



HAL
open science

Approche Front-Tracking pour la modélisation de la coalescence

Paul Regnault, Stéphane Vincent, Eric Chénier

► **To cite this version:**

Paul Regnault, Stéphane Vincent, Eric Chénier. Approche Front-Tracking pour la modélisation de la coalescence. 25ème Congrès Français de Mécanique 2022, Aug 2022, Nantes, France. hal-03769552

HAL Id: hal-03769552

<https://hal.science/hal-03769552>

Submitted on 20 Sep 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Approche Front-Tracking pour la modélisation de la coalescence

P. REGNAULT, S. VINCENT, E. CHENIER

Univ Gustave Eiffel, Univ Paris Est Creteil, CNRS, UMR 8208, MSME, F-77454 Marne-la-Vallée,
France, paul.regnault@univ-eiffel.fr

Résumé

Dans ce travail, les écoulements diphasiques à phases séparées sont modélisés par une méthode explicite de suivi d'interface, appelée Front-Tracking, et reposant sur l'utilisation de deux maillages. L'un, mobile et déformable, est utilisé pour la représentation de l'interface ; ce maillage est qualifié de lagrangien. L'autre, fixe et structuré, permet de discrétiser spatialement les équations de Navier-Stokes ; ce maillage est dit eulérien. Ces méthodes de suivi d'interface sont difficiles à implémenter car elles demandent une gestion dynamique en temps et en espace du maillage de l'interface discrétisée par un ensemble de triangles. En échange de cette complexité, elles offrent une description explicite de l'interface même en présence de fortes courbures, la possibilité de modéliser des structures physiques de l'ordre ou plus petites que le maillage eulérien et un meilleur contrôle des changements topologiques (rupture et coalescence). Ces modèles doivent être conçus pour une architecture parallèle à mémoire distribuée.

Nous avons implémenté une procédure de remaillage adaptatif avec une reconstruction locale de l'interface pour décrire de manière efficace les détails les plus fins de l'interface. Les changements topologiques sont gérés de manière géométrique. Des configurations numériques et expérimentales de la littérature seront utilisées pour vérifier et valider les modèles et les méthodes numériques. La collision de deux gouttes sera notamment étudiée.

Abstract

In this work two-phase flows are modelled by a multi-scale approach involving dedicated meshes, one for the interface, mobile and deformable, for the Front-Tracking and called Lagrangian, and the other Eulerian and fixed for the conservation equations of mass and momentum. These multi-scale models are difficult to achieve numerically because they require managing dynamically in time and space the mesh of the interface (made up of connected triangles). In exchange for this complexity, they offer an explicit description of the interface even in the presence of strong curvatures and a better control of topological changes (coalescence and breakup). The models and algorithms must run in parallel on distributed memory computers to conduct convergence studies, validate academic cases and then tackle more complex configurations. In order to describe efficiently the thin features of the interface, we implemented an adaptive remeshing procedure with local surface reconstruction. Topological changes are handled geometrically. Experimental and numerical configurations from the literature will be used to verify the models and numerical methods. Among them, we can mention the collision of two drops.

Mots clefs : Front-Tracking, coalescence

1 Introduction

Tous les développements réalisés dans ce travail ont été mis en œuvre dans le code de calcul Fugu, développé par l'équipe TCM du laboratoire MSME. La méthode Front-Tracking [10, 12, 13] est utilisée pour décrire la dynamique de l'interface entre deux fluides. Contrairement aux méthodes de description implicite de l'interface, comme les méthodes Volume Of Fluid (VOF [14]) ou Level-set [8], cette méthode en offre une description explicite. L'interface est représentée par des marqueurs sans masse qui sont transportés de manière lagrangienne. Ces marqueurs sont connectés entre eux pour former un maillage de triangles, approximation de l'interface physique. La vitesse des marqueurs est issue des équations de la mécanique des fluides qui est discrétisée sur des grilles décalés fixes : c'est le maillage eulérien. Une méthode d'interpolation doit donc être mise en place pour transférer l'information de la vitesse du maillage eulérien au maillage lagrangien. De cette interface, il est possible d'extraire des grandeurs géométriques et d'en déduire des quantités physiques comme la tension de surface. Lors du transport de l'interface, une étape de remaillage est généralement nécessaire pour représenter fidèlement la forme de l'interface. Une des difficultés de la méthode Front-Tracking réside dans l'implémentation d'un algorithme robuste pour la rupture et la coalescence des interfaces.

Dans nos travaux, un modèle à un fluide (One-Fluid Model, [4]) est utilisé pour représenter les deux phases, notées par la suite 1 et 2. Les équations de Navier-Stokes sont résolues pour un unique fluide équivalent, avec un terme source additionnel pour tenir compte de la tension superficielle dans l'équation de bilan de la quantité de mouvement. Une équation supplémentaire est résolue pour l'advection des marqueurs de l'interface. La fraction volumique C est calculée explicitement à partir de l'interface avec une méthode géométrique basée sur la méthode Ray-Casting. La densité et la viscosité du fluide équivalent en sont déduites par les équations (3) et (4).

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \overline{\overline{D}}) + \rho \mathbf{g} + \mathbf{S}_\sigma \quad (2)$$

$$\rho = C\rho_1 + (1 - C)\rho_2 \quad (3)$$

$$\mu = C\mu_1 + (1 - C)\mu_2 \quad (4)$$

avec $\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + \nabla^t \mathbf{U})$ et \mathbf{S}_σ le terme de tension superficielle calculé avec une formulation intégrale [11]. Pour résoudre de façon consistante avec le transport de l'interface la contribution inertielle du bilan de quantité de mouvement, une méthode de *Momentum Conserving* est utilisée [7].

2 Remaillage de l'interface

Le transport de l'interface par la méthode Front-Tracking déforme les triangles ce qui peut affecter leur taille : les arêtes trop grandes sont subdivisées en deux et les arêtes trop petites sont supprimées (fusion des 2 marqueurs de l'arête au centre de l'arête). Globalement, le remaillage se décline en plusieurs opérations : suppression d'arêtes, découpage d'arêtes, échange d'arêtes et suppression de triangles trop aplatis. A ces manipulations s'ajoutent une éventuelle étape de lissage permettant d'améliorer la forme des triangles et un déplacement des marqueurs pour contrôler le volume délimité par l'interface à une va-

leur prescrite. Naturellement, ces opérations peuvent affecter les connexions avec les triangles adjacents, ce qui doit être pris en compte.

Utilisation d'une pseudo-courbure pour la gestion du maillage. Le maillage local de l'interface est géré de façon dynamique en pilotant la taille des arêtes. Ce pilotage repose principalement sur l'évaluation de κ_{max} , le maximum de la valeur absolue des courbures principales de l'interface, grandeur qui sera adimensionnée par la taille de l'arête considérée. Cependant, pour éviter des variations trop brutales de la taille des arêtes, et donc du maillage, cette courbure κ_{max} est remplacée par une pseudo-courbure définie au marqueur P par

$$\tilde{\kappa}(P) = \max \left(\kappa_{max}(P), \lambda \max_{P_1 \in N_1(P)} (\tilde{\kappa}(P_1)) + (1 - \lambda) \kappa_{max}(P) \right) \quad (5)$$

où $\lambda \in [0; 1]$ est un paramètre ajustable et $N_1(P)$ est l'ensemble des marqueurs du premier voisinage de P (Fig. 1). Si $\lambda = 0$, la pseudo-courbure au point P est simplement $\kappa_{max}(P)$. Si $\lambda = 1$, la pseudo-

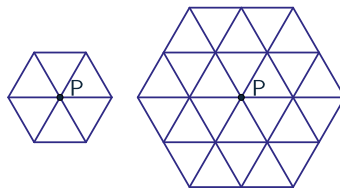


FIGURE 1 – Voisinages $N_1(P)$ (gauche) et $N_2(P)$ (droite)

courbure au point P est le maximum entre $\kappa_{max}(P)$ et les pseudo-courbures du voisinage $N_1(P)$, ce qui tend à engendrer un maillage fin de taille constante, adapté à la plus grande des courbures principales sur tous les marqueurs. Une valeur intermédiaire de λ permet d'étaler les grandes courbures au niveau des marqueurs adjacents et ainsi de mieux gérer la transition entre les tailles des arêtes. En notant l la longueur de l'arête reliant les marqueurs P et $P_1 \in N_1(P)$, celle-ci sera coupée en deux si $\tilde{\kappa}(P)l > 0.25$ et les marqueurs seront fusionnés si $\tilde{\kappa}(P)l < 0.1$.

Construction d'une surface approximant l'interface et calcul des courbures. Le calcul des courbures au sommet P repose sur une méthode de reconstruction de surface [5] utilisant un polynôme de la forme

$$f(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} \quad (6)$$

où les coefficients sont obtenus par une méthode des moindres carrés basée sur la position des marqueurs appartenant à $N_2(P)$, la première et seconde couronne (Fig. 1). Une fois la fonction polynomiale déterminée, les courbures principales sont calculées analytiquement.

Ajout/suppression de marqueurs et projection sur la surface approximée. Comme mentionné ci-dessus, si la pseudo-courbure adimensionnelle est trop grande par rapport à la longueur l de l'arête, $\tilde{\kappa}(P)l > 0.25$, un marqueur est inséré au milieu de l'arête reliant les sommets P et $P_1 \in N_1(P)$ et les connexions des triangles locaux sont ajustées. Pour préserver la forme de l'interface, ce marqueur est virtuellement projeté sur les surfaces reconstruites issues de P et $P_1 \in N_1(P)$; la position réelle retenue est la demi-somme entre ces 2 projections [3]. Si $\tilde{\kappa}(P)l < 0.1$, les marqueurs P et $P_1 \in N_1(P)$ sont fusionnés au milieu de l'arête et le point engendré est projeté selon la même règle que précédemment.

Critères additionnels pour la gestion du maillage Pour éviter que les tailles des arêtes engendrées par cet algorithme ne soient trop petites (coût de calcul prohibitif) ou trop grandes (mauvaise résolution), des bornes minimale λ_{min} et maximale λ_{max} de tailles d'arêtes sont imposées. Ces longueurs limites sont liées à la taille du maillage eulérien de Navier-Stokes, h : $\lambda_{min} = h/n$ avec $n = 20$ par exemple, $\lambda_{min} = h/4$ en l'absence de courbure et $\lambda_{max} = h$.

En plus des critères liés aux longueurs des arêtes, l'état de la surface et la valence (le nombre de marqueurs de la première couronne N_1 moins 1) doivent être contrôlés. Les opérations de remaillage sont annulées si elles dégradent la rugosité $r(P)$ de l'interface au point P [9],

$$r(P) = \frac{1}{2} \min_{(P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{C}} (1 + \mathbf{n}(PP_1P_2) \cdot \mathbf{n}(PP_2P_3)) \quad (7)$$

avec $\mathcal{C} = \{P \neq P_1 \neq P_2 \neq P_3 \mid P_1 \in N_1(P), P_2 \in N_1(P) \cap N_1(P_1), P_3 \in N_1(P) \cap N_1(P_2)\}$ et $\mathbf{n}(PP_1P_2)$, $\mathbf{n}(PP_2P_3)$ les vecteurs normaux aux 2 triangles constituées des sommets correspondants. Cette rugosité caractérise l'inclinaison des triangles les uns par rapport aux autres. Si la valence d'un marqueur impliqué dans une suppression potentielle d'arête est égale à 5, la suppression de l'arête est annulée.

3 Coalescence entre bulles/gouttes distinctes

Avant d'entrer dans le détail de l'algorithme, il est nécessaire de présenter rapidement la structure informatique des données utilisée pour les interfaces. Chaque bulle/goutte physique est contenue dans un objet numéroté appelé *bulle* et possédant sa propre liste de triangles, de sommets (marqueurs) et toutes les connexions pour repérer les voisinages entre éléments. Pour faciliter le calcul des distances entre les sommets ou les centres de triangles des différentes bulles, les triangles de l'interface sont préalablement repérés dans le maillage structuré eulérien relatif à la variable scalaire de pression. Ainsi, le calcul des distances mentionnées par la suite se réduit à examiner ces éléments dans un volume réduit de forme cubique donné par le maillage structuré.

De nombreuses étapes sont nécessaires pour fusionner des *bulles*. Elles sont décrites dans les paragraphes suivants.

Identification des bulles à fusionner. La méthode de coalescence entre *bulles* est activée dès que la distance entre les centres des triangles de deux *bulles* (ou plus) sont à une distance inférieure à d_1 ($d_1 = h$ le pas du maillage eulérien, par exemple). Dans ce cas, les couples de *bulles* à fusionner sont identifiés. Pour faciliter la présentation, nous ne considérerons par la suite qu'un unique couple de *bulles*.

Détermination des sommets pour la coalescence sur une distance minimale inférieure à d_2 . Pour le couple de *bulles* considéré, la plus petite distance euclidienne des sommets d'une des bulles (celle possédant le plus petit numéro) à l'interface de la seconde *bulle* est calculée (Fig. 2a). Si cette distance est inférieure à d_2 , valeur légèrement plus grande que d_1 ($d_2 = 1.5d_1$ par exemple), le sommet est tagué par une valeur entière. Les vecteurs de projection \mathbf{p} des sommets sur l'interface de la seconde *bulle* sont conservés après normalisation si leur module est inférieur à d_2 .

Construction d'une région temporaire sur la première *bulle* et d'un vecteur de projection \mathbf{p}_{moy} . Une région temporaire est construite. Elle est constituée de l'ensemble des triangles adjacents dont tous

les sommets sont tagués, illustrée par la figure 2a : les sommets dont la distance adimensionnée par d_2 est inférieure à 1. Si des sommets sont isolés ou forment une zone d'épaisseur nulle (lignes), leur tag est supprimé de sorte qu'ils n'interviennent plus dans la coalescence. Si deux régions de coalescence sont reliées par un unique sommet, ces deux régions sont fusionnées. Un unique vecteur de projection \mathbf{p}_{moy} est défini par région temporaire en calculant la moyenne des vecteurs normalisés de projection \mathbf{p} pour tous les sommets tagués appartenant à la région. Désormais, les calculs de distance pour cette région temporaire sont réalisés dans la direction de ce vecteur de projection \mathbf{p}_{moy} (Fig. 2a).

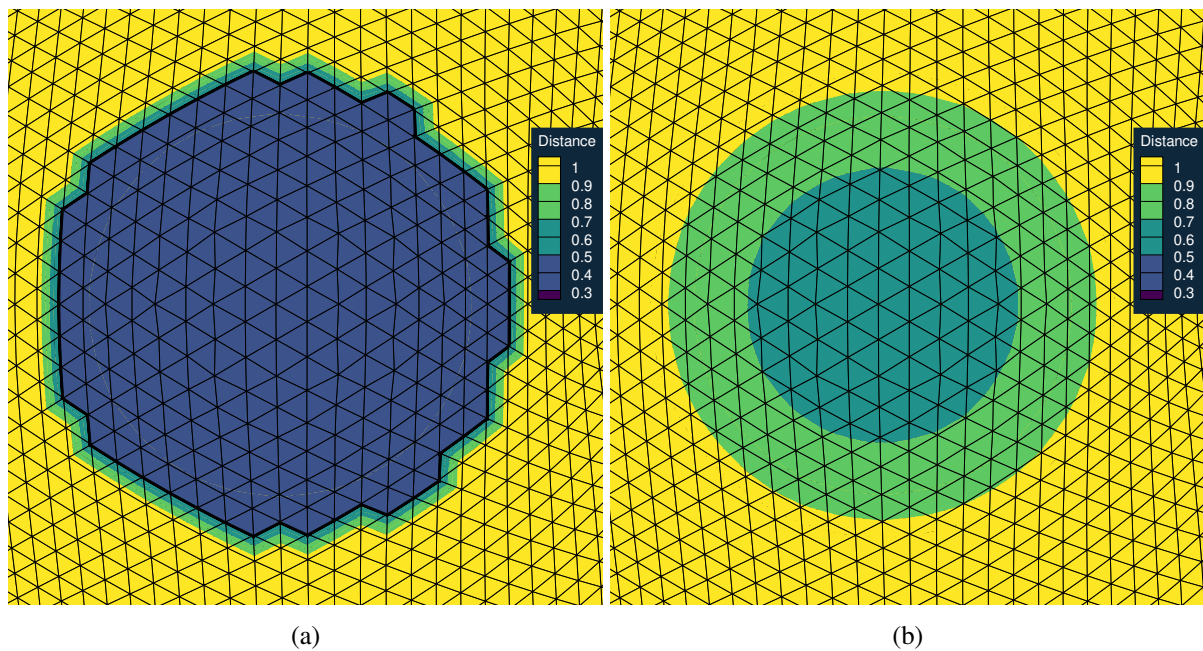


FIGURE 2 – Distance minimale (a) et selon le vecteur de projection \mathbf{p}_{moy} (b) (normalisées par d_2)

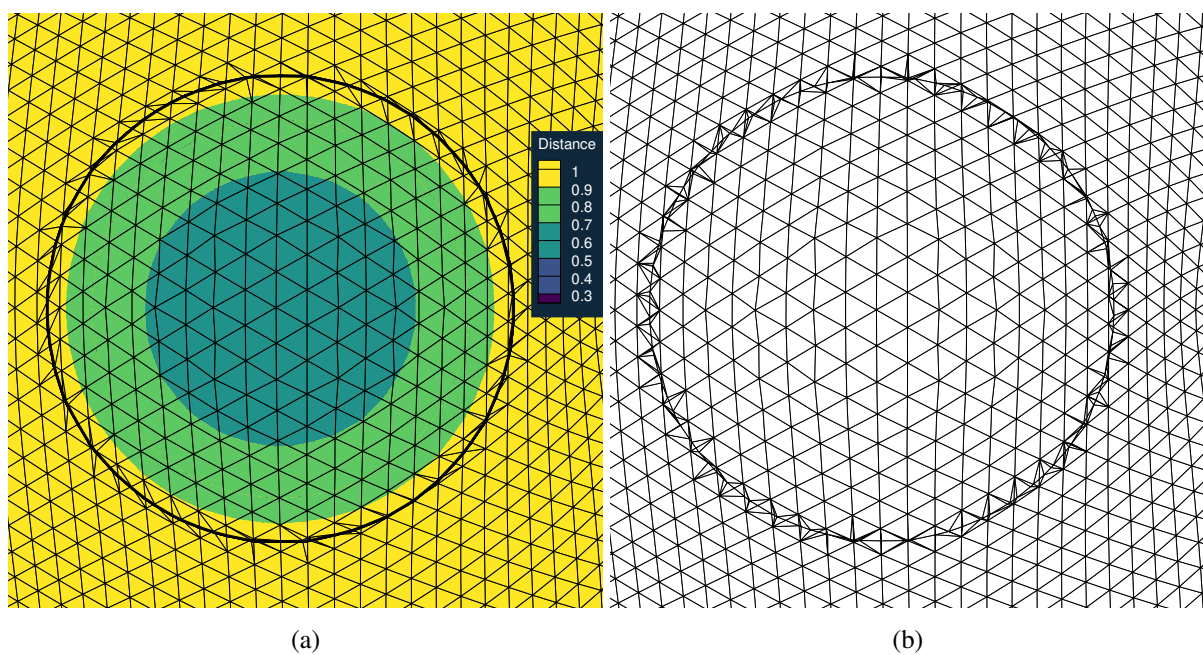


FIGURE 3 – Raffinement de la première *bulle* (a) et adaptation du maillage de la deuxième *bulle* à la frontière (b)

Création des sommets vérifiant la distance minimale égale à d_2 . Pour améliorer la qualité ultérieure de la forme de l'interface, toutes les arêtes définies par un unique sommet tagué sont ensuite examinées. En notant $d > d_2$ et $D < d_2$ les distances selon \mathbf{p}_{moy} à la seconde bulle des sommets s (sommet non tagué) et S (sommet tagué), un nouveau sommet N est introduit sur l'arête telle que sa projection soit proche de d_2 . La position \vec{x}_N du nouveau point N est obtenue par interpolation linéaire :

$$\vec{x}_N = \frac{d_2 - D}{d - D} \vec{x}_s + \frac{d - d_2}{d - D} \vec{x}_S$$

Ce nouveau point est également tagué. L'ajout d'un sommet dans la topologie engendre la création de nouveaux triangles et une mise à jour des connexions entre éléments (Fig. 3a).

Construction de la région de coalescence de la première bulle. Une région de coalescence est ensuite construite de la même manière que la région temporaire mais avec des sommets tagués supplémentaires. Ensuite, les triangles situés dans la région de coalescence sont tagués par une valeur entière.

Construction de l'image des sommets tagués du contour de la région de coalescence. Pour construire l'image sur la seconde bulle (celle possédant le plus grand numéro) de la région de coalescence, le vecteur de projection \mathbf{p}_{moy} est utilisé. Ce vecteur unique garantit une bijection entre les sommets (à construire) des régions de coalescence des deux bulles et permet d'obtenir une forme plus régulière de l'interface après fusion. Les sommets tagués sont ensuite projetés sur cette seconde bulle dans la direction de ce vecteur de projection et engendrent de nouveaux sommets (et triangles) sur la seconde bulle. Ces nouveaux sommets sont tagués avec le même numéro que les sommets projetés.

Adaptation des frontières de la région de coalescence pour qu'il y ait bijection entre les deux bulles. L'étape suivante consiste à adapter les maillages de sorte qu'il y ait bijection entre les sommets des contours des deux régions de coalescence. Dans un premier temps, le contour de la région de coalescence de la première bulle est parcouru. Soient S'_1 et S'_2 les images de S_1 et S_2 par la projection définie dans le paragraphe précédent. Si S'_1 et S'_2 ne sont pas les sommets d'une arête, il faut engendrer un ensemble d'arêtes pour les relier. Pour cela, un vecteur unitaire $\mathbf{n} = (\vec{x}_{S'_2} - \vec{x}_{S'_1}) / \|\vec{x}_{S'_2} - \vec{x}_{S'_1}\|$ est d'abord défini. A partir de S'_1 , l'intersection de la demi droite issue de ce point et dirigée par le vecteur directeur, projection de \mathbf{n} dans le plan d'un des triangles ayant pour sommet S'_1 , est construit : un nouveau sommet A'_1 est créé (ainsi que les triangles associés). Cette procédure est répétée à partir de ce nouveau sommet pour créer une série A'_i (d'indice croissant) de sommets jusqu'à atteindre S'_2 (Fig. 3b). Comme de nouveaux sommets sont engendrés sur la seconde bulle entre S'_1 et S'_2 , il faut faire de même sur la première bulle, sur l'arête délimitée par S_1 et S_2 . En notant $A'_0 = S'_1$, $A'_n = S'_2$ et $A_0 = S_1$, $A_n = S_2$, les nouveaux sommets A_i sur l'arête sont positionnés pour vérifier la relation

$$\frac{d(A_{i+1}A_i)}{\sum_{i=0}^{n-1} d(A_{i+1}A_i)} = \frac{d(A'_{i+1}A'_i)}{\sum_{i=0}^{n-1} d(A'_{i+1}A'_i)}$$

avec $d(A_{i+1}A_i)$ la distance euclidienne entre A_{i+1} et A_i .

Connexion des bulles. Une fois les contours définis sur chaque bulle, les triangles et sommets situés à l'intérieur du contour sont supprimés. Les couples de sommets S et S' sont fusionnés et positionnés à

mi-distance de leurs coordonnées d'origine, $(\vec{x}_S + \vec{x}_{S'})/2$. La topologie de la nouvelle *bulle* est mise à jour en reconstruisant les voisinages.

Remaillage après la coalescence. La jonction définie par les sommets fusionnés est généralement de qualité moyenne. Pour améliorer la forme de cette jonction, une étape de lissage a lieu uniquement pour les sommets de cette jonction. Cela consiste à déplacer chacun des sommets au barycentre des sommets adjacents et appartenant à cette jonction. Même si la forme de la jonction est correcte, la taille des triangles est trop grande en comparaison à la courbure engendrée par la coalescence. Il s'avère donc indispensable de raffiner le maillage adjacent à cette jonction. Ainsi, chaque triangle ayant un sommet sur cette jonction est raffiné en coupant chacune de ses arêtes en deux, ce qui engendrera 4 triangles plus petits. Contrairement à ce qui est indiqué dans la section 2, les nouveaux sommets créés ne sont pas projetés sur une éventuelle surface reconstruite car celle-ci serait de bien trop mauvaise qualité. En revanche, un lissage des arêtes conservant le volume est appliqué au niveau de la jonction [6]. Enfin, les triangles trop petits sont supprimés. Il faut remarquer que le transport par le champ de vitesse de Navier-Stokes participera à l'amélioration du maillage à travers la prise en compte de la tension de surface.

4 Montée d'une bulle 3D

Le cas de la montée d'une bulle [1, 2] est utilisé pour tester la résolution des équation de Navier-Stokes avec la déformation de l'interface entre les deux fluides. Une bulle de rayon initial de $0.25m$ est centrée en $(0.5m, 0.5m, 0.5m)$ dans un domaine rectangulaire de dimensions $(1m, 1m, 2m)$. La masse volumique de la bulle est plus faible que la densité du fluide environnant : $\rho_2 < \rho_1$. Les propriétés physiques et les propriétés des fluides sont présentées dans le tableau 1. Des conditions de Dirichlet sont utilisées pour imposer un vitesse nulle aux parois. Le front est transporté avec un schéma Runge-Kutta du second ordre. La vitesse des marqueurs est interpolée avec l'interpolation trilineaire. La montée de la bulle est simulée pour une durée de $3.5s$. Les nombres de Reynolds et Eotvos sont définis :

$$Re = \frac{\rho_1 U_g D}{\mu_1} \quad (8)$$

$$Eo = \frac{\rho_1 U_g^2 D}{\sigma} \quad (9)$$

Avec D le diamètre de la bulle, $U_g = \sqrt{gD}$ la vitesse gravitationnelle.

| ρ_1 | ρ_2 | μ_1 | μ_2 | g | σ | Re | Eo | ρ_1/ρ_2 | μ_1/μ_2 |
|---------------|---------------|----------|----------|--------------|---------------|------|------|-----------------|---------------|
| $(kg.m^{-3})$ | $(kg.m^{-3})$ | $(Pa.s)$ | $(Pa.s)$ | $(m.s^{-2})$ | $(kg.s^{-2})$ | — | — | — | — |
| 1000 | 10 | 1 | 0.1 | 9.81 | 1.96 | 35 | 125 | 1000 | 100 |

TABLE 1 – Propriétés physiques et propriétés des fluides

Le centre de masse est défini par :

$$\bar{Z}_c(x_c, y_c, z_c) = \frac{\int_{\Omega_2} \bar{z} dx dy dz}{\int_{\Omega_2} dx dy dz} \quad (10)$$

Avec Ω_2 le volume occupé par la bulle.

La vitesse ascensionnelle de la bulle est définie dans l'Equation 11.

$$\overline{W}_c(x_c, y_c, z_c) = \frac{\int_{\Omega_2} \bar{w} dx dy dz}{\int_{\Omega_2} dx dy dz} \quad (11)$$

La sphéricité est définie dans l'Equation 12 avec Γ l'aire de la bulle et Ω son volume. Elle vaut 1 si la bulle est une sphère et diminue si la bulle s'aplatit.

$$\Phi = \frac{\Gamma_0}{\Gamma} = \frac{\pi^{1/3}(6\Omega)^{2/3}}{\Gamma} \quad (12)$$

La méthode Front-Tracking a été utilisée avec un maillage de $64 \times 64 \times 128$ et un pas de temps de $10^{-2}s$. Le centre de masse, la vitesse ascensionnelle, la sphéricité et les diamètres (dans les directions x, y, z) sont comparés avec les résultats de [1]. Les différences sont plus notables pour la sphéricité et les diamètres (Fig. 5) que le centre de masse et la vitesse ascensionnelle (Fig. 4). Une étude des paramètres et une étude de convergence seront réalisées ultérieurement.

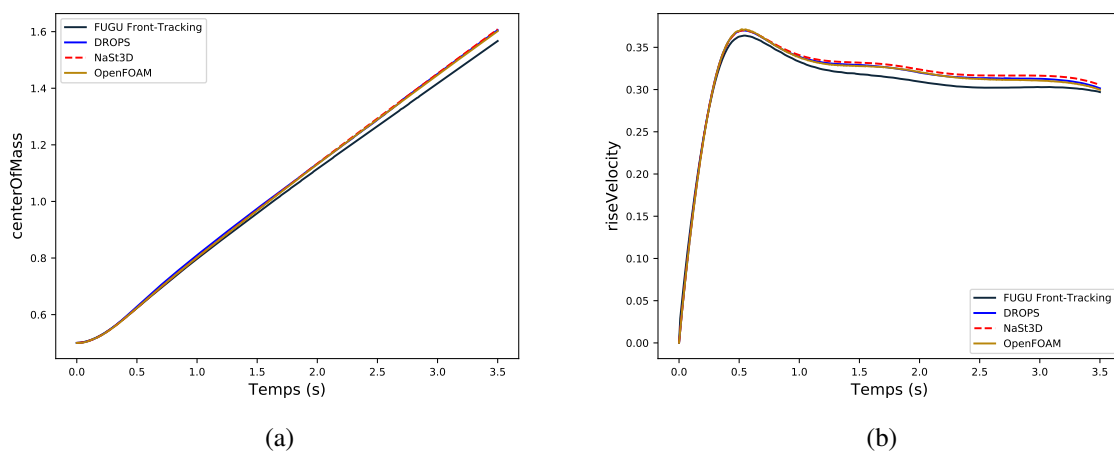


FIGURE 4 – Résultats de la méthode Front-Tracking comparés avec [1] pour le centre de masse et la vitesse ascensionnelle

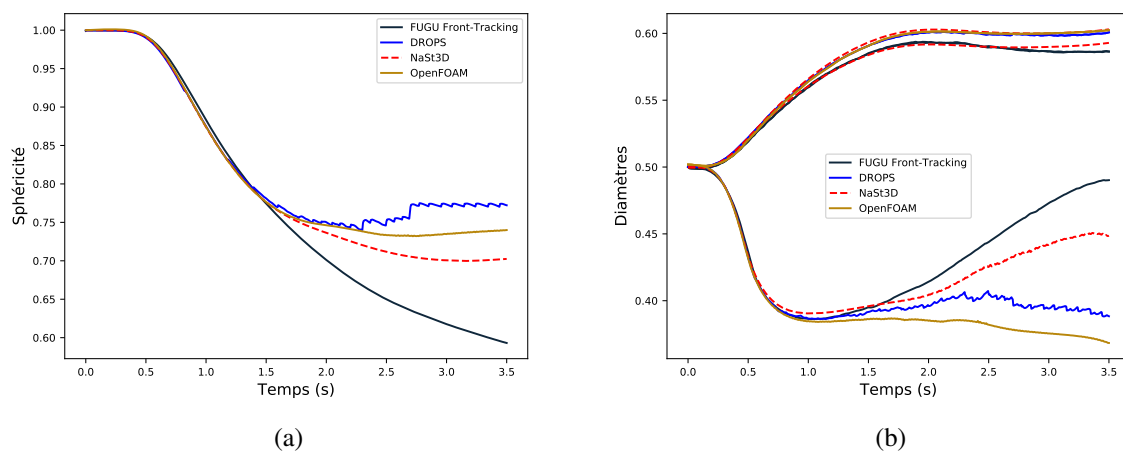


FIGURE 5 – Résultats de la méthode Front-Tracking comparés avec [1] pour la sphéricité et les diamètres

Références

- [1] Jutta Adelsberger, Patrick Esser, Michael Griebel, Sven Groß, Margit Klitz, and Alexander Rüttgers. 3D incompressible two-phase flow benchmark computations for rising droplets. In *Proceedings of the 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI), Barcelona, Spain*, volume 179, 2014.
- [2] Shu-Ren Hysing, Stefan Turek, Dmitri Kuzmin, Nicola Parolini, Erik Burman, Sashikumaar Ganesan, and Lutz Tobiska. Quantitative benchmark computations of two-dimensional bubble dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 60(11) :1259–1288, 2009.
- [3] Xiangmin Jiao and Duo Wang. Reconstructing high-order surfaces for meshing. *Engineering with Computers*, 28(4) :361–373, 2012.
- [4] Isao Kataoka. Local instant formulation of two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 12(5) :745–758, 1986.
- [5] Désir-André Koffi Bi, Mathilde Tavares, Eric Chénier, and Stéphane Vincent. Accuracy and convergence of the curvature and normal vector discretizations for 3D static and dynamic front-tracking interfaces. *Journal of Computational Physics*, page 111197, April 2022.
- [6] Andrew Kuprat, Ahmed Khamayseh, Denise George, and Levi Larkey. Volume Conserving Smoothing for Piecewise Linear Curves, Surfaces, and Triple Lines. *Journal of Computational Physics*, 172(1) :99–118, September 2001.
- [7] Nishant Nangia, Boyce E. Griffith, Neelesh A. Patankar, and Amneet Pal Singh Bhalla. A robust incompressible Navier-Stokes solver for high density ratio multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, 390 :548–594, August 2019.
- [8] Stanley Osher and James A Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1) :12–49, November 1988.
- [9] I. Roghair, M. Van Sint Annaland, and J. A. M. Kuipers. An improved Front-Tracking technique for the simulation of mass transfer in dense bubbly flows. *Chemical Engineering Science*, 152 :351–369, October 2016.
- [10] Seungwon Shin, S. I. Abdel-Khalik, Virginie Daru, and Damir Juric. Accurate representation of surface tension using the level contour reconstruction method. *Journal of Computational Physics*, 203(2) :493–516, March 2005.
- [11] Seungwon Shin and Damir Juric. Modeling Three-Dimensional Multiphase Flow Using a Level Contour Reconstruction Method for Front Tracking without Connectivity. *Journal of Computational Physics*, 180(2) :427–470, 2002.
- [12] Grétar Tryggvason, Bernard Bunner, Asghar Esmaeeli, Damir Juric, N Al-Rawahi, W Tauber, J Han, S Nas, and Y-J Jan. A front-tracking method for the computations of multiphase flow. *Journal of computational physics*, 169(2) :708–759, 2001.
- [13] Gretar Tryggvason, Ruben Scardovelli, and S. Zaleski. *Direct Numerical Simulations of Gas-Liquid Multiphase Flows*. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 2011.
- [14] David Youngs. Time-Dependent Multi-material Flow with Large Fluid Distortion. In *Num. Method Fluid Dyn.*, volume 24, pages 273–285. January 1982.