



HAL
open science

Augmenter la limite de détection des exoplanètes par combinaison optimale d'observations multi-époques en imagerie directe

Jules Dallant, Éric Thiébaud, Maud Langlois, Olivier Flasseur

► To cite this version:

Jules Dallant, Éric Thiébaud, Maud Langlois, Olivier Flasseur. Augmenter la limite de détection des exoplanètes par combinaison optimale d'observations multi-époques en imagerie directe. GRETSI, Sep 2022, Nancy, France. hal-03773318

HAL Id: hal-03773318

<https://hal.science/hal-03773318>

Submitted on 9 Sep 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Augmenter la limite de détection des exoplanètes par combinaison optimale d’observations multi-époques en imagerie directe

Jules DALLANT¹, Éric THIÉBAUT¹, Maud LANGLOIS¹, Olivier FLASSEUR²

¹CRAL, UMR 5574, CNRS, Université de Lyon, ENS
9 avenue Charles André, 69561 Saint-Genis-Laval Cedex, France

²LESIA, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Université de Paris
5 place Jules Janssen, F-92190 Meudon, Meudon, France

jules.dallant@univ-lyon1.fr

Résumé – La détection d’exoplanètes par imagerie directe est l’un des plus grands défis de l’astronomie moderne. L’intensité du signal de l’étoile peut empêcher la détection d’exoplanètes en orbite dans des données individuelles mais combiner les informations d’observations à plusieurs époques permet d’abaisser les limites de détection. Nous proposons un nouvel algorithme nommé PACOME, basée sur l’approche de PACO, combinant de manière optimale, au sens du maximum de vraisemblance, des jeux de données multi-époques et améliorant la sensibilité de détection d’éventuelles exoplanètes en tenant compte de leurs mouvements orbitaux. L’efficacité de l’algorithme est testée sur le système exoplanétaire HR 8799.

Abstract – Exoplanets detection by direct imaging remains one of the most challenging field of modern astronomy. The signal of the star can prevent the detection of orbiting companions in single datasets, but combining information from several observations can boost the detection limits. We propose a new algorithm named PACOME, based on PACO’s approach, which optimally combines, in a maximum likelihood sense, multi-epoch datasets and improves the detection sensitivity of potential exoplanets by taking into account their orbital motions. The efficiency of the algorithm is tested on the well-known exoplanetary system HR 8799.

1 Introduction

L’imagerie directe d’exoplanètes est une technique d’observation particulièrement adaptée à l’étude de planètes jeunes et massives. Malgré les intérêts certains de l’imagerie directe, seulement une faible quantité d’exoplanètes ont à ce jour été détectées et ce à cause des très grands contrastes en jeu, entre le signal de l’étoile et celui de la planète (10^4 à 10^9).

Des méthodes de traitement du signal et de l’image sont donc systématiquement appliquées aux données dans le but de réduire les nuisances que sont le bruit et les fuites résiduelles de lumière stellaire (malgré l’atténuation par un coronographe) et de faciliter la détection de compagnons exoplanétaires proches de leur étoile. Les méthodes les plus courantes sont basées sur l’imagerie différentielle angulaire (ADI) et spectrale (ASDI) qui font usage de la rotation imposée au champ de vue lors de la séquence d’observations (et/ou de la variété spectrale des données) pour soustraire la contribution des fuites stellaires.

Parmi les nouvelles techniques récemment développées la méthode PACO [1] apprend localement la statistique des nuisances (contamination stellaire et bruit) à partir des corrélations spatio-spectrales dans les données ADI ou ASDI à chaque époque d’observation pour détecter des sources faibles dans le champ.

Nous présentons notre nouvelle méthode PACOME (PACO MULTI-ÉPOQUE) qui permet de combiner le signal d’intérêt

des données ADI de plusieurs époques de façon optimale en maximisant la vraisemblance des données d’après le mouvement orbital de potentielles exoplanètes.

2 L’algorithme PACOME

Notre approche s’inscrit dans la lignée des méthodes de combinaison multi-époques supposant le mouvement képlérien des exoplanètes [2] et elle intègre le formalisme de détection de PACO. Nous dérivons un critère qui permet de combiner de manière optimale les observations ADI de différentes époques, en maximisant la vraisemblance des observations étant donné le modèle.

2.1 Formalisme

Les données classiques sont des séquences d’images coronographiques k , découplées en plusieurs canaux spectraux ℓ à des temps donnés t . La position apparente sur le ciel $\theta_t(\mu)$ d’un corps suivant un mouvement képlérien dépend de 7 paramètres orbitaux (représentés par μ) que l’on cherche à estimer et de l’époque t des observations.

On modélise les données $r_{t,\ell,k}$ à l’époque t , au canal spectral ℓ et à la trame k [3] par :

$$r_{t,\ell,k} = \alpha_{t,\ell} h_{t,\ell,k}(\theta_t(\mu)) + f_{t,\ell,k} \quad (1)$$

avec $\alpha_{t,\ell} \geq 0$ le flux de la source présumé identique à toutes les trames d'une même époque ($\alpha_{t,\ell} = 0$ en l'absence d'une telle source), $h_{t,\ell,k}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu}))$ la fonction d'étalement de point de la source à la position $\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu})$ et $f_{t,\ell,k}$ un terme de nuisance qui rend compte des fuites stellaires et du bruit.

Le flux collecté en chaque pixel du détecteur est suffisant pour approximer la statistique du terme de nuisance par une gaussienne d'espérance indépendante de la trame, i.e. $f_{t,\ell,k} \sim \mathcal{N}(\bar{f}_{t,\ell}, \Sigma_{t,\ell,k})$ [1]. La log-vraisemblance des données selon le modèle à l'époque t , au canal spectral ℓ et à la trame k s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{t,\ell,k}(\alpha_{t,\ell}, \boldsymbol{\mu}) &= \log p(r_{t,\ell,k} | \alpha_{t,\ell}, \boldsymbol{\mu}) \\ &= \text{cste} - \frac{1}{2} \|r_{t,\ell,k} - \alpha_{t,\ell} h_{t,\ell,k}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu})) - \bar{f}_{t,\ell}\|_{W_{t,\ell,k}}^2 \end{aligned} \quad (2)$$

avec $W_{t,\ell,k} = \Sigma_{t,\ell,k}^{-1}$ la matrice de précision. Pour l'époque t et au canal spectral ℓ , la log-vraisemblance vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{t,\ell}(\alpha_{t,\ell}, \boldsymbol{\mu}) &= \sum_k \mathcal{L}_{t,\ell,k}(\alpha_{t,\ell}, \boldsymbol{\mu}) \\ &= \text{cste} - \frac{1}{2} \sum_k \|r_{t,\ell,k} - \alpha_{t,\ell} h_{t,\ell,k}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu})) - \bar{f}_{t,\ell}\|_{W_{t,\ell,k}}^2 \\ &= \text{cste} + \alpha_{t,\ell} b_{t,\ell}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu})) - \frac{1}{2} \alpha_{t,\ell}^2 a_{t,\ell}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu})) \end{aligned} \quad (3)$$

où

$$a_{t,\ell}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu})) = \sum_k h_{t,\ell,k}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu}))^t W_{t,\ell,k} h_{t,\ell,k}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu})), \quad (4)$$

$$b_{t,\ell}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu})) = \sum_k h_{t,\ell,k}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu}))^t W_{t,\ell,k} (r_{t,\ell,k} - \bar{f}_{t,\ell}), \quad (5)$$

qui sont des termes pré-calculés par l'algorithme PACO lors de la phase de réduction des données. Ils représentent respectivement un terme de normalisation et les données filtrées par la forme du signal d'intérêt.

Les époques t sont également indépendantes et les termes $r_{t,\ell,k} - \bar{f}_{t,\ell}$ sont centrés et décorrélés spatialement par la matrice de précision $W_{t,\ell,k}$. On peut donc établir, pour le canal spectral ℓ , la log-vraisemblance totale des données suivante :

$$\mathcal{L}_\ell(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu}) = \sum_t \mathcal{L}_{t,\ell}(\alpha_{t,\ell}, \boldsymbol{\mu}). \quad (6)$$

La recherche des paramètres orbitaux optimaux diffère selon que l'on considère les données calibrées en flux (i.e., $\alpha_{t,\ell} = \alpha_\ell$, $\forall t$) ou non. Dans ces deux cas, l'estimateur du flux de la source au sens du maximum de vraisemblance a une expression analytique et s'exprime simplement avec les termes pré-calculés $a_{t,\ell}$ et $b_{t,\ell}$:

$$\hat{\alpha}_\ell^{\text{cal}} = \arg \max_{\alpha_\ell \geq 0} \mathcal{L}_\ell(\alpha_\ell, \boldsymbol{\mu}) = \frac{[\sum_t b_{t,\ell}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu}))]_+}{\sum_t a_{t,\ell}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu}))}, \quad (7)$$

$$\hat{\alpha}_{t,\ell}^{\text{uncal}} = \arg \max_{\alpha_{t,\ell} \geq 0} \mathcal{L}_{t,\ell}(\alpha_{t,\ell}, \boldsymbol{\mu}) = \frac{[b_{t,\ell}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu}))]_+}{a_{t,\ell}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu}))}, \quad (8)$$

où $[\cdot]_+$ dénote la partie positive de l'argument pris terme à terme. En injectant les estimateurs du flux dans $\mathcal{L}_\ell(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu})$, il est possible d'exprimer la log-vraisemblance totale comme étant

uniquement dépendante des paramètres orbitaux $\boldsymbol{\mu}$:

$$\mathcal{L}_\ell^{\text{cal}}(\boldsymbol{\mu}) = \text{cste} + \frac{1}{2} \frac{[\sum_t b_{t,\ell}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu}))]_+^2}{\sum_t a_{t,\ell}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu}))}, \quad (9)$$

$$\mathcal{L}_\ell^{\text{uncal}}(\boldsymbol{\mu}) = \text{cste} + \frac{1}{2} \sum_t \frac{[b_{t,\ell}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu}))]_+^2}{a_{t,\ell}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu}))}. \quad (10)$$

Finalement, les paramètres orbitaux optimaux au sens du maximum de vraisemblance s'écrivent :

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_\ell^{\text{cal}} = \arg \max_{\boldsymbol{\mu}} \left\{ \mathcal{C}_\ell^{\text{cal}}(\boldsymbol{\mu}) = \frac{[\sum_t b_{t,\ell}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu}))]_+^2}{\sum_t a_{t,\ell}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu}))} \right\} \quad (11)$$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_\ell^{\text{uncal}} = \arg \max_{\boldsymbol{\mu}} \left\{ \mathcal{C}_\ell^{\text{uncal}}(\boldsymbol{\mu}) = \sum_t \frac{[b_{t,\ell}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu}))]_+^2}{a_{t,\ell}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu}))} \right\} \quad (12)$$

N'ayant pas d'expression analytique, les paramètres orbitaux optimaux $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ ne sont accessibles que par l'utilisation de méthodes numériques d'optimisation globale. Le critère $\mathcal{C}_\ell(\boldsymbol{\mu})$ de l'équation (11) ou (12), combinant de façon optimale les informations contenues dans les données, devrait permettre la détection de sources indétectables dans les époques individuelles et fournir simultanément leurs paramètres orbitaux.

2.2 Implantation

L'algorithme PACOME procède par un échantillonnage du critère $\mathcal{C}_\ell(\boldsymbol{\mu})$ de l'équation (11) ou (12) sur une grille 7-D suivi d'un raffinement par optimisation locale. Les principales étapes de PACOME sont les suivantes :

1. Création de l'espace de recherche 7-D.
2. Projections des positions $\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu}_j)$ sur le détecteur (aux différentes époques t) des orbites $\boldsymbol{\mu}_j$ associées à chaque nœud de l'espace.
3. Interpolations subpixelles des termes $b_{t,\ell}$ et $a_{t,\ell}$ aux positions $\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\mu}_j)$.
4. Évaluations de la fonction de coût $\mathcal{C}_\ell(\boldsymbol{\mu}_j)$ associées à chaque orbites $\boldsymbol{\mu}_j$.
5. Sélection des N meilleures orbites de l'espace maximisant la fonction de coût $\rightarrow \{\boldsymbol{\mu}_{\text{best},n}\}_{n=1:N}$.
6. Raffinement des N orbites par optimisation locale autour la solution et sélection de la meilleure $\rightarrow \boldsymbol{\mu}_{\text{opt}}$.
7. Estimation des barres d'erreurs $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\mu}_{\text{opt}}}$ associées aux paramètres orbitaux optimaux.

La recherche exhaustive de solutions sur une grille 7-D est une étape coûteuse mais nécessaire pour approcher le maximum global du critère car ce dernier est erratique et présente de nombreux maximums locaux dus à la dimensionalité du problème et la présence de bruit dans les données.

Chaque calcul de positions projetées sur le détecteur nécessite de résoudre l'équation de Kepler qui ne possède pas de solution analytique mais qui peut être résolue par une méthode numérique de recherche de zéro comme la méthode `fzero` de Brent [4].

Les positions projetées étant arbitraires, elles ont une résolution plus fine que la grille des pixels du détecteur et donc que les cartes $a_{t,\ell}$ et $b_{t,\ell}$ fournies par PACO. Pour traiter ce problème de résolution, nous interpolons les cartes $a_{t,\ell}$ et $b_{t,\ell}$. Le choix de la méthode d'interpolation est assez critique. Nous avons comparé plusieurs fonctions d'interpolation dont celle de Lanczos à quatre voisins qui s'est avérée la mieux adaptée à notre problème en donnant des valeurs du critère plus élevées.

Après avoir établi les N meilleures orbites sur la grille, un raffinement local des paramètres orbitaux est effectué autour de ces solutions. Pour maximiser la fonction objectif, nous utilisons la méthode d'optimisation VMLMB [5], qui est une méthode quasi-Newton à mémoire limitée avec contraintes de bornes. Le gradient de la fonction objectif est calculé par différences finies.

Enfin, nous disposons de deux méthodes pour le calcul des barres d'erreurs associées aux paramètres orbitaux optimaux. La première est une méthode perturbative qui consiste à injecter à répétition dans les données des réalisations aléatoires de bruit gaussien du même ordre de grandeur que la variance du signal. La solution est ré-optimisée sur les données perturbées afin d'estimer empiriquement l'écart-type des paramètres orbitaux optimaux. La deuxième méthode est analytique et exploite les bornes de Cramér-Rao. Elle est plus rapide que la première mais sensible aux possibles dégénérescences des paramètres orbitaux puisque cela demande d'inverser une estimation de la matrice de Fisher.

3 Application au système HR 8799

Nous démontrons le bon fonctionnement de notre méthode sur l'étoile HR 8799 abritant quatre exoplanètes connues. L'étude est réalisée sur 23 jeux de données ADI obtenus avec l'instrument VLT/SPHERE-IRDIS entre les années 2014 et 2021. Les cartes $a_{t,\ell}$ et $b_{t,\ell}$ ont été pré-calculées en amont par l'algorithme PACO pour chacune de ces époques et canaux spectraux. Les données ne sont pas calibrées en flux et le canal spectral choisi est le premier ($\ell = 1$).

L'espace des paramètres orbitaux explorés est résumé en Table 1. Il est délibérément choisi pour couvrir un large champ de vue englobant les quatre planètes. La fonction objectif a été évaluée pour 21×10^9 orbites au total et le calcul a pris environ 10h sur 12 cœurs avec un code en Julia [6].

Nom	Param.	Début:Fin:Taille
Demi grand-axe	a [mas]	240:1850:129
Excentricité	e [-]	0:0.4:9
Inclinaison	i [deg]	0:180:15
Date de passage au périastre	τ [-]	0:1:35
Argument du périastre	ω [deg]	0:360:31
Longitude du nœud ascendant	Ω [deg]	0:360:31
Constante de Kepler	K [mas^3/an^2]	(1.9:2.4) 10^4 :35

TABLE 1 – Espace de recherche des paramètres orbitaux des quatre planètes du système HR 8799. La constante de Kepler contraint la masse de l'étoile telle que $M_\star \in [1.30, 1.59] M_\odot$ [7].

Au vu de la distance des quatre exoplanètes à leur étoile, la couverture temporelle des données ne permet que de couvrir une petite portion de leur orbite. Les orbites respectives des quatre planètes sont donc très peu contraintes. Afin de les distinguer les unes des autres nous calculons pour chaque orbite sa distance quadratique moyenne au centre de l'image [8] (donc sa distance à l'étoile) avec θ_0 la position du centre des images :

$$d_\mu = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \|\theta_t(\mu) - \theta_0\|^2}. \quad (13)$$

La Figure 1 présente la distribution des orbites explorées en terme de fonction objectif et de distance à l'étoile. Il est possible de distinguer sur cette figure quatre pics très marqués à 140, 77, 56 et 32 pixels du centre. Ces pics correspondent aux orbites dont les projections bidimensionnelles à tous les temps tombent sur/ou proches des orbites réelles des planètes HR 8799b, c, d et e (de droite à gauche respectivement).

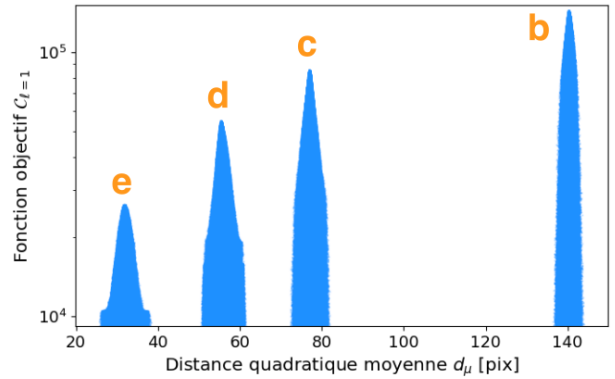


FIGURE 1 – Distribution des orbites par rapport à la fonction objectif et la distance quadratique moyenne au centre des images. Chaque point bleu représente une combinaison de paramètres orbitaux.

Pour être dynamiquement stable, les orbites des quatre planètes doivent être coplanaires (i.e., avoir des orbites de même inclinaison i et de même longitude du nœud ascendant Ω). De plus, des études montrent que le système est proche d'une résonance orbitale 1:2:4:8 [9]. On cherche donc conjointement dans les quatre pics les orbites maximisant la fonction objectif et satisfaisant les critères de coplanarité et de proche résonance orbitale. Les paramètres orbitaux optimaux retenus ainsi que leurs scores respectifs sont exprimés en Table 2. Tous les paramètres orbitaux que nous obtenons sont compatibles avec la littérature [9], [10], [11] à l'exception des paramètres orbitaux Ω , ω et τ qui sont dégénérés dans le cas d'orbites circulaires ($e \simeq 0$) et peu inclinées ($i \simeq 0^\circ$).

Les projections des orbites optimales pour les quatre planètes sont représentées en rouge en Figure 2. Les trajectoires en orange représentent toutes les orbites explorées donc la distance quadratique moyenne des projections à tous les temps t est inférieure à 1 pixel de l'orbite optimale (cf. équation 13).

Enfin, certaines études dynamiques de ce système planétaire suggèrent la présence d'une cinquième exoplanète non détectée [12]. Elle pourrait se trouver dans la partie interne du système,

Param.	Unité	Planète <i>b</i>	Planète <i>c</i>	Planète <i>d</i>	Planète <i>e</i>
<i>a</i>	[mas]	1773.7 ± 11.6	1067.2 ± 9.6	730.5 ± 80.4	434.4 ± 45.3
<i>e</i>	[-]	0.0 ± 0.1	0.1 ± 0.0	0.1 ± 0.1	0.1 ± 0.2
<i>i</i>	[deg]	22.9 ± 4.1	22.9 ± 15.0	22.9 ± 24.9	22.9 ± 3.7
τ	[-]	0.8 ± 0.1	0.2 ± 0.1	0.1 ± 0.1	0.9 ± 0.6
ω	[deg]	21.8 ± 4.0	327.7 ± 12.8	113.6 ± 25.8	175.5 ± 34.5
Ω	[deg]	45.7 ± 15.8	45.7 ± 64.9	45.7 ± 42.3	45.7 ± 36.5
<i>P</i>	[an]	535.5 ± 5.9	249.9 ± 3.4	141.5 ± 25.2	64.9 ± 10.7
<i>K</i>	[mas ³ /an ²]	19458.8 ± 197.8	19458.8 ± 2.4	19458.8 ± 2570.9	19458.8 ± 2004.0
$C_{\ell=1}^{\text{uncal}}$		143578.1	84288.5	54958.4	25518.7

TABLE 2 – Paramètres orbitaux optimaux et scores du critère obtenus pour les planètes HR 8799b, c, d et e.

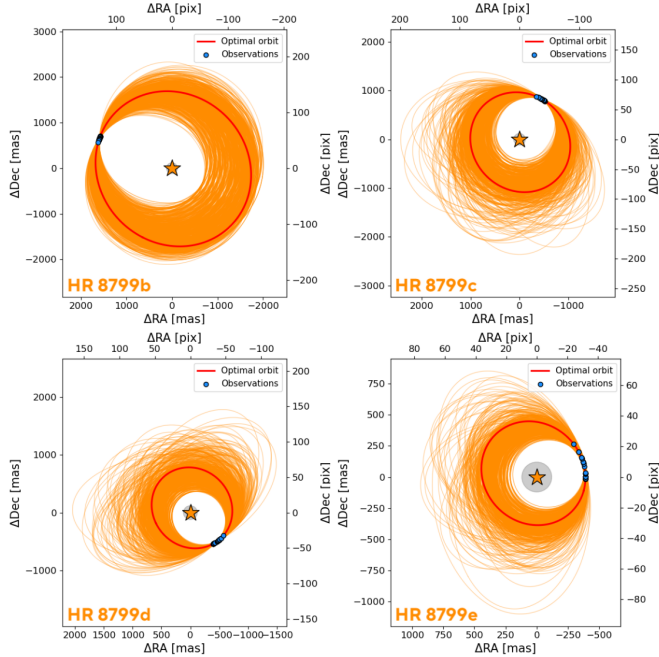


FIGURE 2 – Orbites projetées des exoplanètes HR 8799b, c, d et e.

entre l'étoile hôte et la planète HR 8799e ou au-delà de la planète HR 8799b. Le score de la fonction objectif obtenu pour la recherche de cette potentielle exoplanète avec des données ADI n'est cependant pas suffisamment élevé pour confirmer une telle détection.

4 Conclusions et perspectives

Nous avons donc mis au point une méthode qui permet simultanément, en calculant un critère optimal de combinaison multi-époques, de détecter des exoplanètes et d'estimer précisément leurs paramètres orbitaux. Elle est optimale au sens du maximum de vraisemblance, bénéficie de la haute sensibilité de l'algorithme PACO et, bien que plus précise, elle est plus rapide que les autres algorithmes de combinaison multi-époques [2] qui prennent plusieurs semaines de temps de calcul sur GPU au lieu de quelques heures sur CPU pour notre méthode.

L'application de la méthode au système HR 8799 a permis de retrouver les orbites des quatre planètes connues à ce jour,

compatibles avec la littérature.

Utiliser notre méthode avec des données ASDI traités avec PACO [13], capturant les fluctuations spectrales et temporelles des structures de fond des données et réduisant ainsi les artefacts de détection, permettra d'augmenter davantage la limite de détection et éventuellement de détecter de nouvelles exoplanètes.

Nous envisageons plusieurs évolutions, le gain en contraste atteint par l'algorithme sera quantifié par simulation de sources synthétiques à différents niveaux de flux dans les données et d'autres méthodes d'échantillonnage du critère pourront être implantées.

Références

- [1] O. Flasseur et al. *Exoplanet detection in angular differential imaging by statistical learning of the nonstationary patch covariances - The PACO algorithm*. A&A, 2018.
- [2] M. Nowak et al. *K-Stacker: Keplerian image recombination for the direct detection of exoplanets*. A&A, 2016.
- [3] E. Thiébaud et al. *Fast and robust exoplanet detection in multi-spectral, multi-temporal data*. SPIE, 2016.
- [4] R. P. Brent. *Algorithms for Minimization without Derivatives*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1973.
- [5] E. Thiébaud. *Optimization issues in blind deconvolution algorithms*. SPIE, 2022.
- [6] J. Bezanson et al. *Julia: A fresh approach to numerical computing*. SIAM, 2017.
- [7] A. Sepulveda et B. Bowler. *Dynamical Mass of the Exoplanet Host Star HR 8799*. AJ, 2022.
- [8] F. Vachier et al. *Determination of binary asteroid orbits with a genetic-based algorithm*. A&A, 2012.
- [9] K. Goździewski et C. Migaszewski. *An Exact, Generalized Laplace Resonance in the HR 8799 Planetary System*. ApJL, 2020.
- [10] A. Zurlo et al. *First light of the VLT planet finder SPHERE - III. New spectrophotometry and astrometry of the HR 8799 exoplanetary system*. A&A, 2016.
- [11] J. Wang et al. *Dynamical Constraints on the HR 8799 Planets with GPI*. AJ, 2018.
- [12] Z. Wahhaj et al. *A search for a 5th planet around HR 8799 using the star-hopping RDI technique at VLT/SPHERE*. A&A, 2021.
- [13] O. Flasseur et al. *PACO ASDI: an algorithm for exoplanet detection and characterization in direct imaging with integral field spectrographs*. A&A, 2020.