



HAL
open science

Intégrateurs géométriques en géométrie de Poisson

Oscar Cosserat, Vladimir Salnikov, Camille Laurent-Gengoux

► **To cite this version:**

Oscar Cosserat, Vladimir Salnikov, Camille Laurent-Gengoux. Intégrateurs géométriques en géométrie de Poisson. 2022. hal-03782503

HAL Id: hal-03782503

<https://hal.science/hal-03782503>

Submitted on 21 Sep 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Intégrateurs géométriques en géométrie de Poisson

Oscar Cosserat^a, avec Vladimir Salnikov^b et Camille Laurent-Gengoux^c

a. CNRS / La Rochelle Université, oscar.cosserat@univ-lr.fr

b. CNRS / La Rochelle Université, vladimir.salnikov@univ-lr.fr

c. Université de Lorraine, camille.laurent-gengoux@univ-lorraine.fr

Résumé :

On résume dans cette communication l'intérêt des intégrateurs géométriques dans le contexte de la géométrie de Poisson et l'on propose une construction de schémas numériques préservant la structure hamiltonienne des équations d'une part, et la géométrie de l'espace ambiant d'autre part. Pour ce faire, on introduit le groupoïde symplectique local et l'on explique comme il permet de produire lesdits schémas numériques.

Abstract :

In this communication we sketch the importance of geometric integrators within the framework of Poisson geometry, and suggest a construction of numerical methods preserving the Hamiltonian structure of equations of motion on the one hand and the geometry of the ambient space on the other. To do so, we introduce the notion of local symplectic groupoids and explain how it allows to construct these discretizations.

Mots clefs : Géométrie de Poisson, mécanique hamiltonienne, intégrateurs géométriques.

Remerciements.

Ce travail est en partie soutenu par le projet CNRS MITI "GraNum" et le PHC Procope "GraNum 2.0".

1 Introduction

La géométrie de Poisson donne un cadre qui permet de généraliser la mécanique hamiltonienne symplectique et la dynamique sur les groupes de Lie d'une part, et est un outil efficace d'étude d'une large classe de symétries de systèmes dynamiques d'autre part. Dès lors, elle est sous-jacente à de multiples exemples d'équations en mécanique : dynamique du solide rigide, systèmes poly-articulés, réduction dans le problème des N corps, réseau de Toda, équation de Korteweg-de Vries... Une question naturelle est la construction d'intégrateurs tenant compte de cette géométrie lors de la résolution numérique d'une telle équation.

On se propose ici d'expliquer la relation, surprenante, entre les intégrateurs de Poisson d'une structure de Poisson donnée et son groupoïde symplectique local. Un tel point de vue est fructueux pour plusieurs raisons. Il recouvre la plupart des discrétisations de Poisson de la littérature et permet de mieux comprendre leur fonctionnement, en particulier, il en découle leur analyse rétrograde, et l'on démontre que

tout intégrateur de Poisson, en un sens que l'on précisera, suit le flot d'un hamiltonien dépendant du temps approximant le hamiltonien d'origine à un certain ordre. On généralise ainsi au contexte présent des résultats existant concernant les intégrateurs symplectiques. Par ailleurs, moyennant la construction du groupoïde symplectique local, cette relation permet la construction d'intégrateurs pour une structure de Poisson générale et un hamiltonien quelconque.

On commence par rappeler ce que sont les structures de Poisson, quelques propriétés élémentaires et des exemples. Ensuite, on introduira la notion de groupoïde symplectique local, et on expliquera comment le relier aux discrétisations souhaitées à travers des cas particuliers.

2 Géométrie de Poisson

2.1 Définitions et propriétés

Definition 2.1 (Structure de Poisson) Soit M une variété de dimension n . Une structure de Poisson sur M est un opérateur bilinéaire anti-symétrique

$\{.,.\}: \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ vérifiant les propriétés dites :

1. de Jacobi : $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$
2. et de Leibniz : $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$

pour tous $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Remark 2.2 Toute structure de Poisson $\{.,.\}$ fournit un unique champ de bi-vecteurs $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ par la formule : pour tout $x \in M, f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\{f, g\}(x) = \langle \pi(x), d_x f \wedge d_x g \rangle, \quad (1)$$

où $\langle ., . \rangle$ sont les crochets de dualité. Soit x des coordonnées sur M . π s'écrit

$$\pi(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \pi_{ij}(x) \partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j}.$$

Réciproquement, à tout champ de bi-vecteurs pour lequel les crochets (1) vérifient l'identité de Jacobi correspond une unique structure de Poisson.

On appelle *variété de Poisson* le couple $(M, \{.,.\})$ où M est une variété munie d'une structure de Poisson $\{.,.\}$.

Theorem 2.3 Toute variété de Poisson est naturellement feuilletée en variétés symplectiques. En particulier, il existe une partition $M = \sqcup_{c \in I} \mathcal{F}_c$ telle que chaque \mathcal{F}_c soit

1. une sous-variété immergée connexe de M ,
2. une variété symplectique pour laquelle l'inclusion $i: \mathcal{F}_c M$ est un morphisme de Poisson.

Le lecteur pourra observer dans les exemples suivants que ce feuilletage est en général singulier. Deux feuilles voisines n'ont pas forcément la même dimension, et peuvent grandement différer du point de vue de leur topologie. Ainsi, son étude est un domaine de recherche actif. Les outils d'analyse numérique que l'on se propose d'exposer ici s'inscrivent dans cette démarche.

Exemple 2.4 (Espace des phases) L'espace des phases T^*Q d'un espace des configurations Q est naturellement muni d'une forme symplectique ω_{can} , et donc d'une structure de Poisson par : $\{f, g\} = \omega_{can}(X_f, X_g)$. Si q sont des coordonnées sur Q et (q, p) les coordonnées cotangentes associées, le bivecteur s'écrit $\pi = \partial_p \wedge \partial_q$. Le feuilletage symplectique est donné par une unique feuille : l'espace tout entier.

Exemple 2.5 (Dual d'une algèbre de Lie) Soit G un groupe de Lie et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. L'espace dual \mathfrak{g}^* est naturellement muni du crochet de Poisson défini pour $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ et $x \in \mathfrak{g}^*$ par

$$\{f, g\}(x) = \langle x, [d_x f, d_x g] \rangle$$

où $d_x f$ et $d_x g$ sont des éléments de $\mathfrak{g}^{**} \simeq \mathfrak{g}$. Le feuilletage symplectique est donné par les orbites de l'action coadjointe de G sur \mathfrak{g}^* .

Exemple 2.6 (Structure de Poisson quadratique) Soit $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ une matrice antisymétrique. Dans \mathbb{R}^d , des crochets de Poisson sont donnés par le bivecteur $\pi = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j \partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j}$.

Le feuilletage symplectique du dernier exemple n'admet à notre connaissance pas de description simple et est une des motivations au développement des présents travaux.

Definition 2.7 Soit $H \in C^\infty(M)$. Le champ hamiltonien associé à H est $X_H = \langle \pi, dH \wedge \cdot \rangle \in \mathfrak{X}(M)$ et le système hamiltonien de H est l'équation différentielle associée au champ de vecteurs X_H . En coordonnées :

$$\dot{x}_j(t) = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \pi_{ij}(x(t)) \frac{dH}{dx_i}(x(t)) \right), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Exemple 2.8 (Hamiltonien sur l'espace des phases) La structure de Poisson 2.4 induit, pour $H \in C^\infty(T^*Q)$, le système hamiltonien

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \partial_p H \\ \dot{p} &= -\partial_q H. \end{aligned} \quad (2)$$

Exemple 2.9 (Équation d'Euler) La structure de Poisson 2.5 induit, pour $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, le système hamiltonien

$$\dot{x} = -ad_{d_x H}^* .x. \quad (3)$$

En particulier, pour $G = SO(n)$ et H une métrique ad-invariante sur \mathfrak{g} , en notant $I : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ l'isomorphisme induit, on retrouve l'équation d'Euler :

$$\dot{x} = -ad_{I^{-1}(x)}^* .x. \quad (4)$$

Exemple 2.10 La structure de Poisson 2.6 induit, pour $H : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \sum_{i=1}^d x_i \in \mathbb{R}$, le système hamiltonien des équations de Lotka-Volterra

$$\dot{x}_j = x_j \sum_i a_{ij} x_i, \quad 1 \leq j \leq d \quad (5)$$

Proposition 2.11 Soit $(x(t))_t$ la solution du système hamiltonien associé à H et partant de $x(0)$.

1. Toute solution du système hamiltonien associé à H reste sur un niveau de H : $H(x(t)) = H(x(0))$,
2. Toute solution d'un système hamiltonien reste sur la feuille symplectique de son point initial : $x(0) \in \mathcal{F}_i \implies [\forall t, x(t) \in \mathcal{F}_i]$

Remark 2.12 La feuille $\mathcal{F}(x)$ d'un point $x \in M$ se calcule de manière constructive de la manière suivante : ce sont tous les points atteignables en partant de x et en suivant un nombre fini de trajectoires hamiltoniennes. Autrement dit, en notant $\phi_H^t(x)$ le flot de H au temps t partant de x :

$$\mathcal{F}(x) = \{y \in M, \exists n \in \mathbb{N}, (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, (H_1, \dots, H_n) \in \mathcal{C}^\infty(M)^n, y = \phi_{H_1}^{t_1} \dots \phi_{H_n}^{t_n}(x)\}.$$

Les lois physiques du système s'interprètent géométriquement comme les symétries de la dynamique. Par exemple, la préservation du hamiltonien au cours du mouvement est le pendant géométrique du fait que la géométrie de Poisson décrit des équations de la mécanique conservative. Le feuilletage de M s'interprète physiquement comme les contraintes que les symétries de l'équation, c'est-à-dire ses diverses lois de conservation, impliquent sur la dynamique.

2.2 Problèmes numériques associés

La proposition 2.11 soulève des questions naturelles d'analyse numérique.

- **Calcul numérique d'une feuille.** Soient x et y dans M . Existe-t-il un algorithme permettant de vérifier s'ils sont dans la même feuille, i.e. s'il est physiquement possible d'atteindre l'état y en partant de l'état x ?
- **Discrétisation d'une trajectoire hamiltonienne.** Puisque les propriétés géométriques de l'espace ambiant et de la trajectoire hamiltonienne sont des analogues mathématiques de la physique de l'équation, il est naturel de rechercher des discrétisations qui approchent la véritable trajectoire en vérifiant ces propriétés.

Les singularités du feuilletage rendent le premier point difficile parce que celles-ci se comportent mal avec les erreurs numériques qui s'accumulent en temps long. Par ailleurs, quand la structure de Poisson est celle de l'espace des phases 2.4 en coordonnées canoniques, les intégrateurs symplectiques répondent au deuxième point. Pour une structure de Poisson plus générale, il n'est plus vrai que la préservation du tenseur de Poisson implique de suivre la trajectoire hamiltonienne d'un hamiltonien proche. Ainsi, notre proposition de définition d'intégrateurs géométriques dans le contexte de la géométrie de Poisson est la suivante :

Definition 2.13 (Intégrateur de Poisson hamiltonien) Soit (M, π) une variété de Poisson et $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$ un hamiltonien sur M . Une famille lisse de difféomorphismes de M $(\phi_\epsilon)_\epsilon$ est un Intégrateur de Poisson hamiltonien d'ordre $k \geq 1$ pour H si :

1. $\phi_\epsilon : M \rightarrow M$ est un automorphisme de Poisson,
2. il existe $(h_t)_t$ un hamiltonien dépendant du temps tel que
 - (a) $h_t = H + o(t^{k-1})$

(b) $\phi_\epsilon = \Phi_{(h_t)_t}^\epsilon$ est le flot au temps ϵ de h .

Il suit aisément que

$$\phi_\epsilon = \Phi_H^\epsilon + o(t^k).$$

Dans la suite, on se propose d'expliquer la construction d'intégrateurs de Poisson hamiltoniens pour une structure de Poisson et un hamiltonien génériques, et d'apporter une réponse aux questions adressées ci-dessus.

3 Groupoïde symplectique local

Le groupoïde symplectique local d'une variété de Poisson M peut s'interpréter comme un espace englobant M et dont le feuilletage est une version désingularisée de celui porté par M . Il est utile de commencer par l'introduction des groupoïdes symplectiques, qui sont un cas particulier important de la présente théorie.

3.1 Groupoïde symplectique

Definition 3.1 Un groupoïde symplectique $(\mathcal{G}, \Omega) \xrightarrow[\beta]{\alpha} M$ est un groupoïde de Lie $\mathcal{G} \xrightarrow[\beta]{\alpha} M$ dont l'espace ambiant \mathcal{G} est muni d'une forme symplectique multiplicative Ω , multiplicative au sens suivant : le graphe du produit

$$\left\{ (g_1, g_2, g_2 \cdot g_1) \in \mathcal{G}^3, \alpha(g_2) = \beta(g_1) \right\}$$

est lagrangien dans la variété symplectique $(\mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}, pr_1^* \Omega + pr_2^* \Omega - pr_3^* \Omega)$

Proposition 3.2 La base M du groupoïde symplectique est une sous-variété lagrangienne de (Γ, Ω) et est naturellement munie d'une unique structure de Poisson $\{.,.\}$ telle que α soit un morphisme de Poisson : pour tous $f, g \in C^\infty(M)$,

$$\alpha^* \{f, g\}_\pi = \{\alpha^* f, \alpha^* g\}_\Omega.$$

De plus, β a la propriété d'être un anti-morphisme de Poisson :

$$\beta^* \{f, g\}_\pi = -\{\beta^* f, \beta^* g\}_\Omega.$$

Quand une variété de Poisson M est la base d'un groupoïde symplectique, on dit que celui-ci intègre M . Les précédents exemples sont intégrés par les groupoïdes symplectiques décrits ci-dessous, dont on se restreint à ne décrire que les applications source et cible α et β .

Exemple 3.3 Un groupoïde symplectique intégrant l'espace des phases (T^*Q, ω_{can}) d'un espace des configurations Q est le groupoïde des paires $(T^*Q \times T^*Q, pr_1^* \omega_{can} - pr_2^* \omega_{can}) \xrightarrow[\beta]{\alpha} T^*Q$.

Exemple 3.4 Soit G un groupe de Lie et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Un groupoïde symplectique intégrant l'espace dual \mathfrak{g}^* est le fibré cotangent $(T^*G, \omega_{can}) \xrightarrow[\beta]{\alpha} \mathfrak{g}^*$, où $\alpha = L^*$ et $\beta = R^*$ sont les relevés cotangents des translations à gauche et à droite.

Exemple 3.5 Un groupoïde symplectique intégrant la variété de Poisson $(\mathbb{R}^d, \{.,.\})$ de l'exemple 2.6 est $(T^*\mathbb{R}^d, \omega_{can}) \xrightarrow[\beta]{\alpha} \mathbb{R}^d$, où

$$\begin{cases} \alpha : (x, p) \mapsto \left(e^{-\frac{1}{2} \sum_i a_{ij} x_i p_i} . x_j \right)_{j=1, \dots, n} \\ \beta : (x, p) \mapsto \left(e^{\frac{1}{2} \sum_i a_{ij} x_i p_i} . x_j \right)_{j=1, \dots, n} \end{cases}$$

3.2 Groupoïde symplectique local, équation d'Hamilton-Jacobi et intégrateurs de Poisson

Une variété de Poisson générique n'admet pas forcément de groupoïde symplectique l'intégrant. Le bon objet est le *groupoïde symplectique local*, qui est un voisinage \mathfrak{U} de M dans T^*M possédant une loi de composition partielle définie au voisinage de M et pour laquelle la forme symplectique multiplicative est la restriction de la forme symplectique canonique $\omega_{can}|_{\mathfrak{U}}$. On démontre le théorème suivant, un analogue sur les groupoïdes symplectiques locaux du théorème d'Hamilton-Jacobi classique :

Theorem 3.6 Soit $H \in C^\infty(M)$ et $(\mathfrak{U}, \omega_{can}|_{\mathfrak{U}}) \xrightarrow[\beta]{\alpha} M$ son groupoïde symplectique local. Soit $(S_t)_{t \in J} \in C^\infty(M \times J)$, où J est un interval réel contenant 0, vérifiant l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \partial_t S_t(x) = H \circ \alpha(d_x S_t) \\ S_0 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Alors la restrictions $\alpha|_{dS_t} : dS_t \rightarrow M$ de α au graphe $dS_t = \{d_x S_t, x \in M\}$ de dS_t est un difféomorphisme et le flot hamiltonien de H au temps t ϕ_H^t est donné par

$$\beta \circ \alpha|_{dS_t}^{-1}. \quad (7)$$

La conséquence numérique remarquable est que le calcul des k premiers termes du développement de Taylor en t de S fournit un intégrateur de Poisson pour H à l'ordre k .

Theorem 3.7 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, définissons récursivement une suite $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de fonctions sur M par $S_0 = 0$, $S_1(m) = d_m H$, $S_2(m) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |_{t=0} H(\alpha(td_m H))$, et

$$S_{i+1}(m) = \frac{1}{(i+1)!} \frac{d^i}{dt^i} \Big|_{t=0} H \left(\alpha \left(d_m S_t^{(i)} \right) \right)$$

où $S_t^{(i)} = \sum_{j=1}^i t^j S_j$ sont les $i+1$ premiers termes du développement de Taylor de S .

La famille d'automorphismes de Poisson $(\beta \circ \alpha|_{dS_t^{(k)}}^{-1})_{t \in J}$ est un intégrateur de Poisson d'ordre k pour H .

Exemple 3.8 (Espace des phases) Pour (q, p) des coordonnées sur T^*Q et (q, p, ξ_q, ξ_p) les coordonnées cotangentes induites sur T^*T^*Q , une expression des sources et cibles du groupoïde symplectique local sont

$$\begin{cases} \alpha : (q, p, \xi_q, \xi_p) \mapsto \left(q - \frac{1}{2} \xi_p, p + \frac{1}{2} \xi_q \right) \\ \beta : (q, p, \xi_q, \xi_p) \mapsto \left(q + \frac{1}{2} \xi_p, p - \frac{1}{2} \xi_q \right) \end{cases} \quad (8)$$

L'équation (6) s'écrit

$$\partial_t S_t(q, p) = H\left(q - \frac{1}{2}\partial_p S_t(q, p), p + \frac{1}{2}\partial_q S_t(q, p)\right). \quad (9)$$

et l'intégrateur de Poisson pour H à l'ordre 1 résultant est le schéma implicite donné par les deux étapes :

(a) résoudre

$$\begin{cases} q = \bar{q} - \frac{\Delta t}{2}\partial_p H(\bar{q}, \bar{p}) \\ p = \bar{p} + \frac{\Delta t}{2}\partial_q H(\bar{q}, \bar{p}) \end{cases} \quad (10)$$

(b) et projeter

$$\begin{cases} \tilde{q} = \bar{q} + \frac{\Delta t}{2}\partial_p H(\bar{q}, \bar{p}) \\ \tilde{p} = \bar{p} - \frac{\Delta t}{2}\partial_q H(\bar{q}, \bar{p}) \end{cases} \quad (11)$$

Exemple 3.9 (Dual d'une algèbre de Lie) Le logarithme $\log : (G, 1) \rightarrow (\mathfrak{g}, 0)$ défini d'un voisinage de 1 dans G vers un voisinage de 0 dans \mathfrak{g} fournit les sources et cibles du groupoïde symplectique local de \mathfrak{g}^*

$$\begin{cases} \alpha : (\mathfrak{g}, 0) \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^* : (\eta, \xi) \mapsto \left(R_{\exp(\eta)}^* T_{\exp(\eta)}^* \log \right) \cdot \xi \\ \beta : (\mathfrak{g}, 0) \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^* : (\eta, \xi) \mapsto \left(L_{\exp(\eta)}^* T_{\exp(\eta)}^* \log \right) \cdot \xi \end{cases} \quad (12)$$

où $T^* \log : T^*(\mathfrak{g}, 0) \rightarrow T^*(G, 1)$ est le relevé cotangent du logarithme. L'équation (6) s'écrit

$$\partial_t S_t(x) = H(R_{\exp d_x S_t}^* T_{\exp d_x S_t}^* \log x) \quad (13)$$

et l'intégrateur de Poisson pour H à l'ordre 1 résultant est le schéma implicite donné par les deux étapes :

(a) résoudre

$$R_{\exp \Delta t d_{\bar{x}} H}^* T_{\exp \Delta t d_{\bar{x}} H}^* \log \bar{x} = x$$

(b) et projeter

$$\tilde{x} = L_{\exp \Delta t d_{\bar{x}} H}^* T_{\exp \Delta t d_{\bar{x}} H}^* \log \bar{x}.$$

Exemple 3.10 (Structure de Poisson quadratique) Pour (x, p) des coordonnées sur $T^*\mathbb{R}^d$, une expression des sources et cibles du groupoïde symplectique local sont

$$\begin{cases} \alpha : (x, p) \mapsto \left(e^{-\frac{1}{2}\sum_i a_{ij} x_i p_i} \cdot x_j \right)_{j=1, \dots, n} \\ \beta : (x, p) \mapsto \left(e^{\frac{1}{2}\sum_i a_{ij} x_i p_i} \cdot x_j \right)_{j=1, \dots, n} \end{cases} \quad (14)$$

L'équation (6) s'écrit

$$\partial_t S_t(x) = H\left((e^{-\frac{1}{2}\sum_i a_{ij} x_i \partial_{x_i} S_t(x_i)} x_j)_j \right) \quad (15)$$

et l'intégrateur de Poisson pour H à l'ordre 1 résultant est le schéma implicite donné par les deux étapes :

(a) résoudre

$$\left(e^{-\frac{\Delta t}{2} \sum_i a_{ij} \bar{x}_i \partial_{x_i} H(\bar{x}_i)} \bar{x}_j \right)_j = x_j \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

(b) et projeter

$$\tilde{x}_j = \left(e^{\frac{\Delta t}{2} \sum_i a_{ij} \bar{x}_i \partial_{x_i} H(\bar{x}_i)} \bar{x}_j \right)_j \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

Références

- [1] A. Cannas Da Silva, A. Weinstein, *Geometric Models for Noncommutative Algebras*, American Mathematical Society, 2000.
- [2] O. Cosserat, *Symplectic groupoids for Poisson integrators*, En préparation.
- [3] O. Cosserat, C. Laurent-Gengoux, V. Salnikov, *Numerical methods in Poisson geometry and their application to mechanics*, In preparation.
- [4] A. Coste, P. Dazord, A. Weinstein, *Groupoïdes symplectiques*, Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987.
- [5] M. Crainic, R. Loja Fernandes, I. Mărcuț, *Lectures on Poisson Geometry*, American Mathematical Society, 2021.
- [6] M. Crainic, I. Mărcuț, *On the existence of symplectic realizations*, Journal of symplectic geometry, 2010.
- [7] J.-P. Dufour, N. Tien Zung, *Poisson Structures and their Normal Forms*, Birkhäuser Verlag, 2005.
- [8] S. Ferraro, M. de León, J. C. Marrero, D. M. de Diego, M. Vaquero, *On the Geometry of the Hamilton–Jacobi Equation and Generating Functions*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2017.
- [9] Z. Ge, *Generating Functions, Hamilton-Jacobi Equations and Symplectic Groupoids on Poisson Manifolds*, Indiana University Mathematics Journal, 1990.
- [10] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner, *Geometric Numerical Integration*, Springer Series in Computational Mathematics, 2002.
- [11] S. Li and D. Rupel, *Symplectic groupoids for cluster manifolds*, Journal of Geometry and Physics, 2018.
- [12] P. Libermann, C.-M. Marle, *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, 1987.
- [13] K. Mackenzie, *Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry*, Cambridge University Press, 1987.
- [14] J. E. Marsden, T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer-Verlag, 1998.
- [15] A. Pichereau, C. Laurent-Gengoux, P. Vanhaecke, *Poisson structures*, Springer-Verlag, 2012.
- [16] D. Razafindralandy, A. Hamdouni, *A review of some geometric integrators*, Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences, 5 :16, 2018.

- [17] T. Rybicki, *On the Group of Lagrangian Bisections of a Symplectic Groupoid*, Banach Center Publications, 2001.
- [18] V. Salnikov, A. Hamdouni, D. Loziienko, *Generalized and graded geometry for mechanics : a comprehensive introduction*, Mathematics and Mechanics of Complex Systems, Vol. 9, No. 1, 2021.