



**HAL**  
open science

# Une nouvelle méthode d'identification de force basée sur une vision bayésienne unifiée du filtrage de type Kalman

Julian Ghibaudo, Mathieu Aucejo, Olivier de Smet

## ► To cite this version:

Julian Ghibaudo, Mathieu Aucejo, Olivier de Smet. Une nouvelle méthode d'identification de force basée sur une vision bayésienne unifiée du filtrage de type Kalman. Congrès Français de Mécanique 2022, Aug 2022, Nantes, France. hal-03768674

**HAL Id: hal-03768674**

**<https://hal.science/hal-03768674>**

Submitted on 4 Sep 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une nouvelle méthode d'identification de force basée sur une vision bayésienne unifiée du filtrage de type Kalman

J. Ghibaud, M. Aucejo and O. De Smet<sup>a</sup>

a. Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, Conservatoire National des Arts et Métiers, 2 Rue Conté, 75003 Paris, France  
julian.ghibaud, mathieu.aucejo, oliver.desmet@lecnam.net

## Résumé :

*Ce papier présente un nouveau filtre bayésien pour l'estimation des sources d'excitation mécanique dans le domaine temporel à partir d'un ensemble de mesures de vibrations. Le filtre proposé est dérivé d'une formulation bayésienne générale, unifiant la plupart des filtres récursifs développés au cours de la dernière décennie pour résoudre les problèmes d'estimation de l'état et de l'entrée. Plus précisément, le filtre bayésien proposé permet de promouvoir la parcimonie spatiale du vecteur d'entrée estimé, en supposant que le vecteur d'entrée prédit est un vecteur aléatoire dont les composantes sont indépendantes, identiquement distribuées et suivent une loi normale généralisée. Pour estimer correctement les paramètres de cette dernière, une optimisation bayésienne est mise en place à chaque pas de temps. La validité de l'approche proposée, appelée Sparse adaptive Bayesian filter (SaBF), est évaluée numériquement. En particulier, les comparaisons effectuées avec certains filtres de l'état de l'art montrent que la stratégie proposée surpasse les filtres existants en termes de précision d'estimation de l'entrée et évite le phénomène dit de dérive ("drift").*

## Abstract :

*The present paper introduces a novel Bayesian filter for estimating mechanical excitation sources in the time domain from a set of vibration measurements. The proposed filter is derived from a very general Bayesian formulation, unifying most of the state-of-the-art recursive filters developed in the last decade for solving input-state estimation problems. More specifically, the proposed Bayesian filter allows promoting the spatial sparsity of the estimated input vector, by assuming that the predicted input vector is a random vector with independent and identically distributed components following a generalized Gaussian distribution. To properly estimate the most probable parameters of the latter probability distribution, a nested Bayesian optimization is implemented. The validity of the proposed approach, called Sparse adaptive Bayesian Filter, is numerically assessed. In particular, the comparisons performed with some state-of-the-art filters show that the proposed strategy outperforms the existing filters in terms of input estimation accuracy and avoids the so-called drift effect.*

**Mots clefs : Problème inverse linéaire, identification et localisation de force, approche temporelle, filtre bayésien, filtre de Kalman.**

## 1 Introduction

L'identification de force est un sujet récurrent en dynamique des structures, qui émerge du besoin de connaître les excitations mécaniques agissant sur une structure afin d'améliorer sa conception, surveiller sa tenue en service ou améliorer sa durée de vie. Par exemple, un impact mécanique (ou choc), qu'il soit intentionnel ou non, peut causer des dommages dans les structures, tels que des défaillances mécaniques ou une panne des dispositifs intégrés. Cependant, l'impact réel est généralement difficile à caractériser, en raison de la difficulté à instrumenter la zone d'intérêt ou du manque de connaissance de ses caractéristiques spatio-temporelles (localisation, durée et intensité). Ces considérations pratiques rendent nécessaire la mise en œuvre de méthodes d'identification inverse pour estimer les sources d'excitation agissant sur une structure mécanique à partir de la mesure de quantités cinématiques telles que la déformation, le déplacement, la vitesse ou l'accélération. Malheureusement, les problèmes inverses sont généralement mal posés mathématiquement, notamment en lien avec le bruit de mesure qui, même de faible niveau, peut entraîner des erreurs de reconstruction conséquentes. Parmi toutes les méthodes existantes dans la littérature, la régularisation de type Tikhonov et le filtrage de type Kalman sont principalement les plus utilisées. Ces deux méthodes ont été développées au début des années 1960 dans les travaux respectifs d'Andrey Tikhonov [1] et de Rudolf Kalman [2]. Malgré leurs différences apparentes, ils partagent certaines caractéristiques communes. Premièrement, le gain de Kalman peut être considéré comme un opérateur inverse de régularisation, similaire à celui défini dans la régularisation de type Tikhonov. Deuxièmement, les deux méthodes peuvent être dérivées du formalisme bayésien [3, 4], ce qui permet de mieux comprendre les principales hypothèses sous-jacentes à ces stratégies et ouvre la voie à de nouveaux développements et analyses. Plus précisément, la régularisation de type Tikhonov est un type particulier de régularisation bayésienne, tandis que les filtres de type Kalman appartiennent à la classe générale des filtres bayésiens.

Rapide, peu coûteux en terme de ressources de calcul et récursif, le filtrage de type Kalman s'est largement développé et différents filtres ont été proposés dans la littérature, par Gillijns et De Moor (GDF) [5, 6], Lourens et al. avec le filtre de Kalman augmenté (AKF) [7] ou encore le filtre de Kalman dual (DKF) proposé par Eftekhar Azam et al. [8]. Dans le but d'améliorer les résultats de ces filtres, un filtre bayésien séquentiel (SBF) développé par Sedehi et al. [9] revisite le problème d'estimation de l'état d'entrée dans une perspective bayésienne. Bien qu'une information préalable soit introduite sur la distribution spatiale du vecteur d'entrée dans les exemples de la littérature, celle-ci ne contraint pas suffisamment l'estimation résultante. Ainsi, malgré des performances raisonnables de ces filtres, cela peut conduire à une reconstruction inexacte du champ d'excitation lorsque les sources d'excitation sont spatialement ponctuelles.

## 2 Représentation d'état discrétisée d'un système dynamique

Le filtrage bayésien est basé sur la représentation d'état du système dynamique d'intérêt. Formellement, la représentation discrétisée de l'espace d'état d'un système linéaire et invariant dans le temps est exprimée par :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k^x \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \end{cases}, \quad (1)$$

où  $\mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{u}_k$  et  $\mathbf{y}_k$  sont les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie au pas de temps  $k$ , tandis que  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  sont, respectivement, les matrices discrétisées d'état, de commande, d'observation et d'action directe. Ici,  $\mathbf{w}_k^x$  désigne le bruit de processus, gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{Q}_k^x$  et  $\mathbf{v}_k$  est le bruit de mesure, gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{R}_k$ .

D'un point de vue bayésien, la représentation d'état discrétisée (1) précédente peut être exprimée comme suit [4] :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} \sim p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \mathbf{Q}_k^x) \\ \mathbf{y}_k \sim p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_k|\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k, \mathbf{R}_k) \end{cases}, \quad (2)$$

où  $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  est la loi normale multivariée de moyenne  $\boldsymbol{\mu}$  et de matrice de covariance  $\boldsymbol{\Sigma}$  associée au vecteur aléatoire  $\mathbf{x}$ .

## 3 Formulation bayésienne du problème d'estimation séquentielle de l'entrée et de l'état

Cette section explicite la formulation bayésienne pour traiter le problème d'estimation séquentielle de l'état et de l'entrée. En particulier, une formulation bayésienne inspirée des travaux de Sedehi et al. [9], est proposée.

### 3.1 Formulation bayésienne générale

Dans ce problème d'estimation séquentielle, le vecteur d'état  $\mathbf{x}_k$  et le vecteur d'entrée  $\mathbf{u}_k$  sont calculés séquentiellement, et non simultanément. D'un point de vue général, cela permet d'utiliser directement la représentation d'état donnée par l'équation (1). À cette fin, la formulation bayésienne du filtre de Kalman standard doit être étendue pour tenir compte de la nature séquentielle du processus de filtrage. Cela implique alors l'introduction de distributions de probabilité associées au vecteur d'entrée lors de la prédiction et de l'estimation, à savoir  $p(\mathbf{u}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})$  et  $p(\mathbf{u}_k|\mathbf{y}_{1:k})$ . La formulation bayésienne peut ainsi être divisée en cinq étapes :

1. Initialisation à  $k = 0$

L'initialisation des vecteurs d'entrée et d'état consiste à définir les distributions de probabilité a priori sur le vecteur d'entrée initial,  $\mathbf{u}_0$ , et le vecteur d'état initial,  $\mathbf{x}_0$ . Ici, ces

distributions de probabilité sont définies comme suit :

$$p(\mathbf{u}_0) = \mathcal{N}(\mathbf{u}_0 | \hat{\mathbf{u}}_0, \mathbf{P}_0^u) \text{ et } p(\mathbf{x}_0) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_0 | \hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0^x), \quad (3)$$

où les moyennes,  $\hat{\mathbf{u}}_0$  et  $\hat{\mathbf{x}}_0$ , ainsi que les matrices de covariance,  $\mathbf{P}_0^u$  et  $\mathbf{P}_0^x$ , sont connues. Pour terminer cette étape, il faut calculer la distribution  $p(\mathbf{x}_1 | \mathbf{y}_0)$  en supposant que les vecteurs d'entrée et d'état initiaux sont statistiquement indépendants :

$$p(\mathbf{x}_1 | \mathbf{y}_0) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_1 | \tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{P}}_1^x), \quad (4)$$

avec  $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}_0$ , l'état prédit et  $\tilde{\mathbf{P}}_1^x = \mathbf{A}\mathbf{P}_0^x\mathbf{A}^\top + \mathbf{B}\mathbf{P}_0^u\mathbf{B}^\top + \mathbf{Q}_0$ , sa covariance.

## 2. Prédiction du vecteur d'entrée au pas de temps $k$

La prédiction du vecteur d'entrée repose sur la définition de la distribution  $p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})$  lors de la phase de prédiction, qui est inconnue si aucune hypothèse n'est faite sur la forme ou l'évolution dans le temps du vecteur d'entrée. C'est généralement à ce stade que les filtres séquentiels de l'état de l'art diffèrent. Pour regrouper la littérature existante sous un filtre bayésien séquentiel assez général, cette distribution de probabilité suit une loi normale multivariée de moyenne  $\tilde{\mathbf{u}}_k$  et de matrice de covariance  $\tilde{\mathbf{P}}_k^u$  :

$$p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{u}_k | \tilde{\mathbf{u}}_k, \tilde{\mathbf{P}}_k^u). \quad (5)$$

## 3. Estimation du vecteur d'entrée au pas de temps $k$

L'estimation du vecteur d'entrée nécessite le calcul de la distribution de probabilité de filtrage  $p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k})$ . En appliquant la règle de Bayes, cette distribution de probabilité s'écrit :

$$p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \mathcal{N}(\mathbf{u}_k | \hat{\mathbf{u}}_k, \mathbf{P}_k^u), \quad (6)$$

avec

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \tilde{\mathbf{u}}_k + \mathbf{K}_k^u (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}_k - \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}_k), \quad (7a)$$

$$\mathbf{P}_k^u = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^u \mathbf{D}) \tilde{\mathbf{P}}_k^u + \mathbf{K}_k^u \mathbf{C} \tilde{\mathbf{P}}_k^x \mathbf{C}^\top \mathbf{K}_k^{u\top}, \quad (7b)$$

$$\mathbf{K}_k^u = \tilde{\mathbf{P}}_k^u \mathbf{D}^\top (\mathbf{D} \tilde{\mathbf{P}}_k^u \mathbf{D}^\top + \mathbf{R}_k)^{-1}. \quad (7c)$$

## 4. Estimation du vecteur d'état au pas de temps $k$

Comme pour le vecteur d'entrée, l'estimation du vecteur d'état nécessite le calcul de la distribution de probabilité  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$ , correspondant à la distribution marginale :

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k | \hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_k^x), \quad (8)$$

avec

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}_k - \mathbf{D}\hat{\mathbf{u}}_k), \quad (9a)$$

$$\mathbf{P}_k^{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^{\mathbf{x}}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_k^{\mathbf{x}}\mathbf{D}\mathbf{P}_k^{\mathbf{u}}\mathbf{D}^{\top}\mathbf{K}_k^{\mathbf{x}\top}, \quad (9b)$$

$$\mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}}\mathbf{C}^{\top}(\mathbf{C}\tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}}\mathbf{C}^{\top} + \mathbf{R}_k)^{-1}. \quad (9c)$$

À ce stade, il est possible de calculer la matrice de covariance croisée  $\mathbf{P}_k^{\mathbf{xu}}$  telle que :

$$\mathbf{P}_k^{\mathbf{xu}} = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{u}_k - \hat{\mathbf{u}}_k)^{\top}] = -\mathbf{K}_k^{\mathbf{x}}\mathbf{D}\mathbf{P}_k^{\mathbf{u}}, \quad (10)$$

où  $\mathbb{E}(\mathbf{x})$  est l'espérance du vecteur aléatoire  $\mathbf{x}$ .

## 5. Prédiction du vecteur d'état à l'étape $k + 1$

La dernière étape du filtre bayésien séquentiel est le calcul de la distribution prédictive sur le vecteur d'état au pas de temps  $k + 1$ , afin de poursuivre le processus récursif :

$$p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{y}_{1:k}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1}|\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}, \tilde{\mathbf{P}}_{k+1}^{\mathbf{x}}), \quad (11)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}_k, \quad (12a)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k+1}^{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k^{\mathbf{x}} & \mathbf{P}_k^{\mathbf{xu}} \\ \mathbf{P}_k^{\mathbf{xu}\top} & \mathbf{P}_k^{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\top} \\ \mathbf{B}^{\top} \end{bmatrix} + \mathbf{Q}_k. \quad (12b)$$

De cette formulation bayésienne générale s'obtiennent les filtres séquentiels existant dans la littérature, que ce soit GDF, SBF ou DKF. Cependant, ces filtres divergent dans les équations employées, plus précisément l'hypothèse de prédiction, induisant des résultats assez similaires. Les nuances des hypothèses employées selon le filtre de la littérature ne seront pas développées ici.

## 4 Développement du Sparse adaptive Bayesian Filter

Les filtres de la littérature utilisent chacun une hypothèse différente pour définir la distribution de probabilité sur le vecteur d'entrée  $p(\mathbf{u}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})$  au cours de la phase de prédiction. Cette observation est à l'origine du Sparse adaptive Bayesian Filter (SaBF), qui vise à introduire dans la formulation une information a priori sur la distribution spatiale du vecteur d'entrée. Ainsi, un choix adéquat de la distribution a priori  $p(\mathbf{u}_k)$ , correspondant à la distribution  $p(\mathbf{u}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})$  dans le formalisme du filtrage bayésien, doit être établi.

### 4.1 Hypothèse de prédiction

Dans SaBF, cette distribution de probabilité est choisie de manière à favoriser la parcimonie ou le lissage de la distribution spatiale du vecteur d'entrée. En pratique, la distribution de proba-

bilité utilisée pour répondre à cette exigence est la loi normale généralisée univariée [10]. En supposant que les composantes du vecteur d'entrée sont indépendantes et identiquement distribuées, la distribution sur le vecteur d'entrée choisie est la loi normale généralisée multivariée de moyenne nulle, telle que :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) &= \mathcal{N}_g(\mathbf{u}_k | \mathbf{0}, \tau_k, q_k) \\ &= \left( \frac{q_k^{1-\frac{1}{q_k}}}{2\Gamma(\frac{1}{q_k})} \right)^{N_u} \tau_k^{\frac{N_u}{q_k}} \exp\left(-\frac{\tau_k}{q_k} \|\mathbf{u}_k\|_{q_k}^{q_k}\right), \end{aligned} \quad (13)$$

avec  $q_k \in \mathbb{R}^{+*}$ , le paramètre de forme de la distribution au pas de temps  $k$  ;  $\|\bullet\|_q$ , la norme  $\ell_q$  ( $q \geq 1$ ) ou quasi-norme ( $q < 1$ ) ;  $\tau_k \in \mathbb{R}^{+*}$ , le paramètre d'échelle de la distribution au pas de temps  $k$  ;  $N_u$ , le nombre de composantes du vecteur d'entrée ;  $\Gamma(x)$ , la fonction gamma. Ce choix spécifique offre une certaine flexibilité sur la distribution spatiale du vecteur d'entrée, puisqu'il permet de renforcer la parcimonie du vecteur d'entrée lorsque  $q_k \leq 1$  ou son lissage lorsque  $q_k = 2$  [11].

Pour se conformer à la formulation bayésienne présentée dans la section 3.1, l'approximation gaussienne suivante [12] est utilisée :

$$\mathcal{N}_g(\mathbf{u}_k | \mathbf{0}, \tau_k, q_k) \propto \mathcal{N}(\mathbf{u}_k | \mathbf{0}, \mathbf{W}_k^{-1} / \tau_k). \quad (14)$$

Celle-ci est valable pour un choix adéquat des paramètres d'échelle et de forme  $(\tau_k, q_k)$  et de la matrice  $\mathbf{W}$ . Cette dernière matrice doit être définie positive et symétrique.

Finalement, à partir de la distribution proposée pour la prédiction et de l'approximation précédente :

$$\hat{\mathbf{u}}_k = (\mathbf{D}\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{D}^\top + \tau_k \mathbf{W}_k)^{-1} \mathbf{D}^\top \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{i}_k. \quad (15)$$

où  $\mathbf{i}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}_k$  est l'innovation, qui représente l'information apportée par la nouvelle mesure. Cette dernière équation permet d'identifier le gain de Kalman  $\mathbf{K}_k^u$  et la matrice de covariance de prédiction  $\tilde{\mathbf{P}}_k^u$  tels que :

$$\mathbf{K}_k^u = (\mathbf{D}\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{D}^\top + \tau_k \mathbf{W}_k)^{-1} \mathbf{D}^\top \mathbf{R}_k^{-1} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{P}}_k^u = (\tau_k \mathbf{W}_k)^{-1}. \quad (16)$$

A ce stade, il reste à déterminer les paramètres d'échelle et de forme  $(\tau_k, q_k)$  ainsi que la matrice  $\mathbf{W}_k$  satisfaisant l'approximation gaussienne. À cette fin, une optimisation bayésienne est proposée pour déterminer à chaque pas de temps les valeurs de tous les paramètres du problème, dont  $\hat{\mathbf{u}}_k$ , étant donné l'innovation  $\mathbf{i}_k$ .

## 4.2 Calcul par optimisation des paramètres $\mathbf{u}_k$ , $\tau_k$ et $q_k$

Ici, les paramètres optimaux,  $\mathbf{u}_k$ ,  $\tau_k$  et  $q_k$ , sont calculés comme la solution du maximum a posteriori (MAP) du problème d'optimisation bayésien suivant :

$$(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\tau}_k, \hat{q}_k) = \underset{(\mathbf{u}_k, \tau_k, q_k)}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{u}_k, \tau_k, q_k | \mathbf{i}_k), \quad (17)$$

où  $p(\mathbf{u}_k, \tau_k, q_k | \mathbf{i}_k)$  est donné par :

$$p(\mathbf{u}_k, \tau_k, q_k | \mathbf{i}_k) \propto p(\mathbf{i}_k | \mathbf{u}_k) p(\mathbf{u}_k | \tau_k, q_k) p(\tau_k) p(q_k), \quad (18)$$

et la distribution a priori est  $p(\mathbf{u}_k | \tau_k, q_k) = p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})$ .

La solution du problème d'optimisation précédent peut être obtenue en maximisant les distributions de probabilité conditionnelles associées à chaque paramètre :

$$\hat{\tau}_k = \underset{\tau_k}{\operatorname{argmax}} p(\hat{\mathbf{u}}_k | \tau_k, q_k) p(\tau_k), \quad (19a)$$

$$\hat{q}_k = \underset{q}{\operatorname{argmax}} p(\hat{\mathbf{u}}_k | \tau_k, q_k) p(q_k), \quad (19b)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \underset{\mathbf{u}_k}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{u}_k | \mathbf{i}_k) p(\mathbf{u}_k | \tau_k, q_k). \quad (19c)$$

Pour compléter la formulation du problème d'optimisation bayésienne, il reste à spécifier la distribution de probabilité a priori sur les paramètres d'échelle et de forme,  $\tau_k$  et  $q_k$ . Pour le paramètre d'échelle, une loi Gamma est choisie, c'est-à-dire :

$$\mathcal{G}(\tau_k | \alpha_t, \beta_t) = \frac{\beta_t^{\alpha_t}}{\Gamma(\alpha_t)} \tau_k^{\alpha_t-1} \exp(-\beta_t \tau_k) \quad \text{avec} \quad \alpha_t > 0, \beta_t > 0, \quad (20)$$

où  $\alpha_t$  et  $\beta_t$  sont respectivement le paramètre d'échelle et le paramètre de forme de la distribution, avec  $\alpha_t = 1$  et  $\beta_t = 10^{-18}$ .

De la même manière, le paramètre de forme  $q_k$  est compris dans l'intervalle  $]0, 2]$  [11]. Ainsi, un choix judicieux est la distribution Gamma inverse tronquée :

$$\begin{aligned} \mathcal{IG}_T(q_k | \alpha_q, \beta_q) &\propto \mathcal{IG}(q | \alpha_q, \beta_q) \mathbb{I}_{[l_b, u_b]}(q_k), \\ &= \frac{\beta_q^{\alpha_q}}{\Gamma(\alpha_q)} (1/q_k)^{\alpha_q+1} \exp(-\beta_q/q_k) \mathbb{I}_{[l_b, u_b]}(q_k), \end{aligned} \quad (21)$$

avec  $\alpha_q = 1$ ,  $\beta_q = 10^{-18}$  et  $(l_b, u_b) = (0.01, 2)$  en pratique.

Maintenant que le problème est entièrement spécifié, le MAP du système d'équations (19) peut être calculé. En pratique, le calcul des paramètres minimisant l'opposé du logarithme des



distributions de probabilité conditionnelles est effectué. Ainsi, on obtient :

$$\hat{\tau}_k = \underset{\tau_k}{\operatorname{argmin}} \tau_k \left( \beta_t q_k + \|\mathbf{u}_k\|_{q_k}^{q_k} \right) - (N_u + q_k(\alpha_t - 1)) \log(\tau_k), \quad (22a)$$

$$\hat{q}_k = \underset{q}{\operatorname{argmin}} f(q_k | \mathbf{u}_k, \tau_k) \quad \text{for } q_k \in [l_b, u_b], \quad (22b)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \underset{\mathbf{u}_k}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|\mathbf{i}_k - \mathbf{D}\mathbf{u}_k\|_{\mathbf{R}_k}^2 + \frac{\tau_k}{q_k} \|\mathbf{u}_k\|_{q_k}^{q_k}, \quad (22c)$$

avec :

$$f(q_k | \mathbf{u}_k, \tau_k) = N_u \log \Gamma(1/q_k) - N_u \frac{\log \tau_k}{q_k} + \frac{\tau_k \|\mathbf{u}_k\|_{q_k}^{q_k} + \beta_q}{q_k} - \left( N_u \left( 1 - \frac{1}{q_k} \right) - \alpha_q - 1 \right) \log q_k. \quad (23)$$

Comme mentionné précédemment, la résolution du système d'équations précédent ne peut être effectuée que de manière itérative, puisque la valeur optimale d'un paramètre donné dépend des valeurs des autres. Il en résulte que le processus de résolution à un pas de temps  $k$  peut être résumé comme suit :

### 1. Initialisation

a. Définir  $\hat{q}_k^{(0)} = \hat{q}_{k-1}$  et  $\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)} = \hat{\mathbf{u}}_{k-1}$

### 2. Tant que la convergence n'est pas atteinte

a. Calculer  $\hat{\tau}_k^{(i)}$  avec l'Eq. (22a) connaissant  $\hat{\mathbf{u}}_k^{(i-1)}$  et  $\hat{q}_k^{(i-1)}$

b. Calculer  $\hat{q}_k^{(i)}$  avec l'Eq. (22b) given  $\hat{\mathbf{u}}_k^{(i-1)}$  et  $\hat{\tau}_k^{(i)}$

c. Calculer  $\hat{\mathbf{u}}_k^{(i)}$  avec l'Eq. (22c) connaissant  $\hat{\tau}_k^{(i)}$  et  $\hat{q}_k^{(i)}$

d. Calcul de  $\mathbf{W}_k^{(i)} = \operatorname{diag} \left( w_{k,1}^{(i)}, \dots, w_{k,n}^{(i)}, \dots, w_{k,N_u}^{(i)} \right)$  avec  $w_{k,n}^{(i)} = \max \left( \epsilon_i, \left| \hat{\mathbf{u}}_k^{(i)} \right| \right)^{\hat{q}_k^{(i)} - 2}$  et  $\epsilon_i$  une valeur faible évitant l'obtention de composantes infinies

**Fin Tant que**

### 3. Sortie $\hat{\mathbf{u}}_k$ , $\hat{\tau}_k$ et $\hat{q}_k$

## 5 Validation numérique

Cette section présente l'application du SaBF dans un contexte purement numérique. Ses performances sont comparées qualitativement à celles de certains filtres de l'état de l'art (AKF, DKF et GDF). Seule l'estimation du vecteur d'entrée est visée ici, celle-ci se faisant aux emplacements des capteurs.

### 5.1 Définition du problème

La structure étudiée est une poutre en acier simplement appuyée, d'une longueur de  $L = 3\text{m}$ , de section transversale  $S = 1060\text{mm}^2$  et de moment quadratique  $I = 171\text{mm}^4$ . Les propriétés

du matériau sont  $E = 210\text{GPa}$  pour le module d'Young et  $\rho = 7850\text{kg/m}^3$  pour la masse volumique, le facteur d'amortissement modal est fixé à 0,01.

Pour cette application numérique, on suppose que la poutre subit un impact de marteau à la position  $x_{\text{exc}} = 0,98\text{m}$ , mesurée à partir de son extrémité gauche. Ce type d'excitation peut être modélisé par une fonction Gamma de paramètres de forme et d'échelle  $p$  et  $\theta$  [13] :

$$u_{\text{ref}}(t) = u_0 \left( \frac{t}{p\theta} \right)^p \exp\left(-\frac{t}{\theta} + p\right), \quad (24)$$

où  $u_0$  est l'intensité maximale de la force. Dans cet exemple, la structure est frappée par un marteau équipé d'une pointe en caoutchouc souple afin d'exciter uniquement les modes basse fréquence de la poutre. Pour refléter cette hypothèse, les paramètres de l'excitation d'entrée sont choisis tels que  $u_0 = 15\text{N}$ ,  $p = 8.7$  et  $\theta = 0.6\text{ms}$ . De plus, un retard de 8ms est ajouté au début du signal pour simuler un pré-déclenchement. Cette force de référence est représentée sur la Fig. 1.

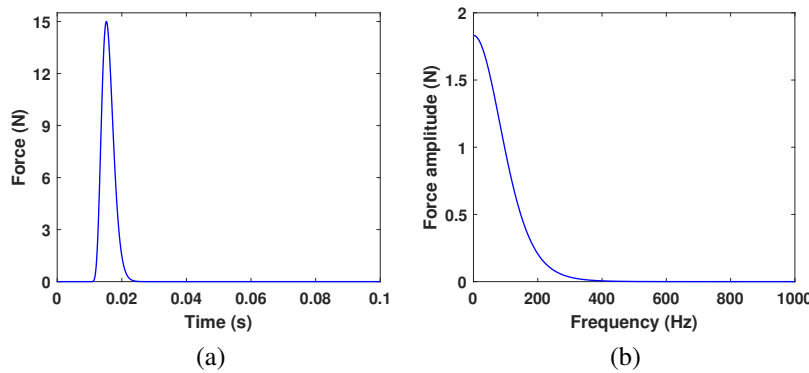


Figure 1: Signal (a) temporel et (b) fréquentiel du coup de marteau

Vingt capteurs sont distribués le long de la poutre pour effectuer les mesures des variables cinématiques. Pour synthétiser ces données mesurées, un modèle modal réduit de la poutre est employé. La base modale considérée contient les 53 premiers modes de vibration analytiques, correspondant aux modes ayant une fréquence de résonance inférieure à 1kHz. Les données d'accélération sont calculées sur 1s à partir d'un schéma d'intégration de Newmark, inconditionnellement stable, en utilisant un pas de temps de  $10\mu\text{s}$ . Enfin, pour simuler le processus de mesure, les données calculées sont bruitées par un bruit blanc gaussien, de rapport signal à bruit (SNR) contrôlé de 25 dB.

Pour mettre en œuvre correctement tous les filtres à comparer, il reste à définir les conditions initiales  $(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0^{\mathbf{x}})$  et  $(\hat{\mathbf{u}}_0, \mathbf{P}_0^{\mathbf{u}})$  ainsi que les matrices de covariance  $\mathbf{Q}_k^{\mathbf{x}}$  et  $\mathbf{R}_k$ . Ici, les matrices de covariance initiales  $\mathbf{P}_0^{\mathbf{x}}$  et  $\mathbf{P}_0^{\mathbf{u}}$  sont supposées isotropes, de variance fixée à  $10^{-20}$ , tandis que les vecteurs d'état et d'entrée initiaux  $\hat{\mathbf{x}}_0$  et  $\hat{\mathbf{u}}_0$  sont nuls. Les covariances du bruit  $\mathbf{Q}_k^{\mathbf{x}}$  et  $\mathbf{R}_k$  sont supposées isotropes et constantes dans le temps, de valeurs respectives de  $10^{-20}$  et  $10^{-2}$ . Pour le SaBF, le paramètre de forme initiale  $\hat{q}_0$  est fixé à 1, car la distribution spatiale du vecteur d'entrée doit être creuse pour tenir compte du caractère parcimonieux de la

source. On peut cependant noter que toute autre valeur comprise sur  $]0, 2]$  peut être choisie sans dégrader la qualité des résultats obtenus. Pour l'AKF et le DKF, la matrice de covariance associée à l'équation fictive sur le vecteur d'entrée ajoutée dans la formulation de ces filtres est supposée isotrope et sa variance est ajustée en suivant la procédure décrite dans les Réfs. [7, 14].

## 5.2 Identification de l'impact de marteau

Dans cette partie, SaBF est comparé aux filtres de la littérature sur la configuration décrite dans la section précédente. SBF n'est pas considéré ici et dans le reste de l'article, car il diverge pour les paramètres utilisés pour régler le filtre. L'une des principales causes de divergence est liée à l'astuce introduite par Sedehi et al. dans la Réf. [9] pour atténuer l'effet de dérive.

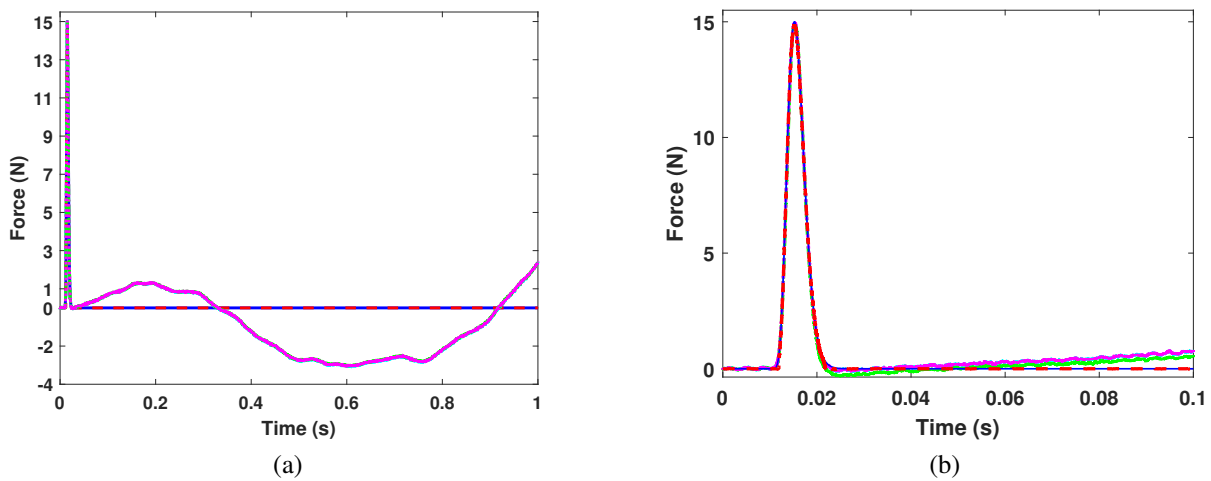


Figure 2: Évolution temporelle de la force estimée (a) pour une durée d'identification de 1s et (b) restreinte sur 0.1s pour plus de lisibilité - (—) Référence, (—) SaBF, (· · ·) AKF, (—) DKF et (—) GDF.

L'estimation de l'intensité temporelle de l'entrée présentée dans la Fig. 2 (b) montre que la valeur maximale de l'estimation est proche de la valeur de référence de 15N pour tous les filtres : l'erreur maximale de chaque filtre est inférieure à 1%. Cependant, un aspect important de la reconstruction est le comportement après avoir identifié le coup de marteau : la valeur résiduelle non nulle suivant la prédiction conduit le filtre à diverger au lieu de rester constant. C'est ce qu'on appelle l'effet de dérive (ou "drift"), qui caractérise la façon dont la variable identifiée tend à s'écartier d'une valeur constante, nulle ici, bien visible sur la Fig. 2 (a). Cette erreur s'accumule à chaque pas de temps, suivant un comportement aléatoire à chaque point d'identification. Cette dérive est clairement observable sur tous les filtres à partir de  $t = 50\text{ms}$ , sauf sur SaBF où l'estimation stagne, avec un écart-type de  $39.4\mu\text{N}$ .

La figure suivante Fig. 3 montre l'emplacement estimé et l'évolution temporelle de l'excitation, en fonction de chaque filtre. Tous les filtres identifient bien le lieu de l'impact, néanmoins, le phénomène de drift est omniprésent aux lieux d'identification des efforts pour les filtres de la littérature : la valeur maximale de l'erreur absolue atteinte par ces forces parasites est

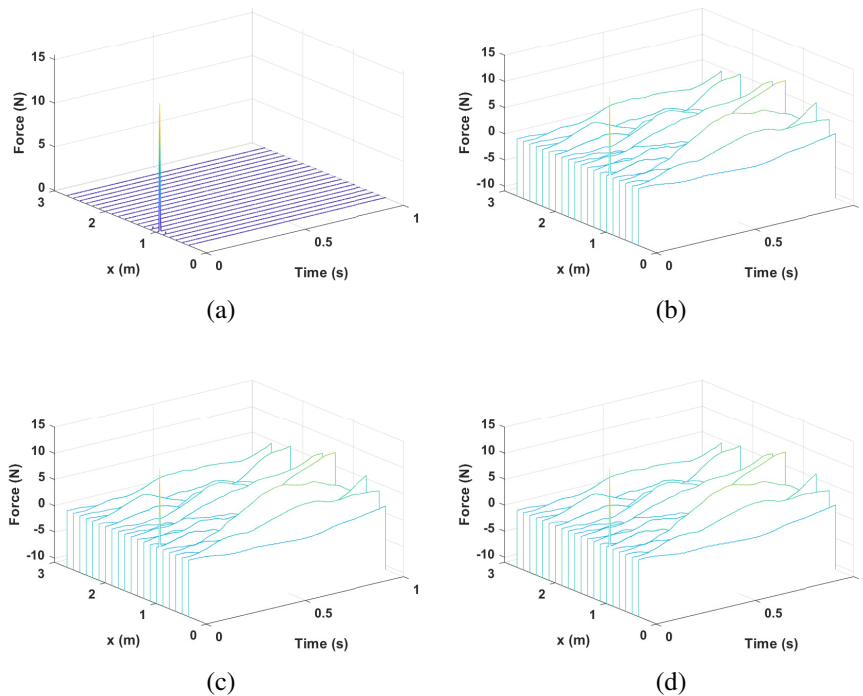


Figure 3: Répartition temporelle de l'effort estimé pour une durée d'identification de 1s – (a) SaBF, (b) AKF, (c) DKF et (d) GDF.

d'environ 10,8 N, pour une valeur nominale d'impact de 15N. Par conséquent, l'identification des impacts avec ces filtres ne peut pas se faire en ligne : même si un choc a été identifié en termes d'intensité et de localisation, l'estimation est rapidement erronée pour AKF, DKF et GDF et peut potentiellement conduire à une mauvaise compréhension du phénomène réel qui se produit.

Ainsi, les performances de SaBF surpassent celles des filtres de type Kalman existants dans l'identification de l'entrée.

## 6 Conclusion

Dans cet article, un nouveau filtre bayésien séquentiel a été développé pour résoudre le problème d'estimation de l'entrée. Par l'étude des filtres de la littérature, il a été montré que les filtres existants diffèrent principalement par l'hypothèse faite dans la définition de la distribution de probabilité sur le vecteur d'entrée lors de la phase de prédiction. Ainsi, la motivation initiale de cette étude était d'introduire une certaine connaissance préalable de la distribution spatiale des sources excitant une structure. La formulation proposée unifie la plupart des filtres développés dans la littérature, tels que AKF, GDF, DKF ou encore SBF. Ici, on a supposé que le vecteur d'entrée suivait alors une loi normale généralisée multivariée, ce qui a donné naissance au SaBF, objet de cet article. L'approche proposée contient plusieurs paramètres qui sont estimés de manière optimale à partir d'une procédure d'optimisation bayésienne.

Une expérience numérique a été menée pour comparer les performances de AKF, GDF, DKF et

SaBF. Les résultats obtenus montrent que SaBF surpasse les filtres standards, notamment parce qu'il s'agit d'une approche purement en ligne qui permet d'ajouter de la parcimonie spatiale au vecteur d'entrée. Cette contrainte ajoutée limite le phénomène de dérive ("drift").

## References

- [1] A. N. Tikhonov. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Soviet Mathematics*, 4:1035–1038, 1963.
- [2] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 82:35–45, 1960.
- [3] A. Tarantola. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. SIAM Philadelphia, 2005.
- [4] S. Särkkä. *Bayesian filtering and smoothing*. Cambridge University Press, 2013.
- [5] S. Gillijns and B. De Moor. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems with direct feedthrough. *Automatica*, 43:934–937, 2007.
- [6] E. Lourens, C. Papadimitriou, S. Gillijns, E. Reynders, G. De Roeck, and G. Lombaert. Joint input-response estimation for structural systems based on reduced-order models and vibration data from a limited number of sensors. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 29:310–327, 2012.
- [7] E. Lourens, E. Reynders, G. De Roeck, G. Degrande, and G. Lombaert. An augmented kalman filter for force identification in structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 27:446–460, 2012.
- [8] S. Eftekhari Azam, E. Chatzi, and C. Papadimitriou. A dual kalman filter approach for state estimation via output-only acceleration measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 60-61:866–886, 2015.
- [9] O. Sedehi, C. Papadimitriou, D. Teymouri, and L. S. Katafygiotis. Sequential bayesian estimation of state and input in dynamical systems using output-only measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 131:659–688, 2019.
- [10] S. Nadarajah. A generalized normal distribution. *Journal of Applied Statistics*, 32 (7):685–694, 2005.
- [11] M. Aucejo and O. De Smet. An optimal bayesian regularization for force reconstruction problems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 126:98–115, 2019.
- [12] Mathieu Aucejo and Olivier de Smet. On a full bayesian inference for force reconstruction problems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 104:36–59, 2018.
- [13] M. Aucejo, O. De Smet, and J.-F. Deü. On a space-time regularization for force reconstruction problems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 118:549–567, 2019.
- [14] S. Eftekhari Azam, E. Chatzi, C. Papadimitriou, and A. Smyth. Experimental validation of kalman-type filters for online and real-time state and input estimation. *Journal of Vibration and Control*, 23 (15):2494–2519, 2017.