



**HAL**  
open science

# Optimisation topologique d'un rotor asymétrique d'une machine à aimants permanents

Théodore Cherrière

► **To cite this version:**

Théodore Cherrière. Optimisation topologique d'un rotor asymétrique d'une machine à aimants permanents. Journées SEEDS / JCGE 2022, Jeunes Chercheurs en Génie Electrique (JCGE), Jun 2022, Le Croisic, France. hal-03777572

**HAL Id: hal-03777572**

**<https://hal.science/hal-03777572>**

Submitted on 20 Sep 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Optimisation topologique d'un rotor asymétrique d'une machine à aimants permanents

Theodore Cherrière \*

\* SATIE, École Normale Supérieure Paris-Saclay,  
 4, Avenue des Sciences, 91190 Gif-sur-Yvette  
*theodore.cherriere@ens-paris-saclay.fr*

**RESUME** - Ce travail étudie l'optimisation de la distribution du fer dans le rotor d'une machine synchrone à aimants permanents enterrés. L'objectif est de maximiser le couple moyen pour un stator, une alimentation électrique et des positions d'aimants fixées. Un algorithme d'optimisation topologique par densités qui utilise des sensibilités calculées par la méthode de l'état adjoint retourne une géométrie asymétrique. Ce résultat s'explique par les interactions entre le flux générés par les aimants avec celui de l'induit, ainsi qu'au mode de fonctionnement de la machine (moteur ou bien générateur pour un sens de rotation donné). Cette topologie asymétrique surpasse la topologie symétrique classique pour des points de fonctionnement uniques, alors que les rotors symétriques permettent plus de polyvalence.

**ABSTRACT** - This work investigates the topology optimization of iron within the rotor of an internal permanent magnet synchronous machine. It aims to maximize the average torque for fixed stator, current feedings, and permanent magnets positions. A density-based procedure using sensitivities computed by the adjoint variable method gives asymmetric geometries, related to the interactions between magnets and windings flux, as well as the machine operating mode (motor or generator for a given rotation direction). It surpasses traditional symmetric topology at a given working point, while symmetric rotor design allows more flexibility.

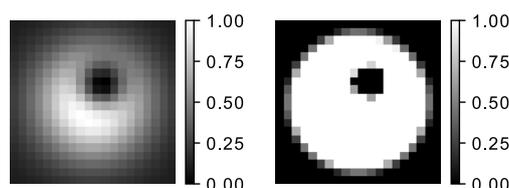
**MOTS-CLES** - Machine synchrone à aimants permanents, Magnétostatique non-linéaire, Méthode à densité, Optimisation topologique, Rotor asymétrique.

## 1. Introduction

L'optimisation topologique des machines électriques est un domaine de recherche en plein essor [1] qui commence à gagner le milieu industriel. De nombreuses méthodes ont vu le jour, comme la méthode des lignes de niveau basée sur la dérivée de forme [2], la dérivée topologique [3], ou encore les méthodes de champs de phase [4]. Les méthodes à densité inspirées de [5] en ingénierie mécanique sont majoritaires, principalement pour l'optimisation des machines à réluctance variable [6], mais aussi pour l'optimisation multi-matériaux [7], éventuellement avec des considérations multiphysiques [8]. Ce type de méthode vise à résoudre le problème d'optimisation standard suivant :

$$\begin{array}{l}
 \text{Trouver} \\
 \text{Sous contraintes}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \rho_{\text{opt}} = \arg \min_{\rho \in \mathbb{R}^N} f(\rho) \\
 \left\{ \begin{array}{l} g_i(\rho) = 0 \quad \forall i \in \llbracket 1, n_g \rrbracket \\ h_j(\rho) \leq 0 \quad \forall j \in \llbracket 1, n_h \rrbracket, \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad (1)$$

où  $\rho$  est le vecteur des variables d'optimisation appelées « densités »,  $f$  la fonction objectif à minimiser,  $g_i$  sont des contraintes d'égalité et  $h_j$  des contraintes d'inégalité. Dans ce formalisme, la géométrie est pixellisée sur les éléments du maillage, qui est fixe tout au long du processus d'optimisation. Chaque valeur de  $\rho$  correspond à la *densité* d'un *pixel* : 0 signifie qu'il est rempli d'air, et 1 qu'il est rempli de fer comme dans la fig. 1. Pour chaque pixel, il y a toujours au moins deux contraintes d'inégalité associées à ces limites inférieure et supérieure de la densité.



**FIGURE 1** – Exemples de formes représentées par une méthode à densité. La géométrie est pixellisée, et peut éventuellement contenir des matériaux intermédiaires non-physiques (en gris).

Pour être interprétée comme une géométrie physiquement réalisable,  $\rho_{\text{opt}}$  doit appartenir à  $\{0, 1\}^N$ , ce qui conduit à un problème d'optimisation combinatoire dont la résolution est très difficile pour des problèmes de large dimension. On préfère généralement des algorithmes basés sur le gradient, car ils nécessitent moins d'effort de calcul, même

Le Croisic - 14-17 juin 2022

s'ils peuvent fournir des optima locaux [9]. Afin de calculer un gradient, les propriétés des matériaux sont interpolées de manière différentiable sur  $\rho$ , ce qui introduit des « matériaux intermédiaires » non physiques dont la densité est comprise entre 0 et 1. Ces derniers doivent être éliminés autant que possible à la fin du processus d'optimisation. En effet, ils ne peuvent en général pas être interprétés physiquement.

Cet article propose une analyse de l'optimisation topologique de la répartition du fer dans le rotor d'une machine synchrone à aimants permanents enterrés. L'objectif est de maximiser le couple moyen pour un stator, une alimentation en courant et une position des aimants permanents donnés. Un rotor asymétrique est obtenu en raison de la présence d'aimants permanents et de la spécificité du mode de fonctionnement. Cette configuration est ensuite comparée à une géométrie symétrique obtenue pour une optimisation prenant en compte aussi bien le mode moteur que générateur de la machine. La structure asymétrique surclasse la structure symétrique pour un mode de fonctionnement purement moteur ou bien générateur.

## 2. Définition du problème

### 2.1 Magnétostatique 2D

Il existe plusieurs possibilités pour poser un problème magnétostatique. La plus populaire en optimisation topologique est la formulation en potentiel vecteur  $\mathbf{a}$ . Les équations de Maxwell statiques en deux dimensions conduisent à l'équation locale « forte » suivante :

$$\nabla \cdot (\nu(a_z) \cdot \nabla a_z) = j_z + \nabla \cdot \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{m} \right), \quad (2)$$

avec  $a_z$  la composante de  $\mathbf{a}$  selon l'axe  $z$ ,  $j_z$  la densité de courant,  $\nu$  la réductivité magnétique et  $\mathbf{m}$  l'aimantation des aimants permanents. Généralement, le domaine contient des matériaux ferromagnétiques non linéaires, de sorte que  $\nu$  dépend de la norme du champ d'induction magnétique  $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$ . Cette équation locale peut être discrétisée en utilisant la méthode des éléments finis (EF) pour donner le système non linéaire suivant :

$$\mathbf{K}(\nu(\mathbf{a}))\mathbf{a} = \mathbf{s}. \quad (3)$$

$\mathbf{K}$  est appelé la matrice de rigidité par analogie avec la mécanique,  $\mathbf{a}$  est le vecteur des degrés de liberté (ddl), et  $\mathbf{s}$  le second membre lié aux termes sources.  $\mathbf{K}$  dépend de  $\nu$ , qui dépend du champ magnétique local et du type de matériau. La méthode de Newton-Raphson est utilisée pour résoudre le système non linéaire (3). Elle vise à minimiser le résidu  $\mathbf{r}_n = \mathbf{K}_n \cdot \mathbf{a}_n - \mathbf{s}$  en appliquant la procédure itérative suivante jusqu'à convergence :

$$\mathbf{a}_{n+1} = - \left( \frac{d\mathbf{r}_n}{d\mathbf{a}} \right)^{-1} \cdot \mathbf{r}_n + \mathbf{a}_n \quad (4)$$

L'opérateur tangent s'écrit [1] :

$$\left( \frac{d\mathbf{r}_n}{d\mathbf{a}} \right)_{ij} = (\mathbf{K}_n)_{ij} + \sum_k \frac{d(\mathbf{K}_n)_{ik}}{da_j} a_k. \quad (5)$$

### 2.2 Méthode de l'état adjoint

La méthode de l'adjoint est le moyen le plus efficace de calculer le gradient d'une fonction objectif  $f$  qui dépend implicitement d'un grand nombre de variables par un système d'équations comme (3) [10]. On considère la fonction  $f : \rho \mapsto f(\rho, \mathbf{a}(\rho))$  dont on veut calculer le gradient  $\nabla_{\rho} f$ . La règle de la chaîne s'écrit pour chaque composante  $\rho_i$  :

$$\frac{df}{d\rho_i} = \frac{\partial f}{\partial \rho_i} + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \right)^T \frac{d\mathbf{a}}{d\rho_i}. \quad (6)$$

Le terme  $\frac{\partial f}{\partial \rho_i}$  est lié à la dépendance explicite de  $f$  avec la densité  $\rho$ . La difficulté provient de l'absence d'expression explicite de  $\frac{d\mathbf{a}}{d\rho_i}$ . En dérivant le résidu de (3), on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{a}} \frac{d\mathbf{a}}{d\rho_i} = - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{a}. \quad (7)$$

On introduit alors le système linéaire suivant, appelé *système adjoint* :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{a}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}. \quad (8)$$

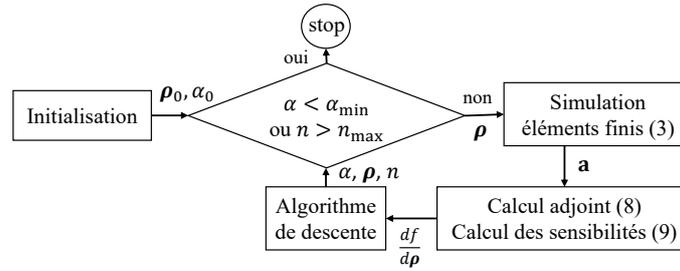


FIGURE 2 – Algorithme du processus d'optimisation.

La résolution du système adjoint (8) permet de réécrire la partie implicite de (6) de la façon suivante :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}\right)^T \frac{d\mathbf{a}}{d\rho_i} = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}\right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{a}}\right)^{-1}}_{(8)^T} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{a}} \frac{d\mathbf{a}}{d\rho_i}}_{(7)} = -\lambda^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{a}, \quad (9)$$

- L'état direct  $\mathbf{a}$  est la solution du problème physique (3). Sa résolution donne également l'opérateur tangent  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{a}}$ .
- L'état adjoint  $\lambda$  est la solution du système linéaire (8), qui ne doit être résolu qu'une seule fois.
- $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i}$  dépend explicitement de l'interpolation des propriétés du matériau, détaillée ci-après.

Le processus global d'optimisation est détaillé à la fig. 2. L'algorithme de descente comporte une adaptation du pas  $\alpha$  de type régions de confiance [11]. L'algorithme s'arrête lorsque  $\alpha < \alpha_{\min} = 10^{-3}$ .

### 2.3 Interpolation des propriétés matériaux

Dans la littérature, deux possibilités existent sur l'interpolation des propriétés magnétiques :

- Historiquement, la perméabilité magnétique  $\mu = \nu^{-1}$  a été utilisée depuis l'article fondateur [12]. En particulier, elle semble être le choix privilégié lorsqu'on a affaire à plus de deux matériaux, comme c'est le cas dans [13]–[16].
- La réductivité magnétique  $\nu$  est l'autre choix naturel. Elle a été introduite dans [17] et semble plus performante pour les problèmes simples. Elle est également largement utilisée comme dans [6], [18], et est parfois rencontrée dans l'optimisation multi-matériaux comme dans [7], [19].

Dans ce travail, on choisit une interpolation linéaire de la réductivité :

$$\nu_k(\rho_i, |\mathbf{b}|) = \nu_0 + \rho_i(\nu_{\text{iron}}(|\mathbf{b}|) - \nu_0), \quad (10)$$

avec  $\rho_i$  la densité associée à l'élément de maillage  $i$ . L'expression (10) est utilisée dans (9) pour évaluer  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i}$ .

## 3. Application à l'optimisation d'un rotor de machine synchrone à aimants

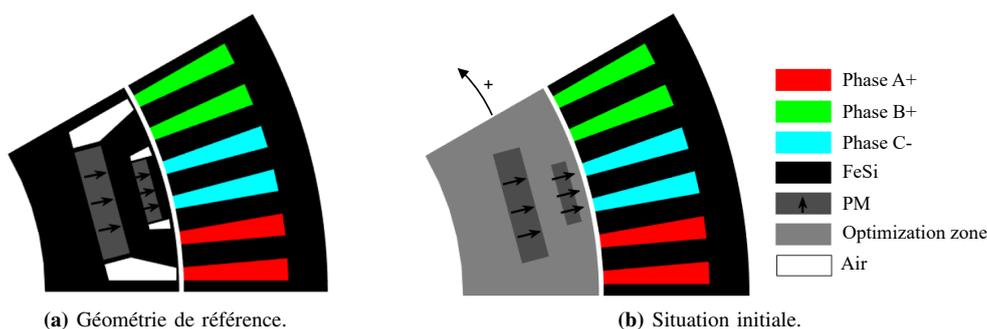
### 3.1 Présentation des cas test

Cette méthodologie est appliquée à l'optimisation de la distribution du fer dans un rotor de machine pour un stator et une densité de courant donnés. Les positions des aimants sont fixées comme dans le rotor simplifié de la BMW i3 [20], illustré dans la fig. 3b. Ce type de situation a déjà été étudié dans [21], mais contrairement à cette référence la symétrie du rotor n'est pas imposée. L'objectif est de maximiser le couple moyen calculé sur 60 positions angulaires le long d'un pôle magnétique. Tous les résultats sont donnés pour une longueur axiale normalisée  $L = 1$  m pour du FeSi. Les aimants permanents sont supposés idéaux (aimantation constante, induction rémanente  $b_r = 1$  T). Les densités de courant des trois phases dépendent de l'angle électrique  $\theta_e$  et s'écrivent :

$$\begin{cases} J_A(\theta_e) = J \cos(\theta_e + \phi) \\ J_B(\theta_e) = J \cos(\theta_e - \frac{2\pi}{3} + \phi) \\ J_C(\theta_e) = J \cos(\theta_e + \frac{2\pi}{3} + \phi) \end{cases} \quad (11)$$

$J$  est fixé à  $10 \text{ A/mm}^2$ . L'angle  $\phi$  représente un déplacement angulaire entre le rotor et le flux magnétique créé par le stator. Il joue un rôle essentiel dans ce processus d'optimisation et doit être choisi avec soin en fonction du point de fonctionnement. En effet, le rotor initial présenté dans la fig. 3b n'est pas invariant en rotation car il contient des aimants permanents dont la position est fixée. Le décalage du flux statorique vis-à-vis de ces aimants influence donc le placement du fer. Après calcul sur la géométrie de référence représentée fig.3a, l'angle  $\phi$  associé au couple minimal vaut  $\phi_{\min} = 12^\circ$ , et celui associé au couple maximal vaut  $\phi_{\max} = 288^\circ$ . Un point de fonctionnement moteur est associé à un couple moyen positif; dans ce cas, le couple moyen est maximisé avec  $\phi = \phi_{\max}$  – voir la section 3.2. De même, un point de fonctionnement générateur est lié à un couple moyen négatif; l'optimiseur doit alors le minimiser, avec

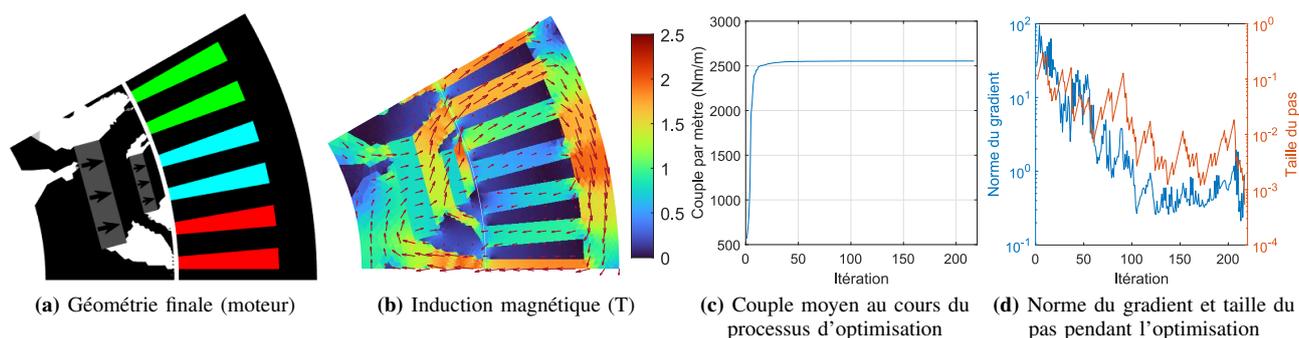
$\phi = \phi_{\min}$  – voir section 3.3. La situation initiale est représentée sur la fig. 3b, avec  $\rho = 0.5$  partout dans le rotor sauf là où se trouvent les aimants.



**FIGURE 3 – Géométrie de référence et situation initiale. Le stator et les aimants sont fixes et ne font pas partie de la zone d'optimisation.**

### 3.2 Mode de fonctionnement moteur

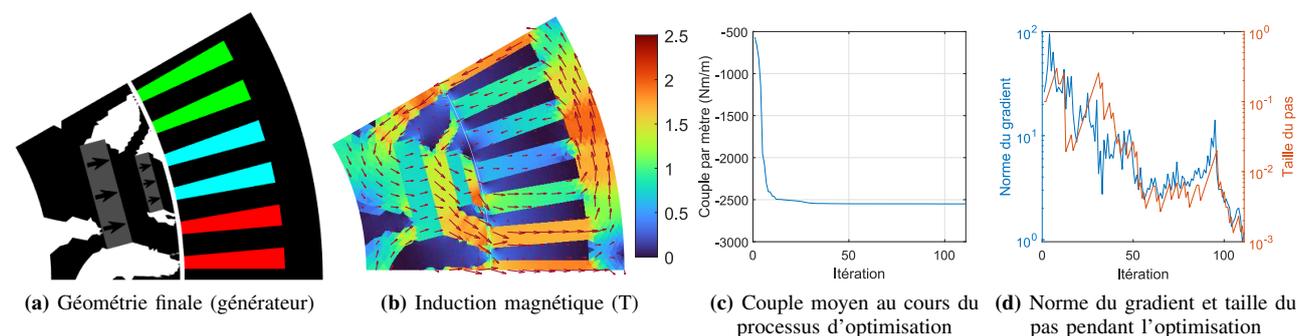
On commence par optimiser la machine pour un point de fonctionnement moteur : on maximise le couple moyen à  $\phi = \phi_{\max}$ . La convergence liée au critère d'arrêt qui porte sur la taille minimale du pas est atteinte après 217 itérations, cependant à partir de la 30<sup>e</sup> la géométrie n'évolue presque plus. L'optimisation conduit à une distribution asymétrique du fer représentée sur la fig. 4. Elle surpasse la conception symétrique présentée à la section 3.4 pour ce point de fonctionnement particulier. Cette géométrie asymétrique n'est pas conventionnelle : on propose généralement des structures symétriques pour cette situation. Une interprétation du résultat est présentée dans la section 4..



**FIGURE 4 – Résultats de l'optimisation pour un mode de fonctionnement moteur.**

### 3.3 Mode de fonctionnement générateur

Une asymétrie apparaît à nouveau lorsqu'on change le point de fonctionnement de moteur à générateur : on cherche cette fois à minimiser le couple moyen pour  $\phi = \phi_{\min}$ . La géométrie obtenue fig. 5 est similaire à la structure du moteur asymétrique fig. 4 inversé. En fait, on peut l'interpréter comme la même géométrie que pour le mode moteur, avec un sens de rotation opposé. Il existe donc un sens de rotation privilégié pour les conceptions asymétriques lorsqu'on fixe le point de fonctionnement, ou bien un mode de fonctionnement privilégié si le sens de rotation est fixé. Cette asymétrie se retrouve aussi dans les performances du tableau I : le couple est très important dans le mode de fonctionnement considéré pendant l'optimisation, mais très faible pour le mode de fonctionnement inverse.



**FIGURE 5 – Résultats de l'optimisation pour un mode de fonctionnement générateur.**

TABLE I – Résumé des résultats d'optimisation

Cas test	Symétrie	Itérations	Couple (mode moteur)	Couple (mode générateur)
Référence	OUI	-	2168.5 Nm/m	2168.5 Nm/m
Mode moteur	NON	217	2554 Nm/m	1618 Nm/m
Mode générateur	NON	111	1611 Nm/m	2549 Nm/m
Mode réversible	OUI	158	2497 Nm/m	2505 Nm/m

### 3.4 Mode de fonctionnement réversible

Les résultats précédents montrent que l'asymétrie du rotor est conditionnée par le point de fonctionnement. En considérant les modes moteur et générateur ensemble dans l'optimisation, on obtient une géométrie symétrique représentée en fig. 6. Cette structure est bien plus polyvalente que les designs asymétriques : les performances sont identiques en mode moteur ou générateur, quel que soit le sens de rotation, voir tableau II. En revanche, le couple maximal atteignable est plus faible que ceux des rotors asymétriques dans leur mode de fonctionnement privilégié.

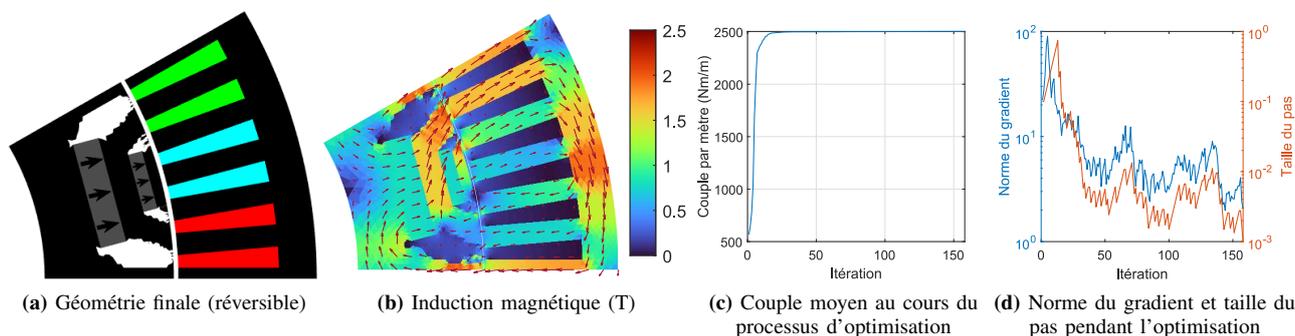


FIGURE 6 – Résultats de l'optimisation pour un mode de fonctionnement moteur et générateur.

## 4. Interprétation des résultats

Des structures asymétriques existent dans la littérature. Leur justification physique peut reposer par exemple sur le rapport d'utilisation du couple réductant (dû au circuit magnétique) et du couple hybride (dû à l'interaction entre le flux des aimants et le flux statorique) [22].

Dans notre cas, une telle structure s'explique lorsqu'on observe la distribution des flux, qui n'est elle-même pas symétrique en présence d'un aimant comme le montre la fig. 7. Cette distribution représentée fig. 7c est le résultat des contributions des aimants (fig. 7a) et de la réaction magnétique d'induit (fig. 7b). Ces flux sont symétriques en norme, mais leurs directions sont en quadrature. L'ensemble conduit à des endroits où les deux flux se compensent et où le fer devient inutile. Ce fer non-saturé peut donc être retiré, ce qui permet de réduire les courts-circuits magnétiques des aimants notamment dans la zone entourée dans la fig. 7d par rapport à la structure symétrique. Le couple moyen s'en trouve alors légèrement augmenté.

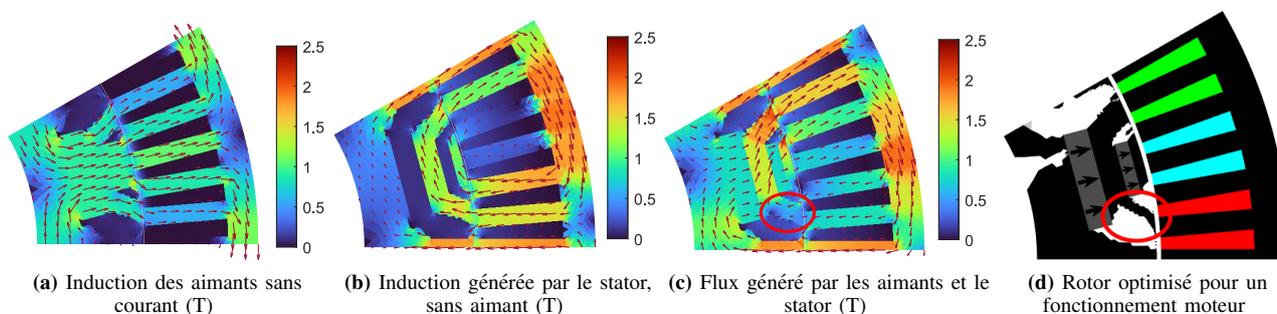


FIGURE 7 – Distribution asymétrique du flux pour un rotor symétrique (point de fonctionnement moteur).

TABLE II – Comparaison des performances des rotors symétriques et asymétriques

Mode de fonctionnement	Moteur ⚙	Générateur ⚙	Moteur ⚙	Générateur ⚙
Symétrique	+	+	+	+
Asymétrique	++	--	--	++

## 5. Conclusion et perspectives

La méthodologie d'optimisation topologique présentée dans cet article a permis d'obtenir un rotor asymétrique inattendu pour maximiser le couple moyen d'une machine à aimants permanents. Elle a également rendu possible l'analyse de cette géométrie en identifiant clairement le lien entre l'asymétrie et le point de fonctionnement. Cela démontre l'utilité de ce genre de technique d'optimisation libre de tout *a priori* dans l'analyse et la conception de machines électriques innovantes. La structure asymétrique obtenue est adaptée à des applications ne comportant qu'un seul mode de fonctionnement, qu'il soit purement moteur (extraction de gaz) ou bien générateur (comme les éoliennes, l'avionique). En revanche, une géométrie symétrique est la meilleure solution lorsqu'on recherche la polyvalence. Par ailleurs, cette approche peut être appliquée à d'autres topologies d'aimants, par exemple avec des aimants en V comme dans les applications automobiles (Toyota Prius [20]).

Une difficulté de ce genre d'approche est la définition mathématique des objectifs du problème et de ses contraintes, qui doit être suffisamment exhaustive pour éviter d'obtenir des résultats *trop* spécialisés. Pour être complète, une telle méthodologie devrait également prendre en compte des contraintes provenant d'autres physiques (forces radiales, thermique, résistance mécanique) ainsi que plusieurs types de matériaux. Par ailleurs, la question de la faisabilité de la structure se pose. Ces problématiques seront abordées dans de futurs travaux.

## Références

- [1] F. Campelo, J. A. Ramírez, and H. Igarashi. A survey of topology optimization in electromagnetics : considerations and current trends, 2010.
- [2] Sang In Park and Seungjae Min. Design of magnetic actuator with nonlinear ferromagnetic materials using level-set based topology optimization. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(2) :618–621, 2010.
- [3] Peter Gangl, Samuel Amstutz, and Ulrich Langer. Topology Optimization of Electric Motor Using Topological Derivative for Nonlinear Magnetostatics. *IEEE Transactions on Magnetics*, 52(3) :4–7, 2016.
- [4] Jae Seok Choi, Kazuhiro Izui, and Shinji Nishiwaki. Multi-material optimization of magnetic devices using an Allen-Cahn equation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(11) :3579–3582, 2012.
- [5] Martin Philip Bendsoe and Noboru Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71 :197–224, 1988.
- [6] Jaewook Lee, Jeong Hun Seo, and Noboru Kikuchi. Topology optimization of switched reluctance motors for the desired torque profile. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 42(5) :783–796, 2010.
- [7] Feng Guo and Ian P. Brown. Multi-material magneto-structural topological optimization of wound field synchronous machines. *2019 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition, ECCE 2019*, pages 6516–6523, 2019.
- [8] Feng Guo and Ian P. Brown. Simultaneous Magnetic and Structural Topology Optimization of Synchronous Reluctance Machine Rotors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 56(10), 2020.
- [9] Ole Sigmund. On the usefulness of non-gradient approaches in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(5) :589–596, 2011.
- [10] Erin Kuci, François Henrotte, Pierre Duysinx, and Christophe Geuzaine. Design sensitivity analysis for shape optimization based on the Lie derivative. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 317 :702–722, 2017.
- [11] Jorge Nocedal and Stephen J. Wright. *Numerical optimization*. Springer, 2006.
- [12] Derek N. Dyck and David A. Lowther. Automated design of magnetic devices by optimizing material distribution. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(3 PART 2) :1188–1192, 1996.
- [13] Semyung Wang, D. Youn, H. Moon, and J. Kang. Topology optimization of electromagnetic systems considering magnetization direction. *IEEE Transactions on Magnetics*, 41(5) :1808–1811, 2005.
- [14] Thibaut Labbé and Bruno Dehez. Topology optimization of electromagnetic devices composed of iron and coils : Adaptive remeshing algorithm for the convexity-oriented mapping method. *Digests of the 2010 14th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, CEFC 2010*, 46(5) :1177–1185, 2010.
- [15] Youngsuk Jung and Seungjae Min. Material Interpolation in Multi-Material Topology Optimization for Magnetic Device Design. *IEEE Transactions on Magnetics*, 55(11) :2019–2022, 2019.
- [16] Taehoon Jung, Jaejoon Lee, and Jaewook Lee. Design and Fabrication of Magnetic System Using Multi-Material Topology Optimization. *IEEE Access*, 9 :8649–8658, 2021.
- [17] Jae Seok Choi and Jeonghoon Yoo. Structural optimization of ferromagnetic materials based on the magnetic reluctivity for magnetic field problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(49-50) :4193–4206, 2008.
- [18] Philipp Seebacher, Manfred Kaltenbacher, Fabian Wein, and Henry Lehmann. A pseudo density topology optimization approach in nonlinear electromagnetism applied to a 3D actuator. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 65(3) :545–559, 2020.
- [19] Erin Kuci, Pierre Duysinx, and Christophe Geuzaine. Combination of topology optimization and Lie derivative-based shape optimization for electro-mechanical design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 59 :1723–1731, 2019.
- [20] D. Staton and J. Goss. Open Source Electric Motor Models for Commercial EV&Hybrid Traction Motors. In *CWIEME*, pages 46–59, Berlin, 2017.
- [21] Alexander Niels August Hermann, Nenad Mijatovic, and Matthew Lee Henriksen. Topology optimisation of PMSM rotor for pump application. *Proceedings - 2016 22nd International Conference on Electrical Machines, ICEM 2016*, pages 2119–2125, 2016.
- [22] Yang Xiao, Z. Zhu, Geraint Jewell, Jintao Chen, DI Wu, and Liming Gong. A Novel Asymmetric Rotor Interior Permanent Magnet Machine with Hybrid-Layer Permanent Magnets. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 57(6) :5993–6006, 2021.