HAL open science

# Développement d'un modèle magnéto-élastique isotrope avec second ordre évanescent -application au Fe-3%Si

Julien Taurines, Boris Kolev, Rodrigue Desmorat, Olivier Hubert

**To cite this version:**

Julien Taurines, Boris Kolev, Rodrigue Desmorat, Olivier Hubert. Développement d'un modèle magnéto-élastique isotrope avec second ordre évanescent -application au Fe-3%Si. Congrès Français de Mécanique, 2022, Nantes, France. hal-03772954

**HAL Id: hal-03772954**

**https://hal.science/hal-03772954v1**

Submitted on 8 Sep 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Développement d'un modèle magnéto-élastique isotrope avec second ordre évanescent - application au Fe-3%Si

**J. TAURINES[a], B. KOLEV[a], R. DESMORAT[a], O. HUBERT[a],**

a. Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMPS - Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay, 91190, Gif-sur-Yvette, France. julien.taurines@ens-paris-saclay.fr

**Résumé :** *La description du couplage magnéto-élastique se fait généralement par la formulation d'une densité d'énergie libre de Gibbs à l'échelle macroscopique ou à l'échelle d'un domaine magnétique via un tenseur de comportement. Les non-monotonies du comportement impliquent des calculs complexes avec l'emploi de tenseurs d'ordres supérieurs. Nous proposons ici une reformulation équivalente des modèles classiques magnéto-élastiques sous forme polynomiale. Cette écriture présente l'avantage de séparer les termes volumiques des termes déviatoriques et fait intervenir des constantes matériau pouvant être identifiées séparément en choisissant des sollicitations adéquates. Un nouveau modèle assurant la saturation de la magnétostriction sous contrainte est également proposé.*

**Mots clefs : magnétostriction, effet morphique, invariants, énergie libre de Gibbs**

## 1 Introduction

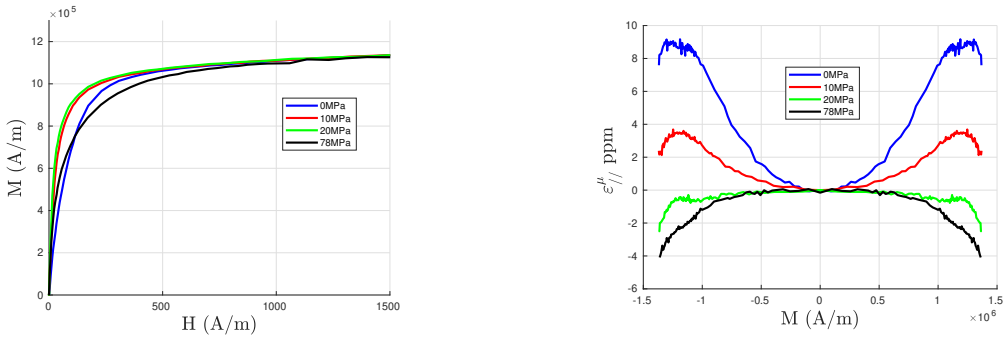
Les mécanismes physiques principaux impliqués dans le couplage magnéto-mécanique sont d'une part l'aimantation qui correspond à une réorientation des moments magnétiques d'un matériau dans la direction d'un champ magnétique appliqué et d'autre part la déformation d'origine magnétique communément dénommée magnétostriction [1]. La compréhension et la description de ces deux phénomènes peut tout aussi bien se faire à l'échelle macroscopique qu'à l'échelle microscopique. Cette dernière approche permet de décrire plus finement le comportement global en choisissant une échelle d'étude où la contrainte mécanique et l'aimantation peuvent être considérées comme homogènes : il s'agit des domaines de Weiss. À cette échelle, les lois de comportements reliant la déformation à la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et l'aimantation $\boldsymbol{m}$ au champ magnétique sont obtenues à partir de la formulation d'une densité d'énergie libre de Gibbs $\Psi^{\mu\sigma}$ faisant intervenir des variables d'état associées à la mécanique et au magnétisme [2], ici la contrainte et l'aimantation :

$$\Psi_1^{\mu\sigma}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\sigma}) = -\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mathcal{E}} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}). \tag{1}$$

Selon cette approche locale l'énergie libre permet de définir la distribution des moments magnétiques et/ou des domaines de Weiss, ce qui conduit par conséquent à une connaissance de l'aimantation et de la déformation locale

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\mu} = -\frac{\partial \Psi_1^{\mu\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{E}} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}). \tag{2}$$

Le comportement global est ensuite obtenu à partir de l'homogénéisation des grandeurs calculées à l'échelle locale. Cependant, le choix habituel d'un terme magnéto-mécanique linéaire en contrainte et quadratique en aimantation (voir (1)) est insuffisant pour décrire *l'effet morphique* [3] intervenant sur des matériaux tels que le Fe-3%Si qui se traduit par une non-monotonie de l'aimantation est d'une magnétostriction négative aux contraintes élevées (voir figure 1). Une saturation de la magnétostriction est également observable aux contraintes élevées.




(a) (b)

FIGURE 1 – Mesures expérimentales de l'aimantation (1a) et de la magnétostriction (1b) d'un alliage Fe-3%Si.

Pour traduire cette non-monotonie vis-à-vis de la contrainte, un terme quadratique est ajouté à la densité libre de Gibbs dans [4] :

$$\Psi_2^{\mu\sigma}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{E} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})). \tag{3}$$

La déformation de magnétostriction s'écrit alors

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\mu} = -\frac{\partial(\Psi_1^{\mu\sigma} + \Psi_2^{\mu\sigma})}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{E}} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{E} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}). \tag{4}$$

Elle présente un terme linéaire en contrainte qui permet le changement de signe de la magnétostriction pour des contraintes élevées mais n'assure pas sa saturation. Nous proposons par la suite une reformulation de (1) et (3) par l'utilisation d'une base d'invariants et proposons un modèle palliant ces difficultés.

## 2 Modèle analytique sans rotation

Une simulation du comportement magnéto-mécanique est proposée dans [4]. Pour cela, il est supposé que

- le matériau est un agrégat de grains dont l'orientation spatiale est équi-répartie ;
- la magnétostriction du premier ordre est décrite en supposant une symétrie cubique et fait donc intervenir deux constantes matériau $\lambda_{100}$ et $\lambda_{111}$ ;
- des conditions isotropes sont utilisés pour le second ordre ;
- la contrainte et le champ magnétique sont homogènes dans le matériau ;
- la contrainte est uniaxiale et colinéaire au champ magnétique.

Connaissant la densité d'énergie libre de Gibbs pour un domaine la fraction volumique $f_\alpha$ de ce dernier est

$$f_\alpha = \frac{\exp\left(-A_s(\Psi_1^{\mu\sigma}(\boldsymbol{m}_\alpha,\boldsymbol{\sigma}) + \Psi_2^{\mu\sigma}(\boldsymbol{m}_\alpha,\boldsymbol{\sigma}) - \mu_0\boldsymbol{h}_\alpha.\boldsymbol{m}_\alpha)\right)}{\int_\alpha \exp\left(-A_s(\Psi_1^{\mu\sigma}(\boldsymbol{m}_\alpha,\boldsymbol{\sigma}) + \Psi_2^{\mu\sigma}(\boldsymbol{m}_\alpha,\boldsymbol{\sigma}) - \mu_0\boldsymbol{h}_\alpha.\boldsymbol{m}_\alpha)\right)\mathrm{d}\alpha}, \tag{5}$$

$A_s$ étant un paramètre matériau et $-\mu_0\boldsymbol{h}_\alpha.\boldsymbol{m}_\alpha$ la densité d'énergie de Zeemann. La déformation macroscopique est alors

$$\boldsymbol{\epsilon}_m^\mu = \int_\alpha f_\alpha \boldsymbol{\epsilon}^\mu(\boldsymbol{m}_\alpha,\boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}\alpha \tag{6}$$

et l'aimantation macroscopique

$$\boldsymbol{M} = \int_\alpha f_\alpha \boldsymbol{m}_\alpha \mathrm{d}\alpha. \tag{7}$$

Les figures 2, 3 et 4 sont obtenues en utilisant ce modèle.

# 3 Formulation par utilisation d'une base d'invariants

La théorie des invariants [5, 6, 7] est un outil robuste et efficace permettant de déterminer les quantités invariantes susceptibles d'apparaitre dans une densité d'énergie libre de Gibbs. Le point principal pour arriver à cet objectif est le choix d'un groupe traduisant les symétries physiques [8, 9, 10, 11]. A l'échelle d'un domaine magnétique, la symétrie est cubique et le comportement physique du matériau peut donc être décrit par le groupe du cube $\mathbb{O}$. Par conséquent, toute énergie $\mathbb{O}$-invariante s'exprime comme une fonction d'invariants $I_k$ sous l'action du groupe du cube

$$\Psi^{\mu\sigma} = \Psi^{\mu\sigma}(I_k). \tag{8}$$

Une décomposition du tenseur des contraintes a été proposée par [12] afin d'obtenir ces invariants :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^d + \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} + \frac{1}{3}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}))\mathbf{1},$$

où, dans la base canonique du cube $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$,

$$\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}^d = \begin{pmatrix} \sigma'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} \end{pmatrix}.$$

Une base d'invariants cubiques linéaires en contrainte et quadratiques en aimantation (dépendants de l'orientation) est donnée par

$$\boldsymbol{\sigma}^d : (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^d, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} : (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^{\bar{d}}. \tag{9}$$

Les invariants d'ordre supérieur en contrainte [13] sont

$$\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}\,2} : (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^d, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}\,2} : (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^{\bar{d}}, \quad (\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}\boldsymbol{\sigma}^d) : (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^{\bar{d}}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{d\,2} : (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^d \tag{10}$$

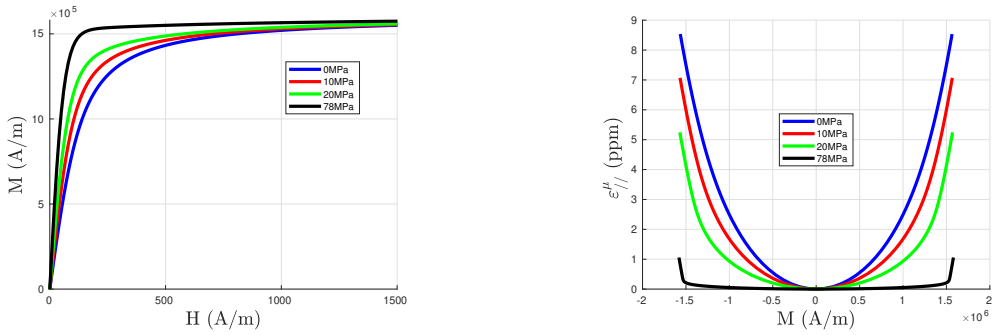
ainsi que le produit des invariants linéaires avec la trace du tenseur des contraintes. On note que les invariants isotropes $\boldsymbol{\sigma}' : (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})'$ et $\boldsymbol{\sigma}'^{\,2} : (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})'$ s'obtiennent par combinaison des invariants cubiques.

## 3.1 Reformulation équivalente de modèles usuels

Le modèle de le plus courant de magnétostriction est celui donné par (2) utilisant deux constantes matériau $\lambda_{100}$ et $\lambda_{111}$. Une formulation équivalente par dérivation des invariants (9) conduit à

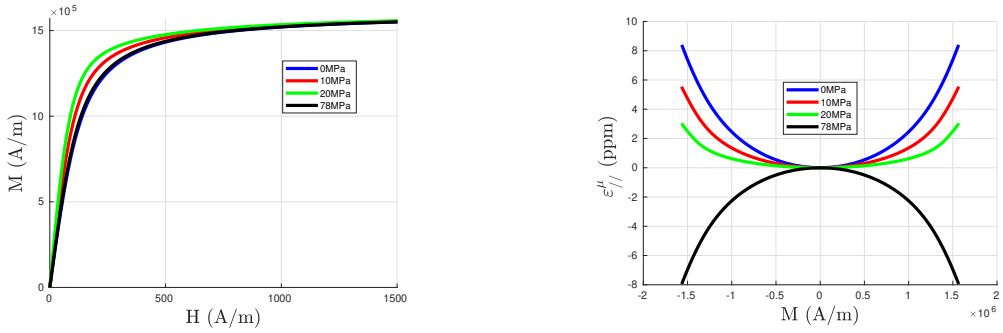
$$\boldsymbol{\epsilon}^{\mu} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \lambda_{100}(\gamma_1^2 - \frac{1}{3}) & \lambda_{111}\gamma_1\gamma_2 & \lambda_{111}\gamma_1\gamma_3 \\ \lambda_{111}\gamma_1\gamma_2 & \lambda_{100}(\gamma_2^2 - \frac{1}{3}) & \lambda_{111}\gamma_2\gamma_3 \\ \lambda_{111}\gamma_1\gamma_3 & \lambda_{111}\gamma_2\gamma_3 & \lambda_{100}(\gamma_3^2 - \frac{1}{3}) \end{pmatrix} = -c_{210}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^{d} - c_{201}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^{\overline{d}}. \quad (11)$$

avec $\lambda_{100} = -\frac{2}{3}c_{210}M_s^2$ et $\lambda_{111} = -\frac{2}{3}c_{201}M_s^2$, $M_s$ étant l'aimantation à saturation du matériau. Comme le montre la figure 2, la non-monotonie de l'aimantation et le changement de signe de la magnétostriction ne sont pas décrits par ce modèle.




(a) (b)

FIGURE 2 – Utilisation d'une densité d'énergie libre de Gibbs linéaire en contrainte pour la modélisation de l'aimantation (2a) et de la magnétostriction (2b) d'un alliage Fe-3%Si.




(a) (b)

FIGURE 3 – Ajout d'un terme quadratique à la densité d'énergie libre de Gibbs pour la modélisation de l'aimantation (3a) et de la magnétostriction (3b) d'un alliage Fe-3%Si.

La magnétostriction de second-ordre de l'équation (2) est isotrope et s'écrit sous forme polynomiale

$$\boldsymbol{\epsilon}_2^{\mu} = -A((\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})'\boldsymbol{\sigma}' + \boldsymbol{\sigma}'(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})')' - B\left((\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}))(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})' + ((\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})' : \boldsymbol{\sigma}')\,\mathbf{1}\right). \quad (12)$$

Les constantes A et B s'expriment en fonction des constantes de Kraus [1] $\lambda_s'$ et $\lambda_s''$ :

$$A = \frac{3}{2}\frac{\lambda_s''}{Ms^2}, \qquad B = -\frac{1}{2}\frac{3\lambda_s' + \lambda_s''}{Ms^2}. \tag{13}$$

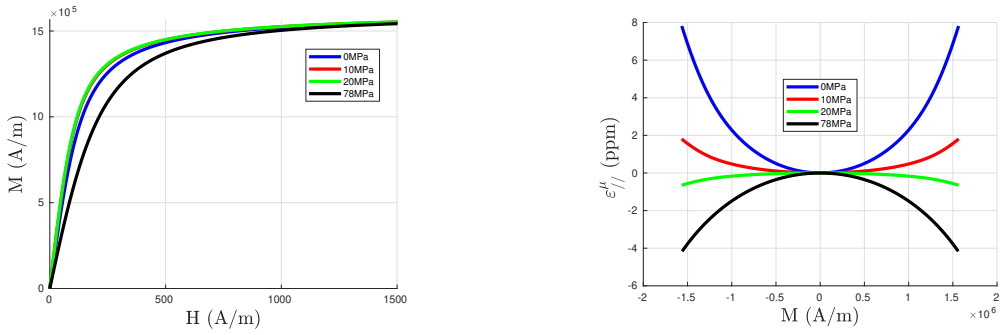
Les termes hydrostatiques et déviatoriques sont découplés dans (12). La figure 3 montre que si les deux phénomènes évoqués plus haut sont bien représentés, la magnétostriction ne sature pas en contrainte.

## 3.2 Modélisation non-polynomiale

La saturation de la magnétostriction aux contraintes élevées reflète une linéarité de l'énergie en contrainte. Cependant, le changement de signe de la déformation traduit la présence d'un terme quadratique pour les contraintes plus faibles. Par conséquent, l'équation (10) a été modifiée afin de rendre le terme de second ordre évanescent. Seul le premier invariant quadratique a été conservé afin de garantir la conservation du volume et la décroissance de ce terme est pilotée par la contrainte équivalente de Von Mises :

$$\Psi^{\mu\sigma}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\sigma}) = c_{210}\boldsymbol{\sigma}^d : (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^d + c_{201}\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} : (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^{\bar{d}} + A\frac{(\boldsymbol{\sigma}')^2 : (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})'}{1 + c\sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'}}. \tag{14}$$

Comme le montre la figure (4), les deux phénomènes évoqués dans le paragraphe précédents sont bien représentés par ce modèle.




(a) (b)

FIGURE 4 – Ajout d'un terme quadratique évanescent à la densité d'énergie libre de Gibbs pour la modélisation de l'aimantation (4a) et de la magnétostriction (4b) d'un alliage Fe-Si.

# 4 Conclusion

Cette étude a permis de déterminer une base d'invariants susceptibles d'intervenir dans une densité d'énergie libre de Gibbs afin de décrire le comportement magnéto-mécanique d'un matériau. A partir de celle-ci, une réécriture des modèles usuels a été effectuée. Les faiblesses évoquées des modèles préexistants ont été corrigées par l'introduction d'un terme de second ordre évanescent isotrope. L'écriture de ce nouveau terme en fonction d'invariants cubiques fera l'objet de travaux futurs.

# Références

[1] L. Kraus. On the stress dependence of the saturation magnetostriction in amorphous alloys. *Phys. stat. sol.*, 109(a) :K71, 1988.

[2] O. Hubert and L. Daniel. Multiscale modeling of the magneto-mechanical behavior of grain-oriented silicon steels. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 320(7) :1412–1422, April 2008.

[3] W. P. Mason. A phenomenological derivation of the first- and second-order magnetostriction and morphic effects for a nickel crystal. *Physical Review*, 82(5) :715–723, June 1951.

[4] O. Hubert. Multiscale magneto-elastic modeling of magnetic materials including isotropic second order stress effect. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 491 :165564, December 2019.

[5] B. Sturmfels. *Algorithms in Invariant Theory*. SpringerWienNewYork, 1993.

[6] P. J. Olver. *Classical Invariant Theory*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1999.

[7] H. Derksen and G. Kemper. *Computational Invariant Theory*, volume 130 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer, Heidelberg, enlarged edition, 2015. With two appendices by Vladimir L. Popov, and an addendum by Norbert A'Campo and Popov, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, VIII.

[8] L. Landau and E. Lifchitz. *Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon, 1960.

[9] R. R. Birss. *Symmetry and Magnetism*. North-Holland Publishing Company, John Wiley & Sons, 1964.

[10] Y. Sirotine and M. Chaskolskaia. *Fondements de la Physique des Cristaux*. Mir (french translation), 1984.

[11] T. Weller and G. Geymonat. Piezomagnetic tensors symmetries : an unifying tentative approach. In *Configurational Mechanics*, page 13. A. A. Balkema Publishers, 2004.

[12] A. Bertram and J. Olschewski. Anisotropic creep modelling of the single crystal superalloy SRR99. *Computational Materials Science*, 5 :12–16, 1996.

[13] J. Taurines, M. Olive, R. Desmorat, O. Hubert, and B. Kolev. Integrity bases for cubic nonlinear magnetostriction. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, page 167885, 2021.