t)}.$$

**Théorème 2.** Soit  $D \subset TQ$  une structure de Dirac sur  $Q$ ,  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  un Lagrangien. On suppose que la 2-classe basique  $[\omega_D]$  s'annule, et que  $\theta \in \Gamma(D^*)^{hor}$  est la primitive de  $\omega_D$ . Alors pour un chemin  $q : I \rightarrow Q$  les affirmations suivantes sont équivalentes :

a) Il existe un chemin de Dirac  $\zeta : I \rightarrow D$  tel que  $\rho(\zeta) = \dot{q}$  qui est un extremum parmi les chemins de Dirac avec les extrémités fixées, de la fonctionnelle suivante :

$$\int_I (L(\rho(\zeta(t))) + \theta(\zeta(t))) dt. \quad (2)$$

b) Pour tout  $t \in I$ , la condition suivante est satisfaite :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{F}L(\dot{q}(t)), \mathcal{D}_{\dot{q}(t)} L \right) \in \mathbb{D} = e^\Omega \pi^! D. \quad (3)$$

Les démonstrations de ces deux théorèmes ainsi que les remarques sur les objets définis sont détaillées dans [8]. Les cas particuliers incluent évidemment la mécanique Lagrangienne/Hamiltonienne classique, les systèmes avec les contraintes qui ont motivé l'étude, certaines structures de Poisson, etc. On note aussi, que les conditions dans ces résultats sont suffisantes, mais pas forcément nécessaires. Par exemple, une partie de construction marche pour les presque structures de Dirac (sans condition d'involutivité); et la primitive de  $\omega_D$  peut être considérée sur une feuille de la structure de Dirac. Cela élargit le champ d'application potentielle encore plus.

## Références

- [1] V. Salnikov, A. Hamdouni, D. Loziienko, Generalized and graded geometry for mechanics : a comprehensive introduction, Mathematics and Mechanics of Complex Systems, Vol. 9, No. 1, 2021.
- [2] T. J. Courant. Dirac manifolds. Trans. Am. Math. Soc., 319(2) :631–661, 1990.
- [3] A. van der Schaft, Port-Hamiltonian systems : an introductory survey, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, 2006.
- [4] H. Yoshimura, J.E. Marsden, Dirac Structures in Lagrangian Mechanics. Part I : Implicit Lagrangian Systems ; Part II : Variational structures, Journal of Geometry and Physics, 57, 2006.
- [5] A. Kotov, P. Schaller, T. Strobl, Dirac Sigma Models, Commun. Mathematical Physics 260, (2005) 455-480.
- [6] A. Kotov, V. Salnikov, T. Strobl, 2d Gauge Theories and Generalized Geometry, Journal of High Energy Physics, 2014 :21, 2014.
- [7] V. Salnikov, A. Hamdouni, Differential Geometry and Mechanics - a source of problems for computer algebra, Programming and Computer Software, Vol. 46, Issue 2, 2020.
- [8] O. Cosserrat, C. Laurent-Gengoux, A. Kotov, L. Ryvkin, V. Salnikov, On Dirac structures admitting a variational approach, Preprint : arXiv :2109.00313.
- [9] V. Salnikov, A. Hamdouni, From modelling of systems with constraints to generalized geometry and back to numerics, Z Angew Math Mech., Vol. 99, Issue 6, 2019.