



**HAL**  
open science

# Optimisation paramétrique par métamodèle en dynamique vibratoire non linéaire avec résolution fréquentielle

Quentin Ragueneau, Luc Laurent, Antoine Legay, Thomas Larroque, Romain Crambuer

## ► To cite this version:

Quentin Ragueneau, Luc Laurent, Antoine Legay, Thomas Larroque, Romain Crambuer. Optimisation paramétrique par métamodèle en dynamique vibratoire non linéaire avec résolution fréquentielle. 25ème Congrès Français de Mécanique, CFM 2022, Aug 2022, Nantes, France. hal-03770669

**HAL Id: hal-03770669**

**<https://hal.science/hal-03770669>**

Submitted on 12 Jan 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Optimisation paramétrique par métamodèle en dynamique vibratoire non linéaire avec résolution fréquentielle

**Q. RAGUENEAU<sup>a, b, c</sup>, L. LAURENT<sup>a, b</sup>, A. LEGAY<sup>a, b</sup>, T. LARROQUE<sup>c</sup>,  
R. CRAMBUER<sup>c</sup>**

a. Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, EA 3196, Conservatoire national des arts et métiers, 292 rue Saint-Martin, F-75003, Paris, France ; quentin.ragueneau@lecnam.net

b. HESAM Université, Paris, France

c. INGELIANCE Technologies, Centre de simulation numérique, 6 rue Nicolas Leblanc, 33700, Mérignac, France ; thomas.larroque@ingeliance.com

## Résumé :

*Dans un contexte normatif exigeant en constante évolution, le dimensionnement optimal des structures industrielles est un enjeu important. En particulier, les assemblages de structures peuvent présenter des comportements vibratoires non linéaires dont la considération est un enjeu important lors de la conception. Cette étude se concentre sur la mise en œuvre d'une démarche d'optimisation globale efficace basée sur l'emploi d'un solveur dédié à la résolution du problème dynamique non linéaire et d'un métamodèle. Le problème mécanique est résolu grâce à la méthode fréquentielle de l'équilibrage harmonique, associée à une continuation par pseudo longueur d'arc. Une optimisation bayésienne est ensuite mise en œuvre. Elle s'appuie sur la construction et l'enrichissement d'un métamodèle de la fonction objectif de type processus gaussien à partir d'une base de jeux de paramètres échantillonnés et des réponses associées. Cette méthodologie est finalement employée pour l'optimisation multiparamétrique d'un oscillateur de Duffing.*

## Abstract :

*In order to satisfy challenging standards, the optimal design of industrial structures is an important issue. Mechanical assemblies can especially be subject to nonlinear vibratory behaviour that should be considered during the design process. This work aims at the implementation of an effective global optimization method relying on a dedicated nonlinear dynamical solver and on a surrogate model. The mechanical problem is solved using the harmonic balance method with pseudo-arclength continuation. A Bayesian Optimization is then implemented. This method relies on the building and enrichment of a gaussian process surrogate model of the objective function from a sample of the design space and the associated responses. Finally, the strategy is used for the multiparametric optimization of a Duffing oscillator.*

**Mots clefs : Optimisation, dynamique non linéaire, métamodèle, équilibrage harmonique**

# 1 Introduction

Afin de satisfaire des normes exigeantes lors de la conception ou bien de réajuster des structures existantes suite à une évolution des normes, la recherche des paramètres optimaux régissant le comportement des structures est un enjeu important de la phase de dimensionnement. Pour cela, différentes méthodes mathématiques d'optimisation globale peuvent être utilisées [1]. Ces méthodes amènent à la réalisation d'un nombre souvent important de simulations numériques pour différents jeux de paramètres. L'emploi de ce type de méthodes s'avère difficile dans le cas des structures assemblées dont les comportements non linéaires peuvent nécessiter des modélisations fines engendrant des résolutions coûteuses en temps. Ainsi, la majorité des études en dynamique des structures se fait sur un modèle linéaire approchant le comportement non linéaire ce qui permet la mise en place de méthodes de résolution efficaces, comme la superposition modale. Cependant, cette approximation devient trop imprécise lors de fonctionnements en conditions extrêmes et il devient alors nécessaire de prendre en compte les non-linéarités dans la modélisation. L'augmentation des moyens de calculs a permis l'utilisation de méthodes de résolution en dynamique non linéaire mais ces dernières restent coûteuses en temps de calcul et il est difficilement envisageable de les associer directement à une méthode d'optimisation conventionnelle. Ainsi, le développement d'une démarche d'optimisation globale efficace pour la dynamique non linéaire présente un intérêt particulier.

Les méthodes de résolution en dynamique peuvent se classer en deux catégories : d'un côté les méthodes temporelles qui cherchent à évaluer l'évolution de la réponse sur un intervalle de temps, de l'autre les méthodes fréquentielles qui visent à déterminer le spectre fréquentiel de la réponse. En dynamique non linéaire, les méthodes temporelles se révèlent fiables et sont implémentées dans les logiciels industriels de calcul par éléments finis mais demandent un temps de calcul important pour de grandes structures. Dans le cadre de ces travaux, l'intérêt s'est porté sur la méthode fréquentielle de l'équilibrage harmonique (*Harmonic Balance Method HBM*) [2] qui présente un coût de calcul moins important tant que le spectre fréquentiel de la réponse peut être approché sur une plage de fréquences suffisamment réduite. Son utilisation en dynamique non linéaire se fait selon la stratégie résumée par SARROUY et SINOU [3] utilisant une procédure d'alternance temps/fréquence (*Alternating Frequency Time, AFT*) pour déterminer le spectre fréquentiel des termes non linéaires ainsi qu'une méthode de continuation afin de déterminer l'évolution de la réponse en fonction d'un paramètre (par exemple la fréquence d'excitation). La méthodologie a été appliquée à de grandes structures non linéaires lors de récents travaux [4, 5].

Dans le domaine de l'optimisation, le développement du *Machine learning* a permis l'émergence de stratégies d'optimisation globale efficaces. Parmi celles-ci, l'optimisation bayésienne [6] s'appuie sur un métamodèle enrichi itérativement pour fournir une approximation de la fonction objectif. L'enrichissement, employant une fonction d'acquisition, conduit à l'amélioration de la qualité d'approximation du métamodèle dans le but de localiser le minimum global de la fonction objectif. Cette méthodologie vise à réduire au maximum le nombre d'appels coûteux au solveur.

L'objectif de ce travail est de mettre en place une telle stratégie d'optimisation en utilisant (1) la méthode de l'équilibrage harmonique avec une procédure de continuation pour résoudre le problème mécanique et (2) une démarche d'optimisation globale employant un métamodèle de type processus gaussien [7] et une méthodologie d'enrichissement de ce dernier. Ces deux approches sont succinctement présentées et leur mise en oeuvre est réalisée sur le problème de l'oscillateur de Duffing afin d'en conduire une optimisation paramétrique globale.

## 2 Résolution mécanique par la méthode de l'équilibrage harmonique

Dans cette partie, le principe de la méthode de l'équilibrage harmonique est succinctement présenté et son association avec une procédure de continuation est illustrée.

L'étude porte sur une structure non linéaire discrétisée par éléments finis en  $n$  degrés de liberté et soumise à une excitation harmonique en force. L'équation du mouvement d'un tel système s'écrit sous la forme générale discrétisée :

$$\mathbf{M}\ddot{\underline{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\underline{x}}(t) + \mathbf{K}\underline{x}(t) + \underline{f}_{\text{nl}}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) = \underline{f}_{\text{excit}}(t), \quad (1)$$

où  $\underline{x}$  est le vecteur contenant le déplacement de chacun des degrés de liberté<sup>1</sup>,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices de masse, amortissement et raideur de la structure, elles sont constantes, réelles et symétriques de taille  $n \times n$ . Le vecteur  $\underline{f}_{\text{nl}}$  contient les termes non linéaires et le vecteur  $\underline{f}_{\text{excit}}$  correspond à la force excitatrice s'appliquant à la structure définie par :

$$\underline{f}_{\text{excit}}(t) = \underline{F} \cos(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

où  $\omega$  est la pulsation de l'excitation,  $\underline{F}$  correspond à l'amplitude s'exerçant sur chacun des ddl et  $\varphi$  désigne le déphasage.

### 2.1 Méthode de l'équilibrage harmonique

La méthode de l'équilibrage harmonique [2, 8, 9] permet la recherche de solutions périodiques de l'équation (1) en régime permanent dans le domaine fréquentiel. La méthode est ici brièvement décrite et des éléments complémentaires peuvent être trouvés dans les travaux de MABILIA [5].

Une solution approchée de l'équation (1) de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  est recherchée sous la forme d'une série de Fourier à coefficients réels tronquée à l'ordre  $n_h$  :

$$\underline{x}(t) = \underline{a}_0 + \sum_{k=1}^{n_h} (\underline{a}_k \cos(k\omega t) + \underline{b}_k \sin(k\omega t)). \quad (3)$$

Plus le nombre  $n_h$  d'harmoniques gardés dans l'approximation est important, plus la solution est proche de la solution exacte. L'objectif de la HBM est de déterminer les coefficients de cette décomposition.

De la même manière, le vecteur contenant les termes non linéaires est approché par une décomposition en série de Fourier tronquée à l'ordre  $n_h$  :

$$\underline{f}_{\text{nl}}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) \simeq \underline{\alpha}_0 + \sum_{k=1}^{n_h} [\underline{\alpha}_k \cos(k\omega t) + \underline{\beta}_k \sin(k\omega t)]. \quad (4)$$

Les notations  $\underline{X}_h$ ,  $\underline{F}_{\text{nl}_h}$  et  $\underline{F}_{\text{excit}_h}$  sont introduites pour désigner respectivement les vecteurs de taille  $n(2n_h + 1)$  contenant les coefficients de Fourier de la solution, des efforts non linéaires et de l'excitation (voir Figure 1).

L'équation (1) est projetée selon une procédure de Galerkin [10] pour obtenir l'équation matricielle

1. Les notations  $\dot{\bullet}$  et  $\ddot{\bullet}$  désignent les dérivées successives par rapport au temps  $t$ .



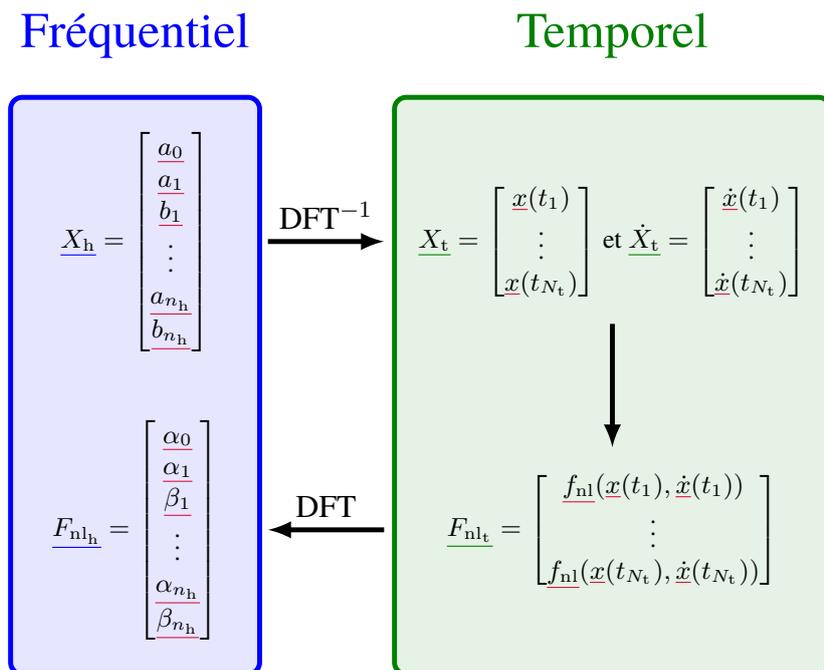


FIGURE 1 – Principe de la méthode AFT.

## 2.2 Procédure de continuation

En général, la solution est recherchée sur une gamme de fréquences d'excitation plutôt que pour une unique pulsation  $\omega$  de la force excitatrice afin de tracer la fonction de réponse en fréquence (FRF) qui correspond à la représentation d'une quantité d'intérêt de la réponse (par exemple le déplacement maximal) en fonction de la fréquence (ou de la pulsation) d'excitation. En dynamique non linéaire, plusieurs solutions, parfois instables, peuvent exister pour une même fréquence d'excitation. Les méthodes de continuation permettent de suivre les différentes branches de la solution sur une gamme de variation d'un paramètre. Dans ce travail, une procédure de continuation par prédiction tangente et correction par pseudo longueur d'arc [13] est mise en place pour suivre l'évolution de la solution sur une plage de pulsations  $\omega$ .

La Figure 2 montre le déroulement du calcul. À partir du  $k^{\text{ème}}$  point calculé  $\underline{Y}_k = (\underline{X}_{h_k}, \omega_k)$  la procédure permet de déterminer le point suivant  $\underline{Y}_{k+1}$ . Le terme  $\omega$  devient une inconnue de l'équation (5) et cette équation est résolue par une procédure itérative de Newton-Raphson. La phase de prédiction consiste à choisir l'itération initiale  $\underline{Y}_{k+1}^{(0)} = (\underline{X}_{h_{k+1}}^{(0)}, \omega_k^{(0)})$  comme le point situé le long de la droite tangente au point précédent et à une distance  $\Delta s$  de ce dernier selon la norme euclidienne. La phase de correction correspond aux itérations successives de la méthode de Newton-Raphson. La pulsation  $\omega$  étant devenue une inconnue, il est nécessaire de rajouter une équation à (5) pour fermer le système. Dans le cas de la correction par pseudo longueur d'arc cette équation supplémentaire est obtenue en forçant les itérations à suivre une direction perpendiculaire à la droite tangente au point précédent.

La continuation par pseudo longueur d'arc permet ainsi de tracer toutes les branches de la réponse en fréquence à condition que le pas  $\Delta s$  soit suffisamment petit au niveau des points de bifurcation [14].

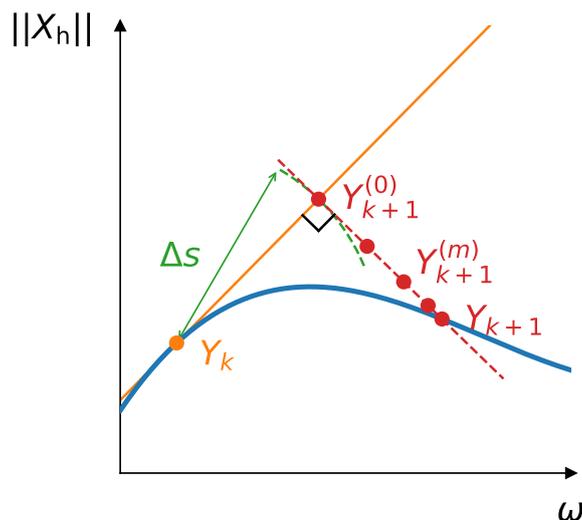


FIGURE 2 – Illustration de la continuation par pseudo longueur d'arc avec prédiction tangente.

## 2.3 Illustration de la méthodologie

La méthodologie présentée précédemment est illustrée sur un oscillateur de Duffing, un système à un degré de liberté comportant une raideur cubique. Un schéma de cet oscillateur est présenté en Figure 3 et l'équation de son mouvement s'écrit :

$$m\ddot{x}(t) + \xi\dot{x}(t) + kx(t) + k_{nl}x^3(t) = f_e \cos(\omega t), \quad (8)$$

avec  $m$  la masse,  $\xi$  le facteur d'amortissement,  $k$  la raideur linéaire,  $k_{nl}$  la raideur non-linéaire,  $f_e$  l'amplitude de la force excitatrice et  $\omega$  sa pulsation. Cette équation caractérise un système qui s'assouplit (si  $k_{nl} < 0$ ) ou se raidit (si  $k_{nl} > 0$ ) au cours de son déplacement. L'oscillateur de Duffing peut présenter un comportement chaotique par doublement de période pour certaines valeurs de ses paramètres [15]. Cette étude portant sur la recherche de solutions de fréquence identique à celle de l'excitation, ces cas ne seront pas abordés.

La réponse en fréquence de ce système est tracée en Figure 4 en utilisant la méthode de l'équilibrage harmonique avec une continuation par pseudo longueur d'arc pour différentes valeurs du terme non-linéaire  $k_{nl}$ . Les courbes obtenues mettent en évidence le caractère assouplissant ou raidissant propre à l'oscillateur de Duffing ainsi que la présence de bifurcations lorsque  $k_{nl} \neq 0$ . L'utilisation d'une méthode de continuation permet de tracer toutes les branches des solutions au niveau des bifurcations et la Figure 4 met en évidence l'existence de trois solutions pour certaines fréquences.

La méthodologie énoncée dans cette partie constitue ainsi une méthode fiable pour évaluer le comportement mécanique des structures tout en suivant les possibles bifurcations sans présenter de phénomène de saut. Ce solveur mécanique peut alors être utilisé en dynamique non-linéaire afin d'évaluer les quantités d'intérêt à minimiser d'un problème d'optimisation.

## 3 Stratégie d'optimisation globale efficace

Lors d'une démarche d'optimisation, l'objectif est de trouver les paramètres de la structure qui minimisent une quantité d'intérêt nommée fonction objectif. La valeur de la fonction objectif n'étant de

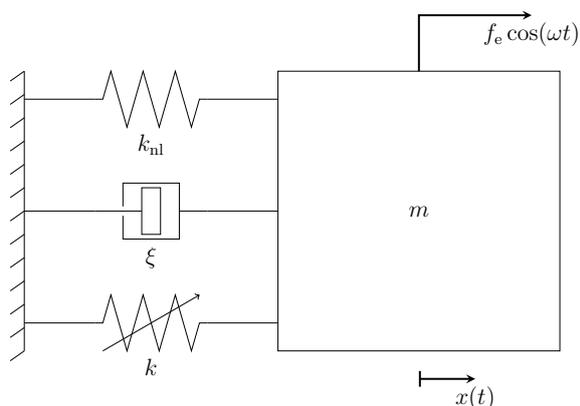
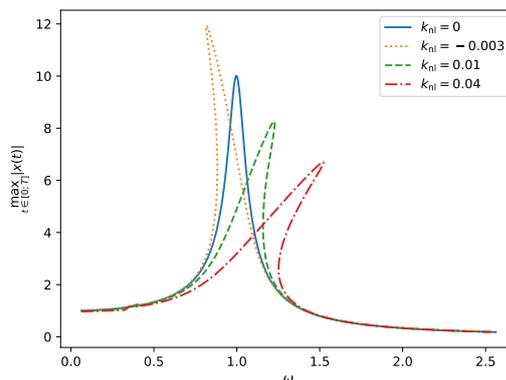


FIGURE 3 – Schéma de l'oscillateur de Duffing.

FIGURE 4 – Amplitude maximale du déplacement de l'oscillateur de Duffing en fonction de la pulsation d'excitation.  $m = 1$ ,  $\xi = 0,1$ ,  $k = 1$ ,  $f_e = 1$ ,  $k_{nl} \in \{-0,003; 0; 0,01; 0,04\}$ . Paramètres de la HBM :  $n_h = 8$ ,  $N_t = 40$ ,  $\Delta s_{max} = 0,05$ .

manière générale pas connue sur tout le domaine de variation des paramètres, elle peut posséder plusieurs minima locaux et il est donc nécessaire de conduire une optimisation globale. Les algorithmes d'optimisation globale classiques demandent cependant un nombre très important d'évaluations de la fonction objectif (plusieurs centaines, voire plusieurs milliers). Si la méthode de la partie 2 peut être relativement efficace comparée à d'autres méthodes de résolution en dynamique non linéaire, son coût de calcul reste trop important pour l'utiliser pour l'évaluation de la fonction objectif dans le cadre d'un algorithme d'optimisation globale.

Pour remédier à cette problématique, une stratégie d'optimisation globale efficace s'appuyant sur un métamodèle de la fonction objectif est mise en place [6]. Le principe de cette méthode est décrit en Figure 5. Un métamodèle de la fonction objectif est créé à partir d'une base de jeux de paramètres échantillonnés et des réponses associés. Le métamodèle est ensuite enrichi intelligemment afin de permettre la localisation du minimum global.

### 3.1 Métamodèle de type processus gaussien

*Ce paragraphe fait intervenir les notations couramment employées pour les modèles de substitution qui peuvent être proches de celles employées précédemment pour d'autres variables.*

Un métamodèle, aussi nommé modèle de substitution, est un modèle capable de fournir une approximation d'une fonction  $y$ . Le métamodèle est construit à partir d'évaluations de la fonction en un nombre limité de point échantillonnés et peut fournir, une fois construit, une approximation de la fonction en n'importe quel point pour un coût de calcul très faible.

La première étape consiste à choisir les échantillons de jeux de paramètres qui servent à la construction du modèle de substitution dans l'espace de variation des paramètres, appelé domaine de conception et noté  $\mathcal{D}$ . Un échantillonnage par hypercube latin [16] est ici utilisé. Il permet d'obtenir des tirages non redondants tout en favorisant une faible discrèpance, ce qui permet une meilleure approximation par le métamodèle sur le domaine de conception.

Le nombre d'échantillons est noté  $n_s$ . Dans cette partie,  $\underline{x}^{(0)}$  désigne un vecteur du domaine de conception  $\mathcal{D}$ . Il correspond à un jeu de  $n_p$  paramètres de conception. Le vecteur  $\underline{x}^{(i)}$  pour  $i \in \llbracket 1; n_s \rrbracket$  correspond

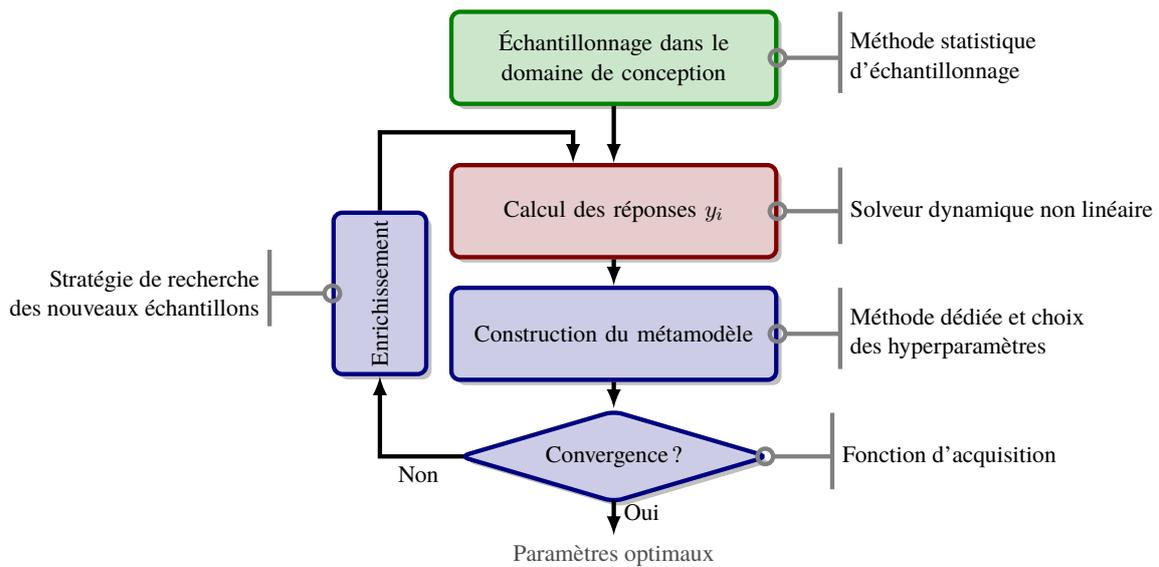


FIGURE 5 – Algorithme de la démarche d’optimisation bayésienne.

à l’échantillon numéro  $i$ .

Un métamodèle de type processus gaussien (ou *krigeage*) [7, 17, 18, 19] est ensuite construit à partir de ces échantillons et de l’évaluation de la fonction sur ceux-ci. En pratique, l’approximation en  $\underline{x}^{(0)} \in \mathcal{D}$  d’une fonction  $y$  potentiellement coûteuse est construite sur la base d’un modèle statistique de cette dernière sous la forme d’un processus gaussien (GP) noté  $Y(\underline{x}^{(0)})$  caractérisé par sa moyenne  $\mu(\underline{x}^{(0)})$  et sa fonction de corrélation, aussi appelée noyau,  $k(\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(0)'})$ . En tout point  $\underline{x}^{(0)} \in \mathcal{D}$ ,  $Y(\underline{x}^{(0)})$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(\mu(\underline{x}^{(0)}), k(\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(0)}))$ . Il est supposé qu’il existe un tirage de  $Y(\underline{x}^{(0)})$  égal à  $y(\underline{x}^{(0)})$ .

La démarche d’élaboration du processus gaussien (ici sur une base de données déterministe) consiste à construire un estimateur linéaire sans biais  $\hat{Y}(\underline{x}^{(0)})$  du processus gaussien  $Y(\underline{x}^{(0)})$  en minimisant la variance de l’erreur  $\hat{Y}(\underline{x}^{(0)}) - Y(\underline{x}^{(0)})$ . Ainsi, l’estimateur construit fournit une prédiction moyenne  $\tilde{y}(\underline{x}^{(0)})$  – l’approximation de  $y(\underline{x}^{(0)})$  – et la variance  $s^2(\underline{x}^{(0)})$  de  $\hat{Y}(\underline{x}^{(0)})$  :

$$\tilde{y}(\underline{x}^{(0)}) = \underline{f}(\underline{x}^{(0)})^T \underline{\beta} + \underline{k}(\underline{x}^{(0)})^T \mathbf{K}^{-1} (\underline{Y} - \mathbf{F} \underline{\beta}), \quad (9)$$

$$s^2(\underline{x}^{(0)}) = k(\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(0)}) - \begin{bmatrix} \underline{k}(\underline{x}^{(0)}) \\ \underline{f}(\underline{x}^{(0)}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{k}(\underline{x}^{(0)}) \\ \underline{f}(\underline{x}^{(0)}) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

où avec  $(i, j) \in \llbracket 1; n_s \rrbracket$ ,  $m \in \llbracket 1; n_b \rrbracket$  :

- $\underline{f}(\underline{x}^{(0)})$  est le vecteur des  $n_b$  termes  $f_m(\underline{x}^{(0)})$  d’une base de régression linéaire généralement choisie polynomiale exprimé au point courant  $\underline{x}^{(0)}$  ;
- $\underline{\beta}$  est le vecteur des régresseurs associés ;
- $\mathbf{F}$  est la matrice des termes de la régression linéaire évalués aux sites échantillonnés telle que  $(\mathbf{F})_{mi} = f_m(\underline{x}^{(i)})$  ;
- $\underline{k}(\underline{x}^{(0)})$  le vecteur des covariances croisées tel que  $(\underline{k}(\underline{x}^{(0)}))_i = k(\underline{x}^{(i)}, \underline{x}^{(0)})$  ;
- $\mathbf{K}$  la matrice de covariance symétrique telle que  $(\mathbf{K})_{ij} = k(\underline{x}^{(i)}, \underline{x}^{(j)})$  ;
- $\underline{Y}$  le vecteur des réponses tel que  $(\underline{Y})_i = y(\underline{x}^{(i)})$ .

La détermination des paramètres régissant la fonction noyau de  $\underline{\beta}$  est assurée ici par maximisation de la vraisemblance. D’un point de vue pratique, dans le cadre de ces travaux, le processus gaussien utilisé

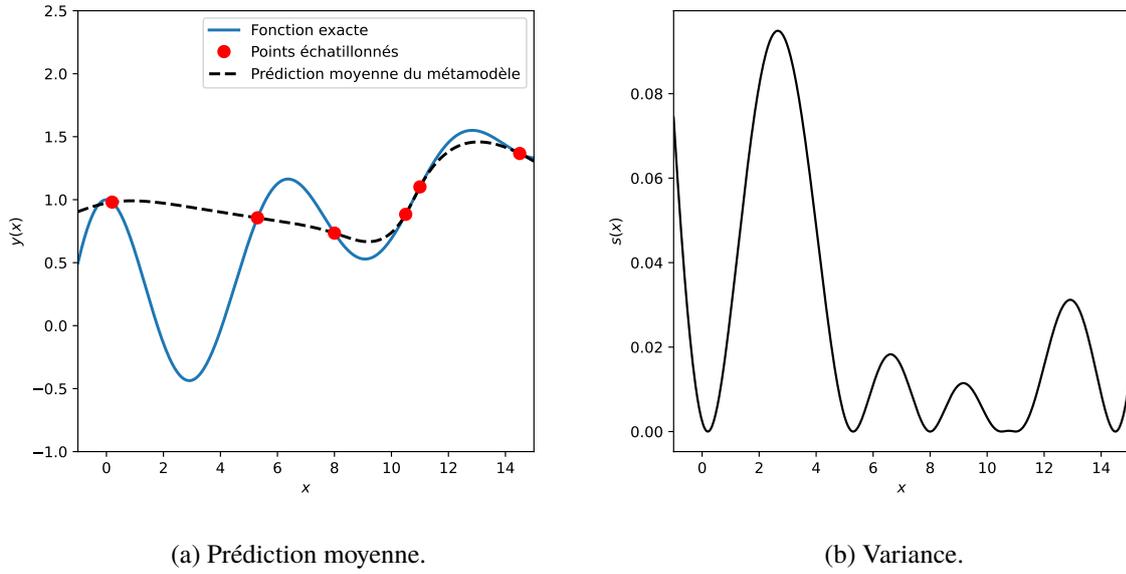


FIGURE 6 – Métamodèle de la fonction  $y : x \rightarrow \exp(-x/10) \cos(x) + x/10$  par processus gaussien à partir de 6 échantillons. Noyau Matérn avec sélection automatique des hyperparamètres.

est mis en oeuvre à l'aide du module Python `scikit-learn` [20].

L'obtention de l'écart type du processus gaussien permet de quantifier sur l'espace de conception la variabilité de ce dernier. Cette indication permet la mise en oeuvre d'un critère d'enrichissement qui est présenté en partie 3.2. La Figure 6 montre la construction d'un métamodèle de la fonction  $y : x \rightarrow \exp(-x/10) \cos(x) + x/10$  par processus gaussien sur l'intervalle  $[0; 15]$  à partir de 6 points échantillonnés.

### 3.2 Optimisation par enrichissement du métamodèle

Une fois le métamodèle construit, il pourrait être possible de conduire une optimisation globale directement sur le métamodèle, le coût de calcul n'étant plus un problème. Cependant, si l'échantillonnage ne permet pas de fournir une approximation correcte de la zone du minimum global, l'optimisation pourrait conduire à une convergence vers un minimum erroné. Il est donc nécessaire d'avoir un échantillonnage dense au niveau de la zone du minimum global. Afin de ne pas densifier tout l'espace, ce qui demande un nombre trop important d'évaluations de la fonction objectif, une solution consiste à utiliser le métamodèle pour déterminer les zones nécessitant une densification de l'échantillonnage. Le métamodèle est ensuite enrichi itérativement jusqu'à convergence du minimum global. La notation  $\underline{x}^{(n_s+j)}$  est utilisée pour désigner le  $j^{\text{ème}}$  point ajouté aux échantillons initiaux.

Plusieurs critères, également appelés fonctions d'acquisition, existent pour choisir la zone d'enrichissement du métamodèle. Le critère de l'amélioration espérée (*Expected improvement* EI) [6, 21, 22] est retenu dans ce travail car il présente un bon compromis exploration/exploitation. En tout point  $\underline{x}^{(0)} \in \mathcal{D}$ , l'amélioration espérée a pour expression :

$$\mathbb{E}[I(\underline{x}^{(0)})] = (y_{\min} - \tilde{y}(\underline{x}^{(0)})\Phi(z(\underline{x}^{(0)})) + s(\underline{x}^{(0)})\phi(z(\underline{x}^{(0)})), \quad (11)$$

où  $I(\underline{x}^{(0)}) = \max(y_{\min} - \hat{Y}(\underline{x}^{(0)}); 0)$  désigne l'amélioration statistique,  $y_{\min}$  est le minimum de la

fonction  $y$  sur les points échantillonnés,  $\tilde{y}$  représente la prédiction moyenne du métamodèle,  $s$  l'écart type associé et  $z(\underline{x}^{(0)}) = \frac{y_{\min} - \tilde{y}(\underline{x}^{(0)})}{s(\underline{x}^{(0)})}$ . La densité de probabilité et la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite sont respectivement notées  $\phi$  et  $\Phi$ . Le nouveau point d'enrichissement est ensuite choisi là où le critère  $\mathbb{E}[I(\underline{x}^{(0)})]$  est maximal :

$$\underline{x}^{(n_s+j+1)} = \arg \max_{\underline{x}^{(0)} \in \mathcal{D}} \mathbb{E}[I(\underline{x}^{(0)})]. \quad (12)$$

Ce critère présente l'avantage d'être nul aux points échantillonnés, évitant ainsi d'ajouter des points proches d'échantillons déjà calculés. Le calcul de l'amélioration espérée ne fait intervenir que le métamodèle, son coût de calcul est donc assez faible. Il est ainsi possible de résoudre le problème (12) en calculant la valeur de l'EI sur un maillage fin de l'espace des paramètres. Cependant lorsque que le nombre de paramètres est important, un algorithme d'optimisation globale est privilégié.

Afin de mener une optimisation globale, le métamodèle est enrichi de manière itérative jusqu'à la satisfaction d'un critère d'arrêt. La valeur exacte du minimum n'étant pas connue, ce critère d'arrêt se base généralement sur l'évolution de la valeur du minimum prédit par le métamodèle. Il a été choisi d'utiliser le critère introduit par JONES, SCHONLAU et WELCH [6] consistant à arrêter l'algorithme lorsque la valeur maximale de l'EI sur l'espace des paramètres est inférieure à une valeur  $\delta|y_{\min}|$  :

$$\max_{x \in \mathcal{D}} \frac{\mathbb{E}[I(\underline{x}^{(0)})]}{|y_{\min}|} < \delta. \quad (13)$$

La valeur généralement choisie pour  $\delta$  est de 1%.

Le métamodèle de la Figure 6 est enrichi pour illustrer le processus. La Figure 7 montre les itérations successives de l'algorithme d'enrichissement. L'utilisation du critère de l'amélioration espérée permet de sortir de la zone de minimum local et de localiser le minimum global. La convergence vers le minimum global se fait de plus en un nombre assez faible d'itérations.

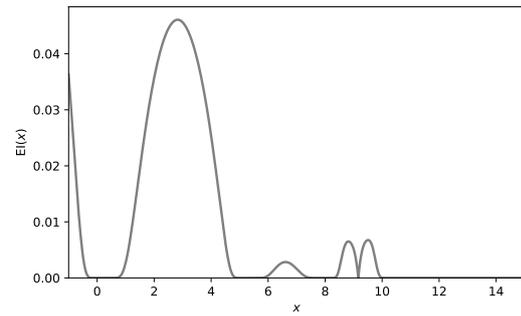
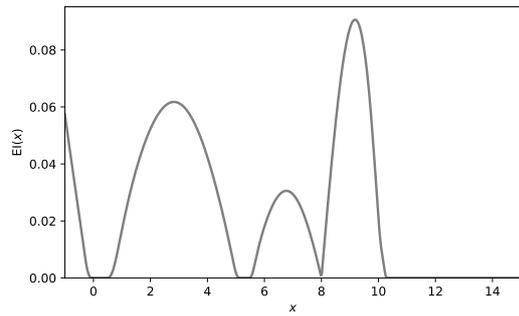
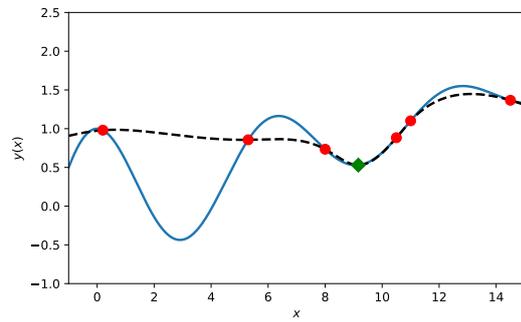
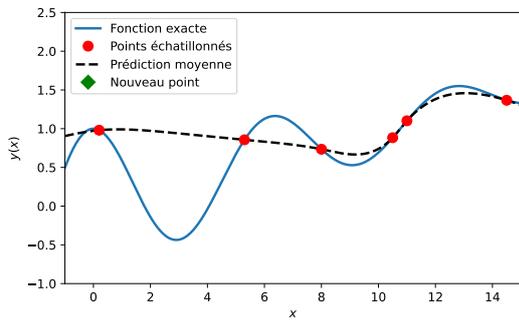
## 4 Optimisation paramétrique d'un oscillateur de Duffing

La méthodologie d'optimisation globale avec utilisation du solveur dynamique non linéaire pour la construction et l'enrichissement du métamodèle est appliquée à l'oscillateur de Duffing dont l'équation du mouvement (8) a été donnée en partie 2.

### 4.1 Problème d'optimisation

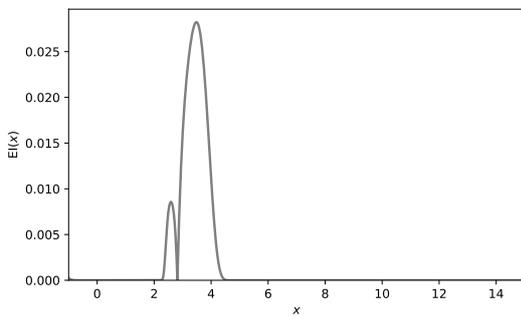
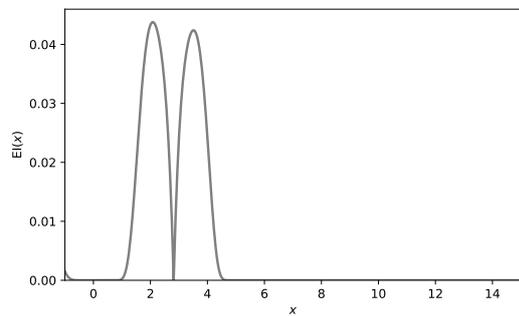
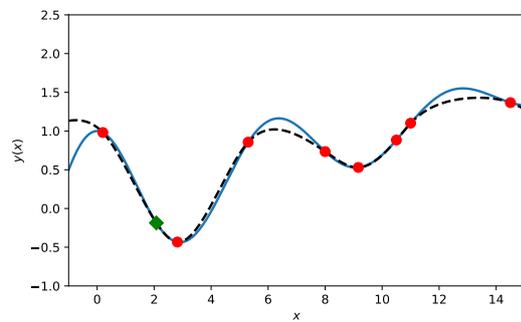
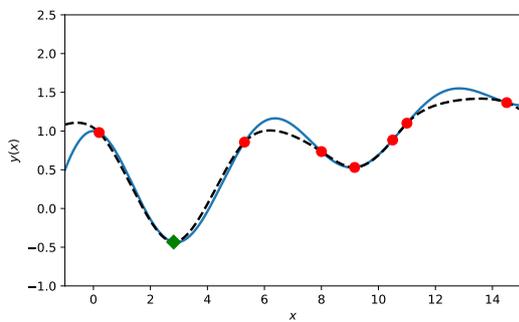
Le problème d'optimisation étudié dans cette partie s'inspire des travaux de BALARAM, NARAYANAN et RAJENDRAKUMAR [23]. La quantité d'intérêt choisie est la moyenne quadratique (*Root Mean Square RMS*) de l'accélération de l'oscillateur, notée  $\ddot{x}_{\text{rms}}$ . Les deux paramètres de conception choisis sont le facteur d'amortissement  $\xi$  dans l'intervalle  $[0,1; 1]$  et la raideur non linéaire  $k_{\text{nl}}$  dans l'intervalle  $[0,1; 2]$ . La raideur linéaire, la masse et l'amplitude de l'excitation sont fixées aux valeurs  $k = 1$ ,  $m = 1$  et  $f_e = 0,3$ . La quantité d'intérêt est calculée sur une plage de fréquences [24]. La fonction objectif à minimiser  $J$  correspond alors à la valeur maximale atteinte par la moyenne quadratique de l'accélération pour  $\omega \in \Omega = [0,05; 2,5]$ . Le problème d'optimisation s'écrit ainsi :

$$(\xi^*, k_{\text{nl}}^*) = \arg \min_{\substack{\xi \in [0,1; 1] \\ k_{\text{nl}} \in [0,1; 2]}} J(\xi, k_{\text{nl}}), \quad \text{où } J(\xi, k_{\text{nl}}) = \max_{\omega \in \Omega} \ddot{x}_{\text{rms}}(\xi, k_{\text{nl}}, \omega). \quad (14)$$



(a) Métamodèle initial

(b) Itération 1



(c) Itération 2

(d) Itération 3

FIGURE 7 – Enrichissement du métamodèle.

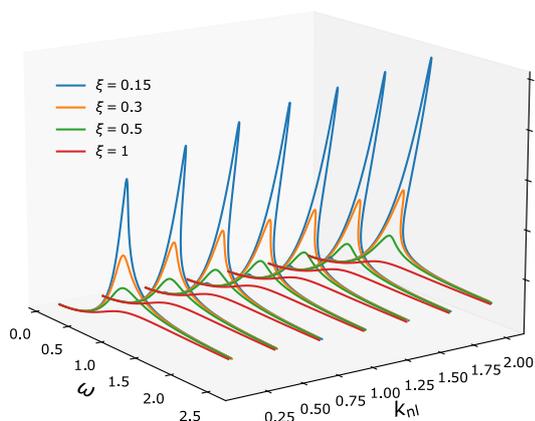


FIGURE 8 – Étude de l’influence des paramètres de conception sur la réponse fréquentielle de l’oscillateur de Duffing.

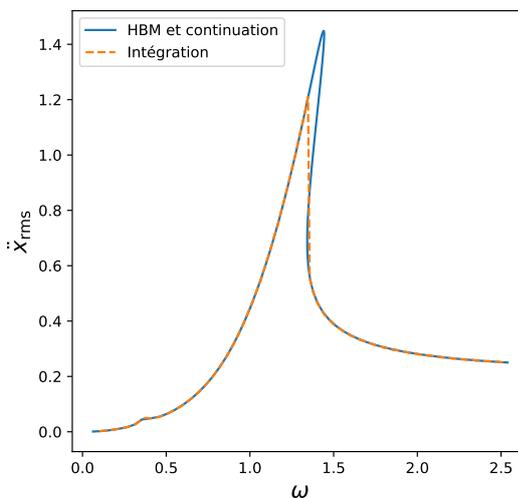


FIGURE 9 – Réponse fréquentielle de l’oscillateur de Duffing par HBM avec continuation et par intégration numérique pour  $\xi = 0.2$  et  $k_{nl} = 1.5$ .

La Figure 8 montre l’évolution de  $\ddot{x}_{rms}$  sur la plage  $\Omega$  pour différents jeux de paramètres. Cela confirme que le solveur mécanique est capable de résoudre l’équation (8) dans tout l’espace de conception. De plus, cette étude paramétrique semble indiquer que plus  $k_{nl}$  augmente, plus la valeur maximale de  $\ddot{x}_{rms}$  augmente, plus  $\xi$  augmente, plus la valeur maximale de  $\ddot{x}_{rms}$  diminue. La solution du problème d’optimisation (14) paraît donc donner  $\xi$  maximal et  $k_{nl}$  minimal dans leurs domaines de conception. Comme pour tous les calculs de cette partie, le solveur mécanique a été utilisé avec les paramètres suivants :  $n_h = 8$ ,  $N_t = 40$ ,  $\Delta s_{max} = 0,05$ .

Afin de montrer l’importance de la stratégie de continuation et l’intérêt du solveur mécanique retenu, la Figure 9 compare la réponse fréquentielle obtenue grâce au solveur fréquentiel utilisé dans ce travail et celle obtenue par une intégration numérique sans stratégie de continuation pour  $\xi = 0,2$  et  $k_{nl} = 1,5$ . La courbe obtenue par intégration présente un saut dans la plage de fréquence où plusieurs solutions existent. Ce phénomène est bien connu et apparaît aussi lors d’études expérimentales sur des systèmes non linéaires [15]. Cependant, la Figure 9 montre que la méthode d’intégration numérique sans stratégie de continuation ne parvient pas à capter le maximum théorique de la réponse. Cette différence peut avoir une influence sur la valeur des paramètres optimaux, particulièrement si l’optimisation est conduite pour une fréquence d’excitation fixe.

## 4.2 Résultats

Le problème d’optimisation (14) ne comportant que deux paramètres sur un système à un degré de liberté, il a été possible d’évaluer la fonction objectif  $J$  sur un maillage assez fin de l’espace de conception  $\mathcal{D} = [0,1; 1] \times [0,1; 2]$  afin de servir de référence (Figure 10). Ce calcul confirme que  $J(\xi, k_{nl})$  est minimale pour  $\xi = 1$  et  $k_{nl} = 0,1$ . La fonction objectif a ici une forme assez simple, elle ne possède pas de minima locaux. Ainsi pour ce problème spécifique d’autres méthodes, notamment des algorithmes d’optimisation locale, peuvent s’avérer plus efficaces que la méthode présentée dans ce travail. Néanmoins, la valeur de la fonction objectif n’est généralement pas connue sur tout le domaine de conception et l’objectif est ici de mettre en place une méthode efficace pour tout type de problème d’optimisation

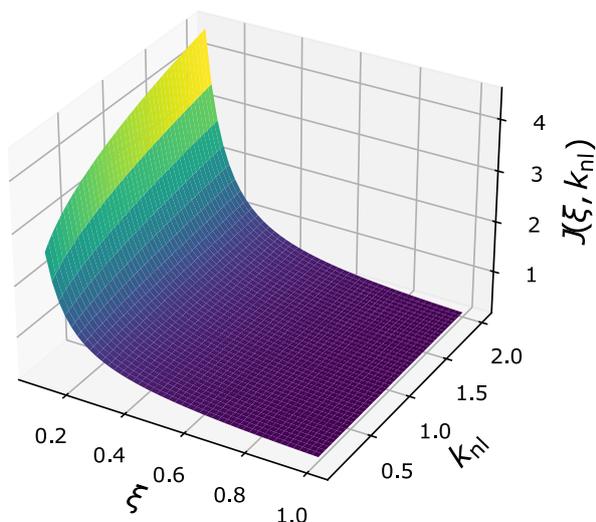


FIGURE 10 – Fonction objectif de référence.

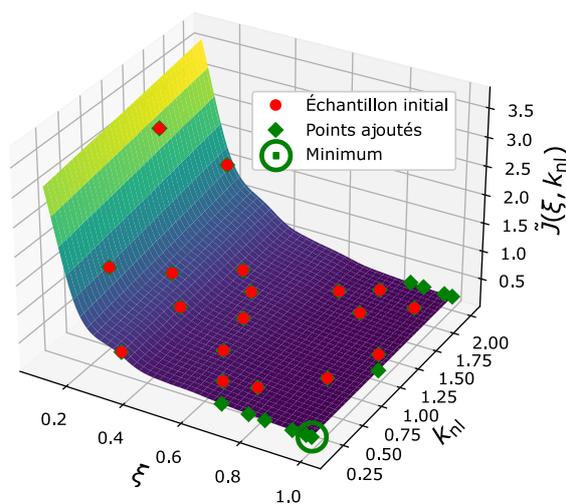


FIGURE 11 – Résultat du processus d'enrichissement.

en dynamique non linéaire.

Le problème (14) est ensuite résolu par la stratégie d'optimisation bayésienne décrite en partie 3 où le métamodèle est construit en utilisant le solveur mécanique détaillé en partie 2 pour calculer  $\ddot{x}_{\text{rms}}$ . Ce métamodèle de type processus gaussien utilise un noyau Matérn et une sélection automatique des hyperparamètres. Le problème ne comprenant que deux paramètres, le minimum de l'amélioration espérée (12) est déterminée en calculant la valeur de l'EI sur un maillage fin du domaine de conception. La Figure 11 présente un résultat de ce processus pour un nombre initial de 18 échantillons. L'algorithme converge vers le minimum global avec succès avec un ajout de 11 points soit un total de 29 appels au solveur mécanique. La comparaison des Figures 10 et 11 met en évidence le fait que le métamodèle construit pour la stratégie d'optimisation n'approche pas la fonction objectif de manière précise sur tout le domaine de conception mais donne une approximation de très bonne qualité dans la zone proche du minimum global.

Afin d'estimer les performances de la stratégie mise en place dans cette étude, l'optimisation est reproduite 20 fois avec à chaque fois un tirage différent pour les échantillons initiaux afin d'obtenir une valeur moyenne du nombre d'appels au solveur. Ce procédé est de plus répété pour plusieurs valeurs du nombre d'échantillons initial. Le résultat est présenté sous la forme d'un diagramme en boîtes à moustaches en Figure 12. La Table 1 résume le nombre moyen d'appels pour différentes valeurs de  $n_s$ . Ces résultats montrent que l'efficacité de la stratégie d'optimisation mise en place est assez sensible au tirage initial des échantillons. Le nombre d'appels au solveur mécanique est néanmoins grandement réduit par rapport à une stratégie d'optimisation globale classique qui en nécessite plusieurs centaines. Par exemple, une optimisation globale utilisant la méthode de l'évolution différentielle [25] a nécessité 279 appels au solveur avant de converger pour la résolution du problème (14). Un appel au solveur prenant entre 5 et 30 secondes selon le jeu de paramètre avec le matériel sur lequel les simulations ont été menées, le gain en temps de calcul est ainsi déjà perceptible sur cet exemple.

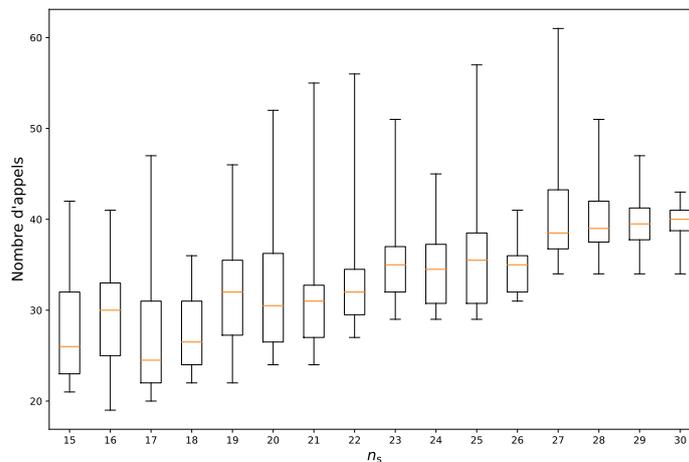


FIGURE 12 – Nombre d'évaluations de la fonction objectif en fonction du nombre d'échantillons initial.

$n_s$	Nombre moyen de points d'enrichissement	Nombre moyen d'appels au solveur
15	14	29
18	10	28
21	10	31
24	11	35
27	15	42
30	10	40

TABLE 1 – Nombre moyen d'appels au solveur pour différents échantillons initiaux.

## 5 Conclusion

Cette étude propose la mise en œuvre d'une stratégie d'optimisation globale efficace pour les problèmes de dynamique non linéaire se basant sur deux outils. Le premier concerne l'utilisation de la méthode de l'équilibrage harmonique associée à une méthode de continuation pour résoudre le problème mécanique. Le second consiste en la construction d'un métamodèle de type processus gaussien enrichi selon une procédure bayésienne. Les bénéfices de cette stratégie sont mis en évidence par son application pour l'optimisation paramétrique d'un oscillateur de Duffing. La HBM offre une méthode de résolution en dynamique non linéaire dans tout le domaine de conception qui peut s'avérer plus efficace que les méthodes d'intégration temporelle classiquement utilisées dans l'industrie. De plus, la méthode de continuation permet de s'assurer de la prise en compte des effets non linéaires lors de l'optimisation en assurant l'obtention du maximum de la réponse de la structure mécanique même en cas de rebroussements. Enfin, la conduite d'une optimisation bayésienne permet de limiter le nombre d'appels au solveur mécanique par rapport à un algorithme d'optimisation globale classique. Le gain est donc double : d'abord grâce au solveur mécanique efficace puis par l'utilisation d'un métamodèle réduisant le nombre d'appels à ce solveur.

Cette étude montre que la stratégie développée devrait pouvoir apporter un gain significatif en terme de temps de calcul pour l'optimisation multi-objectifs de structures assemblées et discrétisées par éléments finis.

## Références

- [1] C. A. FLOUDAS et C. E. GOUNARIS. « A Review of Recent Advances in Global Optimization ». In : *Journal of Global Optimization* 45.1 (2008), p. 3-38.
- [2] M. NAKHLA et J. VLACH. « A Piecewise Harmonic Balance Technique for Determination of Periodic Response of Nonlinear Systems ». In : *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 23.2 (1976), p. 85-91.
- [3] E. SARROUY et J.-J. SINOU. « Non-Linear Periodic and Quasi-Periodic Vibrations in Mechanical Systems - On the Use of the Harmonic Balance Methods ». In : *Advances in Vibration Analysis Research*. IntechOpen, 2011. Chap. 21, p. 419-434.
- [4] M. CLAEYS, J.-J. SINOU, J.-P. LAMBELIN et R. TODESCHINI. « Experiments and Numerical Simulations of Nonlinear Vibration Responses of an Assembly with Friction Joints – Application on a Test Structure Named “Harmony” ». In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 70–71 (2016), p. 1097-1116.
- [5] A. MABILIA. « Dynamique non-linéaire d’une soufflante en rotation ». Thèse de Doctorat. École Centrale de Lyon, 2020.
- [6] D. R. JONES, M. SCHONLAU et W. J. WELCH. « Efficient Global Optimization of Expensive Black-Box Functions ». In : *Journal of Global Optimization* 13.4 (1998), p. 455-492.
- [7] C. E. RASMUSSEN et C. K. I. WILLIAMS. *Gaussian Processes for Machine Learning*. The MIT Press, 2006. 248 p.
- [8] A. H. NAYFEH et D. T. MOOK. *Nonlinear Oscillations*. New York : Wiley, 1979. 720 p.
- [9] S. L. LAU et Y. K. CHEUNG. « Amplitude Incremental Variational Principle for Nonlinear Vibration of Elastic Systems ». In : *Journal of Applied Mechanics* 48.4 (1981), p. 959-964.
- [10] M. URABE. « Galerkin’s Procedure for Nonlinear Periodic Systems ». In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 20.2 (1965), p. 120-152.
- [11] T. M. CAMERON et J. H. GRIFFIN. « An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems ». In : *Journal of Applied Mechanics* 56.1 (1989), p. 149-154.
- [12] J. W. COOLEY et J. W. TUKEY. « An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series ». In : *Mathematics of Computation* 19.90 (1965), p. 297-301.
- [13] G. VON GROLL et D. EWINS. « The Harmonic Balance Method with Arc-Length Continuation in Rotor/Stator Contact Problems ». In : *Journal of Sound and Vibration* 241.2 (2001), p. 223-233.
- [14] L. PELETAN. « Stratégie de modélisation simplifiée et de résolution accélérée en dynamique non linéaire des machines tournantes : Application au contact rotor-stator ». Thèse de Doctorat. INSA de Lyon, 2012.
- [15] D. JORDAN et P. SMITH. *Nonlinear Ordinary Differential Equations : An Introduction for Scientists and Engineers*. Fourth Edition. Oxford Texts in Applied and Engineering Mathematics. Oxford : Oxford University Press, 2007. 560 p.
- [16] M. D. MCKAY, R. J. BECKMAN et W. J. CONOVER. « Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code ». In : *Technometrics* 21.2 (1979), p. 239-245.
- [17] P. I. FRAZIER. *A Tutorial on Bayesian Optimization*. 2018.
- [18] R. B. GRAMACY. *Surrogates : Gaussian Process Modeling, Design and Optimization for the Applied Sciences*. Boca Raton, Florida : Chapman Hall/CRC, 2020.

- [19] A. I. J. FORRESTER, A. SÓBESTER et A. J. KEANE. *Engineering Design via Surrogate Modelling : A Practical Guide*. 1<sup>re</sup> éd. New York : Wiley, 2008.
- [20] F. PEDREGOSA et al. « Scikit-Learn : Machine Learning in Python ». In : *Journal of Machine Learning Research* 12.85 (2011), p. 2825-2830.
- [21] R. LE RICHE et V. PICHENY. « Revisiting Bayesian Optimization in the Light of the COCO Benchmark ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 64.5 (2021), p. 3063-3087.
- [22] M. SCHONLAU. « Computer Experiments and Global Optimization ». Thèse de Doctorat. University of Waterloo, 1997.
- [23] B. BALARAM, M. D. NARAYANAN et P. K. RAJENDRAKUMAR. « Optimal Design of Multi-Parametric Nonlinear Systems Using a Parametric Continuation Based Genetic Algorithm Approach ». In : *Nonlinear Dynamics* 67.4 (2012), p. 2759-2777.
- [24] L. LAURENT et A. LEGAY. « Optimal Positioning of a Wall in an Acoustic Cavity Using Reduced Models and Surrogate Based Optimization ». In : 12th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimisation, WCSMO 12. Braunschweig, Germany, 2017.
- [25] R. STORN et K. PRICE. « Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces ». In : *Journal of Global Optimization* 11.4 (1997), p. 341-359.