



**HAL**  
open science

# Bases mathématiques pour l'étude des signaux. Tome 3 : représentation fréquentielle d'un signal

Emmanuel Jalade

► **To cite this version:**

Emmanuel Jalade. Bases mathématiques pour l'étude des signaux. Tome 3 : représentation fréquentielle d'un signal. Licence. France. 2022. hal-03765646

**HAL Id: hal-03765646**

**<https://hal.science/hal-03765646>**

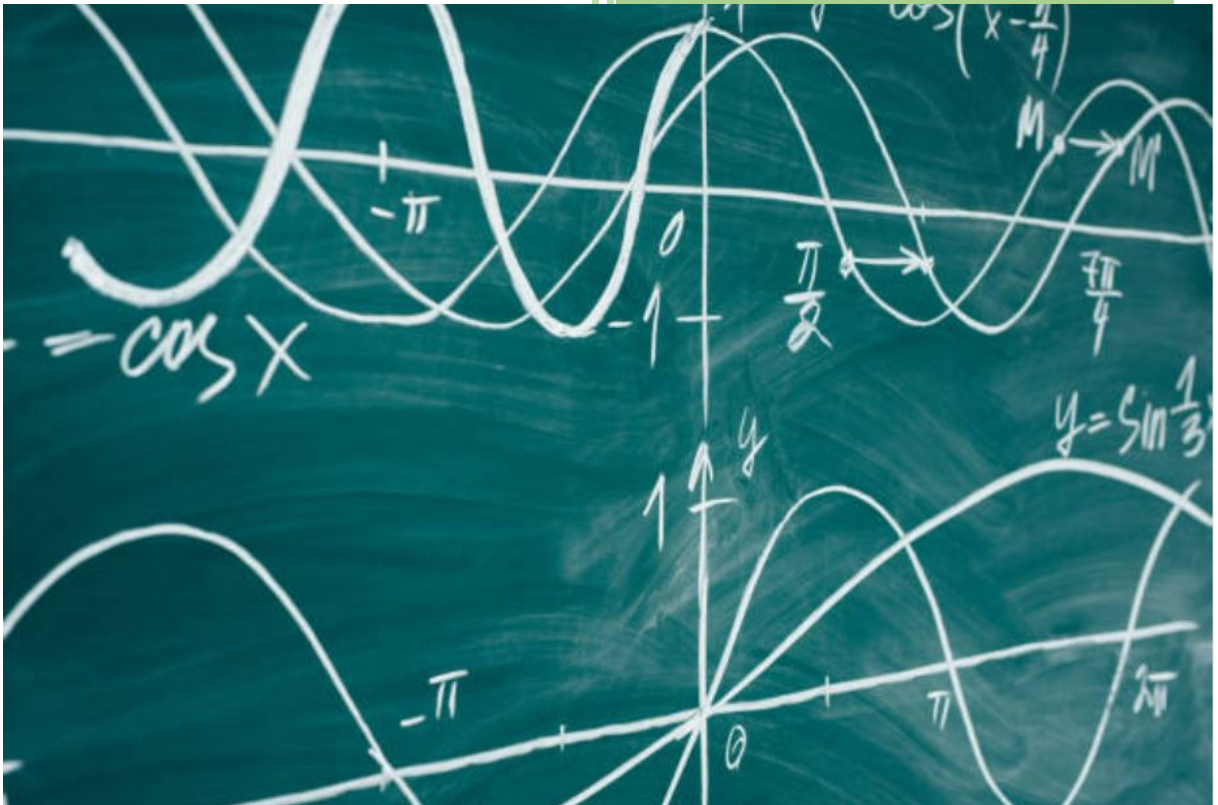
Submitted on 15 Sep 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Bases mathématiques pour l'étude des signaux

T3 : Représentation  
fréquentielle d'un signal



Emmanuel  
JALADE

## Table des matières

A - SÉRIES DE FOURIER.....	4
I) Fonctions périodiques.....	4
II) Polynôme trigonométrique.....	6
II.1) Sinusoïde de pulsation .....	6
II.2) Polynôme trigonométrique.....	7
III) Représentation d'une fonction périodique par une série de Fourier. ....	11
III.1) Notion de série (rappels).....	12
III.2) Série de Fourier.....	13
III.3) Dérivée et primitive d'une série de Fourier.....	16
III.4) Convergence d'une série de Fourier.....	18
III.5) Théorème de Parseval.....	20
III.6) Spectre d'amplitude.....	21
IV) (**) Démonstration du Théorème de Dirichlet.....	22
V) Exercices .....	29
VI) Corrigés .....	44
B - SYSTEMES ET TRANSFORMATION DE LAPLACE .....	74
I) Les différents types de signaux.....	74
II) Notion de système .....	76
III) Représentation d'un système par un produit de convolution .....	77
III.1) Étude d'un exemple.....	77
III.2) Produit de convolution.....	78
III.3) Représentation d'un système par un produit de convolution.....	80
III.4) Distribution de Dirac (approche physique).....	81
IV) Transformation de Laplace .....	84
IV.1) Définition de la transformation de Laplace.....	84
IV.2) Propriétés de la transformée de Laplace.....	86
IV.3) Original d'une transformée de Laplace.....	92
V) Applications de la transformation de Laplace .....	95
V.1) Application aux systèmes.....	95
V.2) Systèmes définis par une équation différentielle.....	97
V.3) Application aux équations différentielles avec conditions initiales quelconques.....	98
VI) (*) Annexes .....	99
VI.1) Quelques propriétés des fonctions à croissance au plus exponentielles.....	99
VI.2) Croissance de type au plus exponentiel et solution d'une edo1 ou d'une edo2.....	100
VI.3) Transformées de Laplace des fonctions usuelles.....	102
VII) Exercices.....	103
VIII) Corrigés .....	116
C - TRANSFORMATION DE FOURIER.....	139
I) Systèmes linéaires invariant dans le temps pour des signaux non causaux.....	139
I.1) Convolution de signaux non causaux.....	139
I.2) Systèmes non causaux.....	142
II) Transformée de Fourier de signaux .....	142
II.1) Motivations.....	142
II.2) Premières propriétés de la transformée de Fourier .....	144
II.3) Lien avec le produit de convolution.....	146
II.4) Autres propriétés importantes de la transformation de Fourier.....	147
II.5) Transformation de Fourier inverse.....	151

II.6) Égalité de Plancherel.....	153
III) Transformée de Fourier de signaux qui ne sont pas .....	155
III.1) Transformation de Fourier dans .....	155
III.2) Fonction Sinus Cardinal ; application aux filtres parfaits.....	157
III.3) Utilisation des distributions.....	160
III.4) Transformées de Fourier de signaux qui ne sont pas dans .....	162
III.4.a) Transformée de Fourier d'un Dirac et d'une sinusoïde.....	162
III.4.b) Transformée de Fourier d'une fonction périodique.....	163
III.4.c) (*) Transformée de Fourier de la distribution .....	167
III.5) Modélisation et réalité .....	168
IV) Transformée de Fourier de quelques signaux importants.....	170
V) Exercices .....	171
VI) Corrigés .....	179
D - TRANSFORMATION EN Z ET APPLICATIONS.....	197
I) Signaux discrets.....	197
II) Systèmes discrets.....	200
III) Transformation en Z.....	206
III.1) Généralités. ....	206
III.2) Cas particuliers importants.....	208
III.3) Propriétés importantes.....	209
IV) Application de la transformation en Z aux systèmes.....	215
IV.1) Transformation en Z inverse.....	215
IV.2) Application aux systèmes discrets.....	217
IV.3) Systèmes définis par des équations aux différences.....	218
V) Exercices .....	223
VI) Corrigés.....	235

# A - SÉRIES DE FOURIER

## I) Fonctions périodiques

Les modélisations mathématiques font très souvent intervenir des fonctions périodiques pour décrire, par exemple, des phénomènes d'oscillations.

Ainsi, la tension du secteur est modélisée par une fonction périodique (c'est une fonction sinusoïdale) du temps de période 0,02 s. Une note de La jouée par un instrument de musique peut aussi être modélisée par une

fonction périodique du temps de période  $\frac{1}{440}$  seconde (pour le La de fréquence 440 Hz) : dans ce dernier

cas, la fonction obtenue n'est en général pas une fonction sinusoïdale (et heureusement, sinon la musique ne serait guère agréable à écouter!).

L'objectif de ce chapitre est de comprendre mathématiquement comment une fonction périodique peut être considérée comme une superposition de fonction sinusoïdales : c'est le principe de l'analyse harmonique des fonctions périodiques.

Soit  $t \rightarrow x(t)$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , et soit  $T > 0$ .

**Définition 1.** Soit  $T > 0$ . On dit qu'une fonction continue par morceaux  $x(t)$  est T-périodique si  $\forall t \in \mathbb{R}, x(t+T) = x(t)$ .

Si  $T_0 > 0$  est le plus petit réel strictement positif  $T$  à vérifier la relation ci-dessus, on dit que  $T_0$  est la période fondamentale de  $x(t)$ . Toutes les autres périodes sont des multiples de  $T_0$ .

Preuve :

Supposons qu'il existe un tel réel  $T_0 > 0$  (l'existence d'un tel réel n'est pas automatique : par exemple si  $x(t)$  est une fonction constante, tous les réels  $T > 0$  sont des périodes de  $x(t)$ ).

Alors,  $\forall n \in \mathbb{N}, nT_0$  est une période de  $x(t)$ , car

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = x(t+T_0) = x(t+T_0+T_0) = \dots = x(t+nT_0).$$

Réciproquement, si  $T$  est une période de  $x(t)$ , par division euclidienne de  $T$  par  $T_0$  on peut écrire

$$T = nT_0 + r \text{ où } n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq r < T_0. \text{ Alors :}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t+r) = x(t+T-nT_0) = x(t-nT_0) \text{ car } x(t) \text{ est } T\text{-périodique}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t+r) = x(t) \text{ car } nT_0 \text{ est aussi une période de } x(t).$$

On a ainsi  $0 \leq r < T_0$  et  $x(t)$  est  $r$ -périodique : nécessairement  $r=0$  car  $T_0$  est supposé être la plus petite période strictement positive de  $x(t)$ . On en déduit que  $T = nT_0$ . L'ensemble des périodes strictement positives de  $x(t)$  est constitué par les multiples de  $T_0$ .

A partir de maintenant, on appellera la période d'un signal périodique  $x(t)$  sa période fondamentale.

**Exemple :**  $\pi$  est la période fondamentale de  $x(t) = \cos^2(t)$ . En effet,

$x(t+\pi) = (\cos(t+\pi))^2 = (-\cos(t))^2 = \cos^2(t) = x(t)$ , donc  $\pi$  est une période de  $x(t)$ , et si  $T$  est une période de  $x(t)$  alors nécessairement  $x(0) = x(T)$  donc  $\cos^2(T) = 1$  d'où  $\cos(T) = \pm 1$  ce qui signifie que  $T$  est un multiple de  $\pi$ .

**Définition 2.** Soit  $x(t)$  un signal T-périodique, avec  $T$  la période de  $x(t)$ . On appellera fréquence de  $x(t)$  le réel  $f = \frac{1}{T}$ , et pulsation de  $x(t)$  le réel  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

On a ainsi les relations suivantes, à savoir manipuler correctement :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{et} \quad \omega = 2\pi f.$$

La propriété suivante nous permettra de simplifier certains calculs de fonctions périodiques :

**Propriété 1 (intégrale sur une période).**

Soit  $x(t)$  un signal T-périodique et continue par morceaux. Alors, on a :

$\forall a \in \mathbb{R}, \int_0^T x(t) dt = \int_a^{T+a} x(t) dt$ . Autrement dit, l'intégrale d'une fonction T-périodique sur un intervalle de longueur T ne dépend pas du choix de cet intervalle.

Preuve : (pour x continue).

Par la relation de Chasles on a :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{T+a} x(t) dt = \int_a^0 x(t) dt + \int_0^T x(t) dt + \int_T^{T+a} x(t) dt = I_1 + I_2 + I_3.$$

On effectue le changement de variables  $s = t - T$  dans  $I_3$ , ce qui donne

$$I_3 = \int_T^{T+a} x(t) dt = \int_0^a x(s+T) ds = \int_0^a x(s) ds \quad (\text{par T-périodicité, } x(s+T) = x(s))$$

$$= - \int_a^0 x(s) ds = -I_1.$$

On a donc  $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{T+a} x(t) dt = I_1 + I_2 + I_3 = I_1 + I_2 - I_1 = I_2 = \int_0^T x(t) dt$  ce qui achève la preuve.

**Exemple :** Soit  $x(t)$  un signal T-périodique impair et continue par morceaux. Alors, on a

$$\int_0^T x(t) dt = 0. \quad \text{En effet, en appliquant la propriété avec } a = \frac{-T}{2} \text{ on a :}$$

$$\int_0^T x(t) dt = \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{-T}{2}} x(t) dt = 0 \quad \text{car } x(t) \text{ est impair.}$$

**Définition 3.** Soit  $x(t)$  un signal T-périodique et continue par morceaux.

On appelle valeur moyenne de  $x(t)$  le nombre  $\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{I_T} x(t) dt$ , où  $I_T$  est un intervalle de longueur T.

On appelle puissance moyenne de  $x(t)$  le nombre  $\langle |x(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{I_T} |x(t)|^2 dt$ , où  $I_T$  est un intervalle de longueur T. Sa valeur efficace est  $\sqrt{\langle |x(t)|^2 \rangle}$ .

## Remarques :

- 1) la propriété 1 permet de calculer ces intégrales sur n'importe quel intervalle de longueur T, la valeur de l'intégrale ne dépendant pas du choix d'un tel intervalle.
- 2) On peut prouver que :

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R x(t) dt \quad \text{et} \quad \langle |x(t)|^2 \rangle = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R |x(t)|^2 dt .$$

Cela s'interprète en disant que, pour une fonction périodique la valeur moyenne sur une période est égale à celle sur un intervalle très grand.

## II) Polynôme trigonométrique

Nous étudions dans ce paragraphe un premier type important de signal périodique : le polynôme trigonométrique. Il s'agit d'une généralisation de la notion de signal sinusoïdal.

### II.1) Sinusoïde de pulsation $\omega$ .

Une sinusoïde de pulsation  $\omega$  est l'archétype d'un signal T-périodique , avec  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  . Il faut déjà bien avoir en tête la propriété suivante :

**Propriété 2** Soit  $x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ . Alors  $\langle x(t) \rangle = 0$ ,  $\langle |x(t)|^2 \rangle = \frac{a^2 + b^2}{2}$ .

Preuve : On remarque que  $x(t) = \text{Re}((a - bj)e^{j\omega t}) = \text{Re}(Ae^{j\omega t})$  où  $A$  est l'amplitude complexe de  $x(t)$  (voir résultats du chapitre sur les signaux sinusoïdaux). Ainsi, on peut écrire :

$$x(t) = |A| \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{où} \quad \varphi = \text{Arg}(A) .$$

On a d'une part :

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |A| \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{\omega |A|}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{\omega |A|}{2\pi} \left[ \frac{\sin(\omega t + \varphi)}{\omega} \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}$$

$$\langle x(t) \rangle = \frac{|A|}{2\pi} (\sin(2\pi + \varphi) - \sin(\varphi)) = 0 .$$

D'autre part :

$$\langle |x(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |A|^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{\omega |A|^2}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t + \varphi) dt$$

$$\langle |x(t)|^2 \rangle = \frac{\omega |A|^2}{4\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)) dt \quad (\text{par la formule} \quad \cos^2(a) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a)) \quad )$$

$$= \frac{\omega |A|^2}{4\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)) dt = \frac{\omega |A|^2}{4\pi} \left[ t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + 2\varphi) \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}$$

$$= \frac{\omega |A|^2}{4\pi} \left( 2\frac{\pi}{\omega} + \frac{1}{2\omega} \sin(4\pi + 2\varphi) - \frac{1}{2\omega} \sin(2\varphi) \right) = \frac{\omega |A|^2}{4\pi} \left( 2\frac{\pi}{\omega} \right) = \frac{|A|^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} |a - bj|^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2) .$$

## II.2) Polynôme trigonométrique.

Soit  $T > 0$ . Alors une sinusoïde de pulsation  $\omega = 2\frac{\pi}{T}$  admet  $T$  comme période fondamentale. Mais, si

$n \in \mathbb{N}^*$ , alors toute sinusoïde de pulsation  $n\omega$  a pour période fondamentale  $\frac{2\pi}{n\omega} = \frac{T}{n}$  : elle sera

donc en particulier  $T$ -périodique car  $T$  est un multiple de  $\frac{T}{n}$ . Ainsi, une somme de sinusoïdes de

pulsations de la forme  $n\omega$  (pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ) sera une fonction  $T$ -périodique (qui n'est plus forcément une sinusoïde). Cela amène à poser la :

### Définition 4.

Un polynôme trigonométrique est une fonction à valeurs réelles de la forme :

$x(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(2\omega t) + B_2 \sin(2\omega t) + \dots + A_N \cos(N\omega t) + B_N \sin(N\omega t)$ ,  
(avec  $\forall k \in \mathbb{N}, A_k, B_k \in \mathbb{R}$ ) qu'on écrira plus volontiers :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t), \text{ pour un certain entier naturel } N \text{ non nul.}$$

Le réel  $\omega > 0$  est la pulsation de  $x(t)$  qui est donc un signal  $T$ -périodique, avec  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

La sinusoïde  $A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$  est appelée harmonique d'ordre  $n$  que l'on écrira

$t \rightarrow H_n(x)(t)$  ou plus simplement  $t \rightarrow H_n(t)$  lorsque il n'y a pas d'ambiguïté sur  $x(t)$ . Sa période est  $\frac{T}{n} = \frac{2\pi}{n\omega}$ .

L'harmonique d'ordre 1 est appelée la fondamentale.

Remarque : les fonctions constantes et les fonctions sinusoïdales sont des polynômes trigonométriques particuliers.

**Exemple :**  $x(t) = 1 + 2\sin(t) - \cos(3t)$ .

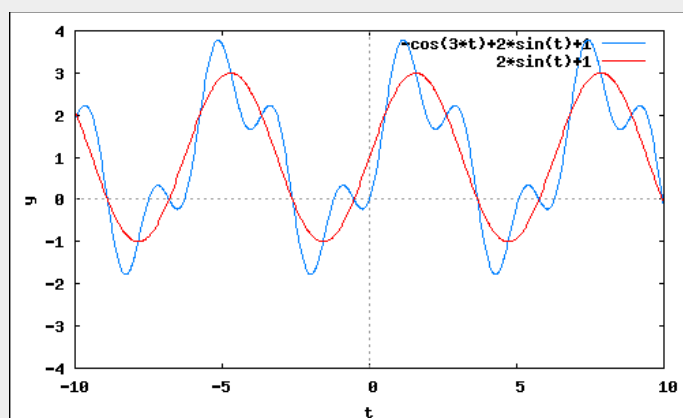
Cette fonction est un polynôme trigonométrique avec  $\omega = 1$  donc elle est  $2\pi$ -périodique.

On a  $A_0 = 1, B_1 = 2$  et  $A_3 = -1$ . Tous les autres coefficients sont nuls.

On n'a que deux harmoniques : la fondamentale  $H_1(t) = 2\sin(t)$  et l'harmonique d'ordre 3

$H_3(t) = -\cos(3t)$ . Toutes les autres harmoniques sont nulles.

Son graphe reproduit ci-dessous montre bien que  $x(t)$  n'est pas une fonction sinusoïdale :



courbe en bleu : le signal  $x(t)$

courbe en rouge : la fondamentale avec la valeur moyenne :  $A_0 + H_1(t)$



On voit graphiquement sur cet exemple que la sinusoïde translatée de  $A_0$ :  $t \rightarrow A_0 + H_1(t)$  semble se « coller » particulièrement bien au graphe de  $x(t)$  : ce n'est pas un hasard, nous étudierons ce phénomène de façon plus générale ultérieurement dans ce chapitre.

Pour compléter la propriété ci-dessus, notons qu'un polynôme trigonométrique peut s'écrire de différentes façons.

D'une part, en utilisant les formules d'Euler on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \cos(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}, \quad \sin(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}. \quad \text{En les reportant dans l'écriture de}$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t), \quad \text{on obtient que}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \left( \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} \right) + B_n \left( \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \right) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^N \left( \frac{A_n}{2} + \frac{B_n}{2j} \right) e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^N \left( \frac{A_n}{2} - \frac{B_n}{2j} \right) e^{-jn\omega t} = A_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n - jB_n}{2} e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^N \frac{A_n + jB_n}{2} e^{-jn\omega t} \end{aligned}$$

ce qui peut se réécrire :

$$x(t) = \sum_{n=-N}^N C_n e^{jn\omega t}, \quad \text{avec}$$

$$C_n = \frac{A_n - jB_n}{2} \quad \text{si } n > 0$$

$$C_0 = A_0$$

$$C_{-n} = \frac{A_n + jB_n}{2} = \overline{C_n} \quad \text{si } n > 0.$$

C'est ce que l'on appelle l'écriture complexe du polynôme trigonométrique.

Il existe une autre façon, plus « physique », d'exprimer un polynôme trigonométrique. En repartant de l'égalité

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \quad \text{on peut écrire : } x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N D_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad \text{où :}$$

$$D_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = |A_n - jB_n|$$

$$\varphi_n = \text{Arg}(A_n - jB_n)$$

L'avantage de cette dernière écriture est qu'elle fait apparaître les amplitudes réelles et les phases à l'origine de chaque harmonique.

**Exemple :** reprenons le polynôme trigonométrique  $x(t) = 1 + 2\sin(t) - \cos(3t)$ .

Calculons d'abord son écriture complexe.  $C_0 = A_0 = 1$ ,  $C_1 = \frac{A_1 - jB_1}{2} = \frac{0 - 2j}{2} = -j$  et

$$C_3 = \frac{A_3 - jB_3}{2} = \frac{-1 - 0j}{2} = \frac{-1}{2}. \quad \text{D'autre part } C_{-1} = \overline{C_1} = j \quad \text{et } C_{-3} = \overline{C_3} = \frac{-1}{2}. \quad \text{L'écriture complexe}$$

de  $x(t)$  est donc :  $\frac{-1}{2}e^{-3jt} + je^{-jt} + 1 - je^{jt} - \frac{1}{2}e^{3jt}$ .

Enfin, l'écriture de  $x(t)$  avec  $D_n$  et  $\varphi_n$  donne :

$$x(t) = 1 + 2 \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3t + \pi).$$

La propriété suivante donne une interprétation des coefficients  $A_n, B_n$  et  $C_n$  en termes de valeurs moyennes de fonctions associées à  $x(t)$  :

### Propriété 3

On reprend toutes les notations précédentes avec la convention que  $\forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow A_n = B_n = C_n = 0$

On a

$$A_0 = \langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$A_n = \langle 2 \cos(n\omega t) \cdot x(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) \cdot x(t) dt \text{ pour } n \geq 1,$$

$$B_n = \langle 2 \sin(n\omega t) \cdot x(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) \cdot x(t) dt$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, C_n = \langle e^{-jn\omega t} \cdot x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-jn\omega t} \cdot x(t) dt.$$

Preuve : on commence par prouver la propriété sur  $C_n$ . Remarquons déjà que l'on a :

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \langle e^{jn\omega t} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

En effet, si  $n \neq 0$ ,

$$\langle e^{jn\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{jn\omega t} dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{jn\omega t} dt = \frac{\omega}{2\pi n\omega} [e^{jn\omega t}]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{2\pi n\omega} (e^{j2\pi n} - 1) = 0,$$

et si  $n = 0$

$$\langle 1 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T 1 dt = 1.$$

Si  $p \in \mathbb{Z}$  alors :

$$\langle e^{-jp\omega t} \cdot x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-jp\omega t} \cdot x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-jp\omega t} \left( \sum_{n=-N}^N C_n e^{jn\omega t} \right) dt.$$

En distribuant  $e^{-jp\omega t}$  et en remarquant que  $e^{-jp\omega t} e^{jn\omega t} = e^{j(n-p)\omega t}$  cela donne

$$\begin{aligned} \langle e^{-jp\omega t} \cdot x(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \left( \sum_{n=-N}^N C_n e^{jn\omega t} e^{-jp\omega t} \right) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \sum_{n=-N}^N C_n e^{j(n-p)\omega t} \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N \left( \int_0^T C_n e^{j(n-p)\omega t} dt \right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N C_n \left( \int_0^T e^{j(n-p)\omega t} dt \right) \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \sum_{n=-N}^N C_n \langle e^{j(n-p)\omega t} \rangle = \sum_{n=-N}^N C_n \langle e^{j(n-p)\omega t} \rangle \text{ car } \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow C_n = 0. \end{aligned}$$

D'après la relation (1), tous les termes de la somme ci-dessus sont nuls, sauf celui qui correspond à  $n = p$ .

On a donc  $\langle e^{-jp\omega t} \cdot x(t) \rangle = C_p \langle e^{0j\omega t} \rangle = C_p \langle 1 \rangle = C_p$ , ce qui prouve la propriété pour les coefficients  $C_p$ .

Remarquons maintenant que  $A_0 = C_0 = \langle e^{-0j\omega t} \cdot x(t) \rangle = \langle x(t) \rangle$  ce qui prouve la propriété pour  $A_0$ .

Maintenant, de la relation  $C_n = \frac{A_n - jB_n}{2}$  si  $n \geq 1$ , on déduit :

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \forall n \geq 1, A_n &= 2 \operatorname{Re}(C_n) = 2 \operatorname{Re} \left( \frac{1}{T} \int_0^T e^{-jn\omega t} \cdot x(t) dt \right) = \frac{2}{T} \int_0^T \operatorname{Re} \left( e^{-jn\omega t} \cdot x(t) \right) dt \\
&= \frac{2}{T} \int_0^T \operatorname{Re} \left( e^{-jn\omega t} \right) x(t) dt \quad \text{car } x(t) \in \mathbb{R} \\
&= \frac{2}{T} \int_0^T \cos(-n\omega t) x(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) x(t) dt \quad \text{ce qui prouve la propriété pour } A_n. \\
\text{(ii)} \quad \forall n \geq 1, B_n &= -2 \operatorname{Im}(C_n) = -2 \operatorname{Im} \left( \frac{1}{T} \int_0^T e^{-jn\omega t} \cdot x(t) dt \right) = \frac{-2}{T} \int_0^T \operatorname{Im} \left( e^{-jn\omega t} \cdot x(t) \right) dt \\
&= \frac{-2}{T} \int_0^T \operatorname{Im} \left( e^{-jn\omega t} \right) x(t) dt \quad \text{car } x(t) \in \mathbb{R} \\
&= \frac{-2}{T} \int_0^T \sin(-n\omega t) x(t) dt = \frac{-2}{T} \int_0^T (-\sin(n\omega t)) x(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) x(t) dt \quad \text{ce qui} \\
&\text{prouve la propriété pour } B_n.
\end{aligned}$$

La propriété suivante donne un procédé très rapide pour le calcul de la puissance moyenne d'un polynôme trigonométrique. En effet, cette dernière est donnée par l'intégrale :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left( A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \right)^2 dt$$

dont le calcul peut être long est fastidieux.

**Propriété 4 (formules de PARSEVAL)** Soit le polynôme trigonométrique

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \quad . \text{ Alors sa valeur moyenne est } \langle x(t) \rangle = A_0 \quad \text{et sa}$$

puissance moyenne vaut  $\langle |x(t)|^2 \rangle = A_0^2 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2 + B_n^2}{2}$  (formule dite de PARSEVAL).

Si le polynôme est écrit sous la forme complexe  $x(t) = \sum_{n=-N}^N C_n e^{jn\omega t}$ , alors la formule de Parseval prend la

forme plus simple  $\langle |x(t)|^2 \rangle = \sum_{n=-N}^N |C_n|^2$ , et si le polynôme est écrit sous la forme

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N D_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad , \text{ alors on a } \langle |x(t)|^2 \rangle = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N D_n^2 \quad , \text{ ce qui peut s'écrire aussi}$$

$\langle |x(t)|^2 \rangle = A_0^2 + \sum_{n=1}^N \langle |H_n(t)|^2 \rangle$  : la puissance moyenne de  $x(t)$  est égale à la somme des puissances moyennes de sa valeur moyenne et de toutes ses harmoniques.

**Preuve :** Nous commençons par la version avec l'écriture complexe. On a :

$$x^2(t) = |x(t)|^2 = x(t) \overline{x(t)} = x(t) \left( \sum_{n=-N}^N \overline{C_n} e^{-jn\omega t} \right) = \sum_{n=-N}^N \overline{C_n} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} \quad .$$

On a alors :  $\langle |x(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \sum_{n=-N}^N \frac{\overline{C_n}}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$  .

Il suffit d'utiliser la propriété 3 pour obtenir :

$$\langle |x(t)|^2 \rangle = \sum_{n=-N}^N \frac{\overline{C_n}}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt = \sum_{n=-N}^N \overline{C_n} C_n = \sum_{n=-N}^N |C_n|^2$$

et l'on obtient le Théorème de Parseval avec l'écriture complexe.

Ensuite, on réécrit la relation ci-dessus de la façon suivante :

$$\langle |x(t)|^2 \rangle = \left( \sum_{-N \leq p \leq -1} |C_p|^2 \right) + |C_0|^2 + \sum_{1 \leq p \leq N} |C_p|^2 = |C_0|^2 + \sum_{1 \leq p \leq N} |C_p|^2 + |C_{-p}|^2$$

$$\langle |x(t)|^2 \rangle = |C_0|^2 + 2 \sum_{1 \leq p \leq N} |C_p|^2 \quad \text{car pour tout entier naturel non nul } p \text{ on a } C_{-p} = \overline{C_p} \text{ d'où } |C_{-p}| = |C_p| .$$

Maintenant, si  $p \geq 1$ ,  $C_p = \frac{A_p - jB_p}{2}$  donc  $|C_p|^2 = \frac{1}{4}A_p^2 + \frac{1}{4}B_p^2$  et  $C_0 = A_0$  donc l'égalité précédente se réécrit :

$$\langle |x(t)|^2 \rangle = |C_0|^2 + 2 \sum_{1 \leq p \leq N} |C_p|^2 = |A_0|^2 + 2 \sum_{1 \leq p \leq N} \left( \frac{1}{4}A_p^2 + \frac{1}{4}B_p^2 \right) = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq p \leq N} (A_p^2 + B_p^2) \quad \text{ce qu'il fallait démontrer.}$$

Enfin, l'égalité  $\langle |x(t)|^2 \rangle = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N D_n^2$  se déduit directement de l'égalité

$$\langle |x(t)|^2 \rangle = A_0^2 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2 + B_n^2}{2} \quad \text{car } D_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = |A_n - jB_n| \quad \blacksquare$$

Ce résultat, très important, dit que la puissance moyenne d'un polynôme trigonométrique est égal à la somme des puissances moyennes de sa valeur moyenne et de ses harmoniques : ça semble bien normal et pourtant c'est une propriété qui ne se généralise pas forcément à d'autres types de fonction.

Par exemple, si  $x(t)$  est un polynôme trigonométrique non nul, on a

$$\langle |x(t) + (-x(t))|^2 \rangle = \langle |0|^2 \rangle = 0 \quad \text{mais} \quad \langle |x(t)|^2 \rangle + \langle |-x(t)|^2 \rangle = 2 \langle |x(t)|^2 \rangle$$

qui est en général bien différent de 0.

Notons aussi que la formule de Parseval a un petit air de Pythagore : ce n'est pas un hasard, le théorème de Pythagore et le Théorème de Parseval sont bel et bien liés par théorie des espaces de Hilbert.

Reprenons encore l'exemple du polynôme trigonométrique  $x(t) = 1 + 2\sin(t) - \cos(3t)$ . On a par

$$\text{définition} \quad \langle |x(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + 2\sin(t) - \cos(3t))^2 . \quad \text{Le calcul de cette dernière intégrale étant}$$

assez compliquée, on préférera ici utiliser la formule de Parseval qui donne tout simplement :

$$\langle |x(t)|^2 \rangle = 1^2 + \frac{1}{2}(2^2 + (-1)^2) = \frac{7}{2} .$$

### III) Représentation d'une fonction périodique par une série de Fourier.

On a vu au paragraphe précédent qu'un polynôme trigonométrique de pulsation  $\omega$  est une fonction  $T$ -périodique (avec  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ). La question qu'on se pose ici est la réciproque : peut-on écrire une fonction  $T$ -périodique comme un polynôme trigonométrique de pulsation  $\omega$  ?

### III.1) Notion de série (rappels)

Étant donnée une suite de réels  $(u_n)$ , on considère  $(S_n)$  la suite de ses sommes partielles d'ordre  $n$ , c'est à dire que :

$$S_0 = u_0$$

$$S_1 = u_0 + u_1$$

$$S_2 = u_0 + u_1 + u_2$$

.....

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

**Définition 5** On dit que la série  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ , dite série de terme général  $u_k$ , converge vers un nombre  $l$  si la suite  $(S_n)$  tend vers  $l$ .

**Exemples :**

1)  $(u_n) = \left(\frac{1}{4^n}\right)$ . On utilise la formule

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad x \neq 1$$

pour calculer  $S_n = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$ . Puisque  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$  on en

déduit que  $(S_n) \rightarrow \frac{4}{3}$ . On peut donc dire dans ce cas que la série  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$  converge vers  $\frac{4}{3}$ .

2)  $(u_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$ . On remarque que  $\forall n \geq 1, \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$  donc

$$2\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

d'où

$\forall n \geq 1, u_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}$ , ce qui donne les inégalités :

$$u_1 \geq 2\sqrt{2} - 2$$

$$u_2 \geq 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

.....

$$u_{n-1} \geq 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

$$u_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}.$$

En additionnant ces  $n$  égalités, après simplification du membre de droite on obtient (principe des sommes télescopiques) :

$$S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$$

ce qui montre que  $(S_n) \rightarrow +\infty$ : la série  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$  diverge vers  $+\infty$ .

Notons que le terme  $u_n$  peut dépendre d'un paramètre réel  $x$  et ainsi être noté  $u_n(x)$  : on obtient alors une série de fonctions  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$  qui peut converger pour toutes les valeurs de  $x$ , ou

seulement certaines, voire aucune. C'est ce dernier type de série que nous allons rencontrer dans ce chapitre.

### III.2) Série de Fourier.

**Définition 5** On appelle série trigonométrique de pulsation  $\omega > 0$  une série de fonctions de la forme  $S(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$ .

**Remarque** : il s'agit d'une généralisation de la notion de polynôme trigonométrique (pour ces derniers, les suites  $(A_n)$  et  $(B_n)$  sont nulles à partir d'un certain rang).

**Exemple** : considérons le cas où  $A_n = \frac{1}{2^n}, B_n = 0$ . Alors  $S(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cos(n\omega t)$  que l'on peut réécrire  $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cos(n\omega t)$  vu que  $\cos(0) = 1$ .

Si l'on considère la somme partielle  $S_N$  on a :

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} \cos(n\omega t) = \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} e^{jn\omega t} \right) = \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^N \left( \frac{e^{j\omega t}}{2} \right)^n \right).$$

On applique la formule  $1 + x + x^2 + \dots + x^N = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$ ,  $x \neq 1$  pour obtenir

$$S_N(t) = \operatorname{Re} \left( \frac{1 - \left( \frac{1}{2} e^{j\omega t} \right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{2} e^{j\omega t}} \right).$$

Puisque  $\left| \frac{1}{2} e^{j\omega t} \right| = \frac{1}{2}$ , alors  $\left| \left( \frac{1}{2} e^{j\omega t} \right)^{N+1} \right| = \frac{1}{2^{N+1}}$  donc  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} e^{j\omega t} \right)^{N+1} = 0$ . On en déduit

que  $\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(t) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{j\omega t}} \right)$  c'est à dire que la série de fonctions

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cos(n\omega t) \text{ converge vers } \operatorname{Re} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{j\omega t}} \right) = \frac{4 - 2 \cos(\omega t)}{5 - 4 \cos(\omega t)} \text{ (dernière égalité à}$$

prouver en exercice).

Dans la suite de ce cours, on va chercher à exprimer une fonction T-périodique à l'aide d'une série trigonométrique. Si le signal  $x(t)$  est un polynôme trigonométrique, on sait le faire : il est déjà écrit sous la forme d'une série finie, c'est à dire qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la série sont nuls, et les coefficients  $(A_n)$  et  $(B_n)$  sont donnés par la propriété 3. Il faut alors remarquer que les intégrales intervenant dans ces formules (pour rappel :

$$A_0 = \langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$A_n = \langle 2 \cos(n\omega t) \cdot x(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) \cdot x(t) dt \text{ pour } n \geq 1,$$

$$B_n = \langle 2 \sin(n\omega t) \cdot x(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) \cdot x(t) dt$$

ont encore un sens si  $x(t)$  est une fonction T-périodique continue par morceaux quelconque, ce qui va nous permettre de définir une série trigonométrique associée à  $x(t)$  qui aura de grandes chances d'être égale à  $x(t)$ , sous certaines conditions.

**Définition 6** Soit  $x(t)$  une fonction T-périodique continue par morceaux. On appelle série de Fourier réelle associée à  $x(t)$  la série trigonométrique

$$S(x)(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t),$$

avec :

$$A_0 = \langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$A_n = \langle 2 \cos(n\omega t) \cdot x(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) \cdot x(t) dt \text{ pour } n \geq 1,$$

$$B_n = \langle 2 \sin(n\omega t) \cdot x(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) \cdot x(t) dt.$$

On appellera série de Fourier complexe associée à  $x(t)$  la série trigonométrique

$$S(x)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t} \text{ avec } \forall n \in \mathbb{Z}, C_n = \langle e^{-jn\omega t} x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-jn\omega t} x(t) dt.$$

Les coefficients  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$  sont appelés coefficients de Fourier de  $x(t)$  et, dans le cas où cette dernière fonction est à valeurs réelles, sont liés par les relations :

$$C_n = \frac{A_n - jB_n}{2} \text{ si } n > 0$$

$$C_0 = A_0$$

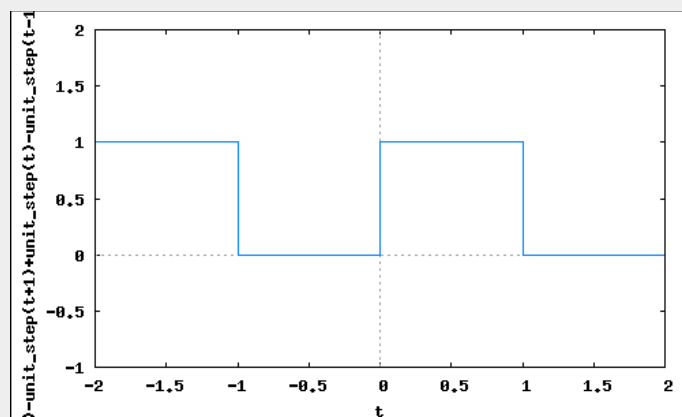
$$C_{-n} = \frac{A_n + jB_n}{2} = \overline{C_n} \text{ si } n > 0$$

### Remarques :

- (i) les intégrales peuvent se calculer sur n'importe quel intervalle de longueur T.
- (ii) On ne peut pas encore affirmer  $S(x)(t) = x(t)$  lorsque  $x(t)$  n'est pas un polynôme trigonométrique.

On définit de la même façon que pour les polynômes trigonométriques la notion d'harmonique d'ordre n et de fondamental.

**Exemple :** si  $x(t)$  est 2-périodique avec  $x(t) = 1$  pour  $t \in [0; 1[$  et  $x(t) = 0$  pour  $t \in [1; 2[$ ,



On a :

$$S(x)(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin(n\pi t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \sin(\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t) + \frac{1}{5} \sin(5\pi t) + \dots \right) .$$

En effet, on a ici  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$  et

$$(i) \quad A_0 = \langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 x(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 1 dt = \frac{1}{2} .$$

$$(ii) \quad \forall n \geq 1, \quad A_n = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) \cdot x(t) dt = \frac{2}{2} \int_0^1 \cos(n\pi t) dt = \left[ \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^1 = \sin(n\pi) - \sin(0) = 0 .$$

$$(iii) \quad \forall n \geq 1, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) \cdot x(t) dt = \frac{2}{2} \int_0^1 \sin(n\pi t) dt = \left[ \frac{-\cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^1$$

$$\frac{-1}{n\pi} (-\cos(n\pi) + 1) = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} .$$

$$\text{Donc } S(x)(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( 0 + \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin(n\pi t) \right) .$$

Dans cet exemple, on voit que les harmoniques d'ordre pair sont nulles : en effet, si  $n$  est pair,

$$H_n(t) = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin(n\pi t) = \frac{1 - 1}{n\pi} \sin(n\pi t) = 0 .$$

Le résultat suivant permet de simplifier, dans certains cas, l'expression de  $S(x)(t)$ .

**Propriété 5** Soit  $x(t)$  une fonction  $T$ -périodique continue par morceaux.

Si  $x(t)$  est une fonction paire, alors  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $B_n = 0$  et si  $x(t)$  est une fonction impaire, alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = 0$  .

Preuve :

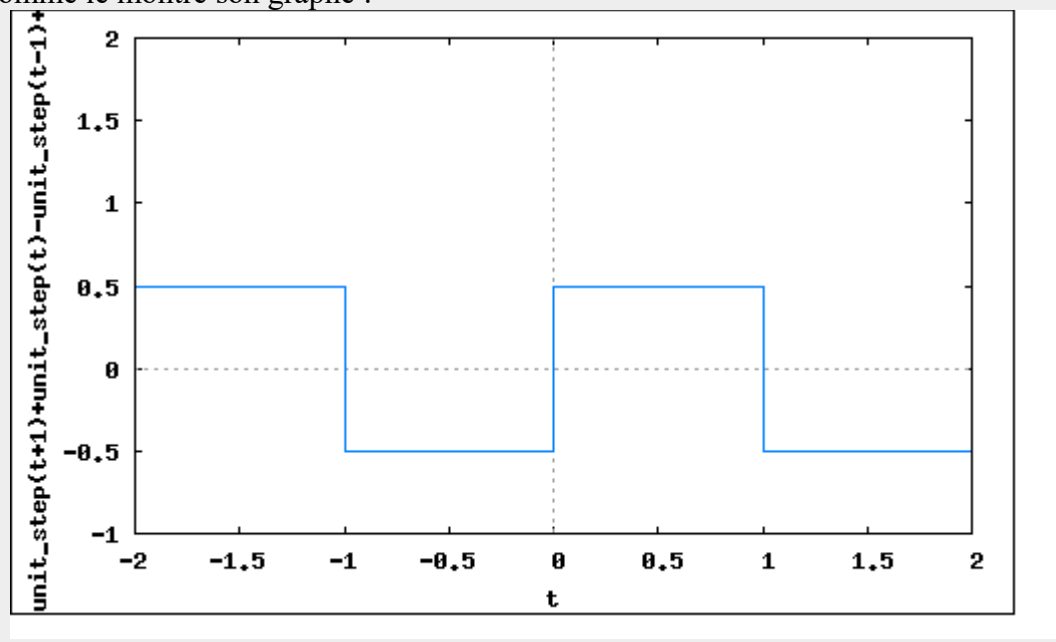
Si  $x(t)$  est une fonction paire, alors  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega t) \cdot x(t) dt$ . La fonction  $t \rightarrow \sin(n\omega t) \cdot x(t)$  est impaire (produit d'une fonction impaire (sinus) par une fonction paire) donc l'intégrale  $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega t) \cdot x(t) dt$  sur un intervalle centré en 0 est nulle, donc  $B_n = 0$ .

Si  $x(t)$  est une fonction impaire, alors  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega t) \cdot x(t) dt$ . La fonction  $t \rightarrow \cos(n\omega t) \cdot x(t)$  est impaire (produit d'une fonction paire (cosinus) par une fonction impaire)



donc l'intégrale  $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega t) \cdot x(t) dt$  sur un intervalle centré en 0 est nulle, donc  $A_n = 0$ . Et, pour les mêmes raisons,  $A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$  est aussi nul.

**Exemple :** si on reprend l'exemple de  $x(t)$  2-périodique avec  $x(t)=1$  pour  $t \in [0; 1[$  et  $x(t)=0$  pour  $t \in [1; 2[$ , cette fonction n'est ni paire, ni impaire, mais en revanche  $t \rightarrow x(t) - \frac{1}{2}$  est impaire comme le montre son graphe :



Les coefficients de Fourier  $A_n$  de  $t \rightarrow x(t) - \frac{1}{2}$  sont donc nuls : c'est la raison pour laquelle il n'apparaît pas de cosinus dans la série  $S(x)(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin(n\pi t)$ .

### III.3) Dérivée et primitive d'une série de Fourier.

**Propriété 6**  
 Si  $x(t)$  est une fonction T-périodique continue et dérivable par morceaux à dérivée continue par morceaux, alors la série de Fourier de la pseudo-dérivée  $x'(t)$  s'obtient en dérivant terme à terme la série de Fourier de  $x(t)$ .

(\*)Preuve : on fait la preuve dans le cas où  $x(t)$  est dérivable. Soit

$S(x)(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$ , la série de Fourier associée à  $x(t)$  et soit

$S(x')(t) = A'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A'_n \cos(n\omega t) + B'_n \sin(n\omega t)$  la série de Fourier associée à  $x'(t)$ .

On a alors :  $A'_0 = \langle x'(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x'(t) dt = \frac{x(T) - x(0)}{T} = 0$  car  $x(t)$  est une fonction T-périodique.

On a aussi par intégrations par parties :

$$\forall n \geq 1, A'_n = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) \cdot x'(t) dt = \frac{2}{T} [\cos(n\omega t) \cdot x(t)]_0^T + \frac{2n\omega}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) x(t) dt$$

$$= \frac{2}{T} (\cos(n\omega T) \cdot x(T) - x(0)) + (n\omega) \frac{2}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) x(t) dt$$

$$= \frac{2}{T} (\cos(2\pi n) x(T) - x(0)) + (n\omega) B_n = \frac{2}{T} (x(T) - x(0)) + n\omega B_n$$

car  $n\omega T = n\omega \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi n$  et  $B_n = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) \cdot x(t) dt$ ,

$A'_n = n\omega B_n$  car  $x(t)$  étant T-périodique,  $x(T) = x(0)$ .

De la même façon, par intégrations par parties :

$$\forall n \geq 1, B'_n = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) \cdot x'(t) dt = \frac{2}{T} [\sin(n\omega t) \cdot x(t)]_0^T - \frac{2n\omega}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) x(t) dt$$

$$= \frac{2}{T} (\sin(n\omega T) \cdot x(T) - \sin(0) x(0)) + (n\omega) \frac{2}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) x(t) dt$$

$$= \frac{2}{T} (\sin(2\pi n) x(T) - 0) - (n\omega) A_n = -n\omega A_n$$

On en déduit que

$$S(x')(t) = A'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A'_n \cos(n\omega t) + B'_n \sin(n\omega t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\omega B_n \cos(n\omega t) - n\omega A_n \sin(n\omega t)$$

$$= \frac{d}{dt} A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \frac{d}{dt} (\sin(n\omega t)) + A_n \frac{d}{dt} (\cos(n\omega t)) = \frac{d}{dt} A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dt} (A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)) .$$

**Exemple** : la série de Fourier de la fonction 2-périodique, paire, et définie par

$$y(t) = t \text{ si } t \in [0; 1].$$

On remarque que  $y(t)$  est une fonction 2-périodique continue et dérivable par morceaux à

dérivée continue par morceaux, 2-périodique, définie sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  par  $y'(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in ]0; 1[ \\ -1 & \text{si } t \in ]1; 2[ \end{cases}$ .

On remarque que sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $y'(t) = 2x(t) - 1$  où  $x(t)$  est défini dans l'exemple de la

définition 6. On peut alors en déduire que  $S(y')(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin(n\pi t)$ .

Si  $S(y)(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)$ , alors d'après la propriété 6 on doit avoir

$S(y')(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\pi B_n \cos(n\pi t) - n\pi A_n \sin(n\pi t)$  ce qui donne par identification :

(i)  $B_n = 0$ : on la savait déjà car  $y(t)$  est paire !

(ii)  $\forall n \geq 1, \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n} = -n\pi A_n$  d'où  $\forall n \geq 1, \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n} = -n\pi A_n$ . On en déduit la série de Fourier associée à  $y(t)$  :

$$S(y)(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{n^2 \pi^2} (1 - (-1)^n) \cos(n\pi t) = A_0 - \frac{4}{\pi^2} \left( \cos(\pi t) + \frac{1}{9} \cos(3\pi t) + \frac{1}{25} \cos(5\pi t) + \dots \right)$$

Pour trouver  $A_0$ , on applique directement la formule :

$$A_0 = \langle y(t) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 y(t) dt$$

$$= \int_0^1 y(t) dt = \int_0^1 t dt \quad (\text{par parité de la fonction})$$

$$= \frac{1}{2}.$$

On en déduit  $S(y)(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left( \cos(\pi t) + \frac{1}{9} \cos(3\pi t) + \frac{1}{25} \cos(5\pi t) + \dots \right)$ .

**Remarque :** on peut aussi utiliser cette propriété pour intégrer une fonction T-périodique (c'est en fait ce qu'on vient de faire!) en faisant très attention qu'une primitive d'une fonction T-périodique n'est périodique que si sa valeur moyenne est nulle (alors que sa dérivée l'est toujours !)

### III.4) Convergence d'une série de Fourier.

Voici un des résultats principaux à retenir dans ce chapitre qui dit en substance qu'une fonction fonction T-périodique est égal à sa série de Fourier.

#### ***Théorème de Dirichlet***

Soit  $x(t)$  une fonction T-périodique continûment dérivable par morceaux, c'est à dire qu'il existe une subdivision de  $[0; T]$  :  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = T$  telle que pour chaque entier  $i$  entre 1 et  $k-1$  la fonction  $x(t)$  se prolonge en une fonction dérivable sur  $[t_i, t_{i+1}]$ , à dérivée continue sur cet intervalle.

Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Soit  $S(x)(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$  la série de Fourier associée à  $x(t)$ . Alors :

(1) Si  $x(t)$  est continue en  $t_0$ , la série  $S(x)(t_0)$  converge et  $S(x)(t_0) = x(t_0)$

(2) Si  $x(t)$  n'est pas continue en  $t_0$ , la série  $S(x)(t_0)$  converge et

$$S(x)(t_0) = \frac{1}{2} (x(t_0^-) + x(t_0^+)) .$$

La preuve est très complexe, et sera faite en annexe de ce chapitre avec des hypothèses simplificatrices.

**Exemples :**

1) si  $x(t)$  est 2-périodique avec  $x(t)=1$  pour  $t \in [0;1[$  et  $x(t)=0$  pour  $t \in [1;2[$ , on a prouvé que  $S(x)(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \sin(n\pi t)$ . La fonction  $x(t)$  n'est pas continue en 0.

On a alors :  $S(x)(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \sin(0) = \frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}(x(0^-) + x(0^+)) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$ .

Dans ce cas, le théorème (point (2)) est vérifié de manière évidente.

2)  $y(t)$  est la fonction 2-périodique, paire, et définie par  $y(t)=t$  si  $t \in [0;1]$ . On a prouvé que  $S(y)(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left( \cos(\pi t) + \frac{1}{9} \cos(3\pi t) + \frac{1}{25} \cos(5\pi t) + \dots \right)$ . En remarquant que  $y(t)$  est continue en 0, il vient que  $S(y)(0) = y(0)$  ce qui signifie que

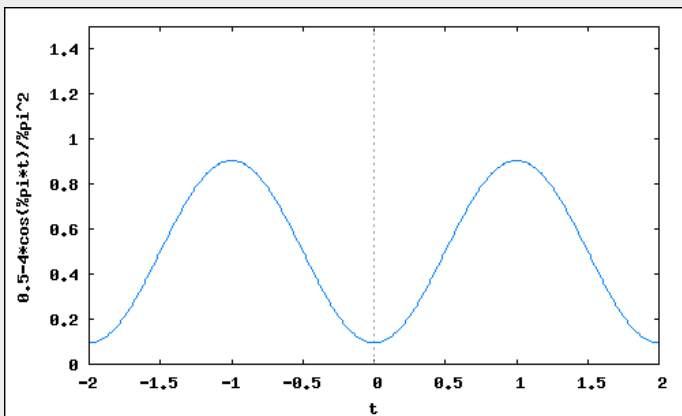
$$0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left( \cos(0) + \frac{1}{9} \cos(0) + \frac{1}{25} \cos(0) + \dots \right) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left( 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right)$$

On déduit de cette égalité que  $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ . Notons que dans ce cas, le

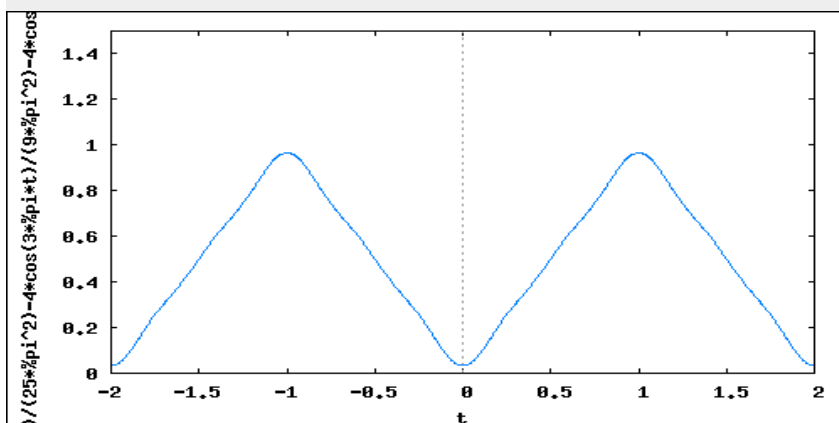
théorème (point (1)) donne une égalité qui n'est pas évidente et serait très difficile à obtenir autrement que comme application du Théorème de Dirichlet.

Pour ce dernier exemple, voici les représentations graphiques de :

$A_0 + H_1(t)$ :



$A_0 + H_1(t) + H_2(t)$ :



On voit déjà qu'avec  $n=2$ , la somme partielle de Fourier est déjà très proche de la fonction « triangle »  $y(t)$  !

### III.5) Théorème de Parseval.

Le Théorème de Parseval (propriété 4) s'étend aux fonctions T-périodique continue par morceaux, avec la différence que la somme est transformée en série.

#### **Théorème de Parseval**

1) Soit  $x(t)$  une fonction T-périodique continue par morceaux . Soit

$S(x)(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$  la série de Fourier associée à  $x(t)$ . Alors,

$$\langle |x(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = A_0^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 + B_n^2 \right)$$

2) Si on considère l'écriture complexe de la série de Fourier de  $x(t)$  :  $S(x)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$ ,

alors le Théorème de Parseval s'écrit plus simplement :  $\langle |x(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$

Ce Théorème a été démontré dans le cas d'une série finie (propriété 4) ce qui est le cas le plus intéressant en pratique. Malheureusement la preuve du cas général est beaucoup plus complexe car elle nécessite l'usage de propriétés d'approximation d'une fonction continue par morceaux par des polynômes qui dépassent de loin le cadre de ce cours.

**Remarque :** dans le cas d'une fonction  $x(t)$  qui n'est pas un polynôme trigonométrique, la série

$A_0^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 + B_n^2 \right)$  est en général difficile à calculer, c'est pourquoi dans ce cas, on évitera en

pratique d'utiliser cette formule pour calculer la puissance moyenne  $\langle |x(t)|^2 \rangle$ .

#### **Exemple :**

Si  $x(t)$  est 2-périodique avec  $x(t)=1$  pour  $t \in [0;1[$  et  $x(t)=0$  pour  $t \in [1;2[$ , on a prouvé précédemment que  $S(x)(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \sin(n\pi t)$ .

Le Théorème de Parseval donne

$$\langle |x(t)|^2 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1-(-1)^n}{n} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Un calcul direct de la puissance moyenne de  $x(t)$  donne  $\langle |x(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2}$  d'où l'égalité

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

c'est à dire  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ : remarquer que cette même égalité a été obtenue précédemment comme exemple d'application du Théorème de Dirichlet.

**(\*) Corollaire du Théorème de Parseval.**

Soit  $x(t)$  une fonction T-périodique continue par morceaux . Soit

$$S(x)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t} = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} H_n(t) \text{ la série de Fourier associée à } x(t) \text{ (on rappelle que}$$

$$C_0 = A_0 \text{ et que } H_n(t) = A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) = C_n e^{jn\omega t} + C_{-n} e^{-jn\omega t} \text{ ).}$$

Alors, quel que soit l'entier  $n$  non nul, le polynôme trigonométrique

$$P_n(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n H_k(t) \text{ (i.e } P_n(t) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{jk\omega t} \text{) est le polynôme trigonométrique de degré}$$

inférieur ou égal à  $n$  qui approxime le mieux la fonction  $x(t)$  en termes de puissance moyenne, c'est à dire que quel que soit le polynôme trigonométrique  $Q(t)$  de degré inférieur ou égal à  $n$  et de pulsation  $\omega$ , on a

$$\langle |x(t) - P_n(t)|^2 \rangle \leq \langle |x(t) - Q(t)|^2 \rangle$$

avec égalité si et seulement si  $Q = P_n$ .

**Preuve :** Posons  $Q(t) = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{jk\omega t}$  . Alors la série de Fourier de  $x(t) - Q(t)$  est

$$\sum_{k=-n}^n (C_k - \gamma_k) e^{jk\omega t} + \sum_{|k| \geq n+1} C_k e^{jk\omega t} \text{ (ce qui peut se vérifier facilement en remarquant que le}$$

k-ième coefficient de Fourier complexe de la série vaut

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{-jn\omega t} (x(t) - Q(t)) dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-jn\omega t} x(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T e^{-jn\omega t} Q(t) dt = C_k - \gamma_k \text{ avec la convention}$$

que  $\forall k > n, \gamma_k = 0$  . )

La fonction  $x(t) - Q(t)$  étant continue par morceaux, le Théorème de Parseval donne

$$\langle |x(t) - Q(t)|^2 \rangle = \sum_{k=-n}^n |C_k - \gamma_k|^2 + \sum_{|k| \geq n+1} |C_k|^2.$$

Le même raisonnement avec la fonction  $x(t) - P_n(t)$  donne

$$\langle |x(t) - P_n(t)|^2 \rangle = \sum_{|k| \geq n+1} |C_k|^2.$$

On en déduit que  $\langle |x(t) - P_n(t)|^2 \rangle \leq \langle |x(t) - Q(t)|^2 \rangle$  avec égalité si et seulement si

$$\sum_{k=-n}^n |C_k - \gamma_k|^2 = 0 \text{ c'est à dire, quel que soit } k \text{ compris entre } -n \text{ et } n, C_k = \gamma_k \text{ ce qui signifie}$$

que  $Q(t) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{jk\omega t} = P_n(t)$ .

### III.6) Spectre d'amplitude

Le théorème de Parseval dit que la puissance moyenne d'un signal périodique et continu par morceaux se partage dans celles de ses harmoniques.

Quand on fait l'analyse d'un tel signal on est souvent amené à étudier comment se fait la répartition de la puissance moyenne totale dans les diverses harmoniques : l'outil adapté est donné dans la définition suivante.

**Définition 7 :** Soit  $x(t)$  une fonction T-périodique continue par morceaux, et sa série trigonométrique  $S(x)(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$ .

On appelle spectre d'amplitude la suite  $(D_n)_{n \geq 1}$ , avec  $D_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ . Le spectre d'amplitude correspond physiquement aux amplitudes de chaque harmonique. On représente ce spectre par un diagramme en bâtons basés en abscisse sur les fréquences  $\frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \frac{3}{T}, \dots$ , et de hauteur  $D_1, D_2, D_3, \dots$ . On notera aussi que  $\frac{1}{2} D_n^2$  représente la puissance moyenne transportée par l'harmonique d'ordre  $n$ .

**Exemple :** Si  $x(t)$  est 2-périodique avec  $x(t) = 1$  pour  $t \in [0; 1[$  et  $x(t) = 0$  pour  $t \in [1; 2[$ , on a

$$S(x)(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin(n\pi t) \quad \text{et} \quad \langle |x(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2}.$$

La puissance moyenne transportée dans les deux premières harmoniques (et dans la valeur moyenne) est égale à  $A_0^2 + \sum_{n=1}^2 \langle |H_n(t)|^2 \rangle$  ce

qui donne  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi^2} + 0^2\right) = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sim 0,45$  ce qui représente environ 90 % de la puissance moyenne totale.

#### IV) (\*\*) Démonstration du Théorème de Dirichlet.

Pour alléger les calculs, la preuve est faite dans le cas où  $\omega = 1$ , c'est à dire  $T = 2\pi$ . On commence par un premier résultat :

**Lemme 1 (de Lebesgues) :** Soit  $\varphi$  une fonction continue par morceaux sur  $[0; 2\pi]$  à valeurs réelles.

$$\text{Alors} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos(nt) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin(nt) dt = 0.$$

**Remarque :** Ce résultat est une conséquence assez directe du Théorème de Parseval. Afin d'éviter d'utiliser un résultat admis pour la démonstration du Théorème de Dirichlet, nous démontrerons une version plus

faible du Théorème de Parseval, appelée inégalité de Bessel ( $\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \geq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$ ).

**Preuve :** on définit la fonction  $2\pi$ -périodique  $x(t)$  continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  égale à  $\varphi$  sur  $[0; 2\pi[$  (on dit qu'on périodise la fonction  $\varphi$ ).

Soit  $S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jnt}$  sa série de Fourier complexe et :  $S_R(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)$

sa série de Fourier réelle, et, pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $S_n(t) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{jkt}$  (somme partielle à l'ordre  $n$

de  $S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jnt}$ ).

Remarquons que même si les coefficients  $C_n$  ne sont en général pas réel,  $S_n(t)$  est quand même réel quel que soit  $t$  et quel que soit  $n$ . En effet :

$$\begin{aligned}\overline{S_n(t)} &= \sum_{k=-n}^n \overline{C_k e^{jkt}} = \sum_{k=-n}^n \overline{C_k} e^{-jkt} \\ &= \sum_{k=-n}^n C_{-k} e^{-jkt} \quad (\text{car } C_{-k} = \overline{C_k})\end{aligned}$$

$\sum_{k=-n}^n C_k e^{jkt} = S_n(t)$  car lorsque la variable  $k$  décrit tous les entiers de  $-n$  à  $n$ ,  $-k$  décrit aussi tous les entiers de  $-n$  à  $n$ .

On a :  $x(t) = (x(t) - S_n(t)) + S_n(t)$  donc

$$\begin{aligned}x^2(t) &= (x(t) - S_n(t))^2 + S_n^2(t) + 2(x(t) - S_n(t))S_n(t) \\ &= (x(t) - S_n(t))^2 + 2x(t)S_n(t) - S_n^2(t).\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\int_0^{2\pi} x^2(t) dt = \int_0^{2\pi} (x(t) - S_n(t))^2 dt + 2 \int_0^{2\pi} x(t)S_n(t) dt - \int_0^{2\pi} S_n^2(t) dt.$$

$\int_0^{2\pi} x^2(t) dt \geq 2 \int_0^{2\pi} (x(t)S_n(t)) dt - \int_0^{2\pi} S_n^2(t) dt$  car  $\int_0^{2\pi} (x(t) - S_n(t))^2 dt \geq 0$  (intégrale d'une fonction positive sur  $[0; 2\pi]$ ) ce qui donne :

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(t) dt \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x(t)S_n(t)) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_n^2(t) dt.$$

D'une part, on a  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_n^2(t) dt = \langle |S_n(t)|^2 \rangle = \sum_{n=-n}^n |C_k|^2$  par la propriété 4 pour le polynôme trigonométrique.

D'autre part, en utilisant le fait que  $\overline{S_n(t)} = S_n(t)$  :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x(t)S_n(t)) dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x(t)\overline{S_n(t)}) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( x(t) \sum_{k=-n}^n \overline{C_k} e^{-jkt} \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=-n}^n x(t) \overline{C_k} e^{-jkt} \right) dt = \sum_{k=-n}^n \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \overline{C_k} e^{-jkt} dt \right) = \sum_{k=-n}^n \overline{C_k} \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) e^{-jkt} dt \right)\end{aligned}$$

(propriétés de linéarité de l'intégrale)

$$= 2 \sum_{k=-n}^n \overline{C_k} C_k = 2 \sum_{k=-n}^n |C_k|^2 \quad \text{car } C_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) e^{-jkt} dt \quad \text{et } \overline{C_k} C_k = |C_k|^2.$$

En reportant les résultats des deux calculs précédents dans (1) on obtient :

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(t) dt \geq 2 \sum_{k=-n}^n |C_k|^2 - \sum_{k=-n}^n |C_k|^2 = \sum_{k=-n}^n |C_k|^2 = \langle |S_n(t)|^2 \rangle \quad (\text{inégalité de « Bessel »}).$$

Or par la propriété 4, on a  $\langle |S_n(t)|^2 \rangle = A_0^2 + \sum_{k=1}^n \frac{A_k^2 + B_k^2}{2}$  donc (2) peut se réécrire :

$$(3) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(t) dt \geq A_0^2 + \sum_{k=1}^n \frac{A_k^2 + B_k^2}{2}.$$

On définit alors la suite  $(\sigma_n)_{n \geq 1}$  par l'expression  $\sigma_n = A_0^2 + \sum_{k=1}^n \frac{A_k^2 + B_k^2}{2}$ . La suite  $(\sigma_n)_{n \geq 1}$  est



croissante (car  $\sigma_{n+1} - \sigma_n = \frac{A_{n+1}^2 + B_{n+1}^2}{2} \geq 0$ ) et majorée par la constante  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(t) dt$  par (3), donc

elle converge vers un réel  $\sigma_\infty$ . On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n^2 + B_n^2}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n - \sigma_{n-1} = \sigma_\infty - \sigma_\infty = 0$ . On a alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = 0$ .

Finalement, puisque  $\int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos(nt) dt = \int_0^{2\pi} x(t) \cos(nt) dt$  (car  $x = \varphi$  sur  $[0; 2\pi[$ )

$= \pi A_n$  et puisque de même  $\int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin(nt) dt = \pi B_n$ , on en déduit la preuve du Lemme.

**Remarque :** En reprenant la preuve ci-dessus et en démontrant que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} (x(t) - S_n(t))^2 dt = 0$ , nous démontrerions le Théorème de Parseval. Malheureusement, le calcul de cette limite n'est pas facile et nous l'admettrons.

**Corollaire** Soit  $\varphi$  une fonction continue par morceaux sur  $[0; 2\pi]$  à valeurs réelles. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = 0.$$

Preuve : en effet,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt &= \int_0^{2\pi} \varphi(t) \left( \sin(nt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(nt) \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \varphi(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right) \sin(nt) dt + \int_0^{2\pi} \left( \varphi(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right) \cos(nt) dt \end{aligned}$$

et le résultat se déduit du lemme précédent avec la fonction  $t \rightarrow \varphi(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right)$  à la place de  $\varphi$ .

**Lemme 2** Soit  $n$  un entier naturel. On considère le polynôme trigonométrique de pulsation  $\omega = 1$

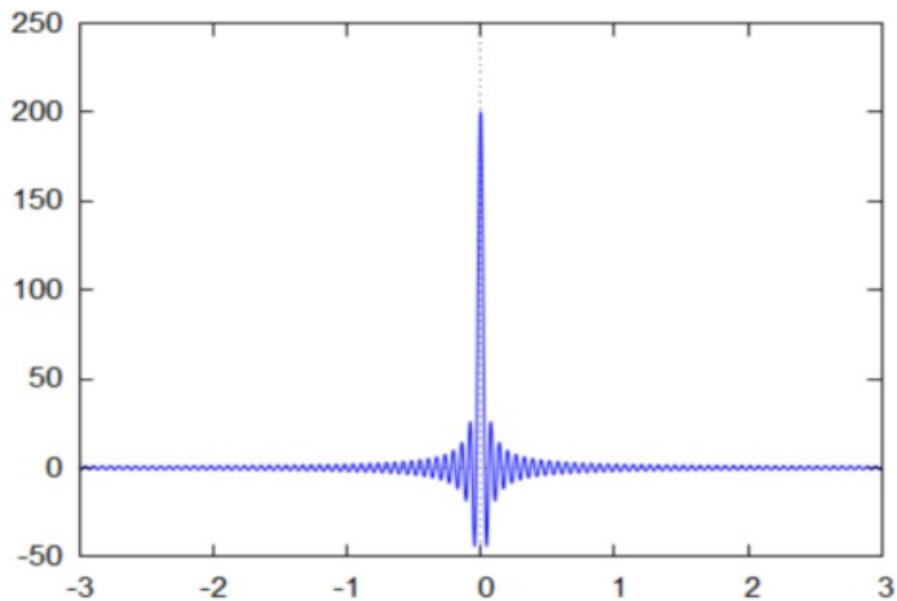
$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{jkt}.$$

Alors, la fonction  $D_n$  est à valeurs réelles et  $\forall t \neq 2k\pi (k \in \mathbb{Z}), \forall n \in \mathbb{N}^*$  :

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

De plus la fonction  $D_n$  est paire.

Graphe de  $D_{100}$ :



Preuve :

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{jkt} = e^{-jnt} + e^{-j(n-1)t} + \dots + e^{jnt} = e^{-jnt} (1 + e^{jt} + \dots + e^{j2nt}).$$

Si  $t \neq 2k\pi$ ,  $e^{jt} \neq 1$  donc la formule de la somme des termes d'une suite géométrique donne :

$$\begin{aligned} D_n(t) &= e^{-jnt} \frac{1 - (e^{jt})^{2n+1}}{1 - e^{jt}} = e^{-jnt} \frac{1 - e^{j(2n+1)t}}{1 - e^{jt}} = e^{-jnt} \frac{e^{j\frac{(2n+1)t}{2}} \left( e^{j\frac{(2n+1)t}{2}} - e^{-j\frac{(2n+1)t}{2}} \right)}{e^{j\frac{t}{2}} \left( e^{j\frac{t}{2}} - e^{-j\frac{t}{2}} \right)} \\ &= e^{-jnt} \frac{e^{j\frac{(2n+1)t}{2}} 2j \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{e^{j\frac{t}{2}} 2j \sin\left(\frac{t}{2}\right)} = e^{-jnt} e^{j\frac{(2n+1)t}{2}} e^{-j\frac{t}{2}} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \end{aligned}$$

La parité de  $D_n$  découle de l'égalité car

$$D_n(-t) = \frac{\sin\left(-\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{-t}{2}\right)} = \frac{-\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{-\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

**Lemme 3** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$\int_0^{2\pi} D_n(t) dt = 2\pi.$$

Preuve :

On remarque que  $D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{jkt}$  est un polynôme trigonométrique écrit sous forme complexe avec

$$1 = C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(t) dt. \text{ On en déduit que } \int_0^{2\pi} D_n(t) dt = 2\pi.$$

On est enfin en mesure de prouver le Théorème de Dirichlet.

### Preuve du Théorème.

Remarquons déjà que le point 1) du Théorème de Dirichlet n'est qu'un cas particulier du 2) car si  $x$  est continue en  $t_0$  alors  $\frac{1}{2}(x(t_0^-) + x(t_0^+)) = x(t_0)$ . Il nous suffit donc de prouver directement le point 2).

Soit  $S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jnt}$  la série de Fourier complexe de  $x(t)$  et soit  $S_n(t) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{jkt}$  sa somme partielle d'ordre  $n$ . On a alors, pour  $t$  fixé :

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{jkt} = \sum_{k=-n}^n \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s) e^{-jks} \right) e^{jkt} = \sum_{k=-n}^n \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s) e^{-jks} e^{jkt} \right).$$

Par linéarité de l'intégrale, cela donne :

$$S_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s) \left( \sum_{k=-n}^n e^{-jks} e^{jkt} \right) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s) \left( \sum_{k=-n}^n e^{jk(t-s)} \right) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s) D_n(t-s) ds.$$

On procède au changement de variables  $\sigma = t - s$  (noter que  $s$  est la variable d'intégration et  $t$  est une constante dans cette intégrale) :

$$S_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_t^{t-2\pi} x(t-\sigma) D_n(\sigma) (-d\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{t-2\pi}^t x(t-\sigma) D_n(\sigma) d\sigma.$$

La fonction  $\sigma \rightarrow x(t-\sigma) D_n(\sigma)$  est  $2\pi$ -périodique par produit de fonctions  $2\pi$ -périodiques et l'intégrale ci-dessus est une intégrale sur un intervalle de longueur  $2\pi$  donc par la propriété 1, on a :

$$(1a) \quad S_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t-\sigma) D_n(\sigma) d\sigma.$$

Maintenant, on procède au changement de variable  $\xi = -\sigma$  à partir de l'égalité (1a) :

$$S_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{-2\pi} x(t+\xi) D_n(-\xi) (-d\xi) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{-2\pi} x(t+\xi) D_n(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^0 x(t+\xi) D_n(\xi) d\xi$$
 car la

fonction  $D_n$  est paire.

La propriété 1 donne alors la nouvelle relation :

$$(1b) \quad S_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t+\sigma) D_n(\sigma) d\sigma.$$

Avant de prolonger ces délices calculatoires, il convient de donner un peu de sens aux égalités (1a) et (1b). Le graphe de la fonction  $D_n$  (Lemme 2) montre que les valeurs de  $D_n$  sont élevées au voisinage de 0 et faibles ailleurs, et ce, d'autant plus que  $n$  est grand. Ainsi, l'utilisation de la formule

(1a) montre que  $S_n(t)$  dépend fortement des valeurs de  $x(t-\sigma)$  pour  $\sigma \rightarrow 0^+$  tandis que

(1b) montre que les valeurs de  $x(t+\sigma)$  pour  $\sigma \rightarrow 0^+$  influent fortement sur  $S_n(t)$ . Cette

réflexion nous permet de mieux comprendre le rôle de la quantité  $\frac{1}{2}(x(t^-) + x(t^+))$  dans le calcul de

$S_n(t)$ .

On fixe  $t = t_0$  et on rappelle que dans cette partie du théorème  $x(t)$  est continue en  $t_0$  et dérivable à gauche et à droite de  $t_0$ .

On réécrit (1a) et (1b) sous la forme :

$$S_n(t_0) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t_0 - \sigma) D_n(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t_0 + \sigma) D_n(\sigma) d\sigma \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (x(t_0 - \sigma) + x(t_0 + \sigma)) D_n(\sigma) d\sigma$$

ce qui peut se réécrire, en posant  $\lambda = \frac{1}{2}(x(t_0^-) + x(t_0^+))$  :

$$S_n(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda D_n(\sigma) d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (2\lambda + (x(t_0 - \sigma) - x(t_0 + \sigma))) D_n(\sigma) d\sigma$$

$$S_n(t_0) = \lambda \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(\sigma) d\sigma \right) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (2\lambda - (x(t_0 - \sigma) + x(t_0 + \sigma))) D_n(\sigma) d\sigma$$

$$(2) \quad S_n(t_0) = \lambda - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (2\lambda - (x(t_0 - \sigma) + x(t_0 + \sigma))) D_n(\sigma) d\sigma \quad \text{car} \quad \int_0^{2\pi} D_n(t) dt = 2\pi \quad \text{d'après le}$$

(Lemme 3)

Il reste donc à prouver que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} (2\lambda - (x(t_0 - \sigma) + x(t_0 + \sigma))) D_n(\sigma) d\sigma = 0$  et la démonstration du

Théorème sera achevée.

On a

$$\forall \sigma \in ]0; 2\pi[ , \quad (2\lambda - (x(t_0 - \sigma) + x(t_0 + \sigma))) D_n(\sigma) = \frac{2\lambda - (x(t_0 - \sigma) + x(t_0 + \sigma))}{\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\sigma\right).$$

On définit sur  $]0; 2\pi[$  la fonction  $\varphi(\sigma) = \frac{2\lambda - (x(t_0 - \sigma) + x(t_0 + \sigma))}{\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)}$  : elle est continue par

morceaux car  $x$  l'est aussi. On va prouver que  $\varphi$  se prolonge en une fonction continue sur l'intervalle fermé  $[0; 2\pi]$ .

On a

(i) D'une part, si  $\sigma \rightarrow 0^+$ ,  $\varphi(\sigma) = \frac{2\lambda - (x(t_0 - \sigma) + x(t_0 + \sigma))}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)}$  et :

$$\frac{2\lambda - (x(t_0 - \sigma) + x(t_0 + \sigma))}{\sigma} = \frac{x(t_0^-) - x(t_0 - \sigma)}{t_0 - (t_0 - \sigma)} + \frac{x(t_0^+) - x(t_0 + \sigma)}{t_0 - (t_0 + \sigma)} \rightarrow x'_g(t_0) + x'_d(t_0) \quad \text{où} \quad x'_g(t_0) \quad \text{et}$$

$x'_d(t_0)$  sont respectivement les dérivées à gauche et à droite de  $x(t)$  en  $t_0$ .

On a d'autre part  $\frac{\sigma}{\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)} \rightarrow 2$  car  $\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) \sim \frac{\sigma}{2}$  en 0, donc par produit de limites, si  $\sigma \rightarrow 0^+$ ,

$$\varphi(\sigma) = \frac{2\lambda - (x(t_0 - \sigma) + x(t_0 + \sigma))}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)} \rightarrow 2(x'_g(t_0) + x'_d(t_0)) \quad \text{c'est à dire}$$

$$(3) \quad : \quad \varphi(0^+) = 2(x'_g(t_0) + x'_d(t_0)) .$$

(ii) D'autre part, si  $\sigma \rightarrow (2\pi)^-$ ,  $\varphi(\sigma) = \frac{2\lambda - (x(t_0 - \sigma) + x(t_0 + \sigma))}{\sigma - 2\pi} \cdot \frac{\sigma - 2\pi}{\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)}$  et :

a) 
$$\frac{x(t_0^+) - x(t_0 - \sigma)}{\sigma - 2\pi} = \frac{x(t_0^+ - 2\pi) - x(t_0 - \sigma)}{\sigma - 2\pi}$$
 par  $2\pi$ -périodicité de  $x(t)$ , d'où :

$$\frac{x(t_0^+) - x(t_0 - \sigma)}{\sigma - 2\pi} = \frac{x(t_0^+ - 2\pi) - x(t_0 - \sigma)}{(t_0 - 2\pi) - (t_0 - \sigma)} \rightarrow x'_d(t_0 - 2\pi) \text{ si } \sigma \rightarrow (2\pi)^-,$$

où  $x'_d$  est cette fois la dérivée à droite de  $x(t)$

d'où

$$\lim_{\sigma \rightarrow (2\pi)^-} \frac{x(t_0^+) - x(t_0 - \sigma)}{\sigma - 2\pi} = x'_d(t_0 - 2\pi) = x'_d(t_0) \text{ (par } 2\pi\text{-périodicité de } x(t)\text{)}.$$

b) De la même façon (détails à regarder en exercice), on a :

$$\lim_{\sigma \rightarrow (2\pi)^-} \frac{x(t_0^-) - x(t_0 - \sigma)}{\sigma - 2\pi} = x'_g(t_0 - 2\pi) = x'_g(t_0) \text{ où } x'_g \text{ est la dérivée à gauche de } x(t).$$

c) On a donc

$$\lim_{\sigma \rightarrow (2\pi)^-} \frac{2\lambda - (x(t_0 - \sigma) + x(t_0 + \sigma))}{\sigma - 2\pi} = \lim_{\sigma \rightarrow (2\pi)^-} \frac{x(t_0^+) - x(t_0 - \sigma)}{\sigma - 2\pi} + \lim_{\sigma \rightarrow (2\pi)^-} \frac{x(t_0^-) - x(t_0 - \sigma)}{\sigma - 2\pi} = x'_d(t_0) + x'_g(t_0)$$

d) On s'occupe maintenant de la limite du terme  $\frac{\sigma - 2\pi}{\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)}$ .

On a  $\frac{\sigma - 2\pi}{\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)} = -\left(\frac{\sigma - 2\pi}{\sin\left(\frac{\sigma}{2} - \pi\right)}\right)$  et si  $\sigma \rightarrow (2\pi)^-$ ,  $\sin\left(\frac{\sigma}{2} - \pi\right) \sim \frac{\sigma}{2} - \pi$  donc par quotient

d'équivalents :  $\frac{\sigma - 2\pi}{\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)} = -\left(\frac{\sigma - 2\pi}{\sin\left(\frac{\sigma}{2} - \pi\right)}\right) \sim -\left(\frac{\sigma - 2\pi}{\frac{\sigma}{2} - \pi}\right) = -2.$

e) Ainsi, par produit de limites, on déduit de c) et de d) que

$$\lim_{\sigma \rightarrow (2\pi)^-} \frac{2\lambda - (x(t_0 - \sigma) + x(t_0 + \sigma))}{\sigma - 2\pi} \cdot \frac{\sigma - 2\pi}{\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)} = -2(x'_d(t_0) + x'_g(t_0))$$

c'est à dire :

$$(4) : \varphi((2\pi)^-) = -2(x'_d(t_0) + x'_g(t_0))$$

Les relations (3) et (4) montrent que la fonction  $\varphi$  se prolonge en une fonction continue par morceaux sur l'intervalle fermé  $[0; 2\pi]$  en posant  $\varphi(0) = 2(x'_d(t_0) + x'_g(t_0))$  et  $\varphi(2\pi) = -2(x'_d(t_0) + x'_g(t_0))$ .

En reprenant la relation (2) on a par définition de  $\varphi$  et par le lemme 2 :

$$\int_0^{2\pi} (2\lambda - (x(t_0 - \sigma) + x(t_0 + \sigma))) D_n(\sigma) d\sigma = \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\sigma\right) d\sigma.$$

On peut alors utiliser le corollaire du Lemme 1 pour dire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} (2\lambda - (x(t_0 - \sigma) + x(t_0 + \sigma))) D_n(\sigma) d\sigma = 0$$

et la preuve est complète.

## V) Exercices

### Exercice 1.

Soit  $x(t)$  un signal continue sur  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe un réel  $T > 0$  tel que la valeur moyenne de  $x(t)$  soit nulle sur tous les intervalles de longueur  $T$ , c'est à dire sur tous les intervalles  $[a; b]$  tels que  $b = T + a$ . Montrer que le signal  $x(t)$  est  $T$ -périodique.

### Exercice 2.

Pour chacune des fonctions suivantes :

- Linéariser la fonction
- Montrer qu'elle est périodique en l'écrivant sous la forme d'un polynôme trigonométrique.
- Calculer les coefficients de Fourier  $A_n$  et  $B_n$ , puis  $C_n$
- Calculer sa valeur moyenne et sa puissance moyenne

1)  $f(t) = 3 \cos^2(4t)$ .

2)  $f(t) = \sin(4t) \cos^2(6t)$ .

3)  $f(t) = \sin(\pi t) \cos(\pi t + \frac{\pi}{3})$

### Exercice 3.

On considère la sinusoïde redressée simple alternance  $x(t)$   $2\pi$ -périodique définie par  $x(t) = \sin(t)$  si  $t \in [0; \pi]$  et  $x(t) = 0$  si  $t \in [\pi; 2\pi]$ .

- Calculer son développement en série de Fourier réel, puis sa puissance moyenne.
- Combien d'harmonique faut-il conserver pour garder 95% de la puissance moyenne du signal ?

### Exercice 4.

Mêmes questions que pour l'exercice précédent avec la sinusoïde redressée double alternance  $y(t)$   $\pi$ -périodique définie par  $y(t) = |\sin(t)|$  si  $t \in [0; \pi]$ .

Pour trouver le développement en série de Fourier, on remarquera que  $y(t) = x(t) + x(t + \pi)$ ,  $x(t)$  étant le signal étudié dans l'exercice 3.

### Exercice 5.

On considère  $x(t)$  le signal rectangulaire 2- périodique défini par :

$$x(t) = 1 \text{ si } t \in [0; 1[ \text{ et } x(t) = -1 \text{ si } t \in [-1; 0[.$$

- Calculer le développement en série de Fourier de ce signal.
- Quel est le pourcentage de puissance moyenne que l'on conserve si on ne garde que la première harmonique.
- Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a > b$ . On considère  $y(t)$  le signal rectangulaire 2- périodique défini par :  $x(t) = a$  si  $t \in [0; 1[$  et  $x(t) = b$  si  $t \in [-1; 0[$ .
  - Trouver deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $y(t) = \lambda + \mu x(t)$ . On exprimera ces réels à l'aide de  $a$  et  $b$ .
  - En déduire le développement en série de Fourier de  $y(t)$ .
- Soit le signal triangulaire 2- périodique et paire, défini par  $z(t) = 1 - t$  si  $t \in [0; 1]$ 
  - Calculer sa valeur moyenne.
  - Donner le développement en série de Fourier de  $z'(t)$ . En déduire celui de  $z(t)$ .

**Exercice 6.**

Soit la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $[-1; 1[$  par l'expression  $x(t) = t$ .

1) Donner l'expression de la série de Fourier associée à  $x(t)$ .

2) A l'aide du Théorème de Parseval, donner la valeur exacte de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

**Exercice 7.**

Soit la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $[-\pi; \pi[$  par l'expression  $x(t) = e^t$ .

1) Donner l'expression de la série de Fourier complexe associée à  $x(t)$ , et vérifier que

$$C_n = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} \frac{(-1)^n}{1 - jn}.$$

2) Établir l'expression de la série de Fourier réelle associée à  $x(t)$ .

3) A l'aide du Théorème de Dirichlet appliqué à  $t = \pi$ , donner la valeur exacte de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ .

**(\* Exercice 8 (lissage))**

On considère un circuit RC en série. Soit  $x(t)$  la tension en fonction du temps délivrée par le générateur, et  $y(t)$  la tension mesurée aux bornes du condensateur.

Les lois de la physique montrent que l'on a l'équation différentielle  $\tau y'(t) + y(t) = x(t)$  avec  $\tau = RC$ . On considère une entrée  $x(t)$  continue par morceaux,  $T$ -périodique.

On admet qu'il existe une unique solution  $y(t)$   $T$ -périodique pour (E) (voir exercices sur le chapitre intégration pour une preuve).

Soit  $SF(x)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$  le développement en série de Fourier de  $x(t)$ ,

et  $SF(y)(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$  celui de  $y(t)$ .

Notre premier but est de calculer le développement en série de Fourier de la réponse  $y(t)$  en fonction de celui de  $x(t)$ . Une application de ce résultat sera d'expliquer le phénomène de lissage de l'entrée  $x(t)$  observée pour un choix adapté de  $\tau$ .

**Partie A : développement en série de Fourier de la sortie.**

1) Démontrer que l'on a les relations :  $A_0 = a_0$  et  $A_n + n\tau\omega B_n = a_n$ , et  $-n\tau\omega A_n + B_n = b_n$ .

2) Vérifier à partir de la question précédente l'égalité dans  $\mathbb{C}$  :  
 $\forall n \geq 1, (A_n + jB_n)(1 - jn\tau\omega) = a_n + jb_n$ .

3) En déduire les expressions de  $A_n$  et  $B_n$  en fonction de  $n$ ,  $\tau$  et  $\omega$ .

4) Déduire directement du 2) la relation :

$$\forall n \geq 1, A_n^2 + B_n^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2}$$

**Partie B : calcul de la variance du signal de sortie**

5) Montrer que  $\forall n \geq 1, \frac{1}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} \leq \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2}$ .

6) En déduire que  $\sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^2 + B_n^2) \leq \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ .

7) On définit la variance d'un signal  $x(t)$  T-périodique par la quantité

$$V(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 .$$

On considère la série de Fourier du signal  $x(t)$  :

$$SF(x)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

a) Vérifier que  $V(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$  .

b) Justifier que  $V(x) = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \langle x \rangle)^2 dt$  , ce qui peut s'écrire aussi

$$V(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle .$$

**Remarque :** on retrouve une définition très similaire à celle de la variance d'une variable aléatoire en statistique : tout comme dans ce dernier cas, la variance d'un signal périodique mesure la valeur moyenne des variations d'un signal autour de sa valeur moyenne. Une variance faible correspond à un signal lissé.

c) Montrer à l'aide des résultats établis dans la question 6) que  $V(y) \leq \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2} V(x)$ .

d) Application numérique : on prend  $T = 10^{-5} s$  ,  $x(t) = \sin(\omega t)$  pour  $t \in [0, \frac{T}{2}]$  et  $x(t) = 0$  sinon (sinusoïde redressée simple alternance) .

(i) Calculer la valeur moyenne et la puissance moyenne de  $x(t)$  .

(ii) En déduire  $V(x)$  .

(iii) Pour quelles valeurs de  $\frac{\tau}{T}$  a-t-on  $V(y) \leq 10^{-3}$  ?

### Partie C : lissage uniforme

#### 8) Inégalité de Cauchy-Schwartz

Le but de cette question est d'établir une inégalité très connue (« Inégalité de Cauchy-Schwartz ») qui va nous servir dans la suite de cet exercice.

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  et soient  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_N)$  deux suites finies de N nombres réels.

On considère la fonction  $P(t) = \sum_{n=1}^N (x_n - t y_n)^2$  . On suppose que les réels  $(y_1, y_2, \dots, y_N)$  ne sont pas tous nuls.

a) Montrer que  $P(t)$  est un polynôme du second degré (on vérifiera bien qu'il est exactement de degré 2).



b) Montrer que son discriminant vaut  $\Delta = 4 \left( \left( \sum_{n=1}^N x_n y_n \right)^2 - \left( \sum_{n=1}^N x_n^2 \right) \left( \sum_{n=1}^N y_n^2 \right) \right)$ .

c) Dédurre des questions précédentes l'inégalité  $\left( \sum_{n=1}^N x_n y_n \right)^2 \leq \left( \sum_{n=1}^N x_n^2 \right) \left( \sum_{n=1}^N y_n^2 \right)$  et vérifier que l'égalité n'a lieu que si les N-uplets  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_N)$  sont proportionnels.

d) Montrer que l'inégalité  $\left( \sum_{n=1}^N x_n y_n \right)^2 \leq \left( \sum_{n=1}^N x_n^2 \right) \left( \sum_{n=1}^N y_n^2 \right)$  est encore vraie si tous les termes de la suite  $(y_1, y_2, \dots, y_N)$  sont nuls.

On reprend les notations introduites en début d'exercice et dans la partie A. En particulier, on rappelle que

$SF(x)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$  est le développement en série de Fourier de  $x(t)$ , et

$SF(y)(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$  celui de  $y(t)$ . On rappelle enfin la relation

$$\forall n \geq 1, \quad A_n^2 + B_n^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} \quad \text{établie dans la partie A.}$$

9)

a) En considérant les amplitudes réelles de chaque harmonique du développement en série de Fourier de  $y(t)$ , utiliser le Théorème de Dirichlet pour prouver que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |y(t) - \langle y \rangle| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2}}.$$

b) Dédurre de l'inégalité de Cauchy-Schwartz que  $\forall t \in \mathbb{R}, \quad |y(t) - \langle y \rangle|^2 \leq 2V(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2}$

où, on le rappelle,  $V(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$  est la variance du signal d'entrée  $x(t)$ .

10)

a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  Montrer que  $\forall t \in [(n-1)\tau\omega; n\tau\omega], \quad \frac{1}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} \leq \frac{1}{1 + t^2}$ .

b) En déduire que  $\forall n \geq 1, \quad \frac{\tau\omega}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} \leq \arctan(n\tau\omega) - \arctan((n-1)\tau\omega)$ .

c) Prouver alors que, si  $N \geq 1$ , alors  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} \leq \frac{1}{\tau\omega} \arctan(N\tau\omega)$ .

d) Dédurre alors du résultat de la question 9) que  $\forall t \in \mathbb{R}, \quad |y(t) - \langle y \rangle|^2 \leq \frac{\pi V(x)}{\tau\omega} = \frac{T V(x)}{2\tau}$

11) Application numérique : on reprend le cas où  $T = 10^{-5} s$ ,  $x(t) = \sin(2 \cdot 10^5 \pi t)$  pour  $t \in [0, \frac{T}{2}]$  et

$x(t) = 0$  sinon (sinusoïde redressée simple alternance).

Pour quelles valeurs de  $\frac{\tau}{T}$  a-t-on  $\forall t \in \mathbb{R}, \quad |y(t) - \langle y \rangle| \leq 10^{-3}$  ?

**(\*)Exercice 9 (signal avec décroissance exponentielle du spectre d'amplitude).**

**Rappel :** Si  $x \neq 1$ ,  $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

On considère un signal  $x(t)$ ,  $2\pi$ -périodique et continue dont le spectre d'amplitude décroît de façon exponentielle. Plus précisément, on suppose que le développement en série de Fourier de  $x(t)$  est :

$$\text{SF}(x)(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \cos(nt), \text{ avec } \lambda \in ]0, 1[.$$

1) Questions préliminaires :

a) Calculer la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n$ .

b) En déduire les valeurs de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n$  et de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{2n}$ .

2) Calculer les expressions de la valeur moyenne de  $x(t)$  ainsi que celle de sa puissance moyenne.

3) Calculer les valeurs de  $x(0)$  et  $x(\pi)$ . Préciser le théorème utilisé (on admettra que  $x$  est dérivable, à dérivée continue.).

4) a) Calculer la puissance moyenne du fondamental (en tenant compte de la valeur moyenne).

b) Pour quelles valeurs de  $\lambda$  peut-on affirmer que le fondamental + valeur moyenne contient plus de 95% de la puissance moyenne de  $x(t)$  ? On arrondira à 0,01 près.

5) Montrer que  $\frac{1-2\lambda}{1-\lambda} \leq x(t) \leq \frac{1}{1-\lambda}$  (on admettra que  $x$  est dérivable, à dérivée continue.)

6) Le but de cette question est de trouver une expression de  $x(t)$  à partir de celle de  $\text{SF}(x)(t)$ . On pose  $y(t) = x(t) \cdot \cos(t)$ , et on définit  $A_n(x)$  et  $B_n(x)$  les coefficients de Fourier de  $x(t)$  (respectivement  $A_n(y)$  et  $B_n(y)$  les coefficients de Fourier de  $y(t)$ )

a) Donner à partir du développement en série de Fourier de  $x(t)$  la valeur des intégrales

$$I_n = \int_0^{2\pi} x(t) \cos(nt) dt \text{ et } J_n = \int_0^{2\pi} x(t) \sin(nt) dt \text{ pour } n \text{ entier naturel.}$$

b) Calculer simplement  $B_n(y)$ .

c) Prouver que  $A_0(y) = \frac{1}{2} A_1(x)$  et  $A_1(y) = A_0(x) + \frac{1}{2} A_2(x)$ .

d) Prouver que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $A_n(y) = \frac{1}{2} (A_{n-1}(x) + A_{n+1}(x)) = \frac{1}{2} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) A_n(x)$ .

e) En déduire que le développement en série de Fourier de  $y(t)$  est

$$SF(y)(t) = \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \cos(nt).$$

f) Prouver alors la relation  $y(t) = \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) (x(t) - 1)$ .

g) En déduire que  $x(t) = \frac{\lambda \cos(t) - 1}{2\lambda \cos(t) - (\lambda^2 + 1)}$ .

h) Etablir enfin le tableau de variations de  $x(t)$  sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$  et tracer l'allure de son graphe. (On pourra écrire  $x(t)$  sous la forme  $x(t) = \varphi(\cos(t))$  où  $\varphi$  est une fonction définie et croissante sur  $[-1; 1]$ , après l'avoir prouvé bien sûr)

### Exercice 10

On considère le signal  $x(t)$  défini par l'expression :

$$x(t) = 2 - 3 \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 2 \cos(\pi t) + \cos\left(\frac{5\pi}{3}t\right).$$

- 1) Ce signal est-il à énergie finie ? A puissance moyenne finie ?
- 2) Quelle est la pulsation fondamentale de ce signal ? Montrer qu'il est périodique de période 6.
- 3) Quelle est la valeur moyenne de  $x(t)$  ?
- 4) Préciser les expressions des harmoniques contenues dans ce signal et donner leur ordre.
- 5) a) Ecrire l'expression de la puissance moyenne de  $x(t)$  à l'aide d'une intégrale.  
b) Trouver par un calcul rapide la valeur exacte de cette puissance moyenne à l'aide d'une propriété du cours que l'on nommera.
- 6) Tracer le spectre d'amplitude de  $x(t)$ .

### Exercice 11

On considère le signal « carré » 2-périodique défini par :  $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0; 1[ \\ 0 & \text{si } t \in [1; 2[ \end{cases}$ . Soit

$$SF(x)(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \text{ la série de Fourier associée.}$$

- 1) a) Montrer que  $A_0 = \frac{1}{2}$ .  
b) Calculer la valeur de  $\omega$ .  
c) Tracer le signal  $x(t)$  sur  $[-2, 4]$ . Ce signal est-il pair ? Impair ?  
d) Quelles sont les valeurs de  $t$  pour lesquelles on a :  $SF(x)(t) = x(t)$  ? Donner la valeur de  $SF(x)(t)$  pour les autres valeurs de  $t$ .
- 2) Montrer que  $\forall n \geq 1, A_n = 0$ .

On admet que  $\forall n \geq 1, B_n = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}$ . On remarquera que cela implique que les harmoniques d'ordre pair sont nulles. On considère dorénavant le signal « carré » 2-périodique défini par :

$$y(t) = \begin{cases} a & \text{si } t \in [0; 1[ \\ b & \text{si } t \in [1; 2[ \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

3) a) Vérifier que  $y(t) = b + (a - b) \cdot x(t)$  (on pourra raisonner séparément sur les intervalles  $[0; 1[$  et  $[1; 2[$ .)

b) En déduire que  $SF(y)(t) = \frac{a+b}{2} + (a-b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin(n\pi t)$ .

4) On suppose qu'après filtrage de  $y(t)$  par un filtre passe-bas parfait de fréquence de coupure  $f_c$ , on obtient le signal  $\tilde{y}(t) = \pi + 3 \sin(\pi t)$ . Le but de cette question est de retrouver la valeur de  $a$  et de  $b$  à partir de la connaissance de  $\tilde{y}(t)$ , et d'estimer la perte de puissance moyenne du signal après filtrage.

a) Quel est l'intervalle de valeurs possibles pour  $f_c$  (on rappelle que les harmoniques d'ordre pair sont nulles) ?

b) Montrer que  $a = \frac{7\pi}{4}$  et  $b = \frac{\pi}{4}$ .

c) Prouver par un calcul direct que la puissance moyenne de  $y(t)$  vaut  $\frac{25\pi^2}{16}$ .

d) Calculer la puissance moyenne de  $\tilde{y}(t)$ . Quel est le pourcentage de la puissance moyenne de  $y(t)$  que l'on a perdue après filtrage (arrondir au dixième de %) ?

### Exercice 12

On considère le signal triangulaire 2-périodique, pair, défini sur  $[0; 1[$  par l'expression  $x(t) = t$ .

On admet que son développement en série de Fourier est :  $SF(x)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\pi t)$  avec

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, a_n = \frac{-4}{n^2 \pi^2} \quad \text{si } n \text{ est impair, } a_n = 0 \quad \text{sinon.}$$

On s'intéresse au signal 2-périodique  $y(t) = \cos(50\pi t) x(t)$ .

Soit  $SF(y)(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)$  son développement en série de Fourier.

1) Montrer le signal  $y(t)$  est paire. Quelle conséquence peut-on en tirer sur les coefficients  $A_n$  et  $B_n$  ?

On admet pour la suite de l'exercice que  $\langle y^2(t) \rangle \sim \frac{1}{6}$  (la vraie valeur est

$$\langle y^2(t) \rangle = \frac{1}{6} + \frac{1}{10^4 \pi^2} \quad \text{qui est égal à } \frac{1}{6} \text{ à } 10^{-5} \text{ près.}$$

2) a) Montrer que  $A_0 = \frac{1}{2} a_{50}$  et  $A_{50} = \frac{1}{2} a_{100} + a_0$ . En déduire les valeurs exactes de  $A_0$  et  $A_{50}$ .

b) On rappelle la formule  $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ . Soit  $n \geq 1$  avec  $n \neq 50$ .

Montrer que si  $n$  est pair,  $A_n = 0$ , et si  $n$  est impair  $A_n = \frac{-4}{\pi^2} \frac{n^2 + 2500}{(n^2 - 2500)^2}$ .

3) Quel est le pourcentage de la puissance moyenne de  $y(t)$  contenu dans

- le fondamental ?
- l'harmonique d'ordre 50 ?
- l'ensemble des harmoniques d'ordre 49, 50 et 51 ?

4) Soit  $f(t)$  la fonction définie sur  $[0; 2500[ \cup ]2500; +\infty[$  par l'expression  $f(t) = \frac{t + 2500}{(t - 2500)^2}$ .

- Faire le tableau de variations de  $f(t)$ .
- En déduire que l'harmonique de  $y(t)$  de plus grande amplitude est la cinquantième.
- Que peut-on en déduire pour l'allure du spectre d'amplitude de  $y(t)$  ?

### Exercice 13

On considère le signal carré  $x(t)$   $2\pi$ -périodique défini sur l'intervalle  $[0, \pi[$  par  $x(t) = 1$  et sur l'intervalle  $[\pi, 2\pi[$  par  $x(t) = -1$ .

On définit  $S(x)(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$  sa série de Fourier.

1)

- Prouver que  $\omega = 1$ .
- Le signal  $x(t)$  est-il pair ? Impair ?
- Expliquer pourquoi  $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = 0$ .
- Donner les valeurs numériques de  $S(x)\left(\frac{\pi}{3}\right)$  et de  $S(x)(\pi)$ .

2) Montrer que la puissance moyenne  $\langle x^2(t) \rangle$  est égale à 1.

On admet à partir de maintenant que  $B_n = 0$  si  $n$  est pair et que  $B_n = \frac{4}{n\pi}$  si  $n$  est impair.

On définit un taux de distorsion harmonique d'un signal périodique  $z(t)$  de série de Fourier

$S(z)(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$  par la quantité  $\tau(z) = \frac{\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} A_n^2 + B_n^2}{\langle z^2(t) \rangle}$ . Cette quantité

représente le rapport entre la puissance moyenne transmise par les harmoniques d'ordre supérieur ou égal à 2 et la puissance moyenne totale du signal.

3) Le but de cette question est de calculer le taux de distorsion harmonique du signal  $x(t)$  introduit au début de l'énoncé.

- a) Calculer la puissance moyenne du fondamental de  $x(t)$ .
- b) A l'aide du théorème de Parseval, en déduire que  $\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} B_n^2 = 1 - \frac{8}{\pi^2}$ . En déduire une valeur approchée à 0,01 près de  $\tau(x)$ .

On définit maintenant le signal  $y(t) = \sin(10t)x(t)$  (signal obtenu à partir de  $x(t)$  par *modulation d'amplitude*). On admet que  $y(t)$  est  $2\pi$ -périodique. Soit

$$S(y)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \text{ sa série de Fourier.}$$

4)

- a) Montrer que  $y(t)$  est paire. Que peut-on en déduire sur les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  ?
- b) Prouver que  $\langle y(t) \rangle = \frac{1}{2} B_{10} = 0$  (on rappelle que  $A_n$  et  $B_n$  sont les coefficients de Fourier du signal  $x(t)$ .)
- c) Vérifier que la puissance moyenne  $\langle y^2(t) \rangle$  est égale à  $\frac{1}{2}$ .
- d) En utilisant la formule  $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$ , démontrer que

$$a_1 = \frac{1}{2}(B_9 + B_{11})$$

En déduire que  $a_1 = \frac{40}{99\pi}$ .

- e) Calculer alors la valeur exacte de  $\tau(y)$ . Quelle remarque peut-on faire (comparer avec le résultat du 3)b) ?

5)

- a) En s'inspirant de la méthode utilisée à la question 4)d), prouver que  $a_9 = \frac{40}{19\pi}$  et que  $a_{11} = \frac{-40}{21\pi}$ .
- b) Montrer alors que plus de 81% de la puissance moyenne de  $y(t)$  est contenue dans les seules harmoniques d'ordre 9 et 11.

**(\*) Exercice 14 (fonction d'auto-corrélation)**

Étant donné un signal  $t \rightarrow x(t)$  à valeurs réelles, continu par morceaux et  $T$ -périodique, on appelle

fonction d'auto-corrélation associée à  $x$  la fonction  $R_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T x(s)x(t+s) ds$ .

- 1) a) Montrer que la fonction  $R_x(t)$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .
- b) Montrer que  $R_x(t)$  est une fonction  $T$ -périodique.
- c) Par le changement de variables  $\sigma = s+t$  dans l'intégrale de la définition de  $R_x(t)$ , montrer que  $R_x(t)$  est une fonction paire.

- 2) Déterminer une expression de  $R_x(t)$  dans le cas où  $x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$  avec  $A > 0$  et  $\varphi \in \mathbb{R}$ .
- 3) On considère le cas général où le développement en série de Fourier de  $t \rightarrow x(t)$  est donné par  $S(x)(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$  avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .
- a) On fixe  $t \in \mathbb{R}$ . Déterminer les développements en série de Fourier des signaux  $s \rightarrow x(s+t)$  et  $s \rightarrow x(s+t) + x(s)$ .
- b) Prouver que  $R_x(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} \int_0^T (x(s) + x(t+s))^2 ds - \frac{1}{T} \int_0^T x^2(s) ds - \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t+s) ds \right)$ .
- c) En déduire à l'aide du Théorème de Parseval que  $\forall t \in \mathbb{R}, R_x(t) = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^2 + B_n^2) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)$ .
- 4) Prouver que la valeur maximale de la fonction  $t \rightarrow R_x(t)$  vaut  $\langle x^2(t) \rangle$  et est atteinte pour les valeurs de  $t$  multiples de  $T$ .

**(\*) Exercice 15 (intégrale d'un signal périodique amorti)**

Soient  $p > 0$  et un signal  $t \rightarrow f(t)$ , continu par morceaux et  $T$ -périodique. On considère son développement en série de Fourier complexe  $S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$  avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de  $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$  à l'aide des  $C_n$ .

- 1) Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$  est absolument convergente (on pourra utiliser le Théorème 2 du chapitre des fonctions élémentaires).
- 2) a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a  $\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-pt} f(t) dt = e^{-nT} \cdot \int_0^T e^{-pt} f(t) dt$  (on pourra faire un changement de variable dans la première intégrale).
- b) En déduire que l'on a  $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-T}} \cdot \int_0^T e^{-pt} f(t) dt$ .
- 3) On considère le signal  $x$   $T$ -périodique défini sur  $[0; T[$  par l'expression  $x(t) = e^{-pt}$ . Déterminer une expression de sa série de Fourier complexe  $S(x)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{jn\omega t}$  en explicitant une expression de  $\gamma_n$  (on pose  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ).
- 4) Montrer que  $\int_0^T e^{-pt} f(t) dt = \frac{T}{2} \left( \langle (x(t) + f(t))^2 \rangle - \langle x^2(t) \rangle - \langle f^2(t) \rangle \right)$ .
- 5) Déduire du Théorème de Parseval que  $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{C_n}{p - jn\omega}$ .

**(\*\*) Exercice 16**

Un solide ponctuel M se déplace sur un axe gradué, et est situé au point d'abscisse  $x(t)$  à l'instant  $t$ . On rappelle que la fonction  $t \rightarrow x(t)$  est dérivable, et sa dérivée  $v(t) = x'(t)$  représente la vitesse instantanée du solide. On suppose aussi que la fonction vitesse  $t \rightarrow v(t)$  est dérivable par morceaux: sa dérivée étant l'accélération instantanée du solide est supposée continue par morceaux.

Dans tout cet exercice, on suppose que  $t \in [0; T]$  où  $T > 0$  est fixé (c'est la durée du trajet).

On suppose que le solide se déplace entre les instants  $t=0$  et  $t=T$ , et démarre et s'arrête avec une vitesse nulle, c'est à dire que :

(1)  $v(0) = v(T) = 0$ .

On suppose aussi que le solide est à l'origine à l'instant  $t=0$  et s'arrête au point d'abscisse  $a$  à l'instant  $t=T$  (où  $a$  est un nombre fixé à l'avance) ce qui signifie que :

(2)  $x(0) = 0$  et  $x(T) = a$ .

On considère  $f$  la fonction T-périodique sur  $\mathbb{R}$  définie par  $f(t) = v(t)$ ,  $\forall t \in [0; T[$ .

**Partie 1 : développement en série de Fourier de la fonction  $f$**

1) Montrer que la fonction  $f$  est continue et dérivable par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$  le développement en série de Fourier de la fonction  $f$ .

2) Montrer que  $A_0 = \frac{a}{T}$ .

3) En considérant la valeur  $t=0$  et en appliquant le Théorème de Dirichlet, prouver que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n = \frac{-a}{T}.$$

**Partie 2 : Énergie cinétique moyenne minimale**

On définit :

l'énergie cinétique du solide à l'instant  $t$  par la relation  $E(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2$

l'énergie cinétique moyenne du solide sur l'intervalle  $[0; T]$  par la relation  $\langle E \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt$ .

Le but de cette partie est de trouver quelle énergie cinétique moyenne minimale est nécessaire pour un parcours vérifiant les conditions (1) et (2) données dans l'énoncé

4)

a) A l'aide du Théorème de Parseval, montrer que  $\langle E \rangle \geq \frac{m a^2}{2T^2}$ .

b) Montrer qu'en fait l'inégalité ci-dessus est stricte, c'est à dire que  $\langle E \rangle > \frac{m a^2}{2T^2}$ .

**Remarque :** l'inégalité ci-dessus peut se réécrire  $\langle E \rangle > \frac{1}{2} m \langle v \rangle^2$  où  $\langle v \rangle = \frac{a}{T}$  est la vitesse moyenne du solide sur l'intervalle de temps  $[0; T]$ .



5) Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . On considère la fonction

$$x_N(t) = \frac{a}{T} \left( t - \frac{T}{2\pi N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right), \quad t \in [0; T].$$

a) Montrer que la fonction  $x_N(t)$  vérifie bien les propriétés (1) et (2).

b) Montrer que  $\langle E_N \rangle = \frac{m a^2}{2T^2} \left( 1 + \frac{1}{2N} \right)$ , où  $\langle E_N \rangle$  est l'énergie cinétique moyenne du solide sur l'intervalle  $[0; T]$  dans le cas où  $x(t) = x_N(t)$ .

c) En faisant tendre  $N$  vers l'infini, montrer que la constante  $\frac{m a^2}{2T^2}$  est optimale dans l'inégalité

$$\langle E \rangle > \frac{m a^2}{2T^2}. \text{ Autrement dit, on peut trouver une fonction } x(t) \text{ vérifiant les propriétés (1) et}$$

(2) et telle que l'énergie cinétique moyenne associée soit aussi proche que l'on veut de  $\frac{m a^2}{2T^2}$ .

### Partie 3 : valeur efficace minimale de l'accélération .

On définit la valeur efficace de l'accélération instantanée par la quantité :

$$\sqrt{\langle a^2(t) \rangle} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{dv}{dt}(t) \right)^2 dt}. \text{ On cherche à savoir la valeur efficace minimale de l'accélération}$$

instantanée pour les fonctions  $x(t)$  vérifiant les propriétés (1) et (2), et quelles sont les fonctions

$x(t)$  pour lesquelles cette valeur minimale se réalise (s'il y en a ! On a vu dans la partie B que ce n'est pas le cas pour l'énergie cinétique moyenne minimale)

6) **Un développement en série de Fourier utile.**

On considère la fonction  $y(t)$   $2\pi$ -périodique et impaire telle que

$$\forall t \in [0; \pi], y(t) = \frac{\pi - t}{2}. \text{ Soit } Y(t) \text{ la pseudo-primitive de } y(t) \text{ telle que } Y(0) = 0.$$

a) Représenter graphiquement la fonction  $y$  sur l'intervalle  $[-2\pi; 4\pi]$ .

b) Montrer que le développement en série de Fourier réel de la fonction  $y(t)$  est donné par

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(nt) \text{ (on pourra faire une intégration par parties).}$$

c) Montrer que  $Y(t)$  est  $2\pi$ -périodique et paire. Trouver une expression de  $Y(t)$  sur l'intervalle  $[0; \pi]$ .

d) Montrer que le développement en série de Fourier réel de la fonction  $Y(t)$  est de la forme

$$\Sigma(t) = A - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nt) \text{ où } A \text{ est une constante réelle.}$$

e) Montrer que  $A = \frac{\pi^2}{6}$ .

f) Démontrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

7) Dédurre de la question précédente l'expression de la fonction  $T$ -périodique  $v_0(t)$  dont le

développement en série de Fourier est donné par  $S(v_0)(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$  (on donnera son

expression sur l'intervalle  $[0; \frac{T}{2}]$ , sur  $[-\frac{T}{2}; 0]$  puis sur  $[\frac{T}{2}; T]$ . Vérifier que  $v_0(t)$  coïncide avec un polynôme du second degré sur tout l'intervalle  $[0; T]$

8) **Inégalité de Cauchy-Schwartz**

Le but de cette question est d'établir une inégalité très connue (« Inégalité de Cauchy-Schwartz ») qui va permettre de résoudre directement le problème posé en préambule de la partie 3 de cet exercice.

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  et soient  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_N)$  deux suites finies de  $N$  nombres réels.

On considère la fonction  $P(t) = \sum_{n=1}^N (x_n - t y_n)^2$ . On suppose que les réels  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  ne sont pas tous nuls.

a) Montrer que  $P(t)$  est un polynôme du second degré.

b) Montrer que son discriminant vaut  $\Delta = 4 \left( \left( \sum_{n=1}^N x_n y_n \right)^2 - \left( \sum_{n=1}^N x_n^2 \right) \left( \sum_{n=1}^N y_n^2 \right) \right)$ .

c) Dédurre des questions précédentes l'inégalité  $\left( \sum_{n=1}^N x_n y_n \right)^2 \leq \left( \sum_{n=1}^N x_n^2 \right) \left( \sum_{n=1}^N y_n^2 \right)$  et vérifier que l'égalité n'a lieu que si les  $N$ -uplets  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_N)$  sont proportionnels.

On considère maintenant une fonction  $x(t)$  vérifiant les hypothèses énoncées au début de l'exercice. On conserve toutes les notations précédentes.

9) Montrer que  $\sqrt{\langle a^2(t) \rangle} = \frac{\pi}{T} \sqrt{2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (A_n^2 + B_n^2)}$ .

10)

a) A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, prouver que pour tout entier naturel  $N$  non nul on a

$$\left( \sum_{n=1}^N A_n \right)^2 \leq \left( \sum_{n=1}^N n^2 A_n^2 \right) \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right).$$

b) En déduire que  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 A_n^2 \geq \frac{6 a^2}{\pi^2 T^2}$  et que  $\sqrt{\langle a^2(t) \rangle} \geq \frac{2\sqrt{3} a}{T^2}$

11) L'objectif de cette question est de montrer que la valeur  $\frac{2\sqrt{3} a}{T^2}$  obtenue dans l'inégalité

$$\sqrt{\langle a^2(t) \rangle} \geq \frac{2\sqrt{3} a}{T^2} \text{ est optimale et que l'égalité } \sqrt{\langle a^2(t) \rangle} = \frac{2\sqrt{3} a}{T^2} \text{ est possible pour une}$$

certaine fonction  $x(t)$ .

On considère la fonction  $x(t)$  définie sur l'intervalle  $[0; T]$  par l'expression

$$x(t) = a \left( 3 \left( \frac{t}{T} \right)^2 - 2 \left( \frac{t}{T} \right)^3 \right).$$

a) Vérifier que la fonction  $x$  est deux fois dérivable sur  $[0; T]$  et vérifie les propriétés (1) et (2).

b) Montrer que  $v(t) \stackrel{\text{def}}{=} x'(t) = \frac{a}{T} \left( 1 - \frac{6}{\pi^2} v_0(t) \right)$ .

c) Montrer que  $\sqrt{\langle a^2(t) \rangle} = \frac{2\sqrt{3} a}{T^2}$  et conclure.

**(\*) Exercice 17 (Un théorème de factorisation des polynômes trigonométriques réels).**

On considère un polynôme trigonométrique réel  $x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$  avec

$N \in \mathbb{N}^*$   $A_i, B_i \in \mathbb{R}$  et  $(A_N, B_N) \neq (0, 0)$ . Soit  $x(t) = \sum_{n=-N}^N C_n e^{jn\omega t}$  son écriture complexe.

On appellera ici polynôme trigonométrique réel de degré 1 une fonction  $y$  admettant une expression de la forme  $x(t) = a + b \cos(\omega t) + c \sin(\omega t)$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

- 1) Montrer qu'il existe un polynôme  $A \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $2N$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = e^{-jN\omega t} A(e^{j\omega t})$ . Exprimer  $A(X)$  à l'aide des coefficients  $c_n$ .
- 2) Montrer que  $\forall z \in \mathbb{C}^*, \bar{z}^{2N} A\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \overline{A(z)}$
- 3) Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  une racine de  $A(X)$ .
  - a) Montrer que  $z_0 \neq 0$ .
  - b) Dans cette question on suppose que  $|z_0| \neq 1$ . Soit  $m$  l'ordre de la racine  $z_0$ . Démontrer que  $\frac{1}{\bar{z}_0}$  est une racine d'ordre  $m$  de  $A(X)$ .
- 4) Montrer que le polynôme  $A(X)$  possède un nombre pair (éventuellement égal à 0) de racines de module 1.
- 5) Dédurre des questions précédentes que  $A(X)$  est, au coefficient  $C_N$  près, produit de  $N$  facteurs d'une des deux formes suivantes :
  - (i)  $X^2 - (e^{j\theta} + e^{j\varphi})X + e^{j(\theta+\varphi)}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}$ .
  - (ii)  $X^2 - \frac{1+|z_i|^2}{\bar{z}_i}X + \frac{z_i}{\bar{z}_i}$  avec  $z_i \in \mathbb{C}, |z_i| \neq 1$ .
- 6) a) Montrer que la fonction  $t \rightarrow e^{j\omega t} - (e^{j\theta} + e^{j\varphi}) + e^{j(\theta+\varphi)} e^{-j\omega t}$  est, à un coefficient complexe multiplicatif près, un polynôme trigonométrique réel de degré 1.  
 b) Même question pour la fonction  $t \rightarrow e^{j\omega t} - \frac{1+|z_i|^2}{\bar{z}_i} + \frac{z_i}{\bar{z}_i} e^{-j\omega t}$  avec  $z_i \in \mathbb{C}, |z_i| \neq 1$ .
- 7) En déduire la propriété suivante : tout polynôme trigonométrique réel de degré  $N$  peut s'écrire comme produit de  $N$  polynômes trigonométriques réel de degré 1.

**(\*) Exercice 18 (polynômes trigonométriques réels généralisés).**

Soit  $N$  réels strictement positifs  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$ . On considère la fonction

$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t)$ , appelée polynôme trigonométrique réel généralisé (PTRG), avec

$N \in \mathbb{N}^*$   $A_i, B_i \in \mathbb{R}$  et  $(A_N, B_N) \neq (0, 0)$ .

- 1) Montrer (à partir de la définition du cours) qu'un polynôme trigonométrique réel est un polynôme trigonométrique réel généralisé particulier.
- 2) Dans cette question, on considère le PTRG  $x(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{2}.t)$ .
  - a) En utilisant le fait que  $\sqrt{2}$  est irrationnel (c'est à dire ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction  $\frac{p}{q}$  avec  $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$ ), montrer que  $t=0$  est la seule solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $x(t) = 2$ .
  - b) En déduire que  $t \rightarrow x(t)$  n'est pas une fonction périodique (ce qui montre qu'un PTRG n'est pas nécessairement une fonction périodique).

c) Toujours en utilisant le fait que  $\sqrt{2}$  est irrationnel, montrer que l'équation  $x(t) = -2$  n'a pas de solution.

d) Dans cette question, on va montrer qu'il existe une suite de réels  $(t_n)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n) = -2. \text{ On rappelle la relation : } \forall t \neq 1, \forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + t + t^2 + \dots + t^n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}. \text{ On}$$

note enfin  $E$  l'ensemble des réels de la forme  $a + b\sqrt{2}$  avec  $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ .

(i) A l'aide d'un calcul de dérivée, démontrer que

$$\forall t \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{t}{(1-t)^2} = t + 2t^2 + \dots + nt^n + \frac{t^{n+1}}{(1-t)^2} ((n+1) - nt).$$

On pose  $t_0 = 1 - \sqrt{2}$ .

(ii) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, t_0^n \in E$ .

(iii) Dédurre des questions précédentes qu'il existe deux suites d'entiers relatifs  $(a_n)$  et  $(b_n)$

telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n \sqrt{2}) = \frac{1}{2} t_0$ .

(iv) Prouver que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x((1 + 2b_n)\pi) = -2$ .

3) On revient au cas général.

a) Montrer que  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} x(t) dt = A_0$ .

b) Démontrer une formule similaire permettant de calculer  $A_n$  et  $B_n$  pour  $n \geq 1$ .

c) Déterminer une écriture de  $x(t)$  sous la forme  $x(t) = \sum_{n=-N}^N C_n e^{i\lambda_n t}$  et exprimer les  $C_n$  en fonction des  $A_n$  et  $B_n$ .

d) Prouver la formule de Parseval généralisée aux PTRG :  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} x^2(t) dt = A_0^2 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2 + B_n^2}{2}$ .

4) Dans cette question, on suppose que  $A_0 = 0$ . On veut montrer par l'absurde que l'équation

$x(t) = 0$  possède une infinité de solutions sur  $\mathbb{R}$ . Supposons donc que ce n'est pas le cas.

a) Montrer qu'il existe alors  $T_0 \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall T > T_0, x(t) \neq 0$ .

b) Montrer qu'il existe un PTRG  $X$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = x(t)$  et

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} X(t) dt = 0. \text{ En donner une expression.}$$

c) Prouver que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t)$  existe et est finie.

Soit  $l = \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t)$  et  $\varepsilon > 0$ . On a donc aussi  $l^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} X^2(t)$  et il existe donc  $T_1 \in \mathbb{R}$  tel

que  $\forall t \geq T_1, l - \varepsilon \leq X(t) \leq l + \varepsilon$  et  $\forall t \geq T_1, l^2 - \varepsilon \leq X^2(t) \leq l^2 + \varepsilon$

d) A l'aide des résultats du 3), montrer que  $l^2 \leq \varepsilon^2$  et que  $l^2 \geq \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2 + B_n^2}{2\lambda_n^2} - \varepsilon$ .

e) Aboutir alors à une contradiction.

## VI) Corrigés

### Exercice 1.

On considère les fonctions  $\varphi: a \rightarrow \int_a^{T+a} x(t) dt$  et  $\psi: a \rightarrow \int_0^a x(t) dt$ .

Par hypothèse sur  $x(t)$ , on a  $\forall a \in \mathbb{R}, \varphi(a) = \int_a^{T+a} x(t) dt = 0$

Puisque  $x(t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $\psi$  est une primitive de  $x(t)$  donc puisque  $\forall a \in \mathbb{R}, 0 = \varphi(a) = \psi(T+a) - \psi(a)$ , on obtient par dérivation de cette relation :  $\forall a \in \mathbb{R}, 0 = x(T+a) - x(a)$  ce qui signifie que le signal  $x(t)$  est T-périodique.

### Exercice 2.

1)

a) On a  $f(t) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos(8t)$ . C'est un polynôme trigonométrique de période  $T = \frac{\pi}{4}$ .

b)  $A_0 = \frac{3}{2}, A_1 = \frac{3}{2}$  et les autres coefficients réels sont nuls. On a :  $C_0 = \frac{3}{2}, C_1 = \frac{3}{4}, C_{-1} = \frac{3}{4}$  et les autres coefficients complexes sont nuls.

c)  $\langle f \rangle = \frac{3}{2}, \langle f^2 \rangle = \frac{27}{8}$ .

2)

a) On a :

$$f(t) = \frac{1}{8j} (e^{4jt} - e^{-4jt})(e^{12jt} + 2 + e^{-12jt}) = \frac{1}{8j} (e^{16jt} - e^{-16jt} - (e^{8jt} - e^{-8jt}) + 2(e^{4jt} - e^{-4jt}))$$

$$= \frac{1}{2} \sin(4t) - \frac{1}{4} \sin(8t) + \frac{1}{4} \sin(16t).$$

C'est un polynôme trigonométrique de période  $T = \frac{\pi}{2}$ .

b)  $B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = -\frac{1}{4}, B_4 = \frac{1}{4}$  et les autres coefficients réels sont nuls. On a :

$C_1 = \frac{-j}{4}, C_2 = \frac{j}{8}, C_4 = \frac{-j}{8}, C_{-1} = \frac{j}{4}, C_{-2} = \frac{-j}{8}, C_{-4} = \frac{j}{8}$  et les autres coefficients complexes sont nuls.

c)  $\langle f \rangle = 0, \langle f^2 \rangle = \frac{3}{16}$ .

3)

a) On a  $f(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi t + \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \sin(2\pi t) \cos(\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) \sin(\frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{3})$

donc  $f(t) = \frac{-\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos(2\pi t) + \frac{1}{4} \sin(2\pi t)$ .

C'est un polynôme trigonométrique de période  $T = 1$ .

b)  $A_0 = \frac{-\sqrt{3}}{4}, A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}, B_1 = \frac{1}{4}$  et les autres coefficients réels sont nuls. On a :

$C_0 = \frac{-\sqrt{3}}{4}, C_1 = \frac{1}{8}(\sqrt{3} - j), C_{-1} = C_1 = \frac{1}{8}(\sqrt{3} + j)$  et les autres coefficients complexes sont nuls.

$$c) \langle f \rangle = \frac{-\sqrt{3}}{4}, \quad \langle f^2 \rangle = \frac{5}{16}.$$

### Exercice 3.

1) En utilisant les formules habituelles de linéarisation de formules trigonométriques, on obtient à partir des formules du cours (et après quelques calculs...) :

$$SF(x)(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(t) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nt)}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Pour la puissance moyenne, mieux vaut revenir à sa définition :

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(t) dt = \frac{1}{4}.$$

2) On calcule la puissance moyenne de :

$$\text{la valeur moyenne } t \rightarrow \frac{1}{\pi}$$

$$\text{la valeur moyenne + } H_1(t) : t \rightarrow \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(t)$$

$$\text{la valeur moyenne + } H_1(t) + H_2(t) : t \rightarrow \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(t) - \frac{2}{3\pi} \cos(2t)$$

[...]

jusqu'à dépasser 95% de 0,25, c'est à dire 0,2375. Le Théorème de Parseval assure qu'en prenant suffisamment d'harmoniques, on pourra dépasser ce seuil.

Après application numérique, on trouve qu'il suffit de considérer  $t \rightarrow \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(t) - \frac{2}{3\pi} \cos(2t)$  dont la

$$\text{puissance moyenne vaut } \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{8} + \frac{2}{9\pi^2} = \frac{11}{9\pi^2} + \frac{1}{8} \sim 0,2488 > 0,2375.$$

### Exercice 4.

On a (voir exercice précédent)  $SF(x)(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(t) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nt)}{(2n-1)(2n+1)}$  donc

$$SF(x(t + \pi))(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(t + \pi) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n(t + \pi))}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \sin(t) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nt)}{(2n-1)(2n+1)}$$

ce qui donne en remarquant que  $y(t) = x(t) + x(t + \pi)$ :

$$SF(y)(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nt)}{(2n-1)(2n+1)}.$$

$$\text{La puissance moyenne vaut } \langle y^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \frac{1}{2}.$$

On calcule la puissance moyenne de :

$$\text{la valeur moyenne } t \rightarrow \frac{2}{\pi}$$

$$\text{la valeur moyenne + } H_2(t) : t \rightarrow \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cos(2t)$$

$$\text{la valeur moyenne + } H_2(t) + H_4(t) : t \rightarrow \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cos(2t) - \frac{4}{15\pi} \cos(4t)$$

[...]

jusqu'à dépasser 95% de 0,5, c'est à dire 0,475.

Après application numérique, on trouve qu'il suffit de considérer  $t \rightarrow \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cos(2t)$  dont la puissance

moyenne vaut  $\frac{44}{9\pi^2} \sim 0,4953 > 0,475$ .

### Exercice 5.

1) On obtient à partir des formules du cours :

$$S(x)(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin(n\pi t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin(\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t) + \frac{1}{5} \sin(5\pi t) + \dots \right).$$

2) La puissance moyenne du signal vaut  $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 1 dt = 1$ .

Celle de la première harmonique vaut  $\frac{8}{\pi^2}$  ce qui fait environ 81% de la puissance moyenne du signal entier.

3)

$$\text{a) On a } y(t) = \lambda + \mu x(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = a \\ \lambda - \mu = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{a+b}{2} \\ \mu = \frac{a-b}{2} \end{cases}.$$

$$\text{b) On a } S(y)(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin(n\pi t).$$

4)

a) En revenant à la définition, on trouve  $\langle z \rangle = 1$ .

b) La fonction  $z(t)$  est continue et dérivable par morceaux (dérivable en toute valeur non entière) de pseudo-dérivée  $-x(t)$ . En intégrant le développement en série de Fourier de  $-x(t)$ , on trouve

$$\begin{aligned} S(z)(t) &= \langle z \rangle + \frac{4}{\pi^2} \left( \cos(\pi t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\pi t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\pi t) + \dots \right) \\ &= 1 + \frac{4}{\pi^2} \left( \cos(\pi t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\pi t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\pi t) + \dots \right). \end{aligned}$$

### Exercice 6.

1) En utilisant les formules habituelles de linéarisation de formules trigonométriques, on obtient à partir des formules du cours (et après quelques calculs...) :

$$SF(x)(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(\pi n t)}{n}.$$

2) On a  $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$  et, par Parseval :

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

On en déduit que  $\frac{1}{3} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  donc  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**Exercice 7.**

1) On a :

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jnt} x(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-jn)t} dt = \frac{1}{2\pi(1-jn)} [e^{(1-jn)t}]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi(1-jn)} (e^{\pi} e^{jn\pi} - e^{-\pi} e^{-jn\pi}).$$

On remarque que  $e^{jn\pi} = e^{-jn\pi} = (-1)^n$  donc le calcul précédent donne :

$$C_n = \frac{(-1)^n}{2\pi(1-jn)} (e^{\pi} - e^{-\pi}), \text{ ce qu'il fallait démontrer.}$$

On a ainsi  $C_n = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \frac{(-1)^n}{1-jn}$

On a

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jnt} x(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-jn)t} dt = \frac{1}{2\pi(1-jn)} [e^{(1-jn)t}]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi(1-jn)} (e^{\pi} e^{jn\pi} - e^{-\pi} e^{-jn\pi}).$$

On remarque que  $e^{jn\pi} = e^{-jn\pi} = (-1)^n$  donc le calcul précédent donne :

$$C_n = \frac{(-1)^n}{2\pi(1-jn)} (e^{\pi} - e^{-\pi}), \text{ ce qu'il fallait démontrer.}$$

On a ainsi  $SF(x)(t) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-jn} e^{jnt}$ .

2) Considérons la série réelle associée à  $x(t)$  :  $S(x)(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)$

On a  $A_0 = C_0$  ,  $\forall n \geq 1, A_n = 2 \operatorname{Re}(C_n)$  et  $B_n = -2 \operatorname{Im}(C_n)$ .

Puisque  $\forall n \geq 1, \frac{1}{1-jn} = \frac{1}{1+n^2} + j \frac{n}{1+n^2}$  on a donc :

$$A_0 = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}, \text{ et } \forall n \geq 1, A_n = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \text{ et } \forall n \geq 1, B_n = -\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \frac{n \cdot (-1)^n}{1+n^2}.$$

3) La fonction  $t \rightarrow x(t)$  est continûment dérivable par morceaux sur  $[-\pi; \pi[$  donc, en appliquant le Théorème de Dirichlet à  $t = \pi$ , on a la convergence de la série

$$S(x)(\pi) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\pi) + B_n \sin(n\pi) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n A_n \text{ vers}$$

$$\frac{1}{2} (x(\pi_0^-) + x(\pi_0^+)) = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2}.$$

On a donc  $\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n A_n = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} \right)$ .

On en déduit que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2} \left( \pi \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - 1 \right)$ .

**Exercice 8 (lissage)**

**Partie A : développement en série de Fourier de la sortie.**

1) On a (propriété 5)  $SF(y')(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\omega B_n \cos(n\omega t) - n\omega A_n \sin(n\omega t)$  donc, grâce à l'équation différentielle :



$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = SF(x)(t) = SF(\tau y' + y)(t)$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n + \tau n \omega B_n) \cos(n\omega t) + (B_n - n \tau \omega A_n) \sin(n\omega t)$$

et on obtient les relations demandées en identifiant les deux séries de Fourier.

2) Par développement du produit,

$$\forall n \geq 1, (A_n + j B_n)(1 - j n \tau \omega) = (A_n + n \tau \omega B_n) + j(B_n - n \tau \omega A_n),$$

ce qui donne  $a_n + j b_n$  par la question précédente.

3) On a donc :

$$\forall n \geq 1, A_n + j B_n = \frac{a_n + j b_n}{1 - j n \tau \omega} = \frac{(a_n + j b_n)(1 + j n \tau \omega)}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} = \frac{a_n - n \tau \omega b_n}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} + j \frac{b_n + n \tau \omega a_n}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2}$$

$$\text{d'où l'on déduit } \forall n \geq 1, A_n = \frac{a_n - n \tau \omega b_n}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} \text{ et } B_n = \frac{b_n + n \tau \omega a_n}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2}.$$

4) En calculant les carrés des modules des deux membres de la relation :

$$\forall n \geq 1, (A_n + j B_n)(1 - j n \tau \omega) = a_n + j b_n,$$

il vient

$$\forall n \geq 1, (A_n^2 + B_n^2)(1 + n^2 \tau^2 \omega^2) = a_n^2 + b_n^2$$

ce qui donne la relation demandée.

### Partie B : calcul de la variance du signal de sortie

5) Puisque  $n \geq 1$ , on a  $1 + n^2 \tau^2 \omega^2 \geq 1 + \tau^2 \omega^2$  donc  $\frac{1}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} \leq \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2}$ .

6) On a donc  $\forall n \geq 1, A_n^2 + B_n^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} \leq \frac{a_n^2 + b_n^2}{1 + \tau^2 \omega^2}$  donc par sommation :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^2 + B_n^2) \leq \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

7) a) Le Théorème de Parseval montre se reformule en disant que  $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

d'où l'égalité demandée.

b) En développant le carré, on obtient :

$$\frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \langle x \rangle)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (x^2(t) - 2 \langle x \rangle x(t) + \langle x \rangle^2) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt - 2 \langle x \rangle \cdot \frac{1}{T} \int_0^T (x(t)) dt + \frac{1}{T} \int_0^T (\langle x \rangle^2) dt$$

$$= \langle x^2 \rangle - 2 \langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = V(x).$$

**Remarque :** on retrouve une définition très similaire à celle de la variance d'une variable aléatoire en statistique : tout comme dans ce dernier cas, la variance d'un signal périodique mesure la valeur moyenne des variations d'un signal autour de sa valeur moyenne. Une variance faible correspond à un signal lissé.

c) Puisque  $V(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$  et, de façon similaire,  $V(y) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^2 + B_n^2)$ , la relation  $\sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^2 + B_n^2) \leq \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$  peut se réécrire :  $V(y) \leq \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2} V(x)$ .

d)

(i) On a  $\langle x \rangle = \frac{1}{\pi}$  et  $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{4}$  (voir les calculs faits dans l'exercice 3)

(ii) On a  $V(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}$ .

(iii) On a  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  donc le résultat du c) donne  $V(y) \leq \frac{T^2}{T^2 + 4\pi^2 \tau^2} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right)$ .

On est sûr que  $V(y) \leq 10^{-3}$  si (condition suffisante)  $\frac{T^2}{T^2 + 4\pi^2 \tau^2} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right) \leq 10^{-3}$  ce qui donne

$$\frac{\tau}{T} > \frac{1}{2\pi} \sqrt{100 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right) - 1} \sim 1,934 \quad (\text{remarquer que cette valeur numérique est indépendante de } T).$$

### Partie C : lissage uniforme

8)

a) On a  $P(t) = \sum_{n=1}^N (x_n - t y_n)^2 = t^2 \sum_{n=1}^N y_n^2 - 2t \sum_{n=1}^N x_n y_n + \sum_{n=1}^N x_n^2 = at^2 + bt + c$

avec  $a = \sum_{n=1}^N y_n^2 \neq 0$  car les réels  $(y_1, y_2, \dots, y_N)$  ne sont pas tous nuls.

b)  $\Delta = b^2 - 4ac = 4 \left( \left( \sum_{n=1}^N x_n y_n \right)^2 - \left( \sum_{n=1}^N x_n^2 \right) \left( \sum_{n=1}^N y_n^2 \right) \right)$  avec les expressions de  $a$ ,  $b$  et  $c$  trouvées précédemment.

c) De par l'expression  $P(t) = \sum_{n=1}^N (x_n - t y_n)^2$ , on a  $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) \geq 0$  ce qui ne peut se

produire que si  $\Delta \leq 0$ , cette dernière inégalité étant équivalente à  $\left( \sum_{n=1}^N x_n y_n \right)^2 \leq \left( \sum_{n=1}^N x_n^2 \right) \left( \sum_{n=1}^N y_n^2 \right)$ .

S'il on a l'égalité  $\left( \sum_{n=1}^N x_n y_n \right)^2 = \left( \sum_{n=1}^N x_n^2 \right) \left( \sum_{n=1}^N y_n^2 \right)$  c'est que  $\Delta = 0$  et dans ce cas,

$\exists! t_0 \in \mathbb{R}$  tq  $P(t_0) = 0$ , c'est à dire  $\sum_{n=1}^N (x_n - t_0 y_n)^2 = 0$  donc  $\forall n = 1, 2, \dots, N, x_n = t_0 y_n$  ce qui signifie que les N-uplets  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_N)$  sont proportionnels.

d) Dans ce cas cette inégalité devient l'égalité  $0=0$ .

9)

a) La fonction  $y(t)$  est *a minima* continue et puisque  $x(t)$  est continue par morceaux, la relation

$y'(t) = \frac{1}{\tau}(x(t) - y(t))$  montre que  $y(t)$  est continûment dérivable par morceaux, donc on peut appliquer le Théorème de Dirichlet.

On a  $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = SF(y)(t) = \langle y \rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$

donc

$\forall t \in \mathbb{R}, |y(t) - \langle y \rangle| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$  par calcul de l'amplitude réelle de chaque harmonique, et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, |y(t) - \langle y \rangle| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2}} \text{ par la question 4).}$$

b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, |y(t) - \langle y \rangle|^2 \leq \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2}} \right)^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} = 2V(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2}$$

par la question 7)a).

10)

a) Si  $(n-1)\tau\omega \leq t \leq n\tau\omega$ , alors  $1 + t^2 \leq 1 + n^2 \tau^2 \omega^2$  d'où  $\frac{1}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} \leq \frac{1}{1 + t^2}$

b) L'inégalité précédente donne par intégration :

$$\int_{(n-1)\tau\omega}^{n\tau\omega} \frac{1}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} dt \leq \int_{(n-1)\tau\omega}^{n\tau\omega} \frac{1}{1 + t^2} dt$$

c'est à dire :

$$\frac{\tau\omega}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} \leq \arctan(n\tau\omega) - \arctan((n-1)\tau\omega).$$

c) On a donc  $\forall n \geq 1, \frac{1}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} \leq \frac{1}{\tau\omega} (\arctan(n\tau\omega) - \arctan((n-1)\tau\omega))$

donc, si  $N \geq 1$  :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{\tau\omega} (\arctan(n\tau\omega) - \arctan((n-1)\tau\omega))$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} \leq \frac{1}{\tau\omega} \sum_{n=1}^N (\arctan(n\tau\omega)) - \frac{1}{\tau\omega} \sum_{n=0}^{N-1} (\arctan(n\tau\omega)) = \frac{1}{\tau\omega} \arctan(N\tau\omega) - 0,$$

après simplification des termes télescopiques de la somme.

d) On déduit de la question précédente

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} \leq \frac{1}{\tau\omega} \arctan(N\tau\omega) \leq \frac{\pi}{2\tau\omega}$$

et en faisant  $N \rightarrow +\infty$  :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2 \tau^2 \omega^2} \leq \frac{\pi}{2\tau\omega}.$$

On déduit alors du résultat de la question 9) que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |y(t) - \langle y \rangle|^2 \leq 2V(x) \cdot \frac{\pi}{2\tau\omega} = \frac{\pi V(x)}{\tau\omega} = \frac{TV(x)}{2\tau}$$

11) On a déjà calculé  $V(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}$  donc la relation trouvée à la question précédente donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left| y(t) - \frac{1}{\pi} \right| \leq \sqrt{\frac{T}{\tau}} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{1}{2\pi^2}},$$

donc pour que  $\forall t \in \mathbb{R}, \left| y(t) - \frac{1}{\pi} \right| \leq 10^{-3}$ , il suffit que  $\sqrt{\frac{T}{\tau}} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{1}{2\pi^2}} \leq 10^{-3}$  donc

$$\frac{\tau}{T} \geq 10^6 \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{2\pi^2} \right) \sim 7,4 \cdot 10^4.$$

Pour de telles valeurs de  $\tau$ , on obtient une solution quasi-constante (avec une erreur relative de  $10^{-3}$  près) : puisque les signaux  $x$  et  $y$  ont la même valeur moyenne, on en déduit que le signal  $y$  correspond au signal  $x$  qui a été lissé.

### Exercice 9 (signal avec décroissance exponentielle du spectre d'amplitude).

a) On a 
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} = \frac{1}{1 - \lambda}.$$

b) On a 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n - 1 = \frac{\lambda}{1 - \lambda}$$
 et, en remplaçant  $\lambda$  par  $\lambda^2$ , et remarquant que  $\lambda^2 \in ]0; 1[$ ,

on a 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{2n} = \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2}$$

2) On a par identification avec la série de Fourier de  $x$ ,  $\langle x \rangle = 1$ , et, par le Théorème de Parseval,

$$\langle x^2 \rangle = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{2n} = 1 + \frac{\lambda^2}{2 - 2\lambda^2} = \frac{2 - \lambda^2}{2(1 - \lambda^2)}$$

3) Puisque  $x$  est dérivable à dérivée continue, on peut appliquer le Théorème de Dirichlet qui donne :

$$x(0) = \text{SF}(x)(0) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n = \frac{1}{1 - \lambda}.$$

$$x(\pi) = \text{SF}(x)(\pi) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \cos(n\pi) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-\lambda)^n = 1 - \frac{\lambda}{1 + \lambda} = \frac{1}{1 + \lambda}.$$

4) a) On a 
$$\langle (A_0 + H_1(t))^2 \rangle = 1 + \frac{1}{2} \lambda^2.$$

b) Cette condition équivaut à ce que 
$$\frac{1 + \frac{1}{2} \lambda^2}{2 - \lambda^2} > 0,95 \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{(2 + \lambda^2)(1 - \lambda^2)}{2 - \lambda^2} > 0,95 \quad \text{donc}$$

$$\lambda^4 + 0,05\lambda^2 - 0,1 < 0.$$

On trouve que 
$$\lambda < \sqrt{\frac{\sqrt{161} - 1}{40}} \sim 0,54$$

5) On admettra encore que  $x$  est dérivable, à dérivée continue. On a donc par le Théorème de Dirichlet :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \text{SF}(x)(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \cos(nt), \text{ donc en utilisant l'encadrement}$$

$$\forall n, \forall t, -1 \leq \cos(nt) \leq 1, \text{ il vient :}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \leq x(t) \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, 1 - \frac{\lambda}{1-\lambda} \leq x(t) \leq 1 + \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1-2\lambda}{1-\lambda} \leq x(t) \leq \frac{1}{1-\lambda} .$$

6)

a) On a  $1 = A_0(x) = \frac{1}{2\pi} I_0$  donc  $I_0 = 2\pi$ .

On aussi :

$$\forall n \geq 1, \lambda^n = A_n(x) = \frac{1}{\pi} I_n \text{ donc } \forall n \geq 1, I_n = \pi \lambda^n$$

$$\forall n \geq 1, 0 = B_n(x) = \frac{1}{\pi} J_n \text{ donc } \forall n \geq 1, J_n = 0.$$

b) Puisque le développement en série de Fourier de  $x$  ne fait apparaître que des cosinus, c'est que la fonction  $x$  est paire, donc  $y$  aussi (produit de fonctions paires). On a donc  $\forall n \geq 1, B_n(y) = 0$ .

c) On a  $A_0(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) x(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) x(t) dt = \frac{1}{2} A_1(x)$ .

On a aussi

$$A_1(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) y(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) x(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2t)) x(t) dt \text{ (par linéarisation)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2t) x(t) dt = A_0(x) + \frac{1}{2} A_2(x).$$

d) On a

$$A_n(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt) y(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt) \cos(t) x(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos((n-1)t) + \cos((n+1)t)) x(t) dt \text{ (par linéarisation)}$$

$$= \frac{1}{2} (A_{n-1}(x) + A_{n+1}(x)).$$

Or,  $\frac{1}{2}(A_{n-1}(x) + A_{n+1}(x)) = \frac{1}{2}(\lambda^{n-1} + \lambda^{n+1}) = \frac{1}{2}(\lambda^{-1} + \lambda)\lambda^n = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)A_n(x)$ , d'où l'égalité

$$A_n(y) = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)A_n(x).$$

e) On a d'après les questions b), c) d) :

$$\begin{aligned} \text{SF}(y)(t) &= A_0(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(y) \cos(nt) = A_0(y) + A_1(y) \cos(t) + \sum_{n=2}^{+\infty} A_n(y) \cos(nt) \\ &= \frac{1}{2}A_1(x) + \left(A_0(x) + \frac{1}{2}A_2(x)\right) \cos(t) + \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \sum_{n=2}^{+\infty} A_n(x) \cos(nt) \\ &= \frac{1}{2}\lambda + \left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\right) \cos(t) + \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \sum_{n=2}^{+\infty} A_n(x) \cos(nt) \\ &= \frac{1}{2}\lambda + \left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\right) \cos(t) + \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(x) \cos(nt) - \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\lambda \cos(t) \\ &= \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(x) \cos(nt) = \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \cos(nt) \end{aligned}$$

f) En remarquant que la série de Fourier de  $x(t) - 1$  est  $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \cos(nt)$ , on déduit du e) que les signaux  $2\pi$ -périodiques  $y(t)$  et  $\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)(x(t) - 1)$  ont la même série de Fourier : il sont donc identiques.

g) Le résultat du f) se réécrit  $\forall t \in \mathbb{R}, \cos(t)x(t) = \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)(x(t) - 1)$ . On en déduit que  $\forall t \in \mathbb{R}, \left(\cos(t) - \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\right)x(t) = \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \cos(t) - \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{2} \cos(t) - \frac{1}{2\lambda}$  ce qui donne facilement  $x(t) = \frac{\lambda \cos(t) - 1}{2\lambda \cos(t) - (\lambda^2 + 1)}$ .

h) On a  $x(t) = \varphi(\cos(t))$  où  $\varphi$  est la fonction définie sur  $[-1; 1]$  par  $\varphi(u) = \frac{\lambda u - 1}{2\lambda u - (\lambda^2 + 1)}$ ,

l'unique pôle de cette fraction rationnelle étant  $\frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda}$  n'appartient pas jamais à  $[-1; 1]$  car

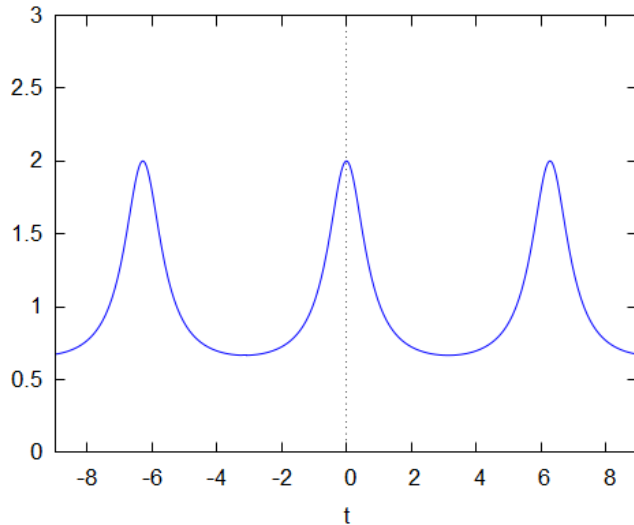
$$\forall \lambda \in ]0; 1[, \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} > 1.$$

On a  $\forall u \in [-1; 1], \varphi'(u) = \frac{\lambda(1 - \lambda^2)}{(2\lambda u - (\lambda^2 + 1))^2} > 0$  car  $\lambda \in ]0; 1[$ , ce qui prouve que  $\varphi$  est une fonction croissante sur  $[-1; 1]$ , donc la fonction  $x$  a les mêmes variations que la fonction  $\cos$ . On a alors :

$t$	0	$\pi$	$2\pi$
$x(t)$	$\frac{1}{1-\lambda}$	$\frac{1}{1+\lambda}$	$\frac{1}{1-\lambda}$

$$x(0) = \varphi(1) = \frac{\lambda-1}{2\lambda-1-\lambda^2} = \frac{1}{1-\lambda} \quad x(\pi) = \varphi(-1) = \frac{-\lambda-1}{-2\lambda-1-\lambda^2} = \frac{1}{1+\lambda}$$

Cas  $\lambda = \frac{1}{2}$  :



### Exercice 10

1) Signal à puissance moyenne finie et à énergie infinie (c'est un polynôme trigonométrique).

2)  $\omega = \frac{\pi}{3}$  et  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 6$ .

3)  $\langle x \rangle = 2$ .

4) On a 3 harmoniques :

$$H_2(t) = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right), \quad H_3(t) = 2 \cos(\pi t) \quad \text{et} \quad H_5(t) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}t\right).$$

5) a)  $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{6} \int_0^6 x^2(t) dt$

b) Par le Théorème de Parseval, on a  $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{6} \int_0^6 x^2(t) dt = 4 + \frac{1}{2}(3^2 + 2^2 + 1) = 11$

6) On a  $(D_n)_{n \geq 1} = (3; 2; 1; 0; 0; \dots)$

### Exercice 11

1) a)  $A_0$  est la valeur moyenne du signal, et le résultat devient immédiat

b)  $\omega = \pi$ .

c) Signal ni pair ni impair.

d) Par le Théorème de Dirichlet,  $SF(x)(t) = x(t)$  si et seulement si  $t \notin \mathbb{Z}$ . Toujours par le même Théorème,  $\forall t \in \mathbb{Z}, SF(x)(t) = \frac{1}{2}$ .

2) On a  $A_n = \int_0^2 \cos(n\pi t) \cdot x(t) dt = \int_0^1 \cos(n\pi t) dt = \frac{1}{n\pi} (\sin(n\pi) - \sin(0)) = 0$ .

3) a) On a  $a = b + (a-b) \cdot 1$  et  $b = b + (a-b) \cdot 0$   
 b) On a

$$SF(y)(t) = SF(b + (a-b) \cdot x)(t) = b + (a-b) \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin(n\pi t) \right)$$

$$= \frac{a+b}{2} + (a-b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin(n\pi t).$$

4) a) On a  $\frac{1}{2} < f_c < \frac{3}{2}$ .

b) Par identification avec l'expression de  $SF(y)(t)$ , on a  $\frac{a+b}{2} = \pi$  et  $\frac{2(a-b)}{\pi} = 3$  d'où

l'on tire que  $a = \frac{7\pi}{4}$  et  $b = \frac{\pi}{4}$

c) On a  $\langle y^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_0^1 a^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 b^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{25\pi^2}{16}$ .

d) Par Parseval,  $\langle \tilde{y}^2 \rangle = \pi^2 + \frac{9}{2}$ , donc le pourcentage vaut  $\left( 1 - \frac{\pi^2 + \frac{9}{2}}{\frac{25\pi^2}{16}} \right) \cdot 100 \sim 6,8\%$ .

### Exercice 12

1) Le signal  $y(t)$  est pair comme produit de deux fonctions paires. On a donc  $\forall n \geq 1, B_n = 0$ .

2) a) On a  $A_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 y(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos(50\pi t) x(t) dt = \frac{1}{2} a_{50}$ .

D'autre part, en linéarisant :

$$\begin{aligned} A_{50} &= \int_{-1}^1 \cos(50\pi t) y(t) dt = \int_{-1}^1 \cos^2(50\pi t) x(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + \cos(100\pi t)) x(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(t) dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos(100\pi t) x(t) dt = a_0 + \frac{1}{2} a_{100}. \end{aligned}$$

On a donc  $A_0 = \frac{1}{2} a_{50} = 0$  car 50 est pair, et  $A_{50} = \frac{1}{2} a_{100} + a_0 = a_0 = \frac{1}{2}$  car 100 est pair.

b) On a, grâce à la formule rappelée,

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{-1}^1 \cos(50\pi t) \cos(n\pi t) x(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos((n+50)\pi t) x(t) dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos((n-50)\pi t) x(t) dt \\ &= \frac{1}{2} (a_{n+50} + a_{|n-50|}), \text{ en remarquant que } \int_{-1}^1 \cos((n-50)\pi t) x(t) dt = \int_{-1}^1 \cos((50-n)\pi t) x(t) dt \end{aligned}$$

Si  $n$  est pair, les entiers  $n+50$  et  $|n-50|$  le sont aussi, et  $|n-50| \neq 0$  car  $n \neq 50$  donc



$$A_n = \frac{1}{2}(a_{n+50} + a_{|n-50|}) = 0.$$

Si  $n$  est impair, on a :

$$A_n = \frac{1}{2}(a_{n+50} + a_{|n-50|}) = \frac{1}{2} \left( \frac{-4}{(n+50)^2 \pi^2} - \frac{4}{(n-50)^2 \pi^2} \right)$$

(noter que  $|n-50|^2 = (n-50)^2$ )

$$A_n = \frac{-4}{\pi^2} \frac{n^2 + 2500}{(n^2 - 2500)^2} \text{ après calculs.}$$

$$\text{On a donc : } SF(y)(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\pi t) \text{ avec } A_n = \begin{cases} A_n = 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{-4}{\pi^2} \frac{n^2 + 2500}{(n^2 - 2500)^2} & \text{si } n \text{ est impair et } n \neq 50 \\ \frac{1}{2} & \text{si } n = 50 \end{cases}$$

3)

a) On a  $A_0 = \frac{-10004}{6245001 \pi^2}$  donc le pourcentage de la puissance moyenne de  $y(t)$  contenu dans

le fondamental vaut  $\frac{\frac{1}{2} A_0^2}{\langle y^2 \rangle} \sim 7,9 \cdot 10^{-6} \%$ , ce qui est quasiment nul.

b) On a  $\frac{\frac{1}{2} A_{50}^2}{\langle y^2 \rangle} = 75 \%$  : les  $\frac{3}{4}$  de la puissance moyenne sont contenus dans la seule harmonique d'ordre 50.

c) On calcule  $A_{49} = \frac{-19604}{9801 \pi^2}$  et  $A_{51} = \frac{-20404}{10201 \pi^2}$  donc le pourcentage cherché vaut

$\frac{\frac{1}{2}(A_{49}^2 + A_{50}^2 + A_{51}^2)}{\langle y^2 \rangle} \sim 99,64 \%$  : la quasi-totalité de la puissance moyenne du signal est contenue dans ces 3 harmoniques !

4)

a) On a  $f'(t) = -\frac{t+7500}{(t-2500)^3}$  qui est du signe de  $2500-t$  sur  $[0; 2500[ \cup ]2500; +\infty[$ .

On en déduit le tableau de variations suivant :

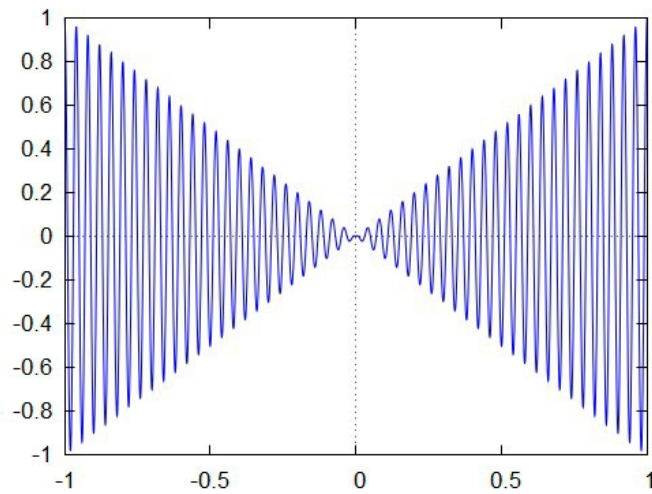
$t$	0	$50^2$	$+\infty$
$x(t)$	$\frac{1}{2500}$	$\begin{matrix} +\infty \\    \end{matrix}$	0

b) Remarquant que  $\forall n \neq 50, |A_n| = \frac{4}{\pi^2} f(n^2)$  on déduit du tableau de variations ci-dessus que  $|A_n|$  est maximale soit pour  $n=49$ , soit pour  $n=50$ , soit pour  $n=51$ .

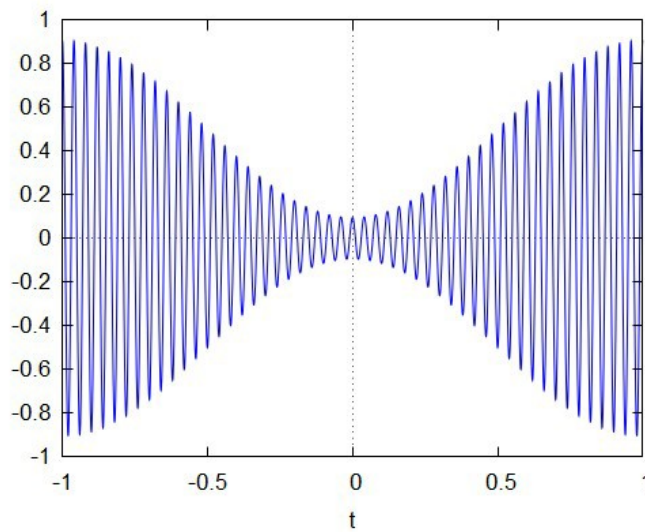
On a  $|A_{49}| = \frac{19604}{9801 \pi^2} \sim 0,2027$ ,  $|A_{50}| = \frac{1}{2} = 0,5$  et  $|A_{51}| = \frac{20404}{10201 \pi^2} \sim 0,2027$  donc l'harmonique de  $y(t)$  de plus grande amplitude est la cinquantième.

c) Il est essentiellement concentré sur la raie correspondant à  $n=50$ , et, si l'on regarde en terme de puissance moyenne, quasi exclusivement concentré sur les trois raies correspondant à  $n=49, 50, 51$ .

Tracé de  $y(t)$  sur la période  $[-1;1]$



Tracé de la superposition des harmoniques d'ordre 49, 50 et 51



### Exercice 13

1)

a)  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ .

b) Impair

c) Car le signal est impair.

d) La fonction  $x(t)$  est continûment dérivable par morceaux, donc le Théorème de Dirichlet s'applique et

$$S(x)\left(\frac{\pi}{3}\right) = x\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad \text{et} \quad S(x)(\pi) = \frac{1}{2}\left(x(\pi^-) + x(\pi^+)\right) = 0.$$

2) Découle de la définition de puissance moyenne.

3)

a) On a  $\langle H_1^2(t) \rangle = \frac{8}{\pi^2}$

b) On a  $1 = \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} B_n^2 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} B_n^2$  d'où  $\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} B_n^2 = 1 - \frac{8}{\pi^2}$ .

Ainsi,  $\tau(z) = \frac{\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} B_n^2}{\langle x^2(t) \rangle} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sim 0,19$ .

4)

a) La fonction  $y(t)$  est le produit de deux fonction impaires donc est paire. On en déduit que  $\forall n \geq 1, b_n = 0$ .

b) On a  $\langle y(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(10t)x(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(10t)x(t) dt = \frac{1}{2} B_{10}$ . On trouve 0 car 10 est pair.

c) On a  $\langle y^2(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(10t)x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(10t) dt = \langle \sin^2(10t) \rangle = \frac{1}{2}$ .

d) On a

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \sin(10t)x(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(11t)x(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(9t)x(t) dt = \frac{1}{2}(B_9 + B_{11}).$$

Vu que  $B_n = \frac{4}{n\pi}$  si  $n$  est impair, on a :

$$a_1 = \frac{1}{2}(B_9 + B_{11}) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) = \frac{40}{99\pi}.$$

e) On a  $\tau(y) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{n=2}^{+\infty} a_n^2}{\langle y^2(t) \rangle} = 1 - \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{\langle y^2(t) \rangle} = 1 - \frac{1600}{9801\pi^2} \sim 0,98$ . Le taux de distorsion est

proche de 100 % alors que celui trouvé au 3)b) était plutôt faible.

La plus grande partie de la puissance moyenne de  $x(t)$  est transportée dans le fondamental tandis que pour  $y(t)$ , la puissance moyenne est transportée dans les harmoniques de rang supérieur.

Plus précisément, on va voir dans la question suivante que ce sont les harmoniques d'ordre 9 et 11 qui transportent la plus grande part de la puissance moyenne. Ce n'est pas un hasard si ces harmoniques ont des

fréquences voisines de  $\frac{5}{\pi}$  qui est celle de la sinusoïde  $t \rightarrow \sin(10t)$ , la porteuse, par laquelle on a multiplié le signal de départ  $t \rightarrow x(t)$ . Il s'agit d'une modulation d'amplitude, qui a pour effet de décaler le spectre d'un signal et de le centrer autour d'une fréquence déterminée par la porteuse. On a le même phénomène dans l'exercice précédent.

5)

a) On a

$$a_9 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(9t) \sin(10t)x(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(19t)x(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t)x(t) dt = \frac{1}{2}(B_{19} + B_1).$$

Vu que  $B_n = \frac{4}{n\pi}$  si  $n$  est impair, on a :

$$a_9 = \frac{1}{2}(B_{19} + B_1) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{19} + 1 \right) = \frac{40}{19\pi}.$$

On a

$$a_{11} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(11t) \sin(10t) x(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(21t) x(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) x(t) dt = \frac{1}{2}(B_{21} - B_1).$$

Vu que  $B_n = \frac{4}{n\pi}$  si  $n$  est impair, on a :

$$a_{11} = \frac{1}{2}(B_{21} - B_1) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{21} - 1 \right) = \frac{-40}{21\pi}.$$

b) La puissance moyenne de  $y(t)$  contenue dans les harmoniques d'ordre 9 et 11 vaut

$$\frac{1}{2} \left( \left( \frac{40}{19\pi} \right)^2 + \left( \frac{40}{21\pi} \right)^2 \right) = \frac{641600}{159201\pi^2} \text{ ce qui représente environ } 81,66\% \text{ de } \langle y^2(t) \rangle.$$

### Exercice 14

1) a) Les fonctions  $s \rightarrow x(s)$  et  $s \rightarrow x(t+s)$  sont continues par morceaux, donc il en est de même de leur produit : l'intégrale  $\int_0^T x(s)x(t+s) ds$  existe pour toute valeur de  $t$ .

b) Soit  $t \in \mathbb{R}$  fixé. On a  $R_x(t+T) = \frac{1}{T} \int_0^T x(s)x(t+T+s) ds = \frac{1}{T} \int_0^T x(s)x(t+s) ds = R_x(t)$  car  $\forall s \in [0; T], x(t+T+s) = x(t+s)$  par T-périodicité de  $s \rightarrow x(s)$ .

c) Soit  $t \in \mathbb{R}$  fixé. On a

$$R_x(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(s)x(t+s) ds = \frac{1}{T} \int_t^{T+t} x(\sigma-t)x(\sigma) d\sigma.$$

Par T-périodicité de  $\sigma \rightarrow x(\sigma-t)x(\sigma)$  (produit de deux fonctions T-périodiques), l'application de la propriété 1 donne

$$\int_t^{T+t} x(\sigma-t)x(\sigma) d\sigma = \int_0^T x(\sigma-t)x(\sigma) d\sigma$$

d'où

$$R_x(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(\sigma-t)x(\sigma) d\sigma = \frac{1}{T} \int_0^T x(\sigma)x(\sigma+(-t)) d\sigma = R_x(-t).$$

Cela étant valable pour tout réel  $t$ , on a prouvé que la fonction  $R_x$  est paire.

$$2) \text{ On a } R_x(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(s)x(t+s) ds = \frac{A^2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi s}{T} + \varphi\right) \cos\left(\frac{2\pi s}{T} + \frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) ds.$$

En utilisant la formule de linéarisation  $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

on obtient :

$$R_x(t) = \frac{A^2}{2T} \int_0^T \left( \cos\left(\frac{4\pi s}{T} + \frac{2\pi t}{T} + 2\varphi\right) + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right) ds.$$

On remarque que  $\int_0^T \cos\left(\frac{4\pi s}{T} + \frac{2\pi t}{T} + 2\varphi\right) ds = 0$  (intégrale d'une sinusoïde  $\frac{T}{2}$ -périodique sur deux périodes consécutives) donc

$$R_x(t) = \frac{A^2}{2T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) ds = \frac{A^2}{2T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \int_0^T ds = \frac{A^2}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right).$$

3) a) Le développement en série de Fourier de  $s \rightarrow x(s+t)$  vaut

$$S(x(\cdot + t))(s) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega(s+t)) + B_n \sin(n\omega(s+t)) .$$

En utilisant les formules d'addition trigonométriques classiques, il vient que

$$S(x(\cdot + t))(s) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{A}_n \cos(n\omega s) + \tilde{B}_n \sin(n\omega s) \text{ avec}$$

$$\tilde{A}_n = A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$$

et

$$\tilde{B}_n = -A_n \sin(n\omega t) + B_n \cos(n\omega t).$$

Par addition, le développement en série de Fourier de  $s \rightarrow x(s+t) + x(s)$  est

$$S(x + x(\cdot + t))(s) = 2A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n + \tilde{A}_n) \cos(n\omega s) + (B_n + \tilde{B}_n) \sin(n\omega s) .$$

b) On calcule :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} \int_0^T (x(s) + x(t+s))^2 ds - \frac{1}{T} \int_0^T x^2(s) ds - \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t+s) ds \right) \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T ((x(s) + x(t+s))^2 - x^2(s) - x^2(t+s)) ds \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T 2x(t+s)x(s) ds = R_x(t). \end{aligned}$$

c) Par le Théorème de Parseval et les résultats du a), on a

$$\frac{1}{T} \int_0^T (x(s) + x(t+s))^2 ds = 4A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n + \tilde{A}_n)^2 + (B_n + \tilde{B}_n)^2$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t+s) ds = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{A}_n^2 + \tilde{B}_n^2$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(s) ds = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 + B_n^2 .$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} R_x(t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} \int_0^T (x(s) + x(t+s))^2 ds - \frac{1}{T} \int_0^T x^2(s) ds - \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t+s) ds \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 2A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( (A_n + \tilde{A}_n)^2 + (B_n + \tilde{B}_n)^2 - A_n^2 - B_n^2 - \tilde{A}_n^2 - \tilde{B}_n^2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 2A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} 2A_n \tilde{A}_n + 2B_n \tilde{B}_n \right) = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \tilde{A}_n + B_n \tilde{B}_n . \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} A_n \tilde{A}_n + B_n \tilde{B}_n &= A_n (A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)) + B_n (B_n \cos(n\omega t) - A_n \sin(n\omega t)) \\ &= (A_n^2 + B_n^2) \cos(n\omega t) \text{ après simplification.} \end{aligned}$$

On en déduit  $\forall t \in \mathbb{R}, R_x(t) = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^2 + B_n^2) \cos(n\omega t) = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^2 + B_n^2) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)$ .

**Remarque :** on peut prouver que la fonction  $t \rightarrow R_f(t)$  est continue et que l'expression ci-dessus en constitue son développement en série de Fourier.

4) On a  $\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \leq 1$  donc par le Théorème de Parseval, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, R_x(t) = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^2 + B_n^2) \cos(n\omega t) \leq A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^2 + B_n^2) = \langle x^2(t) \rangle.$$

L'égalité n'a lieu que si  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \cos(n\omega t) = \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) = 1$  c'est à dire que si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2n\pi t}{T} \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

c'est à dire si et seulement si  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \frac{t}{T}$  est entier, ce qui revient à dire que  $\frac{t}{T}$  est entier donc  $t$  est un multiple de  $T$ .

**Remarque :** l'étude des maxima de la fonction d'auto-corrélation d'un signal périodique est une méthode utilisée en pratique pour en déterminer la période.

### Exercice 15

1) Par le Théorème 2 du chapitre des fonctions élémentaires,

$\exists M_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in [0; T], |f(t)| \leq M_0$ . Par  $T$ -périodicité, on en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)| \leq M_0.$$

On a donc  $\forall t \in \mathbb{R}, |e^{-pt} f(t)| \leq M_0 e^{-pt}$  et l'intégrale  $\int_0^{+\infty} M_0 e^{-pt} dt$  converge car  $p > 0$ , donc par

critère de comparaison, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$  est absolument convergente.

2) a) En posant  $s = t - nT$  dans l'intégrale  $\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-pt} f(t) dt$  on obtient

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^T e^{-p(s+nT)} f(s+nT) ds = \int_0^T e^{-ps} e^{-n pT} f(s+nT) ds = e^{-n pT} \cdot \int_0^T e^{-ps} f(s+nT) ds.$$

En se souvenant que  $f$  est  $T$ -périodique, on a donc

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-pt} f(t) dt = e^{-n pT} \cdot \int_0^T e^{-ps} f(s) ds = e^{-n pT} \cdot \int_0^T e^{-pt} f(t) dt.$$

b) Soit  $N$  un entier naturel non nul. On a par la relation de Chasles et le résultat du a) :

$$\begin{aligned} \int_0^{(N+1)T} e^{-pt} f(t) dt &= \sum_{n=0}^N \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^T e^{-pt} f(t) dt \sum_{n=0}^N e^{-n pT} \\ &= \int_0^T e^{-pt} f(t) dt \cdot \frac{1 - e^{-(N+1)pT}}{1 - e^{-pT}}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{(N+1)T} e^{-pt} f(t) dt$$

$$= \int_0^T e^{-pt} f(t) dt \cdot \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-(N+1)T}}{1 - e^{-T}} = \frac{1}{1 - e^{-T}} \cdot \int_0^T e^{-pt} f(t) dt.$$

3) On a, en posant  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  :

$$y_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-pt} e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-(p+jn\omega)t} dt = \frac{1}{T(p+jn\omega)} \left[ -e^{-(p+jn\omega)t} \right]_0^T$$

$$= \frac{1}{T(p+jn\omega)} (1 - e^{-(p+jn\omega)T}) = \frac{1}{T(p+jn\omega)} (1 - e^{-pT})$$

car  $e^{-(p+jn\omega)T} = e^{-pT} e^{-jn\omega T} = e^{-pT} e^{-2j\pi n} = e^{-pT}$ .

On a donc  $S(x)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n e^{jn\omega t} = \frac{1 - e^{-pT}}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p + jn\omega} e^{jn\omega t}$

4) On a

$$\frac{T}{2} \left( \langle (x(t) + f(t))^2 \rangle - \langle x^2(t) \rangle - \langle f^2(t) \rangle \right) = \frac{1}{2} \int_0^T \left( (x(t) + f(t))^2 - x^2(t) - f^2(t) \right) dt$$

$$= \int_0^T f(t) x(t) dt = 2 \int_0^T e^{-pt} f(t) dt \quad \text{de par la définition de } x \text{ sur l'intervalle } [0; T[.$$

5) Les développements en série de Fourier des signaux  $t \rightarrow x(t)$ ,  $t \rightarrow f(t)$  et  $t \rightarrow x(t) + f(t)$  étant respectivement :

$$S(x)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n e^{jn\omega t}$$

$$S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

$$S(x+f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (C_n + y_n) e^{jn\omega t}$$

on a, par le Théorème de Parseval :

$$\int_0^T e^{-pt} f(t) dt = \frac{T}{2} \left( \langle (x(t) + f(t))^2 \rangle - \langle x^2(t) \rangle - \langle f^2(t) \rangle \right)$$

$$= \frac{T}{2} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y_n + C_n|^2 - |y_n|^2 - |C_n|^2 \right) = \frac{T}{2} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y_n + C_n|^2 - |y_n|^2 - |C_n|^2 \right)$$

$$= \frac{T}{2} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (y_n + C_n) \cdot (\overline{y_n + C_n}) - |y_n|^2 - |C_n|^2 \right)$$

$$= \frac{T}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot \overline{y_n} + y_n \cdot \overline{C_n} = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}(C_n \cdot \overline{y_n}).$$

Observons que puisque  $y_{-n} = \overline{y_n}$  et  $C_{-n} = \overline{C_n}$  (les signaux  $x$  et  $f$  étant à valeurs réelles), on a pour tout entier  $n$   $C_n \cdot \overline{y_n} = \overline{C_{-n} \cdot y_{-n}}$  donc  $C_n \cdot \overline{y_n} + C_{-n} \cdot \overline{y_{-n}} = \operatorname{Re}(C_n \cdot \overline{y_n}) + \operatorname{Re}(C_{-n} \cdot \overline{y_{-n}})$  (les parties imaginaires se simplifient). On a donc

$$\int_0^T e^{-pt} f(t) dt = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot \overline{y_n} = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{C_n}{T(p - jn\omega)} (1 - e^{-pT}) = (1 - e^{-pT}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{C_n}{p - jn\omega}.$$

On déduit du 2)b) que

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-T}} \cdot (1 - e^{-pT}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{C_n}{p - jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{C_n}{p - jn\omega}$$

## Exercice 16

### Partie 1 : développement en série de Fourier de la fonction $f$

- 1) La fonction  $v$  étant dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec  $v'$  continue par morceaux, il existe une subdivision de  $[0; T]$  :  $0=t_1 < t_2 < \dots < t_k=T$  telle que pour chaque entier  $i$  entre 1 et  $k-1$  la fonction  $f(t)$  se prolonge en une fonction dérivable sur  $[t_i, t_{i+1}]$ , à dérivée continue sur cet intervalle.

La fonction  $f$  est donc continûment dérivable par morceaux.

Elle est continue sur  $[0; T[$  (puisque  $v$  l'est) et puisque  $v$  est continue en  $T$ , on a :

$$f(T^-) = v(T^-) = v(T) = 0 = v(0) = f(0)$$

donc par périodisation,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Remarque : même si la fonction  $v$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , il n'en n'est pas nécessairement de même pour  $f$ , car, par périodisation,  $f'(T^-) = v'(T)$  n'a aucune raison d'être égal à  $f'(T^+) = v'(0)$ .

Soit  $A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$  le développement en série de Fourier de la fonction  $f$ .

$$2) \text{ On a } A_0 = \langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T x'(t) dt = \frac{x(T) - x(0)}{T} = \frac{a}{T}.$$

- 3) Puisque la fonction  $f$  est continue et continûment dérivable par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , le Théorème de Dirichlet donne  $f(0) = \text{SF}(f)(0) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ . Puisque  $A_0 = \frac{a}{T}$  et  $f(0) = v(0) = 0$ , on

$$\text{obtient que } \sum_{n=1}^{+\infty} A_n = -\frac{a}{T}.$$

### Partie 2 : Énergie cinétique moyenne minimale

$$4) \text{ a) Par le Théorème de Parseval, } \langle f^2 \rangle = \langle v^2 \rangle = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^2 + B_n^2) \geq A_0^2 = \frac{a^2}{T^2} \text{ par le 2).}$$

$$\text{On a alors par linéarité de l'intégrale, } \langle E \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt = \frac{1}{2} m \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt = \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle \geq \frac{m a^2}{2 T^2}.$$

$$\text{b) Par ce qui précède, si } \langle E \rangle = \frac{m a^2}{2 T^2}, \text{ c'est que } \langle v^2 \rangle = A_0^2 \text{ donc } \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^2 + B_n^2) = 0,$$

c'est à dire que  $\forall n \geq 1, A_n = B_n = 0$ . On en déduirait que la fonction  $f$  est constante sur

$[0; T]$ , donc  $v$  aussi. Or,  $v(0) = v(T) = 0$ , ce qui impliquerait que la fonction  $v$  est nulle,

donc la fonction  $x$  serait constante sur  $[0; T]$  car  $x' = v$ . Or  $x(0) = 0$  et  $x(T) = a$ , ce qui impliquerait que  $a = 0$ , ce qui n'est pas.

$$\text{On a donc } \langle E \rangle > \frac{m a^2}{2 T^2}.$$

**Remarque :** l'inégalité ci-dessus peut se réécrire  $\langle E \rangle > \frac{1}{2} m \langle v \rangle^2$  où  $\langle v \rangle = \frac{a}{T}$  est la vitesse moyenne du solide sur l'intervalle de temps  $[0; T]$ .

$$5) \text{ a) On a } x_N(0) = 0 \text{ et } x(T) = \frac{a}{T}(T-0) = a \text{ car } \forall n \in \mathbb{N}, \sin\left(\frac{2\pi n T}{T}\right) = 0.$$



On a  $v_N(t) = x'_N(t) = \frac{a}{T} \left( 1 - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right)$ . Donc  $v_N(0) = x'_N(0) = \frac{a}{T} \left( 1 - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1 \right) = 0$ , et  $v_N(T) = \frac{a}{T} \left( 1 - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos(2\pi n) \right) = \frac{a}{T} \left( 1 - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1 \right) = 0$ .

b) Vu que  $\forall t \in [0; T[$ ,  $v_N(t) = x'_N(t) = \frac{a}{T} \left( 1 - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right)$ , on en déduit que le polynôme trigonométrique  $t \rightarrow \frac{a}{T} \left( 1 - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right)$  est le développement (fini) en série de Fourier de  $f$  et le Théorème de Parseval montre que

$$\langle f^2 \rangle = \langle v^2 \rangle = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^2 + B_n^2) \geq A_0^2 = \frac{a^2}{T^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{N^2} \right) = \frac{a^2}{T^2} \left( 1 + \frac{1}{2N} \right).$$

On a alors  $\langle E_N \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_N^2 \rangle = \frac{m a^2}{2 T^2} \left( 1 + \frac{1}{2N} \right)$ .

c) Supposons qu'il existe une constante  $C$  telle que  $\langle E \rangle \geq C > \frac{m a^2}{2 T^2}$  pour toute fonction  $x(t)$  vérifiant les propriétés (1) et (2) (la constante  $C$  est indépendante de la fonction  $x(t)$  mais peut dépendre aussi de tous les paramètres physique du problème, à savoir  $a$ ,  $m$  et  $T$ .)

On a alors, pour tout entier naturel non nul  $N$  la relation :

$$\langle E_N \rangle = \frac{m a^2}{2 T^2} \left( 1 + \frac{1}{2N} \right) \geq C$$

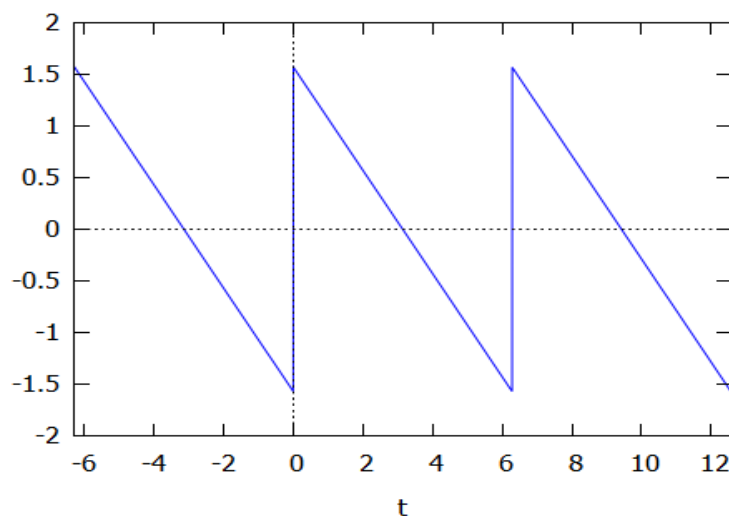
et en faisant tendre  $N$  vers l'infini, on obtient  $\frac{m a^2}{2 T^2} \geq C$  ce qui contredit la relation  $C > \frac{m a^2}{2 T^2}$ .

On en déduit que l'énergie cinétique moyenne minimale de notre solide vaut  $\frac{m a^2}{2 T^2} = \frac{1}{2} m \langle v(t) \rangle^2$ . Elle sera toujours strictement plus grande, mais par une trajectoire adaptée, on peut s'en approcher autant que l'on veut.

### Partie 3 : valeur efficace minimale de l'accélération .

#### 6) Un développement en série de Fourier utile.

a)



b) Puisque la fonction  $y$  est impaire,  $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = 0$ .

On a  $B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) x(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) x(t) dt$  car la fonction  $t \rightarrow \sin(nt) x(t)$  est paire,

donc par une intégration par parties :

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) (\pi - t) dt = \left[ -\cos(nt) \cdot \frac{\pi - t}{n\pi} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2\pi} [\sin(nt)]_0^{\pi} = \frac{1}{n},$$

d'où l'on déduit que le développement en série de Fourier réel de la fonction  $y(t)$  est donné par

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(nt).$$

c) Puisque  $\langle y \rangle = 0$ ,  $Y(t)$  est  $2\pi$ -périodique (voir la remarque qui suit la propriété 5) et puisque  $y$  est impaire,  $Y(t)$  est paire.

On a  $\forall t \in [0; \pi], Y(t) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{(\pi - t)^2}{4} = \frac{2\pi t - t^2}{4}$ .

d) Il suffit d'intégrer terme à terme le développement en série de Fourier de  $y(t)$  (voir propriété 5).

e) On a  $A = \langle Y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Y(t) dt$  car la fonction  $Y(t)$  est paire, donc

$$A = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} (2\pi t - t^2) dt = \frac{1}{4\pi} \left[ \pi t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{4\pi} \cdot 2 \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

f) La fonction  $Y(t)$  étant une pseudo-primitive de  $y(t)$ , elle est continue et continûment dérivable par morceaux, donc le Théorème de Dirichlet permet d'affirmer que

$$Y(0) = \Sigma(0) = A - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Puisque  $Y(0) = 0$  et  $A = \frac{\pi^2}{6}$ , on en déduit le résultat.

7) Par le Théorème de Dirichlet, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = \Sigma(t) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nt)$$

donc

$$\forall s \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(ns) = \frac{\pi^2}{6} - Y(s) \text{ et la série } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(ns) \text{ est le développement en série de}$$

Fourier de  $\frac{\pi^2}{6} - Y(s)$ .

On en déduit alors, en faisant le changement de variable  $s = \frac{2\pi t}{T}$  que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(n \frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{\pi^2}{6} - Y\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

et que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$  est le développement en série de Fourier de

$$v_0(t) = \frac{\pi^2}{6} - Y\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \text{ qui est bien périodique de période } T \text{ car } Y \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}$$

On a pour  $t \in \left[0; \frac{T}{2}\right]$ ,  $v_0(t) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{2\pi \frac{2\pi t}{T} - \left(\frac{2\pi t}{T}\right)^2}{4} = \frac{\pi^2}{6} \left(6 \left(\frac{t}{T}\right)^2 - 6 \left(\frac{t}{T}\right) + 1\right)$  (voir 6)c).

On a pour  $t \in \left[ \frac{-T}{2}; 0 \right]$ ,  $v_0(t) = \frac{\pi^2}{6} \left( 6 \left( \frac{t}{T} \right)^2 + 6 \left( \frac{t}{T} \right) + 1 \right)$  car la fonction Y est paire, donc  $v_0$  aussi.

Par T-périodicité de la fonction  $v_0(t)$ , on a

$\forall t \in \left[ \frac{T}{2}; T \right]$ ,  $v_0(t) = v_0(t-T) = \frac{\pi^2}{6} \left( 6 \left( \frac{t-T}{T} \right)^2 + 6 \left( \frac{t-T}{T} \right) + 1 \right)$  car  $t-T \in \left[ \frac{-T}{2}; 0 \right]$ , ce qui se simplifie en :

$$\forall t \in \left[ \frac{T}{2}; T \right], v_0(t) = \frac{\pi^2}{6} \left( 6 \left( \frac{t}{T} \right)^2 - 6 \left( \frac{t}{T} \right) + 1 \right).$$

On en déduit que  $v_0(t)$  coïncide avec la fonction polynôme  $t \rightarrow \frac{\pi^2}{6} \left( 6 \left( \frac{t}{T} \right)^2 - 6 \left( \frac{t}{T} \right) + 1 \right)$  sur tout l'intervalle  $[0; T]$ .

8)

a) On a 
$$P(t) = \sum_{n=1}^N (x_n - t y_n)^2 = t^2 \sum_{n=1}^N y_n^2 - 2t \sum_{n=1}^N x_n y_n + \sum_{n=1}^N x_n^2 = at^2 + bt + c$$

avec  $a = \sum_{n=1}^N y_n^2 \neq 0$  car les réels  $(y_1, y_2, \dots, y_N)$  ne sont pas tous nuls.

b) 
$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 \left( \left( \sum_{n=1}^N x_n y_n \right)^2 - \left( \sum_{n=1}^N x_n^2 \right) \left( \sum_{n=1}^N y_n^2 \right) \right)$$
 avec les expressions de a, b et c trouvées précédemment.

c) De par l'expression  $P(t) = \sum_{n=1}^N (x_n - t y_n)^2$ , on a  $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) \geq 0$  ce qui ne peut se produire que si  $\Delta \leq 0$ , cette dernière inégalité étant équivalente à

$$\left( \sum_{n=1}^N x_n y_n \right)^2 \leq \left( \sum_{n=1}^N x_n^2 \right) \left( \sum_{n=1}^N y_n^2 \right).$$

S'il on a l'égalité  $\left( \sum_{n=1}^N x_n y_n \right)^2 = \left( \sum_{n=1}^N x_n^2 \right) \left( \sum_{n=1}^N y_n^2 \right)$  c'est que  $\Delta = 0$  et dans ce cas,

$\exists ! t_0 \in \mathbb{R}$  tq  $P(t_0) = 0$ , c'est à dire  $\sum_{n=1}^N (x_n - t_0 y_n)^2 = 0$  donc  $\forall n = 1, 2, \dots, N, x_n = t_0 y_n$  ce qui signifie que les N-uplets  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_N)$  sont proportionnels.

9) Soit  $A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$  le développement en série de Fourier de la fonction  $f$ . Puisque la fonction  $f$  est continue et dérivable continûment par morceaux, la propriété 6 nous dit que la série de Fourier associée à  $f'(t)$  est

$$\frac{2\pi}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} n B_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) - n A_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right).$$

En appliquant Parseval à cette série, on a la

convergence de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (A_n^2 + B_n^2)$  et

$$\langle a^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{dv}{dt}(t) \right)^2 dt = \langle (f')^2 \rangle = \frac{2\pi^2}{T^2} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (A_n^2 + B_n^2)$$

d'où

$$\sqrt{\langle a^2(t) \rangle} = \frac{\pi}{T} \sqrt{2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (A_n^2 + B_n^2)} .$$

10)

a) On a 
$$\left( \sum_{n=1}^N A_n \right)^2 = \left( \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} \right) (nA_n) \right)^2 \leq \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right) \left( \sum_{n=1}^N n^2 A_n^2 \right) .$$

b) On a donc 
$$\left( \sum_{n=1}^N n^2 A_n^2 \right) \geq \frac{\left( \sum_{n=1}^N A_n \right)^2}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}} .$$

La série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (A_n^2 + B_n^2)$  converge donc la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 A_n^2$  aussi. On a vu au 3) que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$

convergeait vers  $\frac{-a}{T}$  et on a vu au 6)f que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . En faisant tendre N vers l'infini, on a donc

$$\sum_{n=1}^N n^2 A_n^2 \geq \frac{6a^2}{\pi^2 T^2} . \text{ On a alors}$$

$$\sqrt{\langle a^2(t) \rangle} = \frac{\pi}{T} \sqrt{2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (A_n^2 + B_n^2)} \geq \frac{\pi}{T} \sqrt{2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 A_n^2} \geq \frac{\pi}{T} \sqrt{2 \cdot \frac{6a^2}{\pi^2 T^2}} = \frac{2\sqrt{3}a}{T^2} .$$

11)

a) La fonction  $x$  est clairement deux fois dérivable sur  $[0; T]$ . De plus  $x(0) = 0$  et  $x(T) = a$  de façon évidente.

On a  $v(t) \stackrel{\text{def}}{=} x'(t) = \frac{6a}{T} \left( \frac{t}{T} - \left( \frac{t}{T} \right)^2 \right)$  donc  $v(0) = v(T) = 0$ .

b) On a vu au a) que  $v(t) = \frac{6a}{T} \left( \frac{t}{T} - \left( \frac{t}{T} \right)^2 \right)$ , et on a d'après le 7) :

$$\forall t \in [0; T], \frac{a}{T} \left( 1 - \frac{6}{\pi^2} v_0(t) \right) = \frac{a}{T} \left( 1 - \frac{6}{\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} \left( 6 \left( \frac{t}{T} \right)^2 - 6 \left( \frac{t}{T} \right) + 1 \right) \right) \right) = \frac{6a}{T} \left( \frac{t}{T} - \left( \frac{t}{T} \right)^2 \right) , \text{ ce qui}$$

prouve que  $\forall t \in [0; T], v(t) = \frac{a}{T} \left( 1 - \frac{6}{\pi^2} v_0(t) \right)$ .

c) On a  $\forall t \in [0; T], v'(t) = \frac{-6a}{T\pi^2} v'_0(t)$ . Or, puisque  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$  est le développement en série de Fourier de  $v_0(t)$ , celui de  $v'_0(t)$  est  $-\frac{2\pi}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$

donc le Théorème de Parseval donne  $\langle v'^2_0 \rangle = \frac{2\pi^2}{T^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \frac{\pi^4}{3T^2}$  d'après le 6)f).

La relation  $\forall t \in [0; T], v'(t) = \frac{-6a}{T\pi^2} v'_0(t)$  montre que

$$\langle a^2(t) \rangle = \langle v'^2 \rangle = \frac{36a^2}{T^2\pi^4} \langle v'^2_0 \rangle = \frac{12a^2}{T^4} \text{ donc } \sqrt{\langle a^2(t) \rangle} = \frac{2\sqrt{3}a}{T^2} .$$

On en déduit que la fonction  $x(t) = a \left( 3 \left( \frac{t}{T} \right)^2 - 2 \left( \frac{t}{T} \right)^3 \right)$  donne le déplacement du solide vérifiant les conditions (1) et (2) de l'énoncé avec la valeur efficace de l'accélération instantanée minimale.

**Exercice 17 (Un théorème de factorisation des polynômes trigonométriques réels).**

1) On a  $x(t) = \sum_{n=-N}^N C_n e^{jn\omega t} = e^{-jN\omega t} \sum_{n=-N}^N C_n e^{j(n+N)\omega t} = e^{-jN\omega t} \sum_{k=0}^{2N} C_{k-N} e^{jk\omega t}$  par le changement d'indices  $k = n + N$ . On a alors  $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = e^{-jN\omega t} A(e^{j\omega t})$  avec  $A(X) = \sum_{k=0}^{2N} C_{k-N} X^k$ .

2) Puisque  $A_k$  et  $B_k$  sont réels, on a  $\forall n > 0, C_{-n} = \overline{C_n}$ . On a donc

$$\overline{z}^{2N} A\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = \overline{z}^{2N} \sum_{k=0}^{2N} C_{k-N} \overline{z}^{-k} = \sum_{k=0}^{2N} C_{k-N} \overline{z}^{2N-k}$$

$l = 2N - k$  dans la dernière somme :

$$\overline{z}^{2N} A\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = \sum_{k=0}^{2N} C_{k-N} \overline{z}^{2N-k} = \sum_{k=2N}^0 C_{N-l} \overline{z}^l = \sum_{k=0}^{2N} C_{N-l} \overline{z}^l$$

en réordonnant la somme par puissances croissantes. La relation  $C_{N-l} = \overline{C_{l-N}}$  donne alors :

$$\overline{z}^{2N} A\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = \sum_{k=0}^{2N} \overline{C_{l-N}} \overline{z}^l = \sum_{k=0}^{2N} C_{l-N} z^l = \overline{A(z)}$$

3) a) On a  $A(0) = C_{-N} = \frac{A_N + jB_N}{2} \neq 0$  car  $(A_N, B_N) \neq (0, 0)$ . Le nombre 0 n'est donc pas une racine.

b) On a par hypothèse  $A(X) = (X - z_0)^m B(X)$  avec  $B(z_0) \neq 0$ . On déduit du 2) que

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}^*, A(z) &= \overline{z}^{2N} A\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = z^{2N} \left(\frac{1}{z} - \overline{z_0}\right)^m \overline{B\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} \\ &= (-\overline{z_0})^m \left(z - \frac{1}{\overline{z_0}}\right)^m z^{2N-m} \overline{B\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} \end{aligned}$$

Montrons que la fonction  $z \rightarrow z^{2N-m} \overline{B\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$  est polynomiale en  $z$  et ne s'annule pas en  $\frac{1}{\overline{z_0}}$ .

Puisque  $A(X) = (X - z_0)^m B(X)$ , le polynôme  $B(X)$  est de degré  $2N - m$  donc admet une expression de la forme  $B(X) = \sum_{i=0}^{2N-m} \alpha_i X^i$ . On a alors

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, A(z) = (-\overline{z_0})^m \left(z - \frac{1}{\overline{z_0}}\right)^m z^{2N-m} \sum_{i=0}^{2N-m} \overline{\alpha_i} \frac{1}{z^i} = (-\overline{z_0})^m \left(z - \frac{1}{\overline{z_0}}\right)^m \sum_{i=0}^{2N-m} \overline{\alpha_i} z^{2N-m-i}$$

Si l'on pose  $\tilde{B}(X) = (-\overline{z_0})^m \sum_{i=0}^{2N-m} \overline{\alpha_i} X^{2N-m-i}$ , on obtient alors que  $\tilde{B}(X)$  est bien un polynôme et

que les polynômes  $A(X)$  et  $\left(X - \frac{1}{\overline{z_0}}\right)^m \tilde{B}(X)$  sont égaux sur  $\mathbb{C}^*$  donc sont identiquement égaux

(leur différence admet une infinité de racines différentes). On a  $A(X) = \left(X - \frac{1}{\overline{z_0}}\right)^m \tilde{B}(X)$

Puisque  $\tilde{B}\left(\frac{1}{\overline{z_0}}\right) = (-\overline{z_0})^m \left[\overline{z}^{2N-m} \overline{B\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}\right]_{z=\frac{1}{\overline{z_0}}} = (-\overline{z_0})^m \overline{z_0}^{m-2N} \overline{B(z_0)} \neq 0$  on en déduit que  $\frac{1}{\overline{z_0}}$  est une racine d'ordre  $m$  de  $A(X)$ .

4) Le nombre total de racines (comptées avec leur ordre de multiplicité) de  $A(X)$  est  $\deg(A(X)) = 2N$ .

Le nombre de racines (comptées avec leur ordre de multiplicité) non nulles et de module différent de 1 de  $A(X)$  est pair, car pour toute racine  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  d'ordre  $m$  de  $A(X)$ , on peut lui en associer une autre,  $\frac{1}{\bar{z}_0}$ , de même ordre : on a bien  $z_0 \neq \frac{1}{\bar{z}_0}$  car  $z_0 \bar{z}_0 = |z_0|^2 \neq 1$ . Ainsi, ces racines peuvent être regroupées par paires, donc sont en nombre pair.

Puisque 0 n'est pas racine, les racines qui restent sont de module 1 et il y en a

$2N -$  (le nombre de racines de module différent de 1), c'est à dire un nombre pair (différence de deux nombres pairs).

5) Puisque le coefficient du terme de plus haut degré de  $A(X)$  est  $C_N$ , on a

$A(X) = C_N \prod_i^{2N} (X - \lambda_i)$  où  $\lambda_i$  sont les racines de  $A(X)$ . Par ce qui précède, on peut les regrouper deux par deux de la façon suivante :

En prenant deux racines de module 1 (pas nécessairement différentes), on obtient un facteur égal à

$$(X - e^{j\theta})(X - e^{j\varphi}) = X^2 - (e^{j\theta} + e^{j\varphi})X + e^{j(\theta+\varphi)}$$

En prenant une paire de racines de modules différents de 1 et de la forme  $\left(z_0, \frac{1}{\bar{z}_0}\right)$ , on obtient le facteur

$$(X - z_0) \cdot \left(X - \frac{1}{\bar{z}_0}\right) = X^2 - \left(z_0 + \frac{1}{\bar{z}_0}\right)X + \frac{z_0}{\bar{z}_0} = X^2 - \frac{1 + |z_0|^2}{\bar{z}_0}X + \frac{z_0}{\bar{z}_0}.$$

Avec ces regroupements et la relation  $A(X) = C_N \prod_i^{2N} (X - \lambda_i)$ , on arrive au résultat.

6) a) On a la relation

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} - (e^{j\theta} + e^{j\varphi})e^{j\omega t} + e^{j(\theta+\varphi)}e^{-j\omega t} &= e^{j\frac{(\theta+\varphi)}{2}} \left( e^{-j\frac{(\theta+\varphi)}{2}} e^{j\omega t} - (e^{j\frac{(\theta-\varphi)}{2}} + e^{j\frac{(\varphi-\theta)}{2}}) e^{j\omega t} + e^{j(\theta+\varphi)} e^{-j\omega t} \right) \\ &= 2e^{j\frac{(\theta+\varphi)}{2}} \operatorname{Re} \left( e^{-j\frac{(\theta+\varphi)}{2}} e^{j\omega t} - e^{j\frac{(\theta-\varphi)}{2}} \right) \\ &= 2e^{j\frac{(\theta+\varphi)}{2}} \left( -\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right) \cos(\omega t) + \sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right) \sin(\omega t) \right) \\ &= \lambda (a + b \cos(\omega t) + c \sin(\omega t)), \end{aligned}$$

où  $\lambda = 2e^{j\frac{(\theta+\varphi)}{2}}$ ,  $a = -\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$ ,  $b = \cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)$  et  $c = \sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)$ .

b) On a la relation

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} - \frac{1 + |z_i|^2}{\bar{z}_i} + \frac{z_i}{\bar{z}_i} e^{-j\omega t} &= \frac{1}{\bar{z}_i} (\bar{z}_i e^{j\omega t} - 1 - |z_i|^2 + z_i e^{-j\omega t}) = \frac{1}{\bar{z}_i} (-1 - |z_i|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_i e^{-j\omega t})) \\ &= \frac{1}{\bar{z}_i} (-1 - |z_i|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_i) \cos(\omega t) + 2 \operatorname{Im}(z_i) \sin(\omega t)) = \lambda (a + b \cos(\omega t) + c \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

avec  $\lambda = \frac{1}{\bar{z}_i}$ ,  $a = -1 - |z_i|^2$ ,  $b = 2 \operatorname{Re}(z_i)$  et  $c = 2 \operatorname{Im}(z_i)$ .

7) Par le 5),  $A(X)$  peut s'écrire comme produit de facteurs d'une des deux formes suivantes :

(i)  $X^2 - (e^{j\theta} + e^{j\varphi})X + e^{j(\theta+\varphi)}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}$ .

(ii)  $X^2 - \frac{1 + |z_i|^2}{\bar{z}_i}X + \frac{z_i}{\bar{z}_i}$  avec  $z_i \in \mathbb{C}, |z_i| \neq 1$ .

Puisque  $A(X)$  est de degré  $2N$ , il y a  $N$  facteurs d'une de ces deux sortes.

On en déduit que  $A(e^{j\omega t})$  peut s'écrire comme produit de  $N$  facteurs de la forme

$$e^{2j\omega t} - (e^{j\theta} + e^{j\varphi})e^{j\omega t} + e^{j(\theta+\varphi)} \quad \text{ou} \quad e^{2j\omega t} - \frac{1+|z_i|^2}{\bar{z}_i} e^{j\omega t} + \frac{z_i}{\bar{z}_i} .$$

Par le 1), on a  $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = (e^{-j\omega t})^N A(e^{j\omega t})$  donc  $x(t)$  peut s'écrire comme produit de  $N$  facteurs de la forme  $e^{-j\omega t} \left( e^{2j\omega t} - (e^{j\theta} + e^{j\varphi})e^{j\omega t} + e^{j(\theta+\varphi)} \right)$  ou  $e^{-j\omega t} \left( e^{2j\omega t} - \frac{1+|z_i|^2}{\bar{z}_i} e^{j\omega t} + \frac{z_i}{\bar{z}_i} \right)$ , c'est à dire de

la forme  $e^{j\omega t} - (e^{j\theta} + e^{j\varphi}) + e^{j(\theta+\varphi)} e^{-j\omega t}$  où  $t \rightarrow e^{j\omega t} - \frac{1+|z_i|^2}{\bar{z}_i} + \frac{z_i}{\bar{z}_i} e^{-j\omega t}$ . D'après le 6, ces facteurs sont, à une constante complexe multiplicative près, des polynômes trigonométriques réels de degré 1, donc  $x(t)$  peut s'écrire comme produit de  $N$  polynômes trigonométriques réel de degré 1 à une constante complexe multiplicative près.

Enfin, puisque  $x(t)$  ne prend que des valeurs réelles, cette constante multiplicative ne peut être que réelle.

### Exercice 18 (polynômes trigonométriques réels généralisés).

- 1) Un polynôme trigonométrique réel correspond au cas particulier où les  $\lambda_k$  sont de la forme  $\lambda_k = k\omega$  pour un certain  $\omega > 0$ .
- 2) a) On a  $x(t) = 2 \Leftrightarrow \cos(t) = 1$  et  $\cos(\sqrt{2} \cdot t) = 1$  ce qui équivaut à ce qu'il existe deux entiers relatifs  $p$  et  $q$  tels que  $t = 2\pi p$  et  $t\sqrt{2} = 2\pi q$ . On a nécessairement  $p = 0$  sinon, on aurait  $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$  ce qui contredirait le fait que  $\sqrt{2}$  est irrationnel. On en déduit que nécessairement  $t = 0$  et une vérification immédiate montre que  $x(0) = 2$ .  
b) Si  $t \rightarrow x(t)$  était une fonction périodique de période  $T > 0$ , on aurait  $x(T) = x(0) = 2$  donc  $T$  serait une solution strictement positive de l'équation  $x(t) = 2$  ce qui est impossible par le a).  
c) On a  $x(t) = -2 \Leftrightarrow \cos(t) = -1$  et  $\cos(\sqrt{2} \cdot t) = -1$  ce qui équivaudrait à ce qu'il existe deux entiers relatifs  $p$  et  $q$  tels que  $t = \pi + 2\pi p$  et  $t\sqrt{2} = \pi + 2\pi q$ . Cela impliquerait que  $\sqrt{2} = \frac{1+2q}{1+2p}$  ce qui contredirait encore le fait que  $\sqrt{2}$  est irrationnel.
- d) (i) On a par dérivation de la relation rappelée ci-dessus :

$$\forall t \neq 1, \forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + 2t + \dots + nt^{n-1} = \frac{nt^{n+1} - (n+1)t^n + 1}{(t-1)^2}$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{(1-t)^2} = 1 + 2t + \dots + nt^{n-1} + \frac{t^n}{(1-t)^2} ((n+1) - nt).$$

puis

$$\frac{t}{(1-t)^2} = t + 2t^2 + \dots + nt^n + \frac{t^{n+1}}{(1-t)^2} ((n+1) - nt).$$

$$(ii) \text{ Pour } n = 0, \text{ on a } t_0^0 = 1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2} \in E .$$

Si  $n$  est un entier tel que  $t_0^n = a + b\sqrt{2}$  avec  $a, b \in \mathbb{Z}$ , alors

$$t_0^{n+1} = (a + b\sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = a - 2b - (a - b)\sqrt{2} \in E, \text{ ce qui prouve l'hérédité.}$$

$$(iii) \text{ Par le résultat du (i) appliqué à } t = t_0 (\neq 1), \text{ on a } \frac{t_0}{2} = t_0 + 2t_0^2 + \dots + nt_0^n + \frac{t_0^{n+1}}{2} (1 + n\sqrt{2}).$$

Puisque  $|t_0| < 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_0^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} nt_0^{n+1} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_0 + 2t_0^2 + \dots + nt_0^n = \frac{t_0}{2}$ .

Il reste à remarquer que par le (ii), chacun des termes de la somme  $t_0 + 2t_0^2 + \dots + nt_0^n$  appartient à  $E$  donc, si l'on pose  $t_0^k = \alpha_k + \beta_k \sqrt{2}$ , on a  $t_0 + 2t_0^2 + \dots + nt_0^n = \sum_{k=1}^n k \alpha_k + \sqrt{2} \cdot \sum_{k=1}^n k \beta_k \in E$  c'est à dire qu'il existe deux suites d'entiers relatifs  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n + b_n \sqrt{2} = t_0 + 2t_0^2 + \dots + nt_0^n$ . On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n \sqrt{2}) = \frac{1}{2} t_0 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$ .

$$(iv) \text{ On a } \cos((1+2b_n)\pi) = -1 \text{ et}$$

$$\cos((1+2b_n)\pi\sqrt{2}) = \cos(\pi(\sqrt{2}+2b_n\sqrt{2})) = \cos(\pi(\sqrt{2}+2(b_n\sqrt{2}+a_n)) - 2\pi a_n)$$

$$= \cos(\pi(\sqrt{2}+2(b_n\sqrt{2}+a_n))).$$

On déduit du 3) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(\sqrt{2}(1+2b_n)\pi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(\pi(\sqrt{2}+2(b_n\sqrt{2}+a_n))) = \cos(\pi(\sqrt{2}+t_0)) = \cos(\pi) = -1$$

d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x((1+2b_n)\pi) = -2$

3) a) On a

$$\frac{1}{T} \int_T^{2T} \left( A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t) \right) dt = A_0 + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} \left( A_n [\sin(\lambda_n t)]_T^{2T} - B_n [\cos(\lambda_n t)]_T^{2T} \right)$$

d'où l'on déduit

$$\left| \frac{1}{T} \int_T^{2T} x(t) dt - A_0 \right| \leq \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N \frac{2}{\lambda_n} (|A_n| + |B_n|) \rightarrow 0 \text{ si } T \rightarrow +\infty.$$

b) On essaye de se ramener au cas du a).

Montrons que  $A_p = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{2}{T} \int_T^{2T} \cos(\lambda_p t) \cdot x(t) dt$ .

On a  $\cos(\lambda_p t) x(t) = A_0 \cos(\lambda_p t) + \sum_{n=1}^N A_n \cos(\lambda_n t) \cos(\lambda_p t) + B_n \sin(\lambda_n t) \cos(\lambda_p t)$

$$= A_0 \cos(\lambda_p t) + \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{2} (\cos((\lambda_n + \lambda_p)t) + \cos((\lambda_n - \lambda_p)t)) + \frac{B_n}{2} (\sin((\lambda_n + \lambda_p)t) + \sin((\lambda_n - \lambda_p)t)),$$

ce qui montre que  $\cos(\lambda_p t) x(t)$  est un PTRG dont le coefficient constant correspond au terme

$$\frac{A_n}{2} \cos((\lambda_n - \lambda_p)t) \text{ avec } n=p, \text{ c'est à dire } \frac{A_p}{2}. \text{ D'après le a), on a donc}$$

$$\frac{A_p}{2} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} \cos(\lambda_p t) \cdot x(t) dt \text{ d'où le résultat.}$$

On montre de même que  $B_p = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{2}{T} \int_T^{2T} \sin(\lambda_p t) \cdot x(t) dt$ . On a

$$\sin(\lambda_p t) x(t) = A_0 \cos(\lambda_p t) + \sum_{n=1}^N A_n \cos(\lambda_n t) \sin(\lambda_p t) + B_n \sin(\lambda_n t) \sin(\lambda_p t)$$

$$= A_0 \sin(\lambda_p t) + \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{2} (\sin((\lambda_n + \lambda_p)t) - \sin((\lambda_n - \lambda_p)t)) + \frac{B_n}{2} (\cos((\lambda_n - \lambda_p)t) - \cos((\lambda_n + \lambda_p)t)),$$

ce qui montre que  $\sin(\lambda_p t) x(t)$  est un PTRG dont le coefficient constant correspond au terme

$$\frac{B_n}{2} \cos((\lambda_n - \lambda_p)t) \text{ avec } n=p, \text{ c'est à dire } \frac{B_p}{2}. \text{ D'après le a), on a donc}$$

$$\frac{B_p}{2} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} \sin(\lambda_p t) \cdot x(t) dt \text{ d'où le résultat.}$$

c) En utilisant les formules d'Euler on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \cos(\lambda_n t) = \frac{e^{j\lambda_n t} + e^{-j\lambda_n t}}{2}, \quad \sin(\lambda_n t) = \frac{e^{j\lambda_n t} - e^{-j\lambda_n t}}{2j}. \text{ En les reportant dans}$$



l'écriture de  $x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t)$ , on obtient que

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \left( \frac{e^{j\lambda_n t} + e^{-j\lambda_n t}}{2} \right) + B_n \left( \frac{e^{j\lambda_n t} - e^{-j\lambda_n t}}{2j} \right) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^N \left( \frac{A_n}{2} + \frac{B_n}{2j} \right) e^{j\lambda_n t} + \sum_{n=1}^N \left( \frac{A_n}{2} - \frac{B_n}{2j} \right) e^{-j\lambda_n t} = A_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n - j B_n}{2} e^{j\lambda_n t} + \sum_{n=1}^N \frac{A_n + j B_n}{2} e^{-j\lambda_n t} \end{aligned}$$

ce qui peut se réécrire :

$$x(t) = \sum_{n=-N}^N C_n e^{j\lambda_n t}, \text{ avec}$$

$$C_n = \frac{A_n - j B_n}{2} \text{ si } n > 0$$

$$C_0 = A_0$$

$$C_{-n} = \frac{A_n + j B_n}{2} = \overline{C_n} \text{ si } n > 0.$$

d) On a  $x^2(t) = A_0 x(t) + \sum_{n=1}^N A_n \cos(\lambda_n t) x(t) + B_n \sin(\lambda_n t) x(t)$  donc

$$\frac{1}{T} \int_T^{2T} x^2(t) dt = \frac{A_0}{T} \int_T^{2T} x(t) dt + \sum_{n=1}^N \left( \frac{A_n}{T} \int_T^{2T} x(t) \cos(\lambda_n t) dt + \frac{B_n}{T} \int_T^{2T} \sin(\lambda_n t) x(t) dt \right).$$

En utilisant les résultats du a) et du b), on a  $A_p = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{2}{T} \int_T^{2T} \cos(\lambda_p t) \cdot x(t) dt$  et

$$A_0 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{2}{T} \int_T^{2T} x(t) dt, \text{ d'où l'on déduit } \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} x^2(t) dt = A_0^2 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2 + B_n^2}{2}.$$

4) a) Si l'ensemble des solutions de l'équation  $x(t) = 0$  est vide, n'importe quel  $T_0 \in \mathbb{R}$  convient. Sinon, c'est qu'il y a un nombre fini de solutions, et n'importe quel  $T_0$  strictement plus grand que la plus grande de ces solutions convient.

b) On a facilement  $X(t) = \sum_{n=1}^N \frac{B_n}{\lambda_n} \cos(\lambda_n t) - \frac{A_n}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t)$  qui convient. Le fait que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} X(t) dt = 0 \text{ découle directement du 3)a) (pas de terme constant).}$$

c) Puisque la fonction  $t \rightarrow x(t)$  est continue et ne s'annule pas sur  $]T_0; +\infty[$ , elle est de signe constant sur ce dernier intervalle, donc  $t \rightarrow X(t)$  est strictement monotone sur  $]T_0; +\infty[$  :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) \text{ existe.}$$

On note enfin que  $\forall t \in \mathbb{R}, |X(t)| \leq \sum_{n=1}^N \frac{|A_n| + |B_n|}{\lambda_n}$  donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t)$  est finie.

d) D'après le 3)a)  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} X(t) dt = 0$ . Or,  $\forall t \geq T_1, l - \varepsilon \leq X(t) \leq l + \varepsilon$  donc par

intégration sur l'intervalle  $[T, 2T]$  on a  $\forall T > T_1, l - \varepsilon \leq \frac{1}{T} \int_T^{2T} X(t) dt \leq l + \varepsilon$  d'où l'on déduit

par passage à la limite que  $l - \varepsilon \leq 0 \leq l + \varepsilon$  d'où  $l^2 \leq \varepsilon^2$ .

Maintenant, par le 3)d),  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} X^2(t) dt = \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2 + B_n^2}{2\lambda_n^2}$  donc l'on déduit de la même façon par

intégration de l'encadrement  $\forall t \geq T_1, l^2 - \varepsilon \leq X^2(t) \leq l^2 + \varepsilon$  la relation

$$\forall t \geq T_1, l^2 - \varepsilon \leq \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2 + B_n^2}{2\lambda_n^2} \leq l^2 + \varepsilon \quad \text{qui implique bien que} \quad l^2 \geq \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2 + B_n^2}{2\lambda_n^2} - \varepsilon .$$

e) La fonction  $t \rightarrow X(t)$  ne peut être nulle, sinon sa dérivée  $t \rightarrow x(t)$  le serait et l'équation  $x(t) = 0$  posséderait une infinité de solutions sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit qu'au moins un des  $A_n$  ou  $B_n$  est non nul et donc que  $\sum_{n=1}^N \frac{A_n^2 + B_n^2}{2\lambda_n^2} > 0$ . Il suffit donc de choisir dès le départ le nombre  $\varepsilon$  assez petit

$$\text{pour que} \quad 0 < \varepsilon^2 + \varepsilon < \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2 + B_n^2}{2\lambda_n^2} \quad \text{afin d'obtenir la contradiction} \quad \varepsilon^2 \geq l^2 \geq \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2 + B_n^2}{2\lambda_n^2} - \varepsilon > \varepsilon^2 .$$

.

## B - SYSTEMES ET TRANSFORMATION DE LAPLACE

L'objectif de ce chapitre est d'aborder la notion de système en théorie du signal : à un « signal d'entrée »  $x(t)$  on associe un « signal de sortie »  $y(t)$  défini par un certain procédé.

Pour avoir des propriétés convenables (en particulier l'invariance dans le temps), la définition de la sortie  $y(t)$  fait intervenir la notion assez complexe de produit de convolution.

Les mathématiciens ont trouvé divers procédés permettant d'éviter de calculer explicitement un produit de convolution, échappant ainsi à de nombreuses difficultés techniques, en travaillant non pas directement avec les signaux  $x(t)$  et  $y(t)$ , mais avec leur « transformées ». Diverses transformées existent selon la situation dans laquelle on se place : la transformée de Laplace pour des signaux causaux, c'est à dire qui commencent à un certain instant  $t=0$ , la transformée de Fourier qui possède de nombreuses et utiles propriétés mathématiques et la transformée de Fourier discrète ou la transformée en Z pour des signaux discrets, c'est à dire des suites de nombres obtenues par exemple par numérisation de signaux analogiques.

**On appellera pour le moment « signal » une fonction continue par morceaux sur  $[0; +\infty[$  et égale à 0 sur  $]-\infty, 0[$ .**

### I) Les différents types de signaux

On considère un signal déterministe, c'est à dire une fonction continue par morceaux  $x(t)$  admettant une expression permettant d'en connaître la valeur à chaque instant  $t$ . Cela s'oppose à la notion de signal aléatoire dont on ne connaît que des paramètres probabilistes (par exemple le bruit blanc).

Un signal  $x(t)$  est dit causal si  $\forall t < 0, x(t) = 0$ .

Par exemple, pour toute fonction  $t \rightarrow f(t)$  définie sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $t \rightarrow f(t)U(t)$  est un signal causal (on rappelle que  $U(t)$  est la fonction échelon (ou dite de Heaviside) définie par les expressions  $U(t) = 0$  si  $t < 0$ , et  $U(t) = 1$  si  $t \geq 0$ .)

Sa valeur moyenne sur  $[0; +\infty[$  est définie par  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \int_0^X x(t) dt$  (sous réserve d'existence de cette limite).

Sa puissance moyenne sur  $[0; +\infty[$  est définie par  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \int_0^X |x(t)|^2 dt$  (sous réserve d'existence de cette limite). Le signal est dit à puissance moyenne finie si cette limite est finie.

Son énergie est définie par  $\int_0^{+\infty} |x(t)|^2 dt$  (sous réserve de convergence de cette intégrale).

Le signal est dit à énergie finie si cette limite est finie.

#### Exemples :

1) Posons  $x(t) = \cos^2(t)$ . Alors

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \int_0^X x(t) dt &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \int_0^X \cos^2(t) dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \int_0^X \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) \right) dt \\ &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \left[ \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin(2t) \right]_0^X = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \left( \frac{X}{2} + \frac{1}{4} \sin(2X) \right) \\ &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sin(2X)}{4X} \right) = \frac{1}{2}, \text{ ce qui prouve que } x(t) \text{ a une valeur moyenne sur } [0; +\infty[ \text{ égale à } \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}$ . Un calcul similaire montrerait que  $x(t)$  est à puissance moyenne finie sur  $[0; +\infty[$  mais pas à énergie finie sur  $[0; +\infty[$ .

2) Le signal  $x(t) = \frac{1}{t+1}$  est à énergie finie sur  $[0; +\infty[$ . En effet,

$$\int_0^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2} dt = \left[ \frac{-1}{t+1} \right]_0^{+\infty} = 1.$$

### Propriété 1.

(i) Un signal à énergie finie est à puissance moyenne nulle.

(ii) Soit  $T > 0$ . Un signal  $T$ -périodique  $x(t)$  est à valeur moyenne finie. De plus cette valeur

moyenne est égale à  $\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$ , c'est à dire sa valeur moyenne sur une période.

(iii) Soit  $T > 0$ . Un signal  $T$ -périodique  $x(t)$  non nul est à puissance moyenne finie et n'est pas à énergie finie. De plus cette puissance moyenne est égale à  $\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$ , c'est à dire la puissance

moyenne sur une période. La quantité  $\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt}$  représente alors la valeur efficace du signal.

### Preuve :

(i) Soit  $x(t)$  un signal à énergie finie. Alors,  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X |x(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} |x(t)|^2 dt \in \mathbb{R}$  et

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} = 0 \text{ donc par produit de limites } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \int_0^X |x(t)|^2 dt = 0. \int_0^{+\infty} |x(t)|^2 dt = 0.$$

(\*) (ii) On considère un signal 1-périodique  $x(t)$  (on prend  $T=1$  pour simplifier les calculs mais la preuve est similaire pour  $T > 0$  quelconque).

Posons  $\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \int_0^1 x(t) dt$  et  $y(t) = x(t) - \langle x \rangle$ . Alors le signal  $t \rightarrow y(t)$  est aussi 1-

périodique et  $\int_0^1 y(t) dt = \int_0^1 (x(t) - \langle x \rangle) dt = \int_0^1 x(t) dt - \int_0^1 \langle x \rangle dt = \langle x \rangle - \langle x \rangle = 0$ .

Par 1-périodicité, on a aussi  $\forall k \in \mathbb{N}, \int_k^{k+1} y(t) dt = 0$ , d'où l'on déduit par la relation de Chasles :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^n y(t) dt = \int_0^1 y(t) dt + \int_1^2 y(t) dt + \dots + \int_{n-1}^n y(t) dt = 0.$$

Soit  $X > 0$ . Soit  $n$  la partie entière de  $X$ , c'est à dire l'unique entier tel que  $n < X \leq n+1$ . Alors

$$\begin{aligned} \int_0^X y(t) dt &= \int_0^n y(t) dt + \int_n^X y(t) dt = \int_n^X y(t) dt \\ &= \int_n^X y(t-n) dt = \int_0^{X-n} y(t) dt \text{ par 1-périodicité de } y, \text{ donc} \end{aligned}$$

$$\left| \int_0^X y(t) dt \right| = \left| \int_0^{X-n} y(t) dt \right| \leq \int_0^{X-n} |y(t)| dt \leq \int_0^1 |y(t)| dt \text{ car } X-n \leq 1.$$

On en déduit que  $\forall X > 0, \left| \frac{1}{X} \int_0^X y(t) dt \right| \leq \frac{1}{X} \int_0^X |y(t)| dt$  donc en faisant  $X \rightarrow +\infty$  on déduit que

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \int_0^X y(t) dt = 0.$$

Maintenant, en remarquant que  $\forall t \geq 0, x(t) = y(t) + \langle x \rangle$ , on a :

$$\forall X > 0, \frac{1}{X} \int_0^X x(t) dt = \frac{1}{X} \int_0^X (y(t) + \langle x \rangle) dt = \frac{1}{X} \int_0^X y(t) dt + \frac{1}{X} \int_0^X \langle x \rangle dt = \frac{1}{X} \int_0^X y(t) dt + \langle x \rangle,$$

donc puisque  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \int_0^X y(t) dt = 0$  cela implique que  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \int_0^X x(t) dt = \langle x \rangle$ .

(iii) En appliquant la preuve du (ii) au signal T-périodique  $t \rightarrow |x(t)|^2$  on prouve que  $x(t)$  est à

puissance moyenne finie égale à  $\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$ . Si  $x(t)$  n'est pas un signal nul sauf en un nombre

fini de points sur une période, alors la puissance moyenne de  $x(t)$  qui vaut  $\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$  est non nulle

et le (i) implique alors que le signal  $x(t)$  est à énergie infinie.

Un signal est dit à durée finie si  $\exists A > 0 : \forall t > A, x(t) = 0$  (on dit aussi qu'il est à support compact).

**Exemple :** si  $0 < a < b$ , la fonction porte  $\Pi_{a,b}$  définie par les expressions  $\Pi_{a,b}(t) = 1$  si  $t \in [a, b[$  et  $\Pi_{a,b}(t) = 0$  sinon est un signal à durée finie (avec  $A = b$  dans la définition).

Un signal est dit borné si on peut encadrer les valeurs de  $x(t)$  par deux constantes indépendantes du temps :  $\exists A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} : \forall t \geq 0, A \leq x(t) \leq B$ .

**Exemple :** la fonction  $t \rightarrow \cos(t)$  est bornée avec  $A = -1$  et  $B = 1$ .

## II) Notion de système

On considère un système causal, c'est à dire un système qui à un signal d'entrée  $x(t)$  causal fait correspondre un signal de sortie  $y(t)$  causal

On suppose ce système :

(i) linéaire : on peut appliquer le principe de superposition, c'est à dire que la sortie correspondant à  $\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)$  sera  $\lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$

(ii) Invariant dans le temps : pour  $a > 0$ , la sortie correspondant à  $x(t-a)$  sera  $y(t-a)$ . Cette définition correspond à l'idée qu'une même cause produira les mêmes effets à un instant donné qu'à un instant ultérieur (mais les effets seront alors décalés dans le temps).

### Exemples:

a) le système  $x(t) \rightarrow t.x(t)$  est clairement linéaire, car la réponse à  $t \rightarrow y(t) = \lambda x_1(t) + \mu x_2(t)$  est  $t \rightarrow t(\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)) = \lambda t x_1(t) + \mu t x_2(t)$  soit  $t \rightarrow \lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$  alors qu'il n'est pas invariant dans le temps. En effet, la réponse à la fonction échelon  $U(t)$  est  $t \rightarrow tU(t)$  qui une fois retardé de 1 sera  $t \rightarrow (t-1)U(t-1)$  alors que la réponse à  $U(t-1)$  est  $t \rightarrow tU(t-1)$  qui est différente de  $t \rightarrow (t-1)U(t-1)$ .

b) Inversement, le système  $x(t) \rightarrow x^2(t)$  n'est pas linéaire car la sortie associée à  $x_1(t) + x_2(t)$  vaut  $x_1^2(t) + x_2^2(t) + 2x_1(t)x_2(t)$  qui est clairement différente de  $y_1(t) + y_2(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$ .

Par contre, ce système est invariant dans le temps car la sortie correspondant à  $x(t-a)$  est  $(x(t-a))^2$  qui est clairement égal à  $y(t-a) = x^2(t-a)$ .

La réponse indicielle est par définition la réponse correspondant à l'échelon  $x(t) = U(t)$ .

**Exemple :** la réponse indicielle au système  $x(t) \rightarrow y(t) = \int_0^t x(s) ds$  est la fonction  $t \rightarrow tU(t)$ .

Un système sera dit stable si la réponse à un signal borné est un signal borné.  
Plus exactement :

**Définition 1** Un système est stable s'il existe une constante  $C > 0$  (constante de stabilité) telle que pour tout signal d'entrée  $x$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, |x(t)| \leq 1$ , la sortie vérifie  $\forall t \in \mathbb{R}, |y(t)| \leq C$ .

**Remarque :** Par linéarité d'un système, cela signifie aussi que pour tout signal d'entrée  $x$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, |x(t)| \leq M$ , la sortie vérifie  $\forall t \in \mathbb{R}, |y(t)| \leq C.M$ . Cela signifie que les valeurs prises par la sortie  $y$  ne peuvent pas être  $C$  fois plus grandes que celles prises par  $x$ . D'autre part, cela signifie aussi qu'une perturbation inférieure à  $\varepsilon$  des valeurs de l'entrée n'entraîne pas de variations supérieures à  $C\varepsilon$  des valeurs de la sortie : une entrée négligeable donne une sortie négligeable.

**Exemple :** le système  $x(t) \rightarrow y(t) = \int_0^t x(s) ds$  n'est pas stable car la réponse à  $x(t) = U(t)$  qui est une fonction bornée, est le signal  $t \rightarrow tU(t)$  qui n'est pas borné (il tend vers  $+\infty$  si  $t \rightarrow +\infty$ ). La constante  $C$  de la définition ci-dessus ne peut pas exister.

Le système  $x(t) \rightarrow y(t) = 3x(t)$  est clairement stable : on peut prendre alors  $C = 3$ .

## III) Représentation d'un système par un produit de convolution

L'expression mathématique de la sortie  $y(t)$  en fonction de l'entrée  $x(t)$  fait intervenir une opération entre fonctions assez compliquée appelée « produit de convolution ». On commence par étudier un exemple.

### III.1) Étude d'un exemple.

Soit le système qui à un signal d'entrée  $x(t)$  fait correspondre la sortie  $y(t)$  solution de l'équation différentielle  $y'(t) - y(t) = x(t)$  avec la condition initiale  $y(0) = 0$ . On vérifie qu'il s'agit d'un Système Causal Linéaire Invariant dans le Temps (SCLIT).

En effet :

Pour la causalité : si  $\forall t < 0, x(t) = 0$  alors  $y(t)$  est solution sur  $]-\infty; 0]$  de l'équation différentielle  $y'(t) - y(t) = 0$  avec la condition initiale  $y(0) = 0$ . Il vient que  $\forall t < 0, y(t) = 0$  donc  $y(t)$  est causale.

Pour la linéarité : Si  $y_1$  et  $y_2$  sont les sorties associées à  $x_1$  et  $x_2$  respectivement, alors, en posant  $y(t) = \lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$  on a d'une part :

$$y'(t) - y(t) = \lambda (y_1'(t) - y_1(t)) + \mu (y_2'(t) - y_2(t)) = \lambda x_1(t) + \mu x_2(t)$$

et d'autre part  $y(0) = 0$  ce qui montre que  $\lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$  est la sortie correspondant à  $\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)$ .

Pour l'invariance dans le temps : en remplaçant  $t$  par  $t-a$  dans l'équation  $y'(t) - y(t) = x(t)$ , on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t-a) - y(t-a) = x(t-a). \text{ En posant } z(t) = y(t-a), \text{ on a ainsi}$$

$\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) - z(t) = x(t-a)$  et  $z(0) = y(-a) = 0$  car  $a > 0$  et  $y(t)$  est causale : le signal  $z(t) = y(t-a)$  est donc bien la sortie associée à  $x(t-a)$ .

On va étudier ce système de plus près. Soit  $s \in \mathbb{R}$  tel que  $x(t)$  soit continue en  $s$ .

On part de l'expression  $y'(s) - y(s) = x(s)$  qui donne  $e^{-s} y'(s) - e^{-s} y(s) = e^{-s} x(s)$ . On reconnaît dans le premier membre  $e^{-s} y'(s) - e^{-s} y(s) = \frac{d}{ds} (e^{-s} y(s))$ , donc notre équation différentielle devient :

$$\frac{d}{ds} (e^{-s} y(s)) = e^{-s} x(s).$$

L'égalité ayant lieu sauf pour éventuellement un nombre fini de point sur chaque intervalle borné ( $x(t)$  est continue par morceaux) on en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, [e^{-s} y(s)]_0^t = \int_0^t e^{-s} x(s) ds \text{ d'où avec la condition } y(0) = 0,$$

$$e^{-t} y(t) = \int_0^t e^{-s} x(s) ds \text{ d'où finalement, pour } t \geq 0 :$$

$$y(t) = e^t \int_0^t e^{-s} x(s) ds = \int_0^t e^t e^{-s} x(s) ds = \int_0^t e^{t-s} x(s) ds = \int_0^t h(t-s) x(s) ds,$$

où on a posé  $h(t) = e^t$ .

On voit sur cet exemple que  $y(t)$  se calcule directement à partir de  $x(t)$  à partir d'une formule du type :

$$y(t) = \int_0^t h(t-s) x(s) ds. \text{ On verra plus loin que ce type de formule est générale : on dira que } y(t) \text{ se}$$

calcule par un produit de convolution entre l'entrée  $x(t)$  et une fonction  $h(t)$  qui ne dépend que du système considéré.

Reprenons l'exemple exploité ci-dessus.

On peut calculer alors directement la réponse indicielle en posant  $x(t) = U(t)$ ,

$$\forall t \geq 0, y(t) = \int_0^t e^{t-s} U(s) ds = \int_0^t e^{t-s} ds = [-e^{t-s}]_0^t = -1 + e^t.$$

On voit alors que ce système n'est pas stable car la réponse à  $U(t)$  n'est pas un signal borné, alors que  $U(t)$  est un signal borné.

### III.2) Produit de convolution.

**Définition 2 :** Étant données deux fonctions  $f$  et  $g$  continues par morceaux et **causales**, on définit leur produit de convolution comme la fonction causale  $f * g$  définie par l'expression :

$$f * g(t) = \int_0^t f(s) g(t-s) ds.$$

On admettra que la fonction  $t \rightarrow f * g(t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (la convolution supprime les discontinuités de première espèce).

**Exemple :** calcul de  $f * g$  avec  $f(t) = e^{-t} U(t)$  et  $g(t) = e^{-2t} U(t)$ .

$$\text{On a } f * g(t) = \int_0^t f(s) g(t-s) ds = \int_0^t e^{-s} U(s) e^{-2(t-s)} U(t-s) ds .$$

Dans le calcul de cette intégrale,  $t$  est fixe et  $s$  est la variable d'intégration qui va de 0 à  $t$ .

Premier cas :  $t < 0$ . Dans ce cas,  $s$  est toujours négatif (sauf pour  $s=0$ ) et donc  $U(s)=0$  donc  $f * g(t)=0$ .

Deuxième cas :  $t \geq 0$ . Dans ce cas, dans l'intégrale, on a  $0 \leq s \leq t$  donc  $s \geq 0$  et  $t-s \geq 0$  d'où l'on déduit que  $U(s)=U(t-s)=1$ . On a alors :

$$f * g(t) = \int_0^t e^{-s} e^{-2(t-s)} ds = \int_0^t e^{s-2t} ds = [e^{s-2t}]_0^t \quad (\text{on primitive la fonction } s \rightarrow e^{s-2t} \text{ et } t \text{ est une constante ici})$$

$$f * g(t) = e^{-t} - e^{-2t}.$$

Conclusion :  $\forall t \in \mathbb{R}, f * g(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) U(t)$ .

### Propriété 2 :

On considère trois fonctions  $f, g$  et  $h$  continues par morceaux et causales. Alors :

(i)  $f * g = g * f$

(ii)  $f * (g + h) = f * g + f * h$

(iii)  $f * g$  causale.

(iv) la fonction  $f * g$  est continue, et si  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ , alors  $f * g$  dérivable par morceaux avec  $(f * g)'(x) = (f' * g)(x) + f(0^+)g(x)$ .

### Preuve :

(i)  $f * g(t) = \int_0^t f(s) g(t-s) ds$ . On fait le changement de variable  $\sigma = t-s$ . Si  $s$  va de 0 à  $t$ ,  $\sigma$  va de  $t$  à 0. De plus,  $s = t - \sigma$  et  $ds = -d\sigma$  d'où :

$$\begin{aligned} f * g(t) &= \int_0^t f(s) g(t-s) ds = \int_t^0 f(t-\sigma) g(\sigma) (-d\sigma) = - \int_t^0 g(\sigma) f(t-\sigma) (d\sigma) \\ &= \int_0^t g(\sigma) f(t-\sigma) (d\sigma) = g * f(t). \end{aligned}$$

(ii)  $f * (g + h)(t) = \int_0^t f(s) (g(t-s) + h(t-s)) ds = \int_0^t f(s) g(t-s) + f(s) h(t-s) ds$

$$= \int_0^t f(s) g(t-s) ds + \int_0^t f(s) h(t-s) ds = f * g(t) + f * h(t) .$$

(iii) Si  $t < 0$ , alors dans l'expression  $f * g(t) = \int_0^t f(s) g(t-s) ds$ , la variable  $s$  est toujours négative, donc  $f(s) = 0$  sauf éventuellement pour  $s=0$ . On en déduit que  $f * g(t) = 0$ .

(iv) Admis (théorème de dérivation sous le signe  $\int$ .)

**Exemple :** effet de la convolution d'un signal par  $U(t)$ .

Si  $x$  est un signal continu, alors la fonction  $x * U$  est la primitive de  $x$  qui s'annule en 0 (ou autrement dit,

l'unique primitive causale de  $x(t)$ . En effet :  $f * U(t) = \int_0^t f(s) U(t-s) ds$ . Si  $t > 0$ ,

$\forall s \in [0; t], t-s \geq 0$  ce qui implique que  $U(t-s) = 1$  dans l'intégrale ci-dessus donc



$$f * U(t) = \int_0^t f(s) ds.$$

Remarque : si  $x(t)$  est seulement continue par morceaux, alors  $x * U$  est alors l'unique pseudo-primitive causale de  $x(t)$ .

### III.3) Représentation d'un système par un produit de convolution.

Tout comme le système étudié au **1**), on peut, pour la plupart des systèmes SCLIT (et tous ceux qu'on étudiera) écrire la sortie  $y(t)$  sous la forme  $y(t) = (h * x)(t)$ , où  $h$  est une fonction causale, indépendante de l'entrée  $x(t)$ .

**Propriété 3:** Soit  $h$  une fonction continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  et causale. Alors, le système qui à tout signal  $x(t)$  associe le signal continu  $y(t) = (h * x)(t)$  est un SCLIT.

On appellera ce genre de système un système à noyau de convolution ou, plus simplement, un système de convolution.

Preuve : La linéarité est évidente comme conséquence de la propriété 2(ii), et la causalité découle du (iii) de la même propriété. Il reste à prouver l'invariance dans le temps.

Soit  $a > 0$  et  $x(t)$  un signal. On définit par  $R_a(x)(t)$  le signal  $x(t)$  retardé de  $a$ . Alors :

$$R_a(x) * h(t) = \int_0^t R_a(x)(s) h(t-s) ds = \int_0^t x(s-a) h(t-s) ds.$$

En faisant le changement de variables  $\sigma = s - a$  on obtient que

$$R_a(x) * h(t) = \int_{-a}^{t-a} x(\sigma) h(t - (\sigma + a)) d\sigma = \int_0^{t-a} x(\sigma) h((t-a) - \sigma) d\sigma$$

vu que par causalité de  $x(t)$ ,  $\int_{-a}^0 x(\sigma) h((t-a) - \sigma) d\sigma = 0$ .

On en déduit que  $R_a(x) * h(t) = \int_0^{t-a} x(\sigma) h((t-a) - \sigma) d\sigma = (x * h)(t-a) = R_a(x * h)(t)$

ce que l'on peut écrire de façon plus compacte :

$$R_a(x) * h = R_a(x * h).$$

**Théorème 1.** Un système est stable si et seulement si  $\int_0^{+\infty} |h(t)| dt$  converge

Preuve : On ne prouvera ici que l'implication :

$$\int_0^{+\infty} |h(t)| dt \text{ converge} \implies \text{système stable.}$$

Supposons donc que  $\int_0^{+\infty} |h(t)| dt$  converge. Soit  $x(t)$  un signal d'entrée borné :

$$\exists M > 0 \text{ tq } \forall t \in \mathbb{R}, -M \leq x(t) \leq M.$$

Alors, pour tout réel  $t$  positif on a :

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t h(s) x(t-s) ds \right| \leq \int_0^t |h(s) x(t-s)| ds = \int_0^t |h(s)| \cdot |x(t-s)| ds \\ &\leq \int_0^t M |h(s)| ds = M \int_0^t |h(s)| ds \leq M \int_0^{+\infty} |h(s)| ds. \end{aligned}$$

Cela prouve que  $y(t)$  est borné par  $-M \int_0^{+\infty} |h(s)| ds$  et  $+M \int_0^{+\infty} |h(s)| ds$ .

On en déduit alors que pour tout signal d'entrée  $x$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, |x(t)| \leq M$ , la sortie vérifie

$\forall t \in \mathbb{R}, |y(t)| \leq C.M$  avec  $C = \int_0^{+\infty} |h(t)| dt$ . (on pourrait d'ailleurs prouver que c'est la plus petite constante  $C$  qui convienne : c'est ce que l'on appelle quelquefois « constante de stabilité du système ».)

**NB** : dans les systèmes rencontrés en physique, on utilisera plus volontiers le Théorème 4 qui sera vu plus loin et qui est plus facile d'application.

### III.4) Distribution de Dirac (approche physique).

On est amené quelquefois à considérer des signaux qui ne sont pas des fonctions : c'est le cas des impulsions à durée très courte, qui peuvent être modélisées par des distributions, c'est à dire des objets mathématiques qui généralisent la notion de fonction (on appelle quelquefois ces distributions des « fonctions généralisées »). La théorie des distributions, développée par L. Schwartz, est très difficile. Nous allons nous concentrer sur une distribution particulière, appelée distribution de Dirac, et la définir de façon simple. On peut définir de façon approximative l'impulsion de Dirac  $\delta$  comme la « limite » de la fonction,

$$\delta^{(\epsilon)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{si } 0 \leq x < \epsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ avec } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Si  $\epsilon$  est assez petit, on peut voir que  $\delta^{(\epsilon)}(t)$  est une fonction porte de hauteur très grande et de base très petite, avec la condition  $\int_0^{+\infty} \delta^{(\epsilon)}(t) dt = 1$ .

Il faut faire attention avec le terme de « limite » dans cette définition à ne pas en déduire directement que, quand  $\epsilon \rightarrow 0^+$ ,  $\delta(t) = 0$  si  $t \neq 0$  et  $\delta(0) = +\infty$  : c'est ce que l'on dit parfois, mais c'est un abus de langage car ces égalités n'ont pas de sens, la distribution  $\delta$  n'est pas une fonction. Il faut comprendre cette limite quand  $\epsilon \rightarrow 0^+$  par l'effet que produit la fonction  $\delta^{(\epsilon)}(t)$  dans le calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\epsilon)}(t) \varphi(t) dt$  pour une fonction arbitraire  $\varphi$  continue sur  $\mathbb{R}$  (voir proposition 4 ci-dessous) : on parle de limite au sens des distributions.

On considérera aussi, pour  $a > 0$ , la distribution  $\delta_a$ , le Dirac retardé de  $a$ , de la même façon en

considérant la limite au sens des distributions des fonctions  $\delta_a^{(\epsilon)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{si } a \leq x < a + \epsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ avec}$

$\epsilon \rightarrow 0^+$ .

On a la propriété fondamentale :

#### Propriété 4

Si  $\varphi$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  alors  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\epsilon)}(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$ , ce qu'on écrira de façon

abusive  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$ . Si  $\varphi$  est une fonction continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\epsilon)}(t) \varphi(t) dt = \varphi(0^+), \text{ ce qu'on écrira de façon abusive } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0^+).$$

**Preuve :** Soit  $n$  un entier naturel. Si  $\epsilon$  est assez petit, on a alors :

$$(1) \quad \forall t \in ]0; \epsilon], \varphi(0^+) - 10^{-n} \leq \varphi(t) \leq \varphi(0^+) + 10^{-n}.$$

Pour un tel  $\epsilon$  on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\epsilon)}(t) \varphi(t) dt = \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \varphi(t) dt$ , c'est à dire la valeur moyenne de  $\varphi$  sur  $[0; \epsilon]$

On déduit alors par intégration de (1) que pour  $\epsilon$  est assez petit :

$$\varphi(0^+) - 10^{-n} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\epsilon)}(t) \varphi(t) dt \leq \varphi(0^+) + 10^{-n}.$$

Ceci étant vrai pour tout entier  $n$  cela signifie que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\epsilon)}(t) \varphi(t) dt = \varphi(0^+)$ .

De la propriété 4, on déduit alors :

### Propriété 5

Pour tout signal  $x(t)$  on a :

- (i)  $\forall t \in \mathbb{R}, (\delta * x)(t) = x(t^-)$ , (ii)  $(\delta_a * x)(t) = x(t^- - a)$ , (iii)  $(\delta_a * \delta_b) = \delta_{a+b}$   
 (iv)  $x(t)\delta = x(0^+)\delta$ , (v)  $x(t)\delta_a = x(a^+)\delta_a$

### Remarque :

- 1) on ne peut pas donner de sens mathématique à  $\delta_a \cdot \delta_b$ .  
 2) Le signal  $t \rightarrow x(t)$  étant continu par morceaux, on a  $x(t^-) = x(t)$  sauf pour les éventuelles discontinuités (qui sont en nombre localement fini)

### (\* Preuve :

(i) Soit  $\varepsilon > 0$ . On calcule :  $\delta^{(\varepsilon)} * x(t) = \int_0^t \delta^{(\varepsilon)}(s) x(t-s) ds$ .

Si  $t < 0$ , par causalité de  $x(t)$  on a  $\delta^{(\varepsilon)} * x(t) = 0$  donc  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta^{(\varepsilon)} * x(t) = 0 = x(t^-)$  (encore par causalité de  $x(t)$ ).

Si  $t = 0$   $\delta^{(\varepsilon)} * x(0) = 0 = x(0^-)$  (par causalité de  $x(t)$ ).

Si  $t > 0$ , pour tout  $\varepsilon \in ]0; t[$  on a  $\delta^{(\varepsilon)} * x(t) = \int_0^t \delta^{(\varepsilon)}(s) x(t-s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(s) x(t-s) ds$  car

$\forall s \notin ]0; t[, \delta^{(\varepsilon)}(s) = 0$  donc par la propriété 4, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta^{(\varepsilon)} * x(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(s) x(t-s) ds = x(t-0^+) = x(t^-).$$

On a donc  $\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta^{(\varepsilon)} * x(t) = x(t^-)$  ce qui signifie que  $\delta * x(t) = x(t^-)$ .

(ii) On part de la relation  $R_a(y) * x = R_a(y * x)$  établie dans la preuve de la propriété 3, valable pour  $a > 0$  et pour tous signaux  $x$  et  $y$  continus par morceaux. On l'applique avec  $y = \delta^{(\varepsilon)}$  :

$$\delta_a^{(\varepsilon)} * x = R_a(\delta^{(\varepsilon)} * x) \text{ donc } \forall t \in \mathbb{R}, \delta_a^{(\varepsilon)} * x(t) = (\delta^{(\varepsilon)} * x)(t-a) \text{ donc}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\delta_a^{(\varepsilon)} * x)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\delta^{(\varepsilon)} * x)(t-a) = x(t^- - a) \text{ d'après le (i). Cela signifie que}$$

$$(\delta_a * x)(t) = x(t^- - a).$$

(iii) On applique le (ii) avec  $x = \delta_b^{(\varepsilon)}$  :  $(\delta_a * \delta_b^{(\varepsilon)})(t) = \delta_b^{(\varepsilon)}(t^- - a) = \delta_{a+b}^{(\varepsilon)}(t^-)$ . On aboutit à (iii) en faisant  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

(iv) Si  $\varphi$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et si  $\varepsilon > 0$  alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x(t)\delta^{(\varepsilon)}(t))\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(t)(x(t)\varphi(t)) dt$$

donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t)\delta^{(\varepsilon)}(t))\varphi(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(t)(x(t)\varphi(t)) dt = x(0^+)\varphi(0) \text{ par la propriété 4 appliquée à}$$

$x(t)\varphi(t)$  à la place de  $\varphi(t)$ . Or, on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(0^+)\delta\varphi = x(0^+)\varphi(0)$  Cela signifie que pour toute

fonction continue  $\varphi$  on a :  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t)\delta^{(\varepsilon)}(t))\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(0^+)\delta)\varphi$  d'où  $x(t)\delta = x(0^+)\delta$ .

(v) Si  $\varphi$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et si  $\varepsilon > 0$  alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x(t)\delta_a^{(\varepsilon)}(t))\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a^{(\varepsilon)}(t)(x(t)\varphi(t)) dt$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) \delta_a^{(\varepsilon)}(t)) \varphi(t) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a^{(\varepsilon)}(t) (x(t) \varphi(t)) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(t-a) (x(t) \varphi(t)) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(s) (x(s+a) \varphi(s+a)) ds \quad \text{par changement de variable } t = s+a, \\ &= x(0^+ + a) \varphi(0^+ + a) = x(a^+) \varphi(a) \quad \text{par la propriété 4 appliquée à } x(t+a) \varphi(t+a) \text{ à la place de } \varphi(t). \end{aligned}$$

Or, on a aussi  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(a^+) \delta \varphi = x(a^+) \varphi(a)$  Cela signifie que pour toute fonction continue  $\varphi$  on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) \delta_a^{(\varepsilon)}(t)) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(a^+) \delta_a) \varphi \quad \text{d'où } x(t) \delta_a = x(a^+) \delta_a.$$

La notion de distribution de Dirac permet de donner un sens à la fonction  $h$  qui intervient dans la définition du système de la propriété 3.

### Propriété 6

Soit un système  $(S): x(t) \rightarrow y(t)$  s'écrivant  $y(t) = (h * x)(t)$  avec  $h$  continue. Alors :

- (i)  $h(t)$  est la réponse à l'entrée  $x(t) = \delta$ .
- (ii)  $h(t)$  est la dérivée de la réponse indicielle.

### Preuve :

(i) En remplaçant  $x$  par  $\delta$  dans la définition de  $y(t)$  on a :  $y(t) = (h * \delta)(t) = h(t)$  pour tous les points de continuité de  $h(t)$  par le 1) de la propriété 5, c'est à dire en tout point ici.

(ii) La réponse indicielle est  $y(t) = h * U(t)$  : c'est, par l'exemple qui suit la propriété 2, l'unique primitive causale de  $h$ .

**Remarque :** si  $h$  est seulement continue par morceaux (ce qui est assez fréquent), alors la fonction  $t \rightarrow h(t)$  est la réponse à l'entrée  $x(t) = \delta$ . Les fonctions  $t \rightarrow h(t)$  et  $t \rightarrow h(t)$  diffèrent seulement en un nombre localement fini de points et elles sont en général confondues.

D'autre part, toujours dans ce cas là, on peut seulement dire que  $h(t)$  est la pseudo-dérivée de la réponse indicielle.

La distribution de Dirac représentant en physique une impulsion de durée négligeable, la définition suivante est naturelle :

**Définition 3** La fonction  $h(t)$  est appelée réponse impulsionnelle du système.

**Exemple :** On considère le système de réponse impulsionnelle  $h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} U(t)$  où  $\tau$  est un paramètre strictement positif.

Alors, par le (ii) de la propriété 6, la réponse indicielle est  $y_{\text{ind}}(t) = \int_0^t h(s) ds = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{si } t \geq 0. \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ .

On voit aussi que  $\int_0^{+\infty} |h(s)| ds = 1$  donc le système est stable (Théorème 1).

## IV) Transformation de Laplace

L'objectif de ce paragraphe est le suivant : définir un procédé mathématique qui transforme un signal  $x(t)$  en une fonction  $X(p)$  ( $p$  étant une variable complexe) et ayant comme propriété de transformer les produits de convolution en produit simple, c'est à dire que si

$$y(t) = (x * h)(t) \text{ alors on aura :} \\ Y(p) = H(p)X(p).$$

Ainsi, un système de convolution se ramènera à une multiplication par la fonction  $H(p)$  de la transformée du signal d'entrée : les calculs deviendront alors plus simples et, en particulier, on évitera le calcul parfois très technique du produit de convolution  $(x * h)(t)$ .

### IV.1) Définition de la transformation de Laplace

**Définition 4.** Soit  $x(t)$  un signal. On appelle transformée de Laplace de  $x(t)$ , et on note  $L(x)$ ,

$$\text{l'application } L(x): \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ p & \rightarrow & \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt \end{cases}$$

**Remarques importantes :**  $L(x)$  est une fonction de la variable complexe  $p \in \mathbb{C}$ . Elle n'est pas forcément définie pour toute valeur de  $p$ , et peut très bien n'être définie pour aucune valeur de  $p$  (par exemple si  $x(t) = e^t$ ).

On peut déjà observer tout de suite que la transformée de Laplace agit de façon linéaire, c'est à dire que si  $\lambda \in \mathbb{C}$  et si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont deux signaux, alors quel que soit le nombre complexe  $p$  tel que  $L(x)(p)$  et  $L(y)(p)$  soient définis, on a :

$$L(\lambda x)(p) = \lambda L(x)(p) \\ L(x + y)(p) = L(x)(p) + L(y)(p).$$

Cela résulte bien sur des propriétés de linéarité de l'intégrale.

On va voir une condition peu contraignante sur  $x(t)$  pour que  $L(x)$  soit défini au moins sur un demi-plan complexe.

**Définition 5** On dit que le signal  $x(t)$  est à croissance au plus exponentielle si quel que soit  $t$  on a  $|x(t)| \leq M e^{At}$  pour certaines constantes  $M$  et  $A$ . On dira dans ce cas que  $x(t)$  est du type  $E_A$ .

**Exemples :**

Si  $x(t) = t U(t)$ , alors quel que soit  $A > 0$ ,  $x(t)$  est du type  $E_A$ .

En effet, d'après les croissances comparées, la fonction  $t \rightarrow t U(t) e^{-At}$  tend vers 0 si  $t \rightarrow +\infty$ . On en déduit que la fonction  $t \rightarrow t U(t) e^{-At}$  est bornée :  $\forall A > 0, \exists M > 0 : \forall t \in \mathbb{R}, |t U(t) e^{-At}| \leq M$  d'où :  $\forall A > 0, \exists M > 0 : \forall t \in \mathbb{R}, |t U(t)| \leq M e^{At}$ .

Si  $x(t) = e^{\alpha t} U(t)$ , alors quel que soit  $A \geq \alpha$ ,  $x(t)$  est du type  $E_A$ . En effet, si,  $A \geq \alpha$   $|x(t) e^{-At}| = |e^{\alpha t} e^{-At} U(t)| = |e^{(\alpha-A)t} U(t)| \leq 1$  (si  $t < 0$ ,  $e^{(\alpha-A)t} U(t) = 0$  et si  $t \geq 0$ ,  $e^{(\alpha-A)t} U(t) = e^{(\alpha-A)t}$  est compris entre 0 et 1 car  $(\alpha-A)t \leq 0$ ) d'où  $|x(t)| \leq 1 \cdot e^{At}$ .

**Remarque :** on admettra par la suite que la somme, le produit et le produit de convolution de deux fonctions à croissance au plus exponentielle est aussi une fonction à croissance au plus exponentielle (preuve en annexe du chapitre).

### Propriété 7

Soit  $x(t)$  un signal du type  $E_A$  avec  $A \in \mathbb{R}$ . Alors l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt$  est absolument convergente pour tout nombre complexe  $p$  tel que  $\operatorname{Re}(p) > A$ . Dit autrement, la transformée de Laplace  $L(x)$  est définie (au moins) sur le demi plan complexe  $\{p \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(p) > A\}$

Preuve : Soit un nombre complexe  $p$  tel que  $\operatorname{Re}(p) > A$ .

Puisque  $x(t)$  est un signal du type  $E_A$ , il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) \leq M e^{At}$  donc :

$$\int_0^{+\infty} |x(t) e^{-pt}| dt \leq |M| \int_0^{+\infty} |e^{At} e^{-pt}| dt = |M| \int_0^{+\infty} |e^{(A-p)t}| dt.$$

Or,  $|e^{(A-p)t}| = e^{\operatorname{Re}((A-p)t)} = e^{(A-\operatorname{Re}(p))t}$  car  $A$  et  $t$  sont réels donc l'inégalité ci-dessus donne :

$$\int_0^{+\infty} |x(t) e^{-pt}| dt \leq |M| \int_0^{+\infty} e^{(A-\operatorname{Re}(p))t} dt.$$

Puisque  $A - \operatorname{Re}(p) < 0$ , alors l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{(A-\operatorname{Re}(p))t} dt$  converge donc par le critère de comparaison

des intégrales généralisées de fonctions positives, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} |x(t) e^{-pt}| dt$  donc l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt \text{ est absolument convergente.}$$

Par exemple, si  $x(t) = e^{-t} U(t)$ ,  $L(x)(p) = \frac{1}{p+1}$  : c'est une fonction de la variable complexe  $p$  définie pour  $\operatorname{Re}(p) > -1$ .

En effet,  $x(t)$  un signal du type  $E_{-1}$  donc sa transformée de Laplace est définie pour  $\{p \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(p) > -1\}$ .

D'autre part, si  $\operatorname{Re}(p) > -1$ , alors

$$\int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(-1-p)t} dt = \left[ \frac{1}{-1-p} e^{(-1-p)t} \right]_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{-1-p} = \frac{1}{p+1}.$$

### Remarques:

1) Pour l'exemple ci-dessus, la fonction  $p \rightarrow \frac{1}{p+1}$  n'est pas seulement définie pour

$\{p \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(p) > -1\}$  mais sur  $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ . Pourtant, dans le cas qui nous intéresse ici, la transformée de Laplace de  $x(t) = e^{-t} U(t)$  ne peut pas être définie sur  $\{p \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(p) < -1\}$  alors que

$p \rightarrow \frac{1}{p+1}$  l'est : on dit que la fonction  $p \rightarrow \frac{1}{p+1}$  est un prolongement analytique de  $L(x)$  sur  $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ .

2) On dispose de tables permettant de calculer les transformées de Laplace de signaux usuels, sans avoir, comme on vient de le faire, à effectuer le calcul de l'intégrale.

3) On pourrait de la même façon prouver que si  $a \in \mathbb{C}$  et si  $x(t) = e^{-at} U(t)$ ,  $L(x)(p) = \frac{1}{p+a}$  pour  $\operatorname{Re}(p) > -\operatorname{Re}(a)$ .

On peut aussi définir la transformée de Laplace de distributions..... Pour les distributions de Dirac, on a :

### Propriété 8

$$\mathcal{L}(\delta)(p) = 1, \quad \mathcal{L}(\delta_a)(p) = e^{-ap}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0 \Rightarrow U(p) = \frac{1}{p}.$$

Preuve :

Soit  $\varepsilon > 0$ .

$$\text{On calcule } \mathcal{L}(\delta^{(\varepsilon)})(p) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} e^{-pt} dt = \frac{1}{\varepsilon} \left[ -\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{\varepsilon} = \left( \frac{-1}{p} \right) \frac{e^{-p\varepsilon} - 1}{\varepsilon}.$$

Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la quantité  $\frac{e^{-p\varepsilon} - 1}{\varepsilon} = \frac{e^{-p\varepsilon} - e^0}{\varepsilon}$  tend vers le nombre dérivé de la fonction  $t \rightarrow e^{-pt}$  en 0, c'est à dire vers  $-p$ . On en déduit :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}(\delta^{(\varepsilon)})(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{-1}{p} \right) \frac{e^{-p\varepsilon} - 1}{\varepsilon} = \left( \frac{-1}{p} \right) \cdot (-p) = 1 \text{ d'où, } \mathcal{L}(\delta)(p) = 1.$$

On calcule maintenant

$$\mathcal{L}(\delta_a^{(\varepsilon)})(p) = \frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} e^{-pt} dt = \frac{1}{\varepsilon} \left[ -\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_a^{a+\varepsilon} = \left( \frac{-1}{p} \right) \frac{e^{-p(a+\varepsilon)} - e^{-pa}}{\varepsilon} = \left( \frac{-e^{-pa}}{p} \right) \frac{e^{-p\varepsilon} - 1}{\varepsilon}$$

Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la quantité  $\frac{e^{-p\varepsilon} - 1}{\varepsilon}$  tend vers  $-p$ . On en déduit :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}(\delta_a^{(\varepsilon)})(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{-e^{-pa}}{p} \right) \frac{e^{-p\varepsilon} - 1}{\varepsilon} = \left( \frac{-e^{-pa}}{p} \right) \cdot (-p) = e^{-pa}.$$

On en déduit alors  $\mathcal{L}(\delta_a)(p) = e^{-ap}$ .

Enfin, la fonction échelon  $U(t)$  est du type  $E_0$  donc sa transformée de Laplace est définie pour tout nombre complexe de partie réelle strictement positive. Si  $\operatorname{Re}(p) > 0$ ,

$$U(p) = \int_0^{+\infty} U(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \left[ \frac{1}{-p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{-p} = \frac{1}{p}.$$

A partir de maintenant pour simplifier les notations, on note  $\mathcal{L}(x)(p)$  par  $X(p)$ , la majuscule signifiant que l'on a pris la transformée de Laplace (ne pas confondre  $X(t)$  primitive de  $x(t)$  avec  $X(p)$ !).

**On suppose à partir de maintenant que tous les signaux considérés sont causaux, continus par morceaux et à croissance au plus exponentielle.**

Ils pourront aussi éventuellement être à valeurs complexes (quitte à travailler séparément sur les parties réelles et imaginaires).

## IV.2) Propriétés de la transformée de Laplace.

On arrive au résultat principal de ce cours.

**Théorème 2** La transformation de Laplace transforme le produit de convolution en produit simple.

Autrement dit :  $x * y$  est aussi un signal à croissance au plus exponentielle et :

$$\mathcal{L}(x * y)(p) = X(p) \cdot Y(p)$$

pour tout complexe  $p$  tel que  $X(p)$  et  $Y(p)$  soient définis.

La preuve de ce théorème utilise des résultats d'intégration hors programme. Nous donnerons cependant une idée de la démonstration, vu le caractère fondamental de ce théorème.

(\*) Idée de preuve : Si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont causaux, continus par morceaux et à croissance au plus exponentielle, alors  $x * y$  est une fonction causale (propriété 2), continue (définition 2) et à croissance au plus exponentielle (remarque suivant la définition 5).

On a :

$$L(x * y)(p) = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^t x(s) y(t-s) ds \right) e^{-pt} dt.$$

La quantité  $e^{-pt}$  ne dépend pas de la variable  $s$  donc pour tout réel  $t$  on a :

$$\left( \int_0^t x(s) y(t-s) ds \right) e^{-pt} = \int_0^t x(s) y(t-s) e^{-pt} ds$$

On remarque que  $\int_0^t x(s) y(t-s) e^{-pt} ds = \int_0^{+\infty} x(s) y(t-s) e^{-pt} ds$  car la fonction  $t \rightarrow y(t)$  étant causale, on a  $\forall s > t, y(t-s) = 0$ .

Cela conduit à écrire :  $L(x * y)(p) = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^t x(s) y(t-s) e^{-pt} ds \right) dt = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} x(s) y(t-s) e^{-pt} ds \right) dt$ .

En remarquant que  $e^{-pt} = e^{-p(t-s)} e^{-ps}$  on obtient :

$$(1) \quad L(x * y)(p) = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} x(s) y(t-s) e^{-p(t-s)} e^{-ps} ds \right) dt.$$

Dans l'écriture ci-dessus, on voit que la fonction à deux variables  $(s, t) \rightarrow x(s) y(t-s) e^{-p(t-s)} e^{-ps}$  est intégrée de  $0$  à  $+\infty$  par rapport à la variable  $s$ , puis par rapport à la variable  $t$ . Un Théorème (Théorème de Fubini, dont les hypothèses sont vérifiées si la partie réelle de  $p$  est assez grande car les fonctions  $x$  et  $y$  sont à croissance d'ordre au plus exponentielle) permet de dire que l'on obtient le même résultat en intégrant d'abord par rapport à  $t$  puis par rapport à  $s$ . Ainsi, de (1) on déduit :

$$L(x * y)(p) = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} x(s) y(t-s) e^{-p(t-s)} e^{-ps} dt \right) ds.$$

Dans l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x(s) y(t-s) e^{-p(t-s)} e^{-ps} dt$  la quantité  $x(s) e^{-ps}$  est indépendant de la variable d'intégration  $t$  donc on obtient :

$$(2) \quad L(x * y)(p) = \int_0^{+\infty} x(s) e^{-ps} \left( \int_0^{+\infty} y(t-s) e^{-p(t-s)} dt \right) ds. \quad \text{Pour } s \text{ fixé, en posant } \sigma = t - s \text{ dans}$$

l'intégrale  $\int_0^{+\infty} y(t-s) e^{-p(t-s)} dt$  on obtient

$$\int_0^{+\infty} y(t-s) e^{-p(t-s)} dt = \int_{-s}^{+\infty} y(\sigma) e^{-p\sigma} d\sigma = \int_{-s}^0 y(\sigma) e^{-p\sigma} d\sigma + \int_0^{+\infty} y(\sigma) e^{-p\sigma} d\sigma = \int_0^{+\infty} y(\sigma) e^{-p\sigma} d\sigma$$

car la fonction  $y$  est causale. Ainsi, de (2) on déduit :

$$L(x * y)(p) = \int_0^{+\infty} x(s) e^{-ps} \left( \int_0^{+\infty} y(\sigma) e^{-p\sigma} d\sigma \right) ds.$$

Dans l'égalité ci-dessus la quantité  $\int_0^{+\infty} y(\sigma) e^{-p\sigma} d\sigma$  est une constante par rapport à la variable d'intégration  $s$  ce qui donne :

$$L(x * y)(p) = \int_0^{+\infty} y(\sigma) e^{-p\sigma} d\sigma \cdot \int_0^{+\infty} x(s) e^{-ps} ds = L(y)(p) \cdot L(x)(p).$$

Les deux propriétés suivantes permettent de calculer, à partir de formules de calcul de transformées de Laplace de signaux élémentaires, de nombreuses transformées de Laplace.



**Propriété 9 (« théorème du retard »)**

Soit  $x(t)$  un signal dont la transformée de Laplace  $X(p)$  est définie sur  $\{p \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(p) > A\}$ .

$$(i) \forall a > 0, \mathcal{L}(x(t-a))(p) = e^{-ap} X(p) \quad \forall p \in \{p \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(p) > A\}.$$

$$(ii) \forall \alpha \in \mathbb{C}, \mathcal{L}(e^{\alpha t} x(t))(p) = X(p-\alpha) \quad \forall p \in \{p \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(p) > A + \alpha\}.$$

**Preuve :**

(i) Soit  $x(t)$  un signal du type  $E_A$  avec  $A \in \mathbb{R}$ . Alors si  $p \in \mathbb{C}$  est tel que  $\operatorname{Re}(p) > A$ ,

$$e^{-ap} X(p) = e^{-ap} \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-ap} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-p(t+a)} dt.$$

On fait le changement de variables  $s = t + a$  qui donne :

$$e^{-ap} X(p) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-p(t+a)} dt = \int_a^{+\infty} x(s-a) e^{-ps} ds = \int_0^{+\infty} x(s-a) e^{-ps} ds$$

car  $x$  étant causale,  $\forall s \in [0; a], x(s-a) = 0$ .

On en déduit  $e^{-ap} X(p) = \mathcal{L}(x(t-a))(p)$ .

(ii) Soit  $x(t)$  un signal du type  $E_A$  avec  $A \in \mathbb{R}$ . Alors  $e^{\alpha t} x(t)$  est un signal du type  $E_{A+\operatorname{Re}(\alpha)}$  et si  $p \in \mathbb{C}$  est tel que  $\operatorname{Re}(p) > A + \operatorname{Re}(\alpha)$ :

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t} x(t))(p) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} x(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} x(t) e^{(\alpha-p)t} dt = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-(p-\alpha)t} dt = X(p-\alpha).$$

**Exemple :** sachant que pour  $f(t) = t^2 U(t)$ ,  $F(p) = \frac{2}{p^3}$ , alors :

la transformée de Laplace de  $t \rightarrow (t-1)^2 U(t-1)$  est  $F(p) = \frac{2e^{-p}}{p^3}$ , (utilisation du (i) avec  $a=1$ )

la transformée de Laplace de  $t \rightarrow e^{-t} t^2 U(t)$  est  $F(p) = \frac{2}{(p+1)^3}$  (utilisation du (ii) avec  $\alpha = -1$ .)

La propriété suivante nous sera fondamentale pour appliquer la transformée de Laplace à la résolution d'équation différentielles :

**Propriété 10 (« théorème de dérivation »)**

Soit  $x(t)$  un signal du type  $E_A$  avec  $A \in \mathbb{R}$ .

1) On suppose que  $t \rightarrow x(t)$  est continue et dérivable par morceaux sur  $[0; +\infty[$ . Alors, le signal  $t \rightarrow x'(t)U(t)$  admet une transformée de Laplace définie sur  $\{p \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(p) > A\}$ , et :

$$\mathcal{L}(x'(t)U(t))(p) = pX(p) - x(0^+)$$

2) Si l'on suppose que  $t \rightarrow x(t)$  est deux fois dérivable sur  $[0; +\infty[$  de dérivées continues par morceaux sur  $[0; +\infty[$ , et si  $x'(t)U(t)$  est un signal du type  $E_A$  alors, le signal

$t \rightarrow x''(t)U(t)$  admet une transformée de Laplace définie sur  $\{p \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(p) > A\}$ ,

$$\mathcal{L}(x''(t)U(t))(p) = p^2 X(p) - px(0^+) - x'(0^+).$$

3) La fonction  $p \rightarrow X(p)$  est indéfiniment dérivable sur  $]A; +\infty[$  (même si  $t \rightarrow x(t)$  n'est pas dérivable). Si  $n \in \mathbb{N}$ , le signal  $t \rightarrow t^n x(t)$  admet une transformée de Laplace définie sur  $\{p \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(p) > A\}$ , et :

$$\forall p \in \mathbb{R}, p > A \Rightarrow \mathcal{L}(t x(t))(p) = -\frac{d}{dp} X(p)$$

$$\forall p \in \mathbb{R}, p > A \Rightarrow \mathcal{L}(t^n x(t))(p) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} X(p)$$

**Attention :** même si  $x(t)$  est causale, on ne peut pas remplacer  $x'(t)U(t)$  par  $x'(t)$  (idem pour  $x''(t)U(t)$ .) Par exemple :  $x(t) = e^{-t}U(t)$ . La fonction  $x'(t)$  n'existe pas sur  $\mathbb{R}$  car  $x(t)$  n'est même pas continue en 0. En revanche, sur  $[0; +\infty[$ , la fonction  $x(t)$  est dérivable de dérivée  $x'(t) = -e^{-t}$ , d'où l'existence de  $x'(t)U(t) = -e^{-t}U(t)$ .

**Remarque :** il est possible de donner un sens à l'expression  $\frac{d}{dp}X(p)$  pour  $p$  non réel par la théorie des fonctions holomorphes.

Preuve :

Le signal  $x(t)$  est du type  $E_A$  donc  $\forall t \in \mathbb{R}, |x(t)| \leq C e^{At}$  pour une certaine constante  $C$ .

(i) Soit  $M > 0$  et . Alors  $\forall p \in \{p \in \mathbb{C} / \text{Re}(p) > A\}$ , on a :

$$\int_0^M x'(t)U(t)e^{-pt} dt = \int_0^M x'(t)e^{-pt} dt$$

$$= [x(t)e^{-pt}]_0^M - \int_0^M p e^{-pt} x(t) dt \quad \text{par intégration par parties}$$

$$(1) : \int_0^M x'(t)U(t)e^{-pt} dt = x(M)e^{-pM} - x(0^+) + p \int_0^M x(t)e^{-pt} dt.$$

On fait tendre  $M$  vers  $+\infty$ . D'une part,  $|x(M)e^{-pM}| \leq C e^{AM} e^{-\text{Re}(p)M} = C e^{(A-\text{Re}(p))M}$ . Si  $\text{Re}(p) > A$ ,  $e^{(A-\text{Re}(p))M} \rightarrow 0$  donc  $x(M)e^{-pM} \rightarrow 0$ . D'autre part,

$$\int_0^M x(t)e^{-pt} dt \rightarrow \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt = X(p).$$

On déduit de (1) que  $\int_0^{+\infty} x'(t)U(t)e^{-pt} dt$  converge, c'est à dire que  $L(x'(t)U(t))(p)$  existe et vaut  $L(x'(t)U(t))(p) = pX(p) - x(0^+)$ .

(ii) Se prouve de la même façon que le (i) en faisant deux intégrations par parties successives.

(iii) Dans le cadre de ce cours on ne peut pas donner de preuve rigoureuse, mais l'idée de la preuve est basée sur une propriété de dérivation sous le signe  $\int$  hors programme. Grosso modo, pour  $n=1$  :

$$\frac{d}{dp}X(p) = \frac{d}{dp} \left( \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt \right) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dp} (x(t)e^{-pt}) dt = \int_0^{+\infty} x(t) \frac{d}{dp} (e^{-pt}) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} x(t)(-t)e^{-pt} dt = - \int_0^{+\infty} t x(t)e^{-pt} dt = -L(tx(t))(p).$$

**Exemple :**

calculer la transformée de Laplace de  $f(t) = t \cos(t)U(t)$  sachant que la transformée de Laplace de  $\cos(t)U(t)$  est  $\frac{p}{p^2+1}$ .

On applique le 3) de la propriété 10 avec  $x(t) = \cos(t)U(t)$ ,  $A=0$  et  $n=1$ . Cela donne

$$\forall p > 0, F(p) = -\frac{d}{dp}X(p) = -\frac{d}{dp} \left( \frac{p}{p^2+1} \right) = -\left( \frac{(p^2+1) - 2p^2}{(p^2+1)^2} \right) = \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}.$$

En fait cette expression reste valable pour n'importe quel nombre complexe  $p$  de partie réelle strictement positive.

**Propriété 11 (« théorème d'intégration »)**

Soit  $x(t)$  un signal du type  $E_A$  avec  $A \in \mathbb{R}$ . Soit  $\varphi : t \rightarrow \int_0^t x(s) ds$  l'unique pseudo-primitive causale de  $x(t)$ . Alors  $\varphi$  est à croissance d'ordre au plus exponentiel et  $\Phi(p) = \frac{X(p)}{p}$  si  $\operatorname{Re}(p) > 0$  et  $\operatorname{Re}(p) > A$ .

Preuve : On reprend l'exemple qui suit la propriété 2 : on remarque que  $\varphi = x * U$ . Les signaux  $x$  et  $U$  étant causaux et à croissance d'ordre au plus exponentiel,  $\varphi$  est aussi causal et à croissance d'ordre au plus exponentiel. On a d'après le Théorème 2  $\Phi(p) = X(p)U(p) = \frac{1}{p} X(p)$ .

**Exemple :** si l'on prend  $x(t) = U(t)$ , on a  $A = 0$  et  $\varphi(t) = tU(t)$ . On obtient alors

$$\Phi(p) = \frac{X(p)}{p} = \frac{\frac{1}{p}}{p} = \frac{1}{p^2} \text{ pour tout nombre complexe } p \text{ de partie réelle strictement positive.}$$

**Propriété 12 (« Théorème de dilatation »)**

Soit  $x(t)$  un signal du type  $E_A$  avec  $A \in \mathbb{R}$ . Soit  $a > 0$  et  $y$  la fonction définie par l'expression  $y(t) = x\left(\frac{t}{a}\right)$ . Alors  $y(t)$  un signal du type  $E_{\frac{A}{a}}$  et  $Y(p) = a X(ap)$  pour tout nombre complexe  $p$  tel que  $\operatorname{Re}(p) > \frac{A}{a}$ .

Preuve : La fonction  $y$  est clairement causale et continue par morceaux. Puisque  $x(t)$  est un signal du type  $E_A$ ,  $\exists M > 0 : \forall t \in \mathbb{R}, |x(t)| \leq M e^{At}$  ce qui donne  $\forall t \in \mathbb{R}, |y(t)| = \left| x\left(\frac{t}{a}\right) \right| \leq M e^{A \frac{t}{a}}$  ce qui prouve que  $y(t)$  est un signal du type  $E_{\frac{A}{a}}$ , donc sa transformée de Laplace est définie pour tout nombre complexe  $p$  tel que  $\operatorname{Re}(p) > \frac{A}{a}$ . De plus :

$$\begin{aligned} Y(p) &= \int_0^{+\infty} y(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} x\left(\frac{t}{a}\right) e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} x(\sigma) e^{-p(a\sigma)} (a d\sigma) \text{ en faisant le changement de variables } t = a\sigma, \\ &= a \int_0^{+\infty} x(\sigma) e^{-(ap)\sigma} d\sigma = a X(ap). \end{aligned}$$

**Exemple :** Sachant que la transformée de Laplace de  $\cos(t)U(t)$  est  $\frac{p}{p^2 + 1}$ , calculons la transformée de Laplace de  $y(t) = \cos(\omega t)$ . On pose  $x(t) = \cos(t)U(t)$  : on a  $A = 0$  et  $a = \frac{1}{\omega}$ . On a donc pour tout nombre complexe de partie réelle strictement positive,  $Y(p) = a X(ap) = \frac{1}{\omega} \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{p^2}{p^2 + \omega^2}$

**Propriété 13 («Fonction périodique »)**

Soit  $t \rightarrow f(t)$  une fonction continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  T-périodique, c'est à dire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t+T) = f(t). \text{ On définit le signal } f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0; T[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et le signal } x(t) = f(t)U(t).$$

Alors, les signaux  $f_0(t)$  et  $x(t)$  sont de type  $E_0$  et on a la relation :  $X(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}$  pour tout nombre complexe  $p$  de partie réelle strictement positive.

Preuve : Étant continu par morceaux et à durée limitée, le signal  $f_0(t)$  est bornée, et par périodisation,  $x(t)$  est aussi borné, donc de type  $E_0$ . Ils admettent donc une transformée de Laplace définie pour tout nombre complexe  $p$  de partie réelle strictement positive.

On remarque que  $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) - x(t-T) = f_0(t)$  (considérer séparément les trois cas  $t < 0$ ,  $t \in [0; T[$  et  $t \geq T$ ) : en prenant les transformées de Laplace des deux membres de cette égalité et en appliquant le Théorème du retard (propriété 9) on obtient :

$$\forall p \in \{p \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(p) > 0\}, X(p) - e^{-pT} X(p) = F_0(p)$$
$$(1) \quad \forall p \in \{p \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(p) > 0\}, X(p)(1 - e^{-pT}) = F_0(p).$$

On remarque maintenant que  $\forall p \in \{p \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(p) > 0\}, 1 - e^{-pT} \neq 0$ . En effet,  $|e^{-pT}| = e^{-T \text{Re}(p)} < 1$  car  $-\text{Re}(p) \cdot T < 0$  donc  $\forall p \in \{p \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(p) > 0\}, 1 - e^{-pT} \neq 0$ .

On peut donc diviser (1) par  $1 - e^{-pT}$  pour obtenir  $X(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}$  pour tout nombre complexe  $p$  de partie réelle strictement positive.

**Exemple :** considérons la fonction  $f(t) = |\sin(t)|$  : elle est continue et  $\pi$ -périodique car

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t + \pi) = |\sin(t + \pi)| = |-\sin(t)| = |\sin(t)| = f(t). \text{ On a } f_0(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{si } t \in [0; \pi[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et  $x(t) = |\sin(t)|U(t)$  (sinusoïde causale redressée double alternance). Calculons la transformée de Laplace de  $x(t)$  :

On a, si  $\text{Re}(p) > 0$ ,

$$F_0(p) = \int_0^{+\infty} f_0(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\pi} \sin(t) e^{-pt} dt$$
$$= \frac{1}{2j} \int_0^{\pi} (e^{jt} - e^{-jt}) e^{-pt} dt = \frac{1}{2j} \int_0^{\pi} (e^{(j-p)t} - e^{(-j-p)t}) dt \text{ par les formules d'Euler}$$
$$= \frac{1}{2j} \left[ \frac{e^{(j-p)t}}{-p+j} - \frac{e^{(-j-p)t}}{-p-j} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2j} \left( \frac{e^{(j-p)\pi} - 1}{-p+j} - \frac{e^{(-j-p)\pi} - 1}{-p-j} \right) = \frac{1}{2j} \left( \frac{-e^{-p\pi} - 1}{-p+j} - \frac{-e^{p\pi} - 1}{-p-j} \right)$$

(on rappelle que  $e^{j\pi} = -1$ )

$$= \frac{1}{2j} \left( \frac{e^{-p\pi} + 1}{p-j} - \frac{e^{p\pi} + 1}{p+j} \right) = \frac{e^{-p\pi} + 1}{2j} \left( \frac{1}{p-j} - \frac{1}{p+j} \right) = \frac{e^{-p\pi} + 1}{2j} \left( \frac{2j}{p^2 + 1} \right) = \frac{e^{-p\pi} + 1}{p^2 + 1}.$$

On en déduit alors que  $X(p) = \frac{1 + e^{-p\pi}}{(p^2 + 1)(1 - e^{-p\pi})}$ .

### IV.3) Original d'une transformée de Laplace.

Le calcul d'une transformée de Laplace n'est souvent qu'un intermédiaire de calcul : pour trouver l'expression d'un signal  $x(t)$ , on cherche d'abord une expression de sa transformée de Laplace  $X(p)$ , puis on essaye d'en déduire une expression de  $x(t)$ . C'est sur cette dernière étape que nous allons nous concentrer.

**Définition 6.** Soit  $F(p)$  une fonction de la variable complexe  $p$ . S'il existe une fonction causale  $f(t)$ , continue par morceaux, et à croissance d'ordre au plus exponentiel telle que  $\mathcal{L}(f(t))(p) = F(p)$  pour tout nombre complexe  $p$  de partie réelle assez grande, on dit que  $f(t)$  est un original de  $F(p)$  par la transformée de Laplace.

**Exemples :**

- 1) si  $F(p) = \frac{1}{p+1}$ , un original de  $F(p)$  est la fonction  $f(t) = e^{-t}U(t)$  (avec  $\text{Re}(p) > -1$ .)
- 2) Par extension, on pourra aussi dire si  $F(p) = 1$ , un original de  $F(p)$  est la distribution  $f(t) = \delta(t)$ .

Les questions que l'on peut se poser sont les suivantes :

- (i) Est-ce qu'une fonction  $F(p)$  de la variable complexe  $p$  possède forcément un original ?
- (ii) Est-il possible qu'une fonction  $F(p)$  puisse posséder des originaux différents ?

Pour le (i), la réponse est non. Par exemple, le 3) de la propriété 10 implique que pour posséder un original, la fonction de la variable réelle  $p \rightarrow F(p)$  doit être indéfiniment dérivable pour tout réel  $p$  assez grand. Mais même cette dernière condition ne saurait garantir l'existence d'un original !

On a cependant la :

**Propriété 14** Soit  $F(p)$  une fonction de la variable complexe  $p$ . On suppose que  $F(p) \in \mathbf{C}(p)$  et que  $\deg(F(p)) < 0$ . Alors il existe un original pour  $F(p)$  indéfiniment dérivable.

**Preuve :** D'après le Théorème de décomposition en éléments simples dans  $\mathbf{C}[X]$  on peut écrire  $F(p)$  comme une somme de fractions rationnelles de la forme  $p \rightarrow \frac{A}{(p-a)^k}$  où  $a \in \mathbf{C}$ ,  $A \in \mathbf{C}$  et  $k \in \mathbf{N}^*$ .

Ces fractions ont pour original  $\frac{A}{(k-1)!} e^{at} t^{k-1} U(t)$  (voir tableau à la fin de ce cours) donc par linéarité de la transformation de Laplace, il existe un original pour  $F(p)$ .

Pour le (ii), la réponse est quasiment oui. Ceci est précisé dans la propriété suivante :

**Théorème 3 (« théorème de Lerch »)** Soit  $F(p)$  une fonction de la variable complexe  $p$ . Alors, si il existe deux fonctions causales, à croissance d'ordre au plus exponentiel et continues par morceaux  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  telles que  $\mathcal{L}(f_1(t))(p) = \mathcal{L}(f_2(t))(p) = F(p)$ , pour tout réel  $p$  assez grand, alors  $f_1(t) = f_2(t)$  sauf éventuellement pour un ensemble localement fini de valeurs de  $t$ .

Ce Théorème est admis.

Pourquoi ce résultat est-il si important ? C'est parce que pour trouver l'expression d'un signal  $x(t)$ , on cherche d'abord une expression de sa transformée de Laplace  $X(p)$ . Si l'on arrive, par un moyen quelconque, à en trouver un original alors on est sûr que cet original est égal à  $x(t)$ , sauf éventuellement pour un ensemble localement fini de valeurs de  $t$ , ce qui dans la pratique est négligé : c'est pourquoi on parlera de L'original de  $X(p)$ .

**Exemple :** on sait d'après le formulaire que pour  $f(t) = tU(t)$ ,  $F(p) = \frac{1}{p^2}$ . Quel est l'original de la fonction  $G(p) = \frac{1}{(p-2)^2}$  ?

D'après le 2) de la propriété 9, on a  $g(t) = e^{2t} tU(t)$  qui est l'original de  $G(p)$ .

Pour rechercher l'original d'une fonction de  $p$ , on se sert du formulaire après le plus souvent avoir procédé à une décomposition en éléments simples.

**Exemple :** trouver l'original de  $F(p) = \frac{1}{p^2 + 2p - 3}$ .

Par une décomposition en éléments simples de  $F(p)$ , on a  $F(p) = \frac{\frac{1}{4}}{p-1} - \frac{\frac{1}{4}}{p+3}$ . Par linéarité de la transformation de Laplace, on peut trouver l'original  $f(t) = \frac{1}{4}(e^t - e^{-3t})U(t)$ .

Quelquefois, la recherche explicite de l'original n'est pas possible : on peut cependant avoir des informations sur l'original (si on sait qu'il existe) grâce au Théorème suivant :

**Théorème 4 (« théorème de la valeur initiale et finale »)**

Soit un signal  $x(t)$ .

1)  $x(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty, p \in \mathbb{R}} pX(p)$

2) Si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$  existe et est finie, alors  $p \rightarrow X(p)$  est définie au moins sur  $\{p \in \mathbb{C} / \text{Re}(p) > 0\}$  et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{p \rightarrow 0, p \in \mathbb{R}^+} pX(p)$$

**Remarques**

(i) Puisque on suppose que  $x(t)$  est continue par morceaux, alors  $x(0^+)$  existe et est finie, et le 1) implique alors que  $\lim_{p \rightarrow +\infty, p \in \mathbb{R}} X(p) = 0$ . En effet,  $X(p) = \frac{1}{p} \cdot (pX(p))$  donc en faisant tendre la variable  $p$  dans  $\mathbb{R}$  vers  $+\infty$ ,  $\frac{1}{p} \rightarrow 0$  et  $pX(p) \rightarrow x(0^+) \in \mathbb{R}$  donc par produit de limites,  $\lim_{p \rightarrow +\infty, p \in \mathbb{R}} X(p) = 0$ .

(ii) L'hypothèse «  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$  existe et est finie » est indispensable pour le 2). Par exemple, si

$$x(t) = e^t U(t), \quad X(p) = \frac{1}{p+1} \quad \text{donc} \quad \lim_{p \rightarrow 0, p \in \mathbb{R}} pX(p) = \lim_{p \rightarrow 0, p \in \mathbb{R}} \frac{p}{p+1} = 0 \quad \text{alors que} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty.$$

**(\*) Preuve :** elle est assez complexe, mais présente l'intérêt de présenter des techniques de majoration fine souvent utilisées en Analyse.

1) Soit  $a > 0$  assez petit pour que la fonction  $t \rightarrow x(t)$  soit continue sur  $[0; a]$  (de manière à éviter les discontinuités de  $t \rightarrow x(t)$  qui forment un ensemble localement fini). Alors par le Théorème 3 du

chapitre sur les fonctions élémentaires, les quantités  $\alpha_p = \min_{t \in [0; \frac{1}{\sqrt{p}}]} x(t)$  et  $\beta_p = \max_{t \in [0; \frac{1}{\sqrt{p}}]} x(t)$  existent

pour tout réel  $p$  tel que  $p > \frac{1}{a^2}$  et  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \alpha_p = \lim_{p \rightarrow +\infty} \beta_p = x(0^+)$ . En effet, si  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$

tel que  $\forall t \in [0; \delta], |x(t) - x(0^+)| < \varepsilon$ . Cela implique que si  $p$  vérifie aussi la condition  $p > \frac{1}{\delta^2}$ , on a

$$\forall t \in [0; \frac{1}{\sqrt{p}}], |x(t) - x(0^+)| < \varepsilon \text{ d'où } |\alpha_p - x(0^+)| < \varepsilon \text{ et } |\beta_p - x(0^+)| < \varepsilon .$$

D'autre part, par la croissance au plus exponentielle de  $t \rightarrow x(t)$ , on a  $\forall t \geq 0, |x(t)| \leq M e^{At}$  pour des constantes  $M > 0, A \in \mathbb{R}$ . On a alors :

$$\forall p > \frac{1}{a^2}, pX(p) = p \int_0^{\frac{1}{\sqrt{p}}} e^{-pt} x(t) dt + p \int_{\frac{1}{\sqrt{p}}}^{+\infty} e^{-pt} x(t) dt .$$

D'une part,  $\alpha_p p \int_0^{\frac{1}{\sqrt{p}}} e^{-pt} dt \leq p \int_0^{\frac{1}{\sqrt{p}}} e^{-pt} x(t) dt \leq \beta_p p \int_0^{\frac{1}{\sqrt{p}}} e^{-pt} dt$  (remarquer que  $e^{-pt} > 0$  car  $p \in \mathbb{R}$ )

c'est à dire  $\alpha_p (1 - e^{-\sqrt{p}}) \leq p \int_0^{\frac{1}{\sqrt{p}}} e^{-pt} x(t) dt \leq \beta_p (1 - e^{-\sqrt{p}})$  ce qui permet d'obtenir

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} p \int_0^{\frac{1}{\sqrt{p}}} e^{-pt} x(t) dt = x(0^+).$$

D'autre part si  $p$  est aussi supérieur à  $A$ , on a  $p \left| \int_{\frac{1}{\sqrt{p}}}^{+\infty} e^{-pt} x(t) dt \right| \leq M p \int_{\frac{1}{\sqrt{p}}}^{+\infty} e^{(A-p)t} dt = \frac{M p}{p-A} e^{-\frac{A-p}{\sqrt{p}}}$  d'où

l'on obtient que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} p \int_{\frac{1}{\sqrt{p}}}^{+\infty} e^{-pt} x(t) dt = 0$  en remarquant que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{M p}{p-A} = M$  et

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{A-p}{\sqrt{p}} = -\infty .$$

De la relation  $\forall p > \frac{1}{a^2}, pX(p) = p \int_0^{\frac{1}{\sqrt{p}}} e^{-pt} x(t) dt + p \int_{\frac{1}{\sqrt{p}}}^{+\infty} e^{-pt} x(t) dt$  on conclut alors que

$$x(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty, p \in \mathbb{R}} pX(p) .$$

2)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$  existe et est finie, et  $x(t)$  est continue par morceaux, donc le signal  $x(t)$  est borné donc de type  $E_0$ . On en déduit que  $p \rightarrow X(p)$  est définie au moins sur  $\{p \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(p) > 0\}$ .

Posons  $l = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$  et  $y(t) = x(t) - l U(t)$ . Alors  $\forall p > 0, pX(p) = l + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} y(t) dt$ .

Montrons que  $\lim_{p \rightarrow 0^+} p \int_0^{+\infty} e^{-pt} y(t) dt = 0$  ce qui prouvera que  $l = \lim_{p \rightarrow 0, p \in \mathbb{R}^+} pX(p)$ .

On remarque que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$  donc il existe  $T > 0$  tel que  $\forall t \geq T, |y(t)| \leq 1$ . Par le Théorème 2

du chapitre sur les fonctions élémentaires, la fonction  $t \rightarrow y(t)$  est bornée sur  $[0; T]$ . On en déduit qu'elle est bornée sur  $[0; +\infty[ : \exists C > 0$  tq  $\forall t \geq 0, |y(t)| \leq C$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Vu que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que  $\forall t \geq \delta, |y(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . On en déduit que

si  $0 < p < \frac{1}{\delta^2}$ , on a :

$$(1) \quad \left| p \int_{\frac{1}{\sqrt{p}}}^{+\infty} e^{-pt} y(t) dt \right| \leq p \int_{\frac{1}{\sqrt{p}}}^{+\infty} e^{-pt} |y(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2} p \int_{\frac{1}{\sqrt{p}}}^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{\varepsilon}{2} e^{-\sqrt{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

D'autre part, toujours si  $0 < p < \frac{1}{\delta^2}$ ,

$$\left| p \int_0^{\frac{1}{\sqrt{p}}} e^{-pt} y(t) dt \right| \leq p \int_0^{\frac{1}{\sqrt{p}}} e^{-pt} |y(t)| dt \leq C p \int_0^{\frac{1}{\sqrt{p}}} e^{-pt} dt = C (1 - e^{-\sqrt{p}}) .$$

On a  $\lim_{p \rightarrow 0^+} (1 - e^{-\sqrt{p}}) = 0$  donc il existe  $p_0 \in ]0; \frac{1}{\delta^2}[$  tel que

$$(2) \quad \forall p \in ]0; p_0[, \quad \left| p \int_0^{\frac{1}{\sqrt{p}}} e^{-pt} y(t) dt \right| \leq C (1 - e^{-\sqrt{p}}) \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

On déduit de (1) et (2) que

$$\forall p \in ]0; p_0[, \quad \left| p \int_0^{+\infty} e^{-pt} y(t) dt \right| \leq \left| p \int_0^{\frac{1}{\sqrt{p}}} e^{-pt} y(t) dt \right| + \left| p \int_{\frac{1}{\sqrt{p}}}^{+\infty} e^{-pt} y(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Cela montre que  $\lim_{p \rightarrow 0^+} p \int_0^{+\infty} e^{-pt} y(t) dt = 0$  .

## V) Applications de la transformation de Laplace

### V.1) Application aux systèmes.

Soit un système de convolution  $(S): x(t) \rightarrow y(t)$  de réponse impulsionnelle égale au signal  $h(t)$  (supposé donc continu par morceaux, causal et à croissance d'ordre au plus exponentiel). La sortie s'écrit donc  $y(t) = (h * x)(t)$  : c'est aussi un signal (voir annexe). En prenant la transformée de Laplace des deux membres de cette égalité, il vient :

$$Y(p) = H(p) X(p) .$$

Cette relation montre que l'on passe simplement de  $X(p)$  à  $Y(p)$  par une multiplication par la fonction  $H(p)$ . Vu via la transformation de Laplace, le système (S) revient simplement à multiplier la transformée de Laplace de l'entrée par  $H(p)$ .

**Définition 7.** La fonction  $H(p)$  est appelée fonction de transfert du système. Elle est telle que pour toute entrée  $x(t)$  de sortie  $y(t)$ , on a  $\frac{Y(p)}{X(p)} = H(p)$ .



**Remarques:**

(i) dans la pratique, lorsqu'on s'intéresse à un système, c'est souvent la fonction  $H(p)$  qui est la donnée la plus facile à connaître. Par exemple, pour un système électronique,  $H(p)$  peut être calculée directement par un calcul d'impédance.

(ii) La réponse impulsionnelle  $h(t)$  est l'originale de la fonction de transfert (utile en pratique).

Le théorème suivant permet de savoir assez simplement à partir de la fonction de transfert d'un système si ce dernier est stable.

**Théorème 5 (de stabilité).** On suppose que la fonction de transfert est rationnelle, c'est à dire que  $H(p) \in \mathbb{R}[p]$ . Alors

1) le système est stable si et seulement si les parties réelles de **tous** les pôles de  $H(p)$  sont strictement négatives.

2) le système est stable si et seulement si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$ .

(\*) Idée de preuve : la preuve est longue mais en voici les idées principales. On procède à la décomposition de  $H(p)$  en éléments simples dans  $\mathbb{C}[X]$ . On supposera que le degré de  $H(p)$  est strictement négatif, c'est à dire qu'il n'y a pas de partie entière dans la décomposition (auquel cas,  $h(t)$  ne serait pas une fonction mais une distribution).

Ainsi,  $H(p)$  va s'écrire comme une somme de termes de la forme  $\frac{A}{(p-a)^k}$  (où  $a$  est un pôle de  $H(p)$ ,  $A \in \mathbb{C}$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ ) dont l'original est  $\frac{A}{(k-1)!} t^{k-1} e^{at} U(t)$  (voir formulaire).

Ainsi,  $h(t)$  est de la forme :

$$(1) \quad h(t) = \sum_{a \text{ pôle de } H(p)} P_a(t) e^{at}$$

où les  $P_a(t)$  sont des polynômes en  $t$ .

Le système est stable si et seulement si  $\int_0^{+\infty} |h(t)| dt$  converge.

Si  $\int_0^{+\infty} |h(t)| dt$  converge, alors quel que soit le nombre complexe  $p$  à partie réelle positive ou nulle, on a

$$|h(t) e^{-pt}| = |h(t)| e^{-\text{Re}(p)t} \leq |h(t)| \quad \text{pour tout réel } t \text{ positif ou nul, donc } \int_0^{+\infty} |h(t) e^{-pt}| dt$$

converge : la transformée de Laplace est donc définie pour (au moins) tout nombre complexe de partie réelle positive ou nulle. On ne peut donc pas avoir de pôle à partie réelle positive ou nulle, sans quoi la transformée de Laplace de  $f$  ne serait pas définie en ces points.

Inversement, si tous les pôles de  $H(p)$  ont une partie réelle strictement négative, alors (1) donne :

$$\int_0^{+\infty} |h(t)| dt \leq \sum_{a \text{ pôle de } H(p)} \int_0^{+\infty} |P_a(t)| e^{\text{Re}(a)t} dt \quad (\text{en remarquant que les exponentielles sont positives}).$$

Dans le second membre de l'expression ci-dessus, chaque intégrale est convergente car tous les  $\text{Re}(a)$  sont strictement négatifs, donc  $\int_0^{+\infty} |h(t)| dt$  converge.

En résumé, tous les pôles de  $H(p)$  ont une partie réelle strictement négative ssi  $\int_0^{+\infty} |h(t)| dt$  converge ssi

le système est stable, ce qui prouve le point 1) du Théorème.

Toujours en reprenant la relation (1), on peut voir que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$  si et seulement si tous les pôles de

$H(p)$  ont une partie réelle strictement négative, ce qui prouve le point 2) du Théorème.

## V.2) Systèmes définis par une équation différentielle

De nombreux systèmes sont définis par une équation différentielle.

Etude d'un exemple : A tout signal  $x(t)$  on fait correspondre la solution  $y(t)$  de l'équation différentielle :

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t) \quad \text{avec les conditions initiales} \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

La fonction  $y$  est causale (car nulle sur  $]-\infty; 0]$  puisque elle est solution de l'équation différentielle :

$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$  avec les conditions initiales  $y(0) = y'(0) = 0$  ) et au moins dérivable à dérivée continue, avec  $y'$  dérivable par morceaux.

La propriété 18 montre que  $y(t)$  et  $y'(t)$  sont à croissance d'ordre au plus exponentiel (voir en annexe de ce chapitre).

Passant à la transformation de Laplace, on utilise les relations ci-dessous, obtenues par l'application du Théorème 10, pour  $p$  de partie réelle assez grande :

$$L(y'(t)U(t))(p) = pY(p) - y(0^+) = pY(p)$$

$$L(y''(t)U(t))(p) = p^2Y(p) - py(0^+) - y'(0^+) = p^2Y(p)$$

et on obtient alors à partir de l'équation différentielle la relation  $(p^2 + 3p + 2)Y(p) = X(p)$  d'où :

$$Y(p) = \frac{X(p)}{p^2 + 3p + 2}. \quad \text{Il apparaît alors par le Théorème 3 que } y \text{ coïncide avec la sortie correspondant à}$$

l'entrée  $x$  par le système dont la fonction de transfert est  $H(p) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2}$ .

On peut alors montrer que ce système est stable et trouver la réponse impulsionnelle.

En effet (exercice),  $H(p)$  est une fraction rationnelle de pôles égaux à  $-1$  et  $-2$  : par le théorème 4 le

système est stable. A partir de la décomposition en éléments simples de  $H(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$ , on trouve la

réponse impulsionnelle  $h(t) = (e^{-t} - e^{-2t})U(t) = e^{-2t}(e^t - 1)U(t)$ .

Une écriture du système est alors  $y(t) = (h * x)(t) = \int_0^t x(s)h(t-s)ds = \int_0^t x(s)e^{-2(t-s)}(e^{t-s} - 1)ds$ .

Cette dernière écriture peut avoir des applications intéressantes : par exemple, dans le cas qui nous intéresse, si  $\forall t \in \mathbb{R} x(t) \geq 0$  alors  $\forall t \in \mathbb{R} y(t) \geq 0$  (prouvez le) : une entrée positive donne une sortie positive (attention ce n'est pas un résultat général).

**Définition 8.** On parle de système du premier ordre pour un système dont la fonction de transfert est de la forme  $H(p) = \frac{A}{ap + b}$  avec  $A \neq 0$  et  $a \neq 0$ . On parle de système du second ordre pour un système dont la fonction de transfert est de la forme  $H(p) = \frac{Ap + B}{ap^2 + bp + c}$  avec  $(A; B) \neq (0; 0)$  et  $a \neq 0$ .

**Remarques :**

- (i) Si un système possède une fonction de transfert  $H(p)$  rationnelle par rapport à  $p$  et de degré strictement négatif, alors par une décomposition en éléments simples de  $H(p)$ , on peut voir que ce système peut s'écrire comme une somme de sous-systèmes du premier et du second ordre.
- (ii) En reprenant la méthode de l'exemple précédent, on peut montrer qu'un système du premier ordre peut être représenté par une équation différentielle : si  $x(t)$  est l'entrée, la sortie sera la solution de l'équation différentielle  $ay'(t) + by(t) = Ax(t)$ ,  $y(0) = 0$ . De même, un système du

second ordre peut être représenté par une équation différentielle de la façon suivante : si  $x(t)$  est une entrée dérivable à dérivée causale continue par morceaux et à croissance d'ordre au plus exponentielle, la sortie sera la solution de l'équation différentielle

$a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = A x'(t) + B x(t)$ ,  $y'(0) = y(0) = 0$ . Notons que dans ce dernier cas, si  $A \neq 0$ , la définition du système via l'équation différentielle est quelque peu réductrice car elle n'a de sens que si  $x(t)$  est une entrée dérivable à dérivée causale continue par morceaux et à croissance d'ordre au plus exponentielle. Or cette dernière condition n'est pas nécessaire ! Si

$h(t)$  est l'original de  $H(p) = \frac{Ap + B}{ap^2 + bp + c}$  avec  $A \neq 0$  et  $a \neq 0$ , alors la sortie  $y(t)$  peut être définie par la formule  $y = (h * x)(t)$  sans que  $x(t)$  ne soit dérivable.

### V.3) Application aux équations différentielles avec conditions initiales quelconques.

La méthode vue dans le paragraphe précédent peut se généraliser à des équations différentielles quelconques avec conditions initiales non nulles (dans ce cas, elles ne peuvent pas définir un système entrée-sortie, car une entrée nulle donnerait une sortie non nulle).

Exemple : Résoudre  $y'(t) + 3y(t) = e^{-t+3}U(t-3)$ ,  $y(0) = 1$

La fonction  $t \rightarrow e^{-t+3}U(t-3)$  étant continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  (avec une seule discontinuité de première espèce en  $t=3$ ) on sait que l'équation admet une unique solution  $y(t)$  continue sur  $\mathbb{R}$  et dérivable sauf en  $t=3$ . Si l'on considère la fonction  $y(t)U(t)$  à la place de  $y(t)$ , alors on obtient un signal qui vérifie les hypothèses de la propriété 10 (on admet que  $y(t)$  et  $y'(t)$  sont à croissance d'ordre au plus exponentiel (voir propriété 18 en annexe de ce chapitre)). Puisque

$\forall t \geq 0$ ,  $y'(t) + 3y(t) = e^{-t+3}U(t-3)$ ,  $y(0^+) = 1$ , alors l'application de la propriété 10 donne, pour tout nombre complexe  $p$  de partie réelle assez grande :

$$pY(p) - y(0^+) + 3Y(p) = L(e^{-t+3}U(t-3)) = e^{-3p} L(e^{-t}U(t)) = \frac{e^{-3p}}{p+1}$$

$$(p+3)Y(p) - 1 = \frac{e^{-3p}}{p+1}$$

$$(p+3)Y(p) = \frac{e^{-3p}}{p+1} + 1$$

$$Y(p) = \frac{e^{-3p}}{(p+1)(p+3)} + \frac{1}{p+3} = \frac{e^{-3p}}{2} \left( \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+3} \right) + \frac{1}{p+3}$$

On en déduit l'original  $y(t) = \frac{1}{2} (e^{-(t-3)} - e^{-3(t-3)})U(t-3) + e^{-3t}U(t)$ .

On en déduit l'expression de  $y(t)$  pour  $t \geq 0$  :

$$y(t) = \begin{cases} e^{-3t} & \text{si } t \in [0; 3] \\ \frac{e^3}{2} e^{-t} - \left( \frac{e^9}{2} - 1 \right) e^{-3t} & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

## VI) (\*) Annexes

### VI.1) Quelques propriétés des fonctions à croissance au plus exponentielles.

**Propriété 15** Si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont deux signaux à croissance au plus exponentielle et si  $\lambda \in \mathbb{C}$ , alors  $\lambda x(t)$ ,  $x(t)+y(t)$  et  $x(t) \cdot y(t)$  sont aussi des signaux à croissance au plus exponentielle. Plus précisément, si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement du type  $E_A$  et  $E_B$ , alors  $\lambda x(t)$ ,  $x(t)+y(t)$  et  $x(t) \cdot y(t)$  sont respectivement du type  $E_A$ ,  $E_{\max(A,B)}$  et  $E_{A+B}$ .

Preuve :

Si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont à croissance au plus exponentielle, alors :

$$|x(t)| \leq M e^{At} \text{ pour certaines constantes } M \text{ et } A$$

$$|y(t)| \leq N e^{Bt} \text{ pour certaines constantes } N \text{ et } B.$$

Alors  $|\lambda x(t)| \leq M |\lambda| e^{At}$  donc  $\lambda x(t)$  est à croissance au plus exponentielle.

Pour  $x(t)+y(t)$  par symétrie des rôles de  $x(t)$  et  $y(t)$ , on peut supposer par exemple  $A \leq B$ .

Alors, par croissance de la fonction exponentielle,  $\forall t \geq 0, e^{At} \leq e^{Bt}$ , donc

$$\forall t \geq 0, |x(t)+y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)| \leq M e^{At} + N e^{Bt} \leq M e^{Bt} + N e^{Bt} = (M+N) e^{Bt},$$

l'inégalité restant vraie si  $t < 0$  car  $x(t)$  et  $y(t)$  sont deux signaux causaux,

donc  $x(t)+y(t)$  est à croissance au plus exponentielle.

Enfin,  $|x(t) \cdot y(t)| = |x(t)| \cdot |y(t)| \leq MN e^{(A+B)t}$  est à croissance exponentielle.

**Propriété 16** Si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont deux signaux à croissance d'ordre au plus exponentiel, alors  $(x * y)(t)$  est un signal à croissance d'ordre au plus exponentiel.

Plus précisément, si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement du type  $E_A$  et  $E_B$ , alors pour tout réel  $M$  tel que  $M > A$  et  $M > B$ ,  $(x * y)(t)$  est du type  $E_M$ .

Preuve :  $(x * y)(t)$  est continu et causal.

Si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont à croissance au plus exponentielle, alors :

$$|x(t)| \leq M e^{At} \text{ pour certaines constantes } M \text{ et } A$$

$$|y(t)| \leq N e^{Bt} \text{ pour certaines constantes } N \text{ et } B.$$

Puisque  $x * y = y * x$ , les signaux  $x$  et  $y$  jouent des rôles symétriques : on peut donc supposer  $A \leq B$ .

Alors, pour tout réel  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} |x * y(t)| &= \left| \int_0^t x(s) y(t-s) ds \right| \leq \int_0^t |x(s) y(t-s)| ds \\ &\leq \int_0^t M e^{As} N e^{B(t-s)} ds = M \cdot N \int_0^t e^{(A-B)s + Bt} ds = M \cdot N e^{Bt} \int_0^t e^{(A-B)s} ds \\ &\leq MN e^{Bt} \int_0^t 1 ds \quad (\text{car } A-B \leq 0 \Rightarrow \forall s \geq 0, e^{(A-B)s} \leq 1) \end{aligned}$$

$$(1) \quad |x * y(t)| \leq MN t e^{Bt}.$$

La fonction  $t \rightarrow t U(t)$  est de type  $E_\alpha$  pour tout réel  $\alpha > 0$ .

En effet, posons  $\varphi(t) = t e^{-\alpha t}$  pour  $t \geq 0$ . Une étude de fonction montre que  $\varphi$  est une fonction

positive qui admet un maximum pour  $t = \frac{1}{\alpha}$ , donc  $\forall t \geq 0, 0 \leq \varphi(t) \leq \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha e}$  d'où :

$\forall t \in \mathbb{R}, |t U(t)| \leq \frac{1}{\alpha e} e^{\alpha t}$  ce qui montre que la fonction  $t \rightarrow t U(t)$  est de type  $E_\alpha$  pour tout réel  $\alpha > 0$ .

Ainsi, par la propriété 15, la fonction  $t \rightarrow t e^{Bt} U(t)$  est du type  $E_{B+\alpha}$  pour tout réel  $\alpha > 0$ .

Puisque d'après (1),  $\forall t \geq 0, |(x * y)(t)| \leq MN t e^{Bt}$  et puisque  $\forall t < 0, (x * y)(t) = 0$ , alors  $(x * y)$  est du type  $E_{B+\alpha}$  pour tout réel  $\alpha > 0$ .

**Propriété 17** Si  $x(t)$  est un signal continu à croissance d'ordre au plus exponentiel, et si  $y(t)$  est un signal dérivable sur  $[0; +\infty[$  tel que  $\forall t \geq 0, y'(t) = x(t)$ , alors  $y(t)$  est un signal à croissance d'ordre au plus exponentiel.

Plus précisément, si  $x(t)$  est du type  $E_A$ , alors pour tout réel  $M$  tel que  $M > A$  et  $M > 0$ ,  $y(t)$  est du type  $E_M$ .

Preuve : on a vu (exemple qui suit la propriété 2) que le signal  $U * x$  est une primitive de  $x(t)$  sur  $[0; +\infty[$  (on rappelle que  $U$  est la fonction échelon) : on en déduit qu'il existe une constante  $C$  telle que (1)  $\forall t \geq 0, y(t) = C + (U * x)(t)$ .

La fonction  $U$  est du type  $E_0$  donc par la propriété 16, pour tout réel  $M$  tel que

$M > A$  et  $M > 0$ ,  $(U * x)$  est du type  $E_M$ .

La fonction  $C.U(t)$  est du type  $E_0$  donc par la propriété 15 et l'égalité (1),  $y(t)$  est du type  $E_M$ .

## VI.2) Croissance de type au plus exponentiel et solution d'une edo1 ou d'une edo2.

### Propriété 18

A) Soit  $t \rightarrow f(t)$  un signal à croissance de type au plus exponentiel, soient  $a, b \in \mathbb{C}$  avec  $a \neq 0$ .

Alors, pour toute solution  $y(t)$  sur  $[0; +\infty[$  de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad a y'(t) + b y(t) = f(t),$$

les signaux  $t \rightarrow y(t)U(t)$  et  $t \rightarrow y'(t)U(t)$  sont à croissance de type au plus exponentiel.

B) Soit  $t \rightarrow f(t)$  un signal à croissance de type au plus exponentiel, soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq 0$ .

Alors, pour toute solution  $y(t)$  sur  $[0; +\infty[$  de l'équation différentielle :

$$(E_2) \quad a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = f(t),$$

les signaux  $t \rightarrow y(t)U(t)$ ,  $t \rightarrow y'(t)U(t)$  et  $t \rightarrow y''(t)U(t)$  sont à croissance de type au plus exponentiel.

Preuve :

A) Posons  $z(t) = y(t)e^{\frac{b}{a}t}$ . On a  $t \rightarrow z(t)$  qui est continue et pour tout réel  $t$  où  $t \rightarrow f(t)$  est

continue on a :  $z'(t) = y'(t)e^{\frac{b}{a}t} + \frac{b}{a}y(t)e^{\frac{b}{a}t} = \frac{e^{\frac{b}{a}t}}{a}(a y'(t) + b y(t)) = \frac{e^{\frac{b}{a}t}}{a} f(t)$ .

On en déduit que  $\forall t \geq 0, z(t) = z(0) + \frac{1}{a} \int_0^t e^{\frac{b}{a}s} f(s) ds$ . On obtient alors que

$$\forall t \geq 0, y(t) = e^{-\frac{b}{a}t} z(t) = z(0) e^{-\frac{b}{a}t} + \frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}t} \int_0^t e^{\frac{b}{a}s} f(s) ds.$$

$$= z(0)e^{\frac{-b}{a}t} + \frac{1}{a} \int_0^t e^{\frac{-b}{a}(t-s)} f(s) ds = z(0)\varphi(t) + \frac{1}{a}(\varphi U * f U)(t) \quad , \text{ où } \varphi(t) = e^{\frac{-b}{a}t} .$$

Les signaux  $\varphi U$  et  $f U$  étant à croissance d'ordre au plus exponentiel,  $\frac{1}{a}(\varphi U * f U)(t)$  l'est aussi par la propriété 16 donc puisque  $y(t) = z(0)\varphi(t) + \frac{1}{a}(\varphi U * f U)(t)$  ,  $t \rightarrow y(t)U(t)$  l'est aussi par la propriété 15.

En remarquant que  $y'(t) = \frac{1}{a}f(t) - \frac{b}{a}y(t)$ , on déduit encore de la propriété 14 que  $t \rightarrow y'(t)U(t)$  est à croissance d'ordre au plus exponentielle.

B) Soit  $r \in \mathbb{C}$  une solution de l'équation caractéristique de  $(E_2): aX^2 + bX + c = 0$ . Posons

$z(t) = e^{-rt} y(t)$  ce qui signifie donc que  $y(t) = e^{rt} z(t)$  et on a :

$$(1) \quad y'(t) = r e^{rt} z(t) + e^{rt} z'(t) = (r z(t) + z'(t)) e^{rt}$$

et en re-dérivant :

$$y''(t) = (r z'(t) + z''(t)) e^{rt} + r(r z(t) + z'(t)) e^{rt}$$

$$(2) \quad y''(t) = (r^2 z(t) + 2r z'(t) + z''(t)) e^{rt} .$$

On obtient à partir des relations ci-dessus que

$$a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = a(r^2 z(t) + 2r z'(t) + z''(t)) e^{rt} + b(r z(t) + z'(t)) e^{rt} + c z(t) e^{rt}$$

ce qui donne :

$$\forall t \geq 0, \quad ((ar^2 + br + c)z(t) + (2ar + b)z'(t) + az''(t)) e^{rt} = f(t) .$$

On a  $ar^2 + br + c = 0$  donc l'équation ci-dessus devient :

$$(3) \quad \forall t \geq 0, \quad (2ar + b)z'(t) + az''(t) = f(t) e^{-rt} .$$

On a deux cas :

$$(i) \quad 2ar + b = 0: \quad \text{dans ce cas (3) donne} \quad (2) \quad \forall t \geq 0, \quad z''(t) = \frac{1}{a} f(t) e^{-rt} .$$

Par produit de fonctions à croissance d'ordre au plus exponentielle,  $t \rightarrow \frac{1}{a} f(t) e^{-rt}$  est à croissance d'ordre au plus exponentielle (propriété 15), donc on déduit de (2) et de la propriété 17 que  $z'(t)$  l'est aussi et, encore par la propriété 17, il en est de même pour  $z(t)$ . La relation  $y(t) = e^{rt} z(t)$  montre finalement que  $y(t)U(t)$  est à croissance d'ordre au plus exponentiel par produit (propriété 15).

Les relations (1) et (2) montrent que  $t \rightarrow y'(t)U(t)$  et  $t \rightarrow y''(t)U(t)$  sont à croissance de type au plus exponentiel (propriété 15 et le fait que  $t \rightarrow z(t)U(t)$ ,  $t \rightarrow z'(t)U(t)$  et  $t \rightarrow z''(t)U(t)$  sont à croissance de type au plus exponentiel.)

(ii)  $2ar + b \neq 0$ : dans ce cas, on peut utiliser le A) de la propriété à l'équation (3) : par produit de fonctions à croissance d'ordre au plus exponentielle,  $t \rightarrow f(t) e^{-rt}$  est à croissance d'ordre au plus exponentielle (propriété 15), donc  $t \rightarrow z'(t)U(t)$  et  $t \rightarrow z''(t)U(t)$  sont à croissance de type au plus exponentiel. Par la propriété 17, il en est de même de  $t \rightarrow z(t)U(t)$  et on prouve tout comme dans le cas (i) que les signaux  $t \rightarrow y(t)U(t)$ ,  $t \rightarrow y'(t)U(t)$  et  $t \rightarrow y''(t)U(t)$  sont à croissance de type au plus exponentiel.

### VI.3) Transformées de Laplace des fonctions usuelles

Toutes les formules suivantes peuvent être obtenues par utilisation de la formule de la définition 4.

	$x(t)$	$X(p)$
(1)	$U(t)$	$\frac{1}{p}$ , $\text{Re}(p) > 0$
(2)	$t^n U(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$ , $\text{Re}(p) > 0$
(3)	$\sin(\omega t) U(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ , $\text{Re}(p) > 0$
(4)	$\cos(\omega t) U(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$ , $\text{Re}(p) > 0$

De la propriété 9 on déduit :

	$x(t)$	$X(p)$
	$e^{at} U(t)$ , $a \in \mathbf{C}$	$\frac{1}{p-a}$ , $\text{Re}(p) > a$
	$e^{at} t^n U(t)$ , $a \in \mathbf{C}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$ , $\text{Re}(p) > a$
	$e^{at} \sin(\omega t) U(t)$ , $a \in \mathbf{C}$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$ , $\text{Re}(p) > a$
	$e^{at} \cos(\omega t) U(t)$ , $a \in \mathbf{C}$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$ , $\text{Re}(p) > a$

## VII) Exercices

**On rappelle que tous les signaux considérés sont causaux, continus par morceaux et à croissance au plus exponentielle.**

**Exercice 1.** Étudier le caractère linéaire, causal, invariant dans le temps des systèmes suivants :

- 1) (S)  $x(t) \rightarrow y(t)$ , où  $y(t) = e^{-x(t)}$
- 2) (S)  $x(t) \rightarrow y(t)$ , où  $y(t) = t \cdot x(t)$
- 3) (S)  $x(t) \rightarrow y(t)$ , où  $y(t) = x(t) + \int_0^t x(s) ds$

**Exercice 2.** On considère le SCLIT défini de la façon suivante: (S)  $x(t) \rightarrow y(t)$ , où  $y(t) = \int_0^t e^{-(t-s)} x(s) ds$ . On considère l'entrée définie par  $x(t) = \frac{U(t) - U(t-a)}{a}$  pour  $a > 0$ ,

- 1) Dessiner l'allure de  $x(t)$ .
- 2) Calculer la réponse  $y(t)$  (on exprimera cette fonction sur les intervalles  $]-\infty; 0[$ ,  $[0, a[$  et  $[a; +\infty[$ ). On répondra à la question dans un premier temps sans utiliser la transformée de Laplace, puis on redonnera une solution avec transformée de Laplace.

**Exercice 3.** On considère le SCLIT défini de la façon suivante: (S)  $x(t) \rightarrow y(t)$ , où

$$y(t) = \int_0^t e^{-(t-s)} x(s) ds$$

On considère une entrée  $x(t)$  bornée, c'est à dire que  $\exists M > 0 : \forall t \in \mathbb{R}, -M \leq x(t) \leq M$ .

- 1) Montrer que  $\forall t > 0, -M(1 - e^{-t}) \leq y(t) \leq M(1 - e^{-t})$
- 2) En déduire que (S) est un système stable.

**Exercice 4.**

Calculer l'expression de  $x * y(t)$  dans chacun des cas suivants. On répondra à la question dans un premier temps sans utiliser la transformée de Laplace, puis on redonnera une solution avec transformée de Laplace.

- 1)  $x(t) = U(t), y(t) = e^{-t} U(t)$
- 2)  $x(t) = e^{-2t} U(t), y(t) = e^{-t} U(t)$
- 3)  $x(t) = \sin(t) U(t), y(t) = \cos(t) U(t)$

**Exercice 5.**

On considère le système (S)  $x(t) \rightarrow y(t)$ , avec  $y = (e^{-t} U(t)) * x(t)$ . On cherche un signal d'entrée, s'il en existe, tel que :

$$\forall t > 0, y(t) = x(t) + 1.$$

- 1) En utilisant la transformée de Laplace, montrer que la condition ci dessus est équivalente à :

$$X(p) = \frac{-1}{p} - \frac{1}{p^2}.$$

- 2) En déduire l'expression de  $x(t)$ .



**Exercice 6** Trouver la transformée de Laplace des signaux suivants :

- 1)  $f(t) = (t-1)(t+1)U(t)$
- 2)  $f(t) = 5 \sin(3t)U(t)$
- 3)  $f(t) = e^{-t} \sin(3t)U(t)$
- 4)  $f(t) = \cos^2(t)U(t)$
- 5)  $f(t) = \sin(3t) \cdot \cos(5t)U(t)$
- 6)  $f(t) = U(t-3)$
- 7)  $f(t) = t e^{2t}U(t)$
- 8)  $f(t) = t \cos(4t)U(t)$

**Exercice 7**

Tracer les graphes des signaux suivants et calculer leur transformée de Laplace :

- i)  $f_1(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right)U\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$
- ii)  $f_2(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right)U(t)$
- iii)  $f_3(t) = \sin(t)U\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$

**Exercice 8**

Exprimer les signaux suivants à l'aide de fonctions échelons (éventuellement retardées) et calculer leur transformée de Laplace

- 1)  $x(t) = 12$  si  $t \in [0; 10[$  et  $x(t) = 0$  sinon.
- 2)  $x(t) = \sin(t)$  si  $t \in [0; \pi]$  et  $x(t) = 0$  sinon.
- 3)  $x(t) = 0$  si  $t < 0$ ,  $x(t) = t$  si  $t \in [0; 1]$  et  $x(t) = 1$  sinon.
- 4)  $x(t) = t$  si  $t \in [0; 1]$ ,  $x(t) = 2-t$  si  $t \in ]1; 2]$  et  $x(t) = 0$  sinon.

**Exercice 9**

Trouver les originaux des signaux suivants ( $a$  désigne un paramètre réel,  $\omega$  et  $\Omega$  des réels strictement positifs)

- a)  $F(p) = \frac{1}{p^2 - 16}$
- b)  $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2 - 1}$
- c)  $F(p) = \frac{p}{(p-a)(p+3)}$
- d)  $F(p) = \frac{e^{-p}}{(p+4)^2}$
- e)  $F(p) = \frac{p-5}{p^2 + 2p + 5}$
- f)  $F(p) = \frac{e^{-2p}}{(p-1)(p^2 + 2p + 2)}$

$$g) F(p) = \frac{2p-1}{p(p^2+3)}$$

$$h) F(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}$$

$$i) F(p) = \frac{2p+a}{p^2-4p+20}$$

$$j) F(p) = \frac{e^{-p\pi}}{p^2-3p+2}$$

$$k) F(p) = \frac{p}{(p-1)^2(p+2)}$$

$$l) F(p) = \frac{p}{(p^2+\omega^2)(p^2+\Omega^2)}$$

### Exercice 10.

On considère la fonction « rampe » ci-dessous :

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } t \in [0; 2[ \\ 2 & \text{si } t \geq 1 \end{cases} .$$

1) Représenter graphiquement cette fonction.

2) Après avoir exprimé  $x(t)$  à l'aide de fonctions échelons, calculer une expression de  $X(p)$ , la transformée de Laplace de  $x(t)$

### Exercice 11

a) Trouver l'expression du signal  $x(t)$  qui vérifie  $x(t) * (e^{-t} U(t)) = t e^{-2t} U(t)$  .

b) Trouver l'expression du signal  $x(t)$  qui vérifie  $x(t) * (\cos(t) U(t)) = t e^{-2t} U(t)$

c) Prouver qu'il n'existe pas de signal  $x(t)$  qui vérifie  $x(t) * (\sin(t) U(t)) = t e^{-2t} U(t)$  .

### Exercice 12.

Soit un système de fonction de transfert  $H(p) = \frac{1}{1+\tau p}$ , avec  $\tau > 0$ .

1) Calculer l'expression de la réponse impulsionnelle.

2) Déterminer de deux façons différentes la stabilité du système.

3) a) Procéder à la décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{p(1+\tau p)}$  .

b) En déduire l'expression de la réponse indicielle du système.

4) Soit  $x(t)$  la fonction porte de base  $[0; 2]$  . Donner l'expression de la sortie associée  $y(t)$  (On donnera les expressions sur  $[0; 2]$  et sur  $[2; +\infty[$  .

### Exercice 13

(La question 3 est indépendante des autres)

On considère le système linéaire défini par  $y(t) = (h * x)(t)$  pour  $t \geq 0$  .

On suppose que la fonction de transfert du système est donnée par :  $H(p) = \frac{9}{9p^2+6p+1}$  .

1) Etudier la stabilité de ce système.

2) Calculer la réponse impulsionnelle du système.

3) On considère le système linéaire  $(S_a)$  défini par sa fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{p}{(p^2 + 3p + 2)(p - a)} \text{ avec } a \text{ réel.}$$

a) Pour quelles valeurs de  $a$  le système  $(S_a)$  est-il stable ?

b) On considère le système  $S_0$  initialement au repos.

(i) Donner la réponse impulsionnelle de ce système.

(ii) Retrouver l'équation différentielle dont  $y(t)$  est solution.

#### Exercice 14

On considère les fonctions  $x(t) = tU(t)$  et  $y(t) = e^{-t}U(t)$ . Calculer à l'aide de la transformée de Laplace une expression de  $x * y(t)$ .

#### Exercice 15.

On considère un système de convolution  $(S)$ . On suppose que la réponse à la sinusoïde

$$x(t) = \sin(t)U(t) \text{ est donnée par } y(t) = (7 \sin(t) + 11 \cos(t) - 51e^{-3t} + 40e^{-4t})U(t).$$

1) a) Donner l'expression de  $X(p)$ .

b) Montrer que  $Y(p) = \frac{170p}{(p+3)(p+4)(p^2+1)}$

c) En déduire l'expression de la fonction de transfert  $H(p)$  du système.

2) Etudier la stabilité du système.

3) Donner l'expression de la réponse indicielle du système.

#### Exercice 16

Calculer les originaux des fonctions suivantes :

1)  $X(p) = \frac{1}{p+4}$

2)  $X(p) = \frac{1}{p^2+4}$

3)  $X(p) = \frac{1}{p^2-4}$

4)  $X(p) = \frac{e^{-2p}}{p}$

5)  $X(p) = \frac{1}{p(p+2)}$

6)  $X(p) = \frac{4}{p^2+4p+8}$

### Exercice 17

On s'intéresse au système électronique qui à une tension d'entrée  $y(t)$  aux bornes d'un circuit RC série associe la tension  $y(t)$  aux bornes du condensateur (initialement déchargé).

On modélise la situation par le système linéaire (S) (initialement au repos) qui à tout signal d'entrée  $x(t)$  fait correspondre le signal de sortie  $y(t)$  solution de l'équation différentielle

$$\tau y'(t) + y(t) = x(t), \text{ avec } \tau = RC \text{ et la condition initiale } y(0) = 0.$$

- 1) a) Calculer la fonction de transfert de (S) .  
b) En déduire la réponse impulsionnelle de (S) .  
c) Déduire que  $y(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{s-t}{\tau}} x(s) ds$  .
- 2) Applications
  - a) Montrer que si  $\forall t \geq 0, x(t) \geq 0$  alors  $\forall t \geq 0, y(t) \geq 0$  .
  - b) Montrer que si  $\forall t \geq 0, -1 \leq x(t) \leq 1$  alors  $\forall t \geq 0, -1 \leq y(t) \leq 1$  .

### Exercice 18

On considère (S) un système dont la fonction de transfert est  $H(p) = \frac{1}{p+2}$  .

- 1) Le système est-il stable ? Instable ? Justifiez.
- 2) Calculez l'expression de la réponse impulsionnelle de (S).
- 3) Calculez l'expression de la réponse indicielle de (S).

On considère à partir de maintenant une entrée causale  $x(t)$  de durée inférieure à 10, ce qui signifie que

$$(1) \quad \forall t \geq 10, x(t) = 0.$$

Soit  $y(t)$  la sortie associée à  $x(t)$  .

- 4) a) Écrire l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction  $y(t)$  .  
b) En déduire, en le justifiant, qu'il existe une constante A telle que pour tout réel  $t \geq 10$  , on ait  $y(t) = A e^{-2t}$  .

On suppose dorénavant que  $x(t)$  est une impulsion physique de durée inférieure à 10. Mathématiquement, cela signifie qu'il existe  $a \in ]0; 10[$  tel que  $x(t) = \Pi_{0,a}(t)$  .

- 5) a) Écrire  $x(t)$  à l'aide de deux échelons.  
b) En déduire une relation entre  $y(t)$  et  $y_{\text{ind}}(t)$  , la réponse indicielle de (S).  
c) En déduire enfin une expression de  $y(t)$  sur l'intervalle  $[10; +\infty[$  .

6) A l'aide d'une mesure expérimentale, on obtient que  $\forall t \geq 10, y(t) = 4e^{-2t}$  . Trouver la valeur exacte de la durée  $a$  de l'impulsion d'entrée.

*Dans les deux exercices suivants, on n'utilisera pas la propriété 13 qui sera redémontrée dans des cas particuliers*

### Exercice 19

On pose  $f_0(t) = \sin(t)U(t) + \sin(t-\pi)U(t-\pi)$

- 1) a) Tracer les représentations graphiques des fonctions  $\sin(t)U(t)$  et  $\sin(t-\pi)U(t-\pi)$ .  
b) En déduire la représentation graphique de  $f_0(t)$ .
- 2) a) Montrer que  $F_0(p)$ , la transformée de Laplace de  $f_0(t)$ , est définie sur  $\mathbb{C}$  tout entier.  
b) Calculer une expression de  $F_0(p)$  pour  $p \neq \pm j$ .

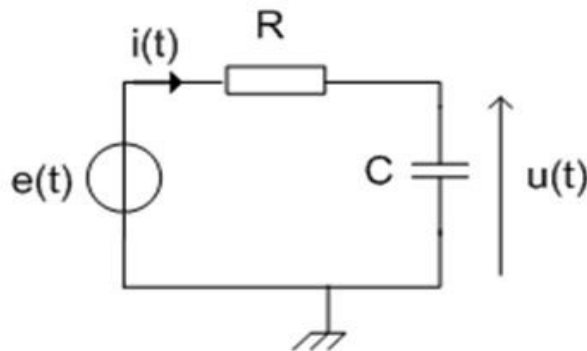
3) On considère  $f_1(t)$ , le signal causal  $2\pi$ -périodique sur  $[0; +\infty[$  défini par  $f_1(t) = \sin(t)$  sur  $[0; \pi[$  et  $f_1(t) = 0$  sur  $[\pi; 2\pi[$ .

- a) Montrer que  $F_1(p)$ , la transformée de Laplace de  $f_1(t)$ , est définie sur (au moins)  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ .
- b) Que peut-on dire de la fonction  $f_1(t) - f_1(t-2\pi)$  (s'aider d'un dessin) ?
- c) En déduire une expression de  $F_1(p)$ .

4) On considère cette fois  $f_2(t)$ , le signal causal  $\pi$ -périodique sur  $[0; +\infty[$  défini par  $f_2(t) = \sin(t)$  sur  $[0; \pi[$ . Montrer que  $F_2(p)$ , la transformée de Laplace de  $f_2(t)$ , est définie sur (au moins)  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$  et calculer une expression de  $F_2(p)$ .

### Exercice 20

Dans ce problème, on s'intéresse au système qui, à un signal  $e(t)$  donnée, associe la tension aux bornes du condensateur  $u(t)$  d'un circuit RC en série soumis à la tension  $e(t)$ .



Plus précisément, on s'intéressera au cas d'une tension  $e(t)$  périodique. Les questions que l'on peut se poser sont :

- (i) La tension de sortie  $u(t)$  est-elle périodique ?
- (ii) Sinon, est-ce qu'elle tend à le devenir quand  $t \rightarrow +\infty$  (donc si on néglige le régime transitoire) ?

\* \* \* \* \*

Posons  $x(t) = e(t)$  et  $y(t) = u(t)$ .

On suppose pour simplifier les calculs que  $RC = 1$  et que le condensateur est initialement déchargé. On sait alors que  $y(t)$  est la solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y'(t) + y(t) = x(t), \quad \text{avec } y(0^+) = 0.$$

On définit donc le système  $(S) : x(t) \rightarrow y(t) = (S)(x(t))$  qui, à un signal  $x(t)$ , fait correspondre la sortie  $y(t)$  solution de l'équation différentielle (E).

On considère également le système auxiliaire  $(\Sigma) : y(t) \rightarrow z(t) = (\Sigma)(y(t))$  qui à un signal  $y$  fait correspondre la sortie  $z(t)$  causale  $z(t) = y(t) - y(t-2)$ . Ce système va servir formellement à tester si un signal est 2-périodique.

La première partie du problème permet d'établir des propriétés sur les systèmes  $(S)$  et  $(\Sigma)$  qui seront utilisées dans la seconde, où l'on étudie le caractère périodique d'une sortie par  $(S)$  associée à une entrée périodique (selon qu'on néglige ou pas le régime transitoire).

**A) Étude générale des systèmes  $(S)$  et  $(\Sigma)$**

1) Démontrer que la fonction de transfert du système  $(S)$  est  $H_S(p) = \frac{1}{p+1}$ .

2) Étudier la stabilité du système  $(S)$  en utilisant sa fonction de transfert.

3) a) Calculer l'expression de la réponse impulsionnelle de  $(S)$ .

b) Retrouver à partir de l'expression de la réponse impulsionnelle la réponse à la question 2).

4) Donner l'expression de la réponse indicielle de  $(S)$ .

5) a) Montrer que la fonction de transfert du système  $(\Sigma)$  est  $H_\Sigma(p) = 1 - e^{-2p}$ .

b) Calculer l'expression de la réponse indicielle de  $(\Sigma)$  et la représenter graphiquement.

**B) Étude d'une sortie correspondant à une entrée causale 2-périodique.**

**Définition :** On appelle signal causal 2-périodique une fonction causale et continue par morceaux telle que  $\forall t \geq 0, x(t+2) = x(t)$ .

On définit l'entrée causale 2-périodique  $x_0(t)$  par  $x_0(t) = 1$  si  $t \in [0; 1[$  et  $x_0(t) = 0$  si  $t \in [1; 2[$ .

1) a) Représenter graphiquement les signaux  $x_0(t)$  et  $x_0(t-2)$ .

b) Déterminer  $f(t) = (\Sigma)(x_0(t))$  et le représenter graphiquement.

c) Calculer directement l'expression de  $F(p)$  la transformée de Laplace de  $(\Sigma)(x_0(t))$ .

d) En déduire que  $X_0(p) = \frac{F(p)}{1 - e^{-2p}} = \frac{1 - e^{-p}}{p(1 - e^{-2p})}$ .

Il est facile de se convaincre à partir de l'exemple de  $x_0(t)$ , et on l'admettra par la suite, qu'un signal causal  $x(t)$  est 2-périodique si et seulement si  $\forall t > 2, (\Sigma)(x(t)) = 0$ .

2) On pose  $y_0(t) = (S)(x_0(t))$  la sortie du signal  $x_0(t)$  par le système  $(S)$  et  $z_0(t) = (\Sigma)(y_0(t))$  la sortie du signal  $y_0(t)$  par le système  $(\Sigma)$ . On a ainsi :

$$x_0(t) \xrightarrow{(S)} y_0(t) \xrightarrow{(\Sigma)} z_0(t)$$

On ne cherchera pas à donner une expression de  $y_0(t)$  : l'idée est d'étudier le caractère périodique de  $y_0(t)$  par l'intermédiaire de  $z_0(t)$ .

- Calculer l'expression de  $Y_0(p)$  (la transformée de Laplace de  $y_0(t)$ ) (utiliser le 1d))
- En déduire que  $Z_0(p) = \frac{1-e^{-p}}{p(p+1)}$  ( $Z_0(p)$  étant la transformée de Laplace de  $z_0(t)$ ).
- Vérifier que, pour  $t \geq 2$ , on a  $z_0(t) = (e-1)e^{-t}$ . Le signal  $y_0(t)$  est-il 2-périodique ?

3) Dans cette question, on modifie l'entrée en changeant uniquement sa valeur moyenne. On considère l'entrée  $x_\alpha = x_0(t) - \alpha U(t)$ , avec  $\alpha$  un paramètre inconnu, et on pose  $y_\alpha = (S)(x_\alpha)$ . On définit aussi  $z_\alpha(t) = (\Sigma)(y_\alpha(t))$  la sortie du signal  $y_\alpha(t)$  par le système  $(\Sigma)$ . On cherche à savoir s'il existe un réel  $\alpha$  tel que  $y_\alpha(t)$  soit 2-périodique.

On rappelle que le signal  $x_0(t)$  a été défini au début de la partie B). On a encore ainsi :

$$x_\alpha \xrightarrow{(S)} y_\alpha(t) \xrightarrow{(\Sigma)} z_\alpha(t)$$

- Comment déduit-on la représentation graphique de  $x_\alpha$  à partir de celle de  $x_0(t)$  ? On pourra faire un dessin.
- Vérifier que  $y_\alpha(t) = y_0(t) - \alpha(1 - e^{-t})U(t)$ .
- Montrer que, pour  $t \geq 2$ ,  $z_\alpha(t) = z_0(t) - \alpha(e^2 - 1)e^{-t} = (e - 1 - \alpha(e^2 - 1))e^{-t}$
- Prouver qu'il existe une seule valeur de  $\alpha$  telle que  $y_\alpha$  soit 2-périodique, et montrer que  $\alpha = \frac{1}{e+1}$ .

On considère maintenant  $\alpha = \frac{1}{e+1}$ .

4)

Montrer que la sortie  $y_0(t)$  (définie à la question 2) s'écrit pour  $t \geq 0$  sous la forme :

$y_0(t) = \varphi(t) - \alpha e^{-t}$  où  $\varphi(t)$  est un signal 2-périodique dont on donnera l'expression à l'aide de  $\alpha$  et  $y_\alpha(t)$ . Pourquoi peut-on dire que, si  $t \rightarrow +\infty$ , la sortie  $y_0(t)$  devient quasiment 2-périodique ?

Donner enfin l'expression de  $\varphi(t)$  en fonction de  $t$  pour  $t \in [0; 2[$ . On considérera séparément les cas  $t \in [0; 1[$  et  $t \in [1; 2[$ .

## Exercice 21

On s'intéresse dans ce sujet à un système linéaire causal invariant dans le temps dont on ne connaît que la réponse indicielle. On s'intéresse aux entrées dont la sortie est un signal détectable au sens suivant :

**Définition** Soit  $y(t)$  un signal causal continu par morceaux. Le signal  $y(t)$  est dit indétectable si  $\forall t \in \mathbb{R}, -0,1 < y(t) < 0,1$ . Il est dit détectable sinon.

Cette définition correspond à l'idée qu'un signal ne peut pas être mesuré s'il est trop faible, le seuil de détectabilité étant fixé ici à 0,1.

\* \* \* \* \*

On considère un système linéaire causal invariant dans le temps qui à un signal  $x(t)$  associe la sortie  $y(t) = (x * h)(t)$ . Soit  $H(p)$  la fonction de transfert de ce système. Soit enfin  $y_{\text{ind}}(t)$  la réponse indicielle du système.

1) Montrer que  $Y_{\text{ind}}(p) = \frac{H(p)}{p}$ .

On suppose dorénavant que  $y_{\text{ind}}(t) = 2(1 - e^{-3t})U(t)$ .

2) a) Calculer  $Y_{\text{ind}}(p)$ .

b) En déduire que  $H(p) = \frac{6}{p+3}$ .

3) a) Étudier la stabilité du système.

b) Calculer l'expression de  $h(t)$ .

4) Montrer que le système peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{1}{6}y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = x(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

5) On considère en entrée une impulsion de durée  $a > 0$ , modélisée par la fonction

$$x_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0; a[ \\ 0 & \text{si } t \notin [0; a[ \end{cases}$$

. Le but de la question est de trouver la valeur minimale de la durée  $a$  pour que la réponse  $y_a(t)$  soit détectable.

a) Montrer que  $y_a(t) = y_{\text{ind}}(t) - y_{\text{ind}}(t-a)$ .

b) Donner à l'aide du paramètre  $a$  les expressions de  $y_a(t)$  sur les intervalles  $[0, a[$  et  $[a; +\infty[$ . Établir le tableau de variation de la fonction  $y_a$  sur  $[0; +\infty[$ .

c) En déduire la valeur minimale de  $a$  pour que la réponse  $y_a(t)$  soit détectable. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à  $10^{-3}$  près.

6) On considère maintenant une entrée  $x(t) = \sin(\omega t)U(t)$  avec  $\omega > 0$ .

a) Donner l'expression de  $X(p)$ , la transformée de Laplace de  $x(t)$ . En déduire une expression de  $Y(p)$ , la transformée de Laplace de la sortie  $y(t)$ .

b) Trouver alors une expression de  $y(t)$ .

c) Montrer que  $y(t)$  s'écrit sous la forme :

$$y(t) = \varepsilon(t) + \frac{6}{\omega^2 + 9} (-\omega \cos(\omega t) + 3 \sin(\omega t)), \quad \text{où } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0.$$

d) On fait l'approximation que  $\forall t \in \mathbb{R}, \varepsilon(t) = 0$  (ce qui revient en quelque sorte à négliger le régime transitoire).

(i) Montrer que  $\forall t \geq 0, -\frac{6}{\sqrt{\omega^2 + 9}} \leq y(t) \leq \frac{6}{\sqrt{\omega^2 + 9}}$ . (Utiliser l'amplitude de  $y(t)$  et le

rappel n°2).

(ii) Pour quelles valeurs de  $\omega$  la sortie  $y(t)$  est-elle indétectable ? Pourquoi peut-on dire que le système se comporte comme un filtre (dont on précisera la nature) ?

7) a) On suppose maintenant que  $\forall t \in \mathbb{R}, -\frac{1}{20} < x(t) < \frac{1}{20}$ . En déduire un encadrement de



$e^{3s}x(s)$ , puis en déduire l'encadrement :  
 $\forall t \geq 0, \quad \frac{-1}{60}(e^{3t}-1) \leq \int_0^t e^{3s}x(s)ds \leq \frac{1}{60}(e^{3t}-1).$

b) En déduire que si  $\forall t \in \mathbb{R}, -\frac{1}{20} < x(t) < \frac{1}{20}$ , alors

$$\frac{-1}{10}(1-e^{-3t}) \leq (h*x)(t) \leq \frac{1}{10}(1-e^{-3t}).$$

c) En déduire que si  $\forall t \in \mathbb{R}, -\frac{1}{20} < x(t) < \frac{1}{20}$ , le signal de sortie  $y(t)$  est indétectable.

### (\*) Exercice 22

1) Dans cette question, on cherche un signal  $t \rightarrow h(t)$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) - \frac{1}{2}h(t-1) = U(t).$$

a) Supposons que  $h$  vérifie les conditions imposées.

(i) Déterminer l'expression de  $t \rightarrow h(t)$  sur  $[0; 1[$ .

(ii) Montrer que nécessairement,  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [n; n+1[, h(t) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

b) Montrer qu'il existe un unique signal  $h$  vérifiant les conditions imposées, et qu'il admet une transformée de Laplace  $H(p)$  définie pour  $\text{Re}(p) > 0$ .

Déterminer une expression de  $H(p)$ .

2) On considère le système linéaire défini par  $y(t) = (h*x)(t)$  pour  $t \geq 0$ , la fonction  $h$  étant celle définie à la question 1).

a) Étudier la stabilité de ce système.

b) Montrer  $y$  vérifie la relation :  $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) - \frac{1}{2}y(t-1) = \int_0^t x(s)ds$ .

c) Prouver que  $y$  est la seule fonction  $f$  causale à vérifier la relation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) - \frac{1}{2}f(t-1) = \int_0^t x(s)ds.$$

d) Montrer que pour tout réel  $t$  positif fixé, la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x(t-n)$  est finie et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \int_0^t \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x(s-n) \right) ds.$$

On pourra établir d'abord que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$H(p) = \frac{1}{p} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} e^{-kp} + \frac{1}{2^{n+1}} \frac{e^{-(n+1)p}}{1-e^{-p}} \right)$$

e) Soit  $y_a$  la réponse à l'entrée  $x(t) = e^{-at}U(t)$  avec  $a > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Trouver une expression de  $y_a(t)$  pour  $t \in [n; n+1[$ . Donner une expression sur  $\mathbb{R}$  en notant  $[t]$  la partie entière de  $t$ , c'est à dire l'unique entier  $n$  tel que  $t \in [n; n+1[$ .

### Exercice 23

On définit la fonction causale  $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}U(t)$

1) Montrer que  $f(0^+) = 1$ . En déduire que  $f$  est continue par morceaux.

2) Soit  $F(p)$  la transformée de Laplace de  $f$ .

On admet que  $\forall t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| \leq |t|$ .

Montrer que  $F(p)$  est définie (au moins) sur  $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ .

A partir de maintenant, on considère  $p > 0$ .

3) a) Montrer que  $F'(p)$  est la transformée de Laplace de  $-\sin(t)U(t)$ . En déduire l'expression de  $F'(p)$ .

b) A l'aide d'une propriété du cours, déterminer  $\lim_{p \rightarrow +\infty} p F(p)$ . En déduire que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) = 0.$$

c) A l'aide des résultats des deux questions précédentes, montrer que

$$\forall p > 0, F(p) = \frac{\pi}{2} - \arctan(p). \text{ En déduire la valeur de } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)e^{-t}}{t} dt.$$

4) On définit le signal  $y$  par l'expression  $y(t) = \left( \int_0^t \frac{\sin(s)}{s} ds \right) U(t)$ . On rappelle que l'intégrale

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds$  est convergente. En appliquant le Théorème de la valeur finale à  $y$ , trouver la valeur de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds$

### (\*) Exercice 24

Soit (S) un système stable de réponse impulsionnelle  $h(t)$ , et soit  $y_{\text{ind}}(t)$  la réponse indicielle.

On suppose que (S) est stable.

1) Démontrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{\text{ind}}(t)$  existe et vaut  $H(0)$ .

2) Supposons que le signal d'entrée soit tel que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ . Soit  $y$  la sortie associée.

a) En utilisant le Théorème 2 du chapitre des fonctions élémentaires, montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\forall t \geq 0, |x(t)| \leq C$ .

b) En utilisant correctement l'hypothèse  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ , montrer qu'il existe une suite  $(t_n)_n$  de réels positifs tels que :

$$(i) : \forall n \in \mathbb{N}, t_n \geq n$$

$$(ii) : \forall t \geq t_n, |x(t)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

c) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \geq 2t_n$ . Montrer que  $\left| \int_0^{\frac{t}{2}} h(s)x(t-s) ds \right| \leq \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} |h(s)| ds$  et que

$$\left| \int_{\frac{t}{2}}^t h(s)x(t-s) ds \right| \leq C \int_n^{+\infty} |h(s)| ds.$$

d) En déduire, en utilisant la définition d'une limite, que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ .

3) Supposons que le signal d'entrée soit tel que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = l \in \mathbb{R}$ . Que dire de  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ ?

4) On ne suppose plus que (S) est stable, mais qu'il vérifie la condition (F) suivante :

$$t \rightarrow x(t) \text{ à durée finie} \implies t \rightarrow y(t) \text{ à durée finie}$$

a) En considérant l'entrée  $x(t) = \Pi_{0,1}(t)$ , montrer que la réponse indicielle est 1-périodique à partir d'un certain temps, c'est à dire qu'il existe  $T_0 > 0$  tel que  $\forall t \geq T_0, y_{\text{ind}}(t+1) = y_{\text{ind}}(t)$ .

Soit  $a \in ]0; +\infty[$ .

b) Montrer qu'il existe  $T_1 > 0$  tel que  $\forall t \geq T_1, y_{\text{ind}}(t+a) = y_{\text{ind}}(t)$ .

c) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  assez grand, on a  $y_{\text{ind}}(n+T_0+a) = y_{\text{ind}}(n+T_0)$ .

d) En déduire alors que  $y_{\text{ind}}(t)$  est constante sur  $[T_0; +\infty[$ .

e) En déduire alors que la réponse impulsionnelle est à durée finie.

5) Un système stable vérifie-t-il toujours la condition (F)? Et réciproquement ?

6) Prouver que si  $h$  est à durée finie, alors (S) vérifie la condition (F).

### Exercice 25

On s'intéresse au système  $(S): x(t) \rightarrow y(t)$  défini par :

$$y'(t) + \lambda(e^{-2t}U(t)) * y(t) = x(t), \text{ avec un paramètre } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et la condition initiale } y(0) = 0.$$

On rappelle la propriété suivante : si  $x_1$  et  $x_2$  sont les racines du polynôme  $aX^2 + bX + c$ , alors

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

1) Dans le cas où  $\lambda = 0$ , montrer que le système est bien défini et donner une expression simple de  $y(t)$  en fonction de  $x(t)$ .

2) Dans le cas général, montrer que le système (S) est bien défini (c'est à dire que pour tout signal  $x$  il existe un unique signal  $y$  continu et dérivable par morceaux tel que

$$y'(t) + \lambda(e^{-2t}U(t)) * y(t) = x(t) \text{ et } y(0) = 0. \text{ Montrer que la fonction de transfert de (S) est}$$

$$H(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+\lambda}.$$

3) Pour quelles valeurs de  $\lambda$  l'écriture  $\frac{p+2}{p^2+2p+\lambda}$  est-elle irréductible ?

4) Dans cette question, on suppose  $\lambda < 0$ .

a) Montrer que  $H(p)$  possède deux pôles réels  $p_1$  et  $p_2$  (on ne demande pas leur expression).

b) Sans chercher à trouver les expressions de  $p_1$  et  $p_2$ , prouver que  $p_1 p_2 < 0$ .

c) Le système est-il stable ? Justifier.

On suppose jusqu'à la fin de l'exercice que  $\lambda > 0$ .

5) a) Pour quelle(s) valeur(s) de  $\lambda$  a-t-on des pôles non réels ?

b) Pour quelle(s) valeur(s) de  $\lambda$  a-t-on un pôle double ?

c) Pour quelle(s) valeur(s) de  $\lambda$  a-t-on deux pôles simples ?

d) Etudier la stabilité du système dans chacun des cas précédents.

6) On se place dans le cas où  $\lambda = 10$ . Donner l'expression des réponses impulsionnelle et indicielle.

### (\*) Exercice 26

1) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Montrer qu'il existe un unique signal  $y_\lambda(t)$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, (e^{-t}U(t)) * y_\lambda(t) - \lambda y_\lambda(t) = U(t).$$

2) Donner une expression de  $y_\lambda(t)$ .

3) Pour quelles valeurs de  $\lambda$  la solution  $y_\lambda(t)$  est-elle bornée ? Déterminer alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_\lambda(t)$ .

- 4) a) Montrer plus généralement que pour tout signal  $x(t)$  il existe un unique signal  $y(t)$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, (e^{-t}U(t)) * y(t) - \lambda y(t) = x(t)$  et trouver trois constantes  $a, b$  et  $c$  (dépendantes de  $\lambda$ ) telles que  $y(t) = ax(t) + b \int_0^t x(s)e^{c(t-s)} ds$ .
- b) Pour quelles valeurs de  $\lambda$  le système  $(S_\lambda) : x(t) \rightarrow y(t) = ax(t) + b \int_0^t x(s)e^{c(t-s)} ds$  est-il stable ?
- 5) Déterminer  $y(t)$  si  $\lambda = 2$  et  $x(t) = e^{-3t}U(t)$ .

**(\*) Exercice 27**

On considère le système linéaire défini par  $y(t) = (h * x)(t)$  pour  $t \geq 0$ . On suppose ce système stable et que tous les signaux considérés sont à valeurs réelles.

Soit  $x$  une entrée T-périodique, c'est à dire que  $\forall t \geq 0, x(t+T) = x(t)$ . Le but de l'exercice est de démontrer que la sortie  $y$  est asymptotiquement T-périodique, c'est à dire qu'il existe

(i) Une fonction T-périodique  $y_p$  continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$

(ii) Un signal  $y_0$  vérifiant  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_0(t) = 0$

tels que  $\forall t \geq 0, y(t) = y_p(t) + y_0(t)$ .

On définit  $\tilde{x}$  la fonction T-périodique sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\forall t \geq 0, \tilde{x}(t) = x(t)$ .

- 1) Montrer que si elle existe, la décomposition  $y = y_p + y_0$  est unique, c'est à dire que si  $y_p^{(1)}, y_p^{(2)}, y_0^{(1)}$  et  $y_0^{(2)}$  vérifient les points (i) et (ii) ci-dessus et sont telles que

$$\forall t \geq 0, y(t) = y_p^{(1)}(t) + y_0^{(1)}(t) = y_p^{(2)}(t) + y_0^{(2)}(t), \text{ alors } y_p^{(1)} = y_p^{(2)} \text{ et } y_0^{(1)} = y_0^{(2)}$$

- 2) Démontrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\forall t \in \mathbb{R}, |\tilde{x}(t)| \leq C$ .

- 3) On pose pour tout réel  $t, y_p(t) = \int_0^{+\infty} \tilde{x}(t-s)h(s) ds$ .

Montrer que la fonction  $t \rightarrow y_p(t)$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$  et est T-périodique.

- 4) a) Montrer que  $\forall t \geq 0, y(t) - y_p(t) = - \int_t^{+\infty} \tilde{x}(t-s)h(s) ds$ .

b) En déduire que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) - y_p(t) = 0$ . Conclure.

- 5) Application : On suppose que  $h(t) = e^{-t}U(t)$  et on définit l'entrée 2-périodique  $x(t)$  par  $x(t) = 1$  si  $t \in [0; 1[$  et  $x(t) = 0$  si  $t \in [1; 2[$ .

- a) Montrer que  $y_p(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^t x(s)e^s ds$ .

b) Calculer  $\int_{-\infty}^0 x(s)e^s ds$

c) Donner l'expression de  $y_p(t)$  sur  $[0; 1[$  et sur  $[1; 2[$ . Comparer avec le résultat obtenu à l'exercice 20.

- 6) On considère l'entrée sinusoïdale  $x(t) = \cos(\omega t)U(t)$ . Montrer que dans ce cas,  $y_p(t)$  est un signal sinusoïdal de même pulsation  $\omega$  et d'amplitude réelle  $|H(j\omega)|$

## VIII) Corrigés

Sauf nécessité particulière, les domaines de définition des transformées de Laplace ne seront pas systématiquement précisés.

### Exercice 1.

1)

Non linéaire : si  $x(t) = 2U(t)$ ,  $y(t) = e^{-2U(t)} \neq 2e^{-U(t)}$  car en prenant par exemple  $t=1$ , on a  $e^{-2} \neq 2e^{-1}$ . L'image de  $x(t) = 2U(t)$  n'est pas deux fois celle de  $U(t)$ .

Non causale :  $t < 0 \Rightarrow y(t) = e^{-x(t)} = 1 \neq 0$ .

Invariant dans le temps : si (S)  $x(t) \rightarrow y(t) = e^{-x(t)}$  et si  $a > 0$ , alors l'image de  $x(t-a)$  est  $e^{-x(t-a)} = y(t-a)$ .

2)

Linéaire : en reprenant les notations du II), la sortie correspondant à  $\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)$  sera

$$t(\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)) = \lambda t x_1(t) + \mu t x_2(t) = \lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$$

Causale :  $t < 0 \Rightarrow y(t) = t x(t) = t \times 0 = 0$ .

Non invariant dans le temps : la sortie correspondant à  $x_1(t) = U(t)$  est  $y_1(t) = tU(t)$  mais celle correspondant à  $x_2(t) = U(t-1)$  est  $y_2(t) = tU(t-1) \neq y_1(t-1)$  : si l'on prend  $t=1$  par exemple, on a  $y_2(1) = 1$  mais  $y_1(1-1) = y_1(0) = 0$ .

3)

On a  $y(t) = (\delta + U(t)) * x(t)$  et on reconnaît un SCLIT de réponse impulsionnelle  $h(t) = \delta + U(t)$ . Il est donc à la fois linéaire, causal et invariant dans le temps.

### Exercice 2.

1) La fonction  $x(t)$  est égale à la fonction porte  $\Pi_{0,a}$ .

2)

Sans transformée de Laplace :

$$\text{on a } y(t) = \int_0^t e^{-(t-s)} x(s) ds = \int_0^t e^{-(t-s)} \Pi_{0,a}(s) ds.$$

Si  $t \in ]-\infty; 0[$ ,  $y(t) = 0$ , si  $t \in [0, a[$ ,  $y(t) = \int_0^t e^{-(t-s)} ds = e^{-t} \int_0^t e^s ds = 1 - e^{-t}$ , et si

$$t \geq a, y(t) = \int_0^a e^{-(t-s)} ds = (e^a - 1) e^{-t}.$$

Avec transformée de Laplace :

$y = h * x$  avec  $h(t) = e^{-t} U(t)$  et  $x(t) = \Pi_{0,a}(t) = U(t) - U(t-a)$ , donc par transformation de

Laplace et le théorème du retard, on obtient  $Y(p) = \frac{1}{p(p+1)} (1 - e^{-ap}) = \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) (1 - e^{-ap})$ , donc,

par l'original, on obtient  $y(t) = (1 - e^{-t}) U(t) - (1 - e^{-t+a}) U(t-a)$ . On en déduit que :

si  $t \in ]-\infty; 0[$ ,  $y(t) = 0$ , si  $t \in [0, a[$ ,  $y(t) = 1 - e^{-t}$ , et si  $t \geq a$  :

$$y(t) = (1 - e^{-t}) - (1 - e^{-t+a}) = (e^a - 1) e^{-t}.$$

### Exercice 3.

**Remarque :** l'énoncé nous incite à ne pas utiliser la transformation de Laplace.

1) On procède par encadrement et intégration. Soit  $t \geq 0$  :

$$\forall s \in [0; t], -M \leq x(s) \leq M$$

$$\forall s \in [0; t], -M e^{-(t-s)} \leq x(s) \leq M e^{-(t-s)}$$

$$-M \int_0^t e^{-(t-s)} ds \leq x(s) \leq M \int_0^t e^{-(t-s)} ds$$

$$-M(1 - e^{-t}) \leq y(t) \leq M(1 - e^{-t})$$

2) Si  $t < 0$ ,  $y(t) = 0$  par causalité du système, et si  $t > 0$ , on a

$$-M < -M(1 - e^{-t}) \leq y(t) \leq M(1 - e^{-t}) < M.$$

On en déduit que si  $\forall t \in \mathbb{R}, -M \leq x(t) \leq M$ , alors  $\forall t \in \mathbb{R}, -M \leq y(t) \leq M$ .  
Le système est donc stable selon la définition 1 avec  $C = 1$ .

Remarque : la stabilité peut encore se retrouver de deux façons différentes :

$$\int_0^{+\infty} |h(t)| dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \text{ est convergente.}$$

Les pôles de la fonction de transfert  $H(p) = \frac{1}{p+1}$  sont de partie réelle strictement négatives.

### Exercice 4.

Calculer l'expression de  $x * y(t)$  dans chacun des cas suivants . On répondra à la question dans un premier temps sans utiliser la transformée de Laplace, puis on redonnera une solution avec transformée de Laplace.

1)  $x(t) = U(t)$ ,  $y(t) = e^{-t} U(t)$

Sans Laplace :  $x * y(t) = \int_0^t U(s) e^{-(t-s)} U(t-s) ds.$

Si  $t < 0$ ,  $(x * y)(t) = 0$  (Propriété 2(iii)) et si  $t \geq 0$  :

$$x * y(t) = \int_0^t U(s) e^{-(t-s)} U(t-s) ds = \int_0^t e^{-(t-s)} ds = 1 - e^{-t}.$$

Avec Laplace :  $TL(x * y)(p) = X(p) \cdot Y(p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$ , donc, par l'original,

$$x * y(t) = (1 - e^{-t}) U(t).$$

2)  $x(t) = e^{-2t} U(t)$ ,  $y(t) = e^{-t} U(t)$

Sans Laplace :  $x * y(t) = \int_0^t U(s) e^{-2s} e^{-(t-s)} U(t-s) ds.$

Si  $t < 0$ ,  $(x * y)(t) = 0$  (Propriété 2(iii)) et si  $t \geq 0$  :

$$x * y(t) = \int_0^t U(s) e^{-2s} e^{-(t-s)} U(t-s) ds = \int_0^t e^{-2s} e^{-(t-s)} ds = \int_0^t e^{-s-t} ds = e^{-t} - e^{-2t}.$$

Avec Laplace :  $TL(x * y)(p) = X(p) \cdot Y(p) = \frac{1}{(p+2)(p+1)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$ , donc, par l'original,

$$x * y(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) U(t).$$

$$3) \quad x(t) = \sin(t)U(t), \quad y(t) = \cos(t)U(t)$$

Sans Laplace :  $x * y(t) = \int_0^t U(s) \sin(s) \cos(t-s) U(t-s) ds.$

Si  $t < 0$ ,  $(x * y)(t) = 0$  (Propriété 2(iii)) et si  $t \geq 0$  :

$$x * y(t) = \int_0^t U(s) \sin(s) \cos(t-s) U(t-s) ds = \int_0^t \sin(s) \cos(t-s) ds = \frac{1}{2} \int_0^t (\sin(t) + \sin(2s-t)) ds$$

$$= \frac{1}{2} \left[ s \sin(t) - \frac{1}{2} \cos(2s-t) \right]_0^t = \frac{1}{2} t \sin(t).$$

Avec Laplace :  $TL(x * y)(p) = X(p) \cdot Y(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2} = \frac{-1}{2} \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{p^2+1} \right).$

Par le 3) de la propriété 10, puisque l'original de  $\frac{1}{p^2+1}$  est  $\sin(t)U(t)$ , on obtient que

$$x * y(t) = \frac{1}{2} t \sin(t) U(t).$$

### Exercice 5.

1) On a  $Y(p) = H(p)X(p) = \frac{X(p)}{p+1} = X(p)+1$  ce qui donne  $X(p) = \frac{-1}{p} - \frac{1}{p^2}.$

2)  $x(t) = (1+t)U(t).$

### Exercice 6

1)  $F(p) = \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p}.$

2)  $F(p) = \frac{15}{p^2+9}$

3)  $F(p) = \frac{3}{p^2+2p+10}$

4)  $F(p) = \frac{p^2+2}{p^3+4p}$

5)  $F(p) = \frac{3p^2-48}{(p^2+4)(p^2+64)}$

6)  $F(p) = \frac{e^{-3p}}{p}$

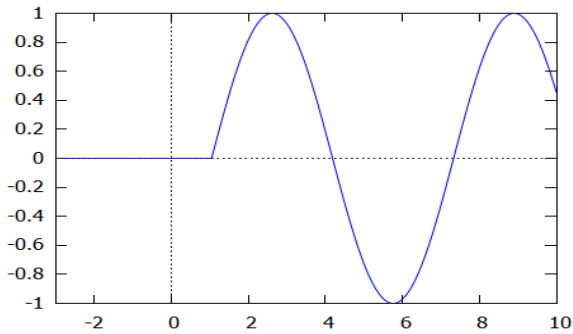
7)  $f(t) = t e^{2t} U(t)$

8)  $F(p) = \frac{1}{(p-2)^2}$  (propriété 10 3))

9)  $F(p) = \frac{p^2-16}{(p^2+16)^2}$  (propriété 10 3))

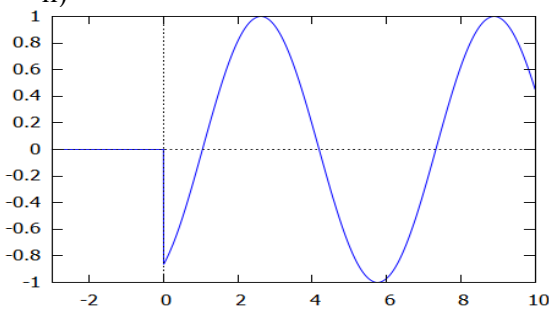
### Exercice 7

i)



Par le théorème du retard,  $F_1(p) = \frac{e^{-\pi \frac{p}{3}}}{p^2 + 1}$

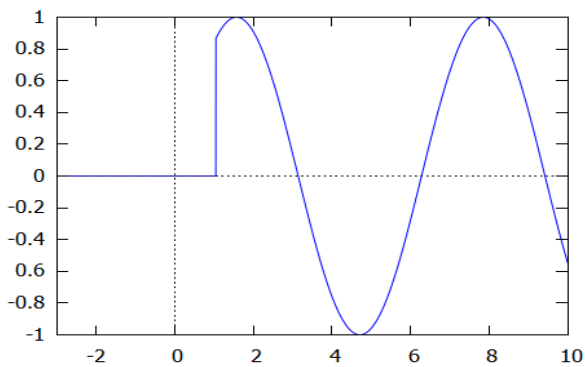
ii)



Par une formule d'addition trigonométrique, on a :

$$f_2(t) = \frac{1}{2} \sin(t)U(t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(t)U(t), \text{ ce qui donne } F_2(p) = \frac{1 - \sqrt{3}p}{p^2 + 1}$$

iii)



Le signal  $f_3(t)$  correspond au signal  $\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)U(t)$  retardé de  $\frac{\pi}{3}$  ce qui permet de trouver

$$F_3(p) = \frac{1 + \sqrt{3}p}{p^2 + 1} \cdot e^{-\frac{\pi p}{3}}$$



**Exercice 8**

1) On a  $x(t) = 12(U(t) - U(t-10))$  d'où  $X(p) = \frac{12}{p}(1 - e^{-10p})$

2) On a  $x(t) = \sin(t)(U(t) - U(t-\pi))$  ce qui peut se réécrire

$$x(t) = \sin(t)U(t) + \sin(t-\pi)U(t-\pi) \text{ d'où } X(p) = \frac{1}{p^2+1}(1 + e^{-\pi p})$$

3) On a  $x(t) = t(U(t) - U(t-1)) + U(t-1) = tU(t) - (t-1)U(t-1)$  d'où

$$X(p) = \frac{1}{p^2}(1 - e^{-p}).$$

On a

$$x(t) = t(U(t) - U(t-1)) + (2-t)(U(t-1) - U(t-2)) = tU(t) - 2(t-1)U(t-1) + (t-2)U(t-2)$$

d'où

$$X(p) = \frac{1}{p^2}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}) = \left(\frac{1 - e^{-p}}{p}\right)^2.$$

**Exercice 9**

a) par décomposition en éléments simples,  $f(t) = \frac{e^{4t} - e^{-4t}}{8}U(t)$ .

b) par décomposition en éléments simples + théorème du retard,  $f(t) = \frac{e^{t-2} - e^{-t+2}}{2}U(t-2)$ .

c)

Cas  $a = -3$  : par décomposition en éléments simples,  $f(t) = (1 - 3t)e^{-3t}U(t)$ .

Cas  $a \neq -3$  : par décomposition en éléments simples,  $f(t) = \frac{ae^{at} + 3e^{-3t}}{a+3}U(t)$ .

d) par le théorème du retard  $f(t) = (t-1)e^{-4(t-1)}U(t-1)$ .

e) en écrivant  $F(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} - 3\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}$ , on obtient  $f(t) = (\cos(2t) - 3\sin(2t))e^{-t}U(t)$ .

f) par décomposition en éléments simples et une technique similaire à celle du e), il vient

$$f(t) = \frac{1}{5}(e^t - (2\sin(t) + \cos(t))e^{-t})U(t).$$

g) par une décomposition en éléments simples, on obtient

$$f(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{3}\cos(\sqrt{3}t) - \frac{1}{3}\right)U(t).$$

h) en écrivant que  $F(p) = \frac{-1}{2} \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{(p^2+1)}\right)$  et par la propriété 10.3) on obtient que

$$f(t) = \frac{-1}{2} t \sin(t) U(t).$$

i) par une décomposition en éléments simples on obtient  $f(t) = e^{2t} \left( \left(1 - \frac{a}{4}\right) \sin(4t) + 2\cos(4t) \right) U(t)$ .

j) par décomposition en éléments simples + théorème du retard, il vient  $f(t) = (e^{2(t-\pi)} - e^{t-\pi})U(t-\pi)$ .

k) par décomposition en éléments simples il vient  $f(t) = \frac{1}{9}((3t+2)e^t - 2e^{-2t})U(t)$

l) Puisque  $\omega$  et  $\Omega$  sont des réels strictement positifs, on a par décomposition en éléments simples :

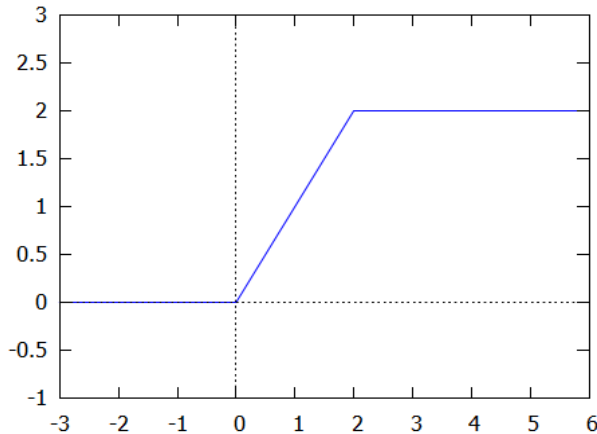
si  $\omega \neq \Omega$ , alors  $f(t) = \frac{\cos(\omega t) - \cos(\Omega t)}{\omega^2 - \Omega^2} U(t)$

si  $\omega = \Omega$ , alors  $F(p) = \frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2} = \frac{-1}{2} \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{(p^2 + \omega^2)} \right)$  et par la propriété 10.3) on obtient que

$$f(t) = \frac{t}{2\omega} \cdot \sin(\omega t) U(t).$$

### Exercice 10.

1).



2) On a  $x(t) = tU(t) - (t-2)U(t-2)$  donc  $X(p) = \frac{1-e^{-2p}}{p^2}$

### Exercice 11

a) Par le Théorème 2, si le signal  $x(t)$  existe, alors  $X(p) = \frac{p+1}{(p+2)^2} = \frac{1}{p+2} - \frac{1}{(p+2)^2}$  donc  $x(t) = (1-t)e^{-2t}U(t)$ . La réciproque est immédiate par transformation de Laplace.

b) Par le Théorème 2, si le signal  $x(t)$  existe, alors  $X(p) = \frac{p^2+1}{p(p+2)^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{p} + \frac{3}{p+2} - \frac{10}{(p+2)^2} \right)$  donc  $x(t) = \frac{1}{4} (1 + (3-10t)e^{-2t})U(t)$ . La réciproque est immédiate par transformation de Laplace.

c) On raisonne par l'absurde. Par le Théorème 2, si le signal  $x(t)$  existait, alors on aurait

$X(p) = \frac{p^2+1}{(p+2)^2}$ . Par la remarque (i) du Théorème 4, c'est impossible car  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p^2+1}{(p+2)^2} = 1 \neq 0$ . En revanche,  $x(t)$  existe au sens des distributions, et on peut facilement trouver que  $x(t) = \delta + (5t-4)e^{-2t}U(t)$ .

**Exercice 12.**

1)  $h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} U(t).$

2) On a l'intégrale  $\int_0^{+\infty} |h(t)| dt$  convergente.

L'unique pôle de  $H(p)$  vaut  $-\frac{1}{\tau} < 0.$

3) a)  $\frac{1}{p(1+\tau p)} = \frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau p}$

b)  $y_{\text{ind}}(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) U(t).$

4) Puisque  $x(t) = U(t) - U(t-2)$ , la linéarité et l'invariance dans le temps du système impliquent

que  $y(t) = y_{\text{ind}}(t) - y_{\text{ind}}(t-2).$  On en déduit :  $y_{\text{ind}}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{si } t \in [0; 2] \\ \left(e^{\frac{2}{\tau}} - 1\right) e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{si } t \geq 2 \end{cases}.$

**Exercice 13**

1) La fonction de transfert possède un pôle double,  $-\frac{1}{3}$ , de partie réelle négative.

2) On a :  $H(p) = \frac{9}{9p^2 + 6p + 1} = \frac{1}{\left(p + \frac{1}{3}\right)^2}$  donc  $h(t) = t e^{-\frac{t}{3}} U(t).$

3)

a) Les racines de  $p^2 + 3p + 2$  sont strictement négatives. Remarquer que pour  $a = 0$ , la fraction se simplifie et qu'il n'y a alors que deux pôles :  $-1$  et  $-2$ . Le système  $(S_a)$  est-il stable ssi  $a \leq 0.$

b)

(i)  $H(p) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2} = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}$  donc  $h(t) = (e^{-2t} - e^{-t}) U(t).$

(ii)  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t)$  avec  $y(0) = y'(0) = 0.$

**Exercice 14**

Par le Théorème 2,  $x * y$  admet une transformée de Laplace égale à  $X(p)Y(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}$ . On a

alors  $X(p)Y(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p}$  d'où  $(x * y)(t) = (t - 1 + e^{-t}) U(t).$

**Exercice 15.**

1) a)  $X(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$

b) On a  $Y(p) = \frac{7 + 11p}{p^2 + 1} - \frac{51}{p+3} + \frac{40}{p+4}$ . Une patiente mise au même dénominateur donne le résultat voulu.

c) On a  $H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{170p}{(p+3)(p+4)}$

2) Les deux pôles sont  $-3$  et  $-4$ , de partie réelle strictement négative.

3) On a  $Y_{\text{ind}}(p) = H(p)X(p) = \frac{170}{(p+3)(p+4)} = \frac{170}{p+3} - \frac{170}{p+4}$  d'où  
 $y_{\text{ind}}(t) = 170(e^{-3t} - e^{-4t})U(t).$

### Exercice 16

- 1)  $x(t) = e^{-4t}U(t).$
- 2)  $x(t) = \frac{1}{2} \sin(2t)U(t).$
- 3)  $x(t) = \frac{1}{4}(e^{2t} - e^{-2t})U(t).$
- 4)  $x(t) = U(t-2).$
- 5)  $x(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})U(t).$
- 6)  $x(t) = 2e^{-2t} \sin(2t)U(t).$

### Exercice 17

- 1) a)  $H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$   
 b)  $h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} U(t).$   
 c) S'obtient par l'écriture du produit de convolution  $y = h * x$

2)

a) Si  $\forall t \geq 0, x(t) \geq 0$ , la fonction dans l'intégrale  $\int_0^t e^{-\frac{s-t}{\tau}} x(s) ds$  est positive et l'on déduit du

1)c) que  $\forall t \geq 0, y(t) \geq 0.$

b) Soit  $t \geq 0$ . Alors :

$$\forall s \in [0; t], -e^{-\frac{s-t}{\tau}} \leq e^{-\frac{s-t}{\tau}} x(s) \leq e^{-\frac{s-t}{\tau}} \quad \text{donc} \quad -\frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{s-t}{\tau}} ds \leq y(t) \leq \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{s-t}{\tau}} ds.$$

En posant  $u = \frac{s-t}{\tau}$  on a  $\frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{s-t}{\tau}} ds = \int_{-\frac{t}{\tau}}^0 e^u du = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$  donc

$$\forall t \geq 0, -\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \leq y(t) \leq 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{d'où} \quad \forall t \geq 0, -1 \leq y(t) \leq 1.$$

### Exercice 18

1) Stable : un seul pôle,  $-2 < 0$ .

2)  $h(t) = e^{-2t}U(t).$

3)  $y_{\text{ind}}(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})U(t)$

4) a)  $y' + 2y = x.$

b) Puisque  $\forall t \geq 10, x(t) = 0$ , on a  $y' + 2y = 0$  sur  $[10; +\infty[$  donc il existe une constante A telle

que pour tout réel  $t \geq 10$ , on ait  $y(t) = A e^{-2t}$ .

5)a)  $x(t) = U(t) - U(t-a)$ .

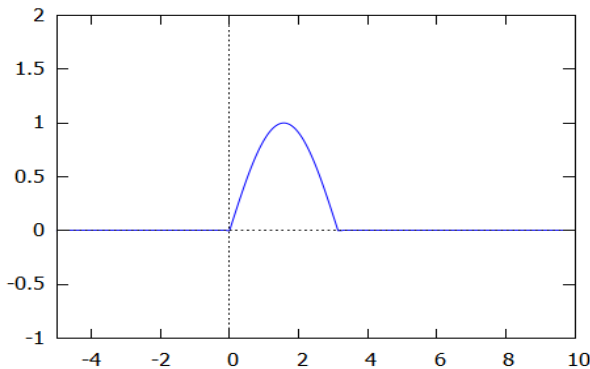
b) Par linéarité et indépendance dans le temps, on a  $y(t) = y_{\text{ind}}(t) - y_{\text{ind}}(t-a)$

c)  $\forall t \geq 10, y(t) = \frac{1}{2}(e^{2a} - 1)e^{-2t}$ .

6) Par identification,  $\frac{1}{2}(e^{2a} - 1) = 4$  d'où  $a = \ln(3)$ .

**Exercice 19**

1) Tracé de  $f_0(t)$ :



2) a) Le signal  $t \rightarrow f_0(t)$  est du type  $E_A$  pour tout  $A \in \mathbb{R}$ , car à durée finie. Par la propriété 7,  $F_0(p)$  est définie sur  $\mathbb{C}$  tout entier.

b) Par le théorème du retard,  $F_0(p) = \frac{1 + e^{-\pi p}}{p^2 + 1}$ .

3) a) Le signal  $t \rightarrow f_1(t)$  est du type  $E_0$ . Par la propriété 7,  $F_1(p)$  est définie sur (au moins)  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\}$ .

b) On a  $f_1(t) - f_1(t - 2\pi) = f_0(t)$ .

c) On a par le théorème du retard :  $\forall p \in \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\}, F_0(p) = (1 - e^{-2\pi p})F_1(p)$  d'où

$$F_1(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-2\pi p}} = \frac{1 + e^{-\pi p}}{(p^2 + 1)(1 - e^{-2\pi p})} = \frac{1}{(p^2 + 1)(1 - e^{-\pi p})}$$

4) Le signal  $t \rightarrow f_2(t)$  est du type  $E_0$ . Par la propriété 7,  $F_2(p)$  est définie sur (au moins)  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\}$ . On a cette fois pour tout réel  $t$   $f_2(t) - f_2(t - \pi) = f_0(t)$  d'où, par le théorème

du retard,  $\forall p \in \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\}, F_0(p) = (1 - e^{-\pi p})F_2(p)$  d'où  $F_2(p) = \frac{1 + e^{-\pi p}}{(p^2 + 1)(1 - e^{-\pi p})}$ .

**Exercice 20**

**A)**

1) De la relation (E) :  $y'(t) + y(t) = x(t)$ , avec  $y(0^+) = 0$  on tire, en passant à la transformation de Laplace :  $(p + 1)Y(p) = X(p)$  d'où  $H_S(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{p + 1}$ .

2) Le nombre  $-1$  est l'unique pôle de  $H_S(p)$ . Le 1) du Théorème 5 permet de conclure à la stabilité de (S).

3) a)  $h(t) = e^{-t} U(t)$ .

b) L'intégrale  $\int_0^{+\infty} |h(s)| ds$  converge et le 2) du théorème 5 permet de conclure à la stabilité de  $(S)$ .

4) On a  $y_{\text{ind}}(t) = \int_0^t h(s) ds = (1 - e^{-t}) U(t)$ .

5) a) Si  $y$  est un signal, la fonction  $z$  définie par  $z(t) = y(t) - y(t-2)$  en est clairement un aussi (la propriété 15 permet de prouver la croissance au plus exponentielle). En passant à la transformation de

Laplace, on obtient  $Z(p) = (1 - e^{-2p}) Y(p)$  d'où l'on obtient  $H_{\Sigma}(p) = \frac{Z(p)}{Y(p)} = 1 - e^{-2p}$

b) On a  $y_{\text{ind}}(t) = U(t) - U(t-2) = \Pi_{0,2}(t)$ .

**B)**

1) a) b) On a  $f(t) = (\Sigma)(x_0(t)) = \Pi_{0,1}(t)$ .

c)  $F(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p}$ .

d) On a  $F(p) = H_{\Sigma}(p) X_0(p)$  d'où  $X_0(p) = \frac{F(p)}{H_{\Sigma}(p)} = \frac{1 - e^{-p}}{p(1 - e^{-2p})}$ .

2)

a) On a  $Y_0(p) = H_S(p) X_0(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p(p+1)(1 - e^{-2p})}$

b) On a  $Z_0(p) = H_{\Sigma}(p) \cdot Y_0(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p(p+1)}$

c) On a  $Z_0(p) = (1 - e^{-p}) \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right)$  donc  $\forall t \in \mathbb{R}, z_0(t) = (1 - e^{-t}) U(t) - (1 - e^{-t+1}) U(t-1)$

Pour  $t \geq 2$ , cela donne  $z_0(t) = (1 - e^{-t}) - (1 - e^{-t+1}) = (e-1)e^{-t}$ . Le signal  $z_0(t)$  n'étant pas nul sur  $[2; +\infty[$ , le signal  $y_0(t)$  n'est pas 2-périodique.

3)

a) En faisant une translation verticale de  $-\alpha$ .

b)  $y_{\alpha} = (S)(x_{\alpha}) = (S)(x_0 - \alpha U) = (S)(x_0) - \alpha (S)(U) = y_0 - \alpha y_{\text{ind}}$

d'où, par le 4) de la partie A :  $y_{\alpha}(t) = y_0(t) - \alpha(1 - e^{-t}) U(t)$ .

c) Par linéarité du système  $(\Sigma)$ , on a

$$z_{\alpha}(t) = z_0(t) - \alpha \cdot (\Sigma) \left( (1 - e^{-t}) U(t) \right) = z_0(t) - \alpha \left( (1 - e^{-t}) U(t) - (1 - e^{-t+2}) U(t-2) \right),$$

donc, pour  $t \geq 2$ ,  $z_{\alpha}(t) = z_0(t) - \alpha((e^2 - 1)e^{-t})$ .

En utilisant le 2)c) on a

$$\forall t \geq 2, z_{\alpha}(t) = (e-1)e^{-t} - \alpha((e^2 - 1)e^{-t}) = (e-1 - \alpha(e^2 - 1))e^{-t}.$$

d) Le signal  $y_{\alpha}$  est 2-périodique si et seulement si  $\forall t \geq 2, z_{\alpha}(t) = 0$ , donc, si et seulement si

$$e-1 - \alpha(e^2 - 1) = 0 \text{ ce qui donne } \alpha = \frac{e-1}{e^2-1} = \frac{1}{\alpha+1}$$

4) Il suffit de dire grâce au 3)b) que  $y_0(t) = y_{\alpha}(t) + \alpha(1 - e^{-t}) U(t) = (\alpha U(t) + y_{\alpha}(t)) - \alpha e^{-t} U(t)$  ce qui donne le résultat voulu avec  $\varphi(t) = \alpha U(t) + y_{\alpha}(t)$  qui est bien un signal 2-périodique. Si  $t$  tend vers  $+\infty$ , le terme  $\alpha e^{-t}$  tend vers 0 donc  $y_0(t) - \varphi(t) \rightarrow 0$ .

Puisque  $z_{\alpha}(t) = y_{\alpha}(t) - y_{\alpha}(t-2)$  on en déduit par le 3)b) et le 2)c) que

$$\forall t \in [0; 2[, y_\alpha(t) = z_\alpha(t) = z_0(t) - \alpha((1 - e^{-t})) = (1 - e^{-t}) - (1 - e^{-t+1})U(t-1) - \alpha((1 - e^{-t})) \\ = (1 - \alpha)(1 - e^{-t}) - (1 - e^{-t+1})U(t-1).$$

Il vient alors que  $\forall t \in [0; 2[, \varphi(t) = \alpha + y_\alpha(t) = 1 - (1 - \alpha)e^{-t} - (1 - e^{-t+1})U(t-1)$ .

$$\text{Ainsi, } \varphi(t) = \begin{cases} 1 - \frac{e}{e+1} e^{-t} & \text{si } t \in [0; 1[ \\ \frac{e^2}{e+1} e^{-t} & \text{si } t \in [1; 2[ \end{cases}, \text{ avec 2-périodisation sur } [0; +\infty[$$

### Exercice 21

1) On a  $y_{\text{ind}}(t) = (U * h)(t)$ , et en appliquant la transformation de Laplace à cette égalité, on obtient la relation demandée.

$$2) \text{ a) } Y_{\text{ind}}(p) = 2 \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+3} \right) = \frac{6}{p(p+3)}$$

b) Se déduit du 2)a) et du 1)

3) a) Le nombre  $-3$  est l'unique pôle de  $H(p)$ . Le 1) du Théorème 5 permet de conclure à la stabilité.

$$\text{b) } h(t) = 6e^{-3t}U(t).$$

4) Soit  $x$  un signal d'entrée. Si l'on considère  $z$  l'unique solution sur  $\mathbb{R}$  de

$$\begin{cases} \frac{1}{6}z'(t) + \frac{1}{2}z(t) = x(t) \\ z(0) = 0 \end{cases}.$$

La fonction  $z$  est un signal (causal car solution de  $\begin{cases} \frac{1}{6}z'(t) + \frac{1}{2}z(t) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$  sur  $]-\infty; 0]$ , donc nulle

sur  $]-\infty; 0]$ , à croissance au plus exponentielle par la propriété 18) donc il admet une transformée de Laplace  $Z(p)$ . Par le 1) de la propriété 10, puisque  $z$  est continue et dérivable par morceaux sur  $[0; +\infty[$ , le signal  $t \rightarrow z'(t)$  admet aussi une transformée de Laplace égale à

$pZ(p) - z(0) = pZ(p)$ . En utilisant donc la transformation de Laplace dans l'équation différentielle, il vient :  $\left(\frac{1}{6}p + \frac{1}{2}\right)Z(p) = X(p)$  d'où  $Z(p) = \frac{X(p)}{\frac{1}{6}p + \frac{1}{2}} = H(p)X(p) = Y(p)$  où  $Y(p)$  est la

transformée de Laplace de  $y$ , la sortie associée à  $x$ .

On déduit du Théorème 3 que  $y = z$ .

5)

a) Puisque  $x_a(t) = U(t) - U(t-a)$ , la linéarité et l'invariance dans le temps du système montrent que  $y_a(t) = y_{\text{ind}}(t) - y_{\text{ind}}(t-a)$ .

$$\text{b) On a } y_a(t) = \begin{cases} 2(1 - e^{-3t}) & \text{si } t \in [0; a[ \\ 2(e^{3a} - 1)e^{-3t} & \text{si } t \geq a \end{cases}.$$

$t$	0	$a$	$+\infty$
$y_a$	0	$y_a(a)$	0

c) Le maximum de  $|y_a(t)|$  vaut  $y_a(a) = 2(1 - e^{-3a})$ . Le signal  $y_a(t)$  est détectable si et seulement si  $2(1 - e^{-3a}) \geq 10^{-1}$  ce qui donne  $a \geq \frac{-1}{3} \ln(0,95) \sim 0,017$ .

Interprétation : un signal d'entrée trop court donne une sortie indétectable.

6)

a) On a  $X(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$  et  $Y(p) = H(p)X(p) = \frac{6\omega}{(p+3)(p^2 + \omega^2)}$

b) On a par décomposition en éléments simples :

$$Y(p) = \frac{6\omega}{(p+3)(p^2 + \omega^2)} = \frac{6\omega}{\omega^2 + 9} \left( \frac{1}{p+3} - \frac{p-3}{p^2 + \omega^2} \right) \text{ d'où}$$

$$y(t) = \frac{6\omega}{\omega^2 + 9} e^{-3t} + \frac{6}{\omega^2 + 9} (-\omega \cos(\omega t) + 3 \sin(\omega t)),$$

c) Découle du 6)b) en remarquant que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6\omega}{\omega^2 + 9} e^{-3t} = 0$ .

d)

(i) On fait donc l'approximation  $y(t) = \frac{6}{\omega^2 + 9} (-\omega \cos(\omega t) + 3 \sin(\omega t))$ . C'est alors un

signal purement sinusoïdal d'amplitude réelle  $A = \frac{6}{\omega^2 + 9} \cdot \sqrt{\omega^2 + 9} = \frac{6}{\sqrt{\omega^2 + 9}}$  d'où le résultat.

(ii) On doit avoir  $\frac{6}{\sqrt{\omega^2 + 9}} < 0,1$  donc  $\omega > \sqrt{3591}$ . Le système se comporte comme un filtre passe-bas : une entrée de fréquence trop élevée implique une sortie indétectable.

7) a) On a  $\forall s \in \mathbb{R}, -\frac{e^{3s}}{20} < x(s) e^{3s} < \frac{e^{3s}}{20}$ , puis, par intégration entre 0 et  $t > 0$  :

$$\forall t \geq 0, -\frac{1}{20} \int_0^t e^{3s} ds \leq \int_0^t e^{3s} x(s) ds \leq \frac{1}{20} \int_0^t e^{3s} ds$$

ce qui donne le résultat voulu par intégration des exponentielles.

b) Puisque  $\forall t \geq 0, (h * x)(t) = \int_0^t x(s) h(t-s) ds = 6 \int_0^t e^{-3(t-s)} x(s) ds = 6 e^{-3t} \int_0^t e^{3s} x(s) ds$ ,

on déduit de la question précédente que  $\forall t \geq 0, \frac{-e^{-3t}}{10} (e^{3t} - 1) \leq (h * x)(t) \leq \frac{-e^{-3t}}{10} (e^{3t} - 1)$  ce qui conduit au résultat demandé.

c) On remarque que  $\forall t \geq 0, 1 - e^{-3t} < 1$  et  $\forall t \geq 0, -1 < -(1 - e^{-3t})$ , ce qui donne par le 7)b) :

$$\frac{-1}{10} < (h * x)(t) < \frac{1}{10}$$

c'est à dire  $\frac{-1}{10} < y(t) < \frac{1}{10}$  : le signal  $y(t)$  est alors indétectable.

Interprétation : grâce à la stabilité du système, une entrée suffisamment faible donne une sortie indétectable.



**Exercice 22**

1)

a)

(i)  $\forall t \in [0; 1[$ ,  $h(t) = \frac{1}{2}h(t-1) + U(t) = U(t) = 1$  car  $t-1 < 0$  et  $h$  est causale.

(ii) On raisonne par récurrence.

Pour  $n = 0$ , la propriété est vraie par le (i).

Soit  $n$  un entier naturel tel que  $\forall t \in [n; n+1[$ ,  $h(t) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ . Prenons  $t \in [n+1; n+2[$ . On a

alors  $h(t) = \frac{1}{2}h(t-1) + U(t) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) + 1 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$  par l'hypothèse de récurrence, vu que

$t-1 \in [n; n+1[$ . Cela prouve la propriété au rang  $n+1$  et achève la récurrence.

b) Considérons la fonction causale constante sur chaque intervalle  $[n; n+1[$  telle que

$$\forall t \in [n; n+1[, h(t) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Alors  $h$  est continue par morceaux, et vérifie l'encadrement  $\forall t \in [0; +\infty[, 0 \leq h(t) \leq 2$  : elle est de type  $E_0$  donc est un signal admettant une transformée de Laplace  $H(p)$  définie pour  $\text{Re}(p) > 0$ .

Soit  $t \in \mathbb{R}$ .

Si  $t < 0$ , alors  $h(t) - \frac{1}{2}h(t-1) = U(t) = 0$ .

Supposons  $t \geq 0$  et soit  $n$  la partie entière de  $t$ , c'est à dire l'unique entier vérifiant l'encadrement  $n \leq t < n+1$ . Alors :

si  $n = 0$ , on a  $h(t) - \frac{1}{2}h(t-1) = 1 - 0 = 1$  car  $t-1 < 0$ , et si  $n \geq 1$ , on a  $t-1 \in [n-1; n[$

donc  $h(t) - \frac{1}{2}h(t-1) = 2 - \left(\frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2}\left(2 - \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right) = 1$ . La fonction  $h$  ainsi construite est donc un signal

$t \rightarrow h(t)$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $h(t) - \frac{1}{2}h(t-1) = U(t)$ . Par le 1)a), c'est le seul à vérifier cette relation.

Par le Théorème du retard, on déduit de cette relation que,  $\forall p \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Re}(p) > 0$ :

$$H(p) - \frac{1}{2}e^{-p}H(p) = \frac{1}{p} \text{ d'où } H(p) = \frac{1}{p\left(1 - \frac{1}{2}e^{-p}\right)}.$$

2)

a) Puisque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 2$ , on a  $\int_0^{+\infty} |h(t)| dt = +\infty$ . Ce système est instable.

Remarque : on ne peut pas utiliser le 1) du Théorème 5 tel qu'il a été énoncé dans ce cours car  $H(p)$  n'est pas une fraction rationnelle de  $p$ .

b) On considère un signal d'entrée  $x$ . On a  $Y(p) = H(p)X(p)$  donc

$$Y(p) - \frac{1}{2}e^{-p}Y(p) = \left(1 - \frac{1}{2}e^{-p}\right)H(p)X(p) = \frac{X(p)}{p} \text{ de par l'expression de } H(p)$$

(comme d'habitude, sous-entendu, pour  $p$  complexe de partie réelle assez grande)..

Par la propriété 11,  $\frac{X(p)}{p}$  a pour original le signal  $t \rightarrow \int_0^t x(s) ds$  et par la propriété 9

$Y(p) - \frac{1}{2}e^{-p}Y(p)$  a pour original  $t \rightarrow y(t) - \frac{1}{2}y(t-1)$ , donc, par le Théorème 3 la relation

$$Y(p) - \frac{1}{2} e^{-p} Y(p) = \frac{X(p)}{p}$$

implique la relation demandée.

c) Remarque : parlant de fonction et non pas de signal, on ne peut pas supposer  $f$  à croissance au plus exponentielle, ce qui, rigoureusement parlant, nous interdit d'utiliser la transformation de Laplace.

Supposons qu'il existe deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  causales et vérifiant la relation

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_i(t) - \frac{1}{2} f_i(t-1) = \int_0^t x(s) ds, \quad i \in \{1; 2\}.$$

Posant  $f_0 = f_1 - f_2$ , on obtient une fonction causale qui vérifie la relation

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_0(t) - \frac{1}{2} f_0(t-1) = 0.$$

Puisque  $f_0$  est causale, la relation ci-dessus montre qu'elle est nulle sur  $[0; 1[$  et, par une récurrence facile, qu'elle est nulle sur  $[0; n[$  pour tout entier naturel  $n$ . On en déduit alors que  $f_0$  est toujours égale à 0 donc que  $f_1 = f_2$ . La fonction  $y = h * x$  est la seule fonction causale  $f$  à vérifier la relation

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) - \frac{1}{2} f(t-1) = \int_0^t x(s) ds.$$

d) Soit  $t$  un réel positif. En notant  $[t]$  la partie entière de  $t$ , c'est à dire l'unique entier tel que  $t \in [[t]; [t] + 1[$ , on obtient que pour tout entier naturel  $n$  tel que  $n \geq [t] + 1$ ,  $x(n-t) = 0$  par causalité du signal  $x$ . On en déduit que la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x(t-n)$  est finie et vaut

$$\sum_{n=0}^{[t]} \frac{1}{2^n} x(t-n) .$$

Ensuite, en posant  $n = [t]$ , on a  $\frac{1 - \left(\frac{1}{2} e^{-p}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2} e^{-p}} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2} e^{-p}\right)^k$ , d'où l'on déduit que

$$H(p) = \frac{1}{p \left(1 - \frac{1}{2} e^{-p}\right)} = \frac{1}{p} \left( \sum_{k=0}^n \left(\frac{e^{-p}}{2}\right)^k + \left(\frac{e^{-p}}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-p}} \right) = \frac{1}{p} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} e^{-kp} + \frac{1}{2^{n+1}} \frac{e^{-(n+1)p}}{1 - \frac{1}{2} e^{-p}} \right)$$

ce qui donne, sachant que  $Y(p) = H(p) X(p)$ :

$$Y(p) = \frac{1}{p} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} e^{-kp} X(p) + \frac{e^{-(n+1)p}}{2^{n+1}} \cdot \frac{X(p)}{p \left(1 - \frac{1}{2} e^{-p}\right)} = \frac{1}{p} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} e^{-kp} X(p) + \frac{e^{-(n+1)p}}{2^{n+1}} \cdot Y(p) .$$

En passant à l'original, et toujours par les propriétés 9 et 11, on obtient la relation :

$$\forall u \in \mathbb{R}, y(u) = \int_0^u \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} x(s-k) ds + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot y(u - (n+1))$$

d'où

$$y(t) = \int_0^t \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} x(s-k) ds + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot y(t - (n+1))$$

où  $t$  est le réel positif choisi au départ et  $n = [t]$ .

Enfin, puisque  $t - (n+1) < 0$  on a  $y(t - (n+1)) = 0$  donc la relation ci-dessus devient

$$y(t) = \int_0^t \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} x(s-k) ds = \int_0^t \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} x(s-k) \right) ds \quad \text{vu que}$$

$\forall k \geq n+1, \forall s \leq t, s-k \leq t-n-1 = t - ([t]+1) < 0$  d'où  $x(s-k) = 0$  et  
 $\forall s \in [0; t], \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} x(s-k) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} x(s-k)$ .

e) On applique la relation précédente pour obtenir :

$$y(t) = \int_0^t \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} x(s-k) ds = \int_0^t \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} e^{a(k-s)} ds = \sum_{k=0}^n \left(\frac{e^a}{2}\right)^k \int_0^t e^{-as} ds = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) \frac{1 - \left(\frac{e^a}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{e^a}{2}}.$$

La formule générale est 
$$y(t) = \frac{1}{a \left(1 - \frac{e^a}{2}\right)} (1 - e^{-at}) \left(1 - \left(\frac{e^a}{2}\right)^{[t]+1}\right) U(t).$$

### Exercice 23

- 1) On a l'équivalence  $\sin(t) \sim t$  en 0 donc  $f(0^+) = 1$ . On a  $f(0^-) = 0$  donc la fonction  $f$  admet une discontinuité de première espèce en 0, et est clairement continue ailleurs.
- 2) La fonction  $f$  est bornée par  $-1$  et  $1$  donc c'est un signal du type  $E_0$  donc par la propriété 7 est définie (au moins) sur  $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ .

- 3) a) Par la propriété 10)3,  $p \rightarrow F(p)$  est dérivable pour  $p \in ]0; +\infty[$  et  $F'(p)$  est la transformée de Laplace de  $-t f(t) = -\sin(t)U(t)$ . On a donc

$$\forall p \in ]0; +\infty[, F'(p) = \frac{-1}{p^2 + 1}.$$

- b) Par le 1) du Théorème 4,  $f(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty, p \in \mathbb{R}} p F(p) = 1$ . On en déduit que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} (p F(p)) = 0 \text{ par produit de limites.}$$

- c) Puisque  $\forall p \in ]0; +\infty[, F'(p) = \frac{-1}{p^2 + 1}$ , il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall p \in ]0; +\infty[, F(p) = C - \arctan(p).$$

La condition  $\lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) = 0$  implique que  $C = \frac{\pi}{2}$ .

On a alors 
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t) e^{-t}}{t} dt = F(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

- 4) On remarque que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds$  donc  $y$  est un signal du type  $E_0$  et la propriété 11

donne  $Y(p) = \frac{F(p)}{p}$  pour tout nombre complexe de partie réelle strictement positive.

L'application du Théorème 4 donne  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p Y(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} F(p) = \frac{\pi}{2}$  d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds = \frac{\pi}{2}.$$

**Exercice 24**

1) Le système étant stable, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} h(t) dt$  converge absolument donc converge. On a

$$\forall t \geq 0, y_{\text{ind}}(t) = (h * U)(t) = \int_0^t h(s) ds \text{ qui tend donc vers } \int_0^{+\infty} h(t) dt \text{ si } t \text{ tend vers } +\infty.$$

Puisque l'intégrale  $\int_0^{+\infty} |h(t)| dt$  converge,  $H(p)$  existe pour tout nombre complexe de partie réelle supérieure ou égale à 0, donc pour  $p=0$  en particulier et alors,  $H(0) = \int_0^{+\infty} h(t) dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_{\text{ind}}(t)$ .

2)

a) Puisque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ , en utilisant la définition de limite, il existe  $a > 0$  tel que  $\forall t > a, |x(t)| \leq 1$ .

La fonction  $t \rightarrow x(t)$  est continue par morceaux sur l'intervalle  $[0; a]$ . D'après le Théorème 2 du chapitre des fonctions élémentaires, elle est bornée sur cet intervalle, il existe donc  $M \geq 0$  telle que  $\forall t \in [0; a], |x(t)| \leq M$ . En prenant  $C = \text{Max}(1; M)$ , on obtient le résultat demandé.

b) Puisque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ , d'après la définition de la limite, pour tout entier naturel  $n$ , il existe

$a_n \geq 0$  tel que  $\forall t \geq a_n, |x(t)| \leq \frac{1}{n+1}$ . En considérant  $t_n = a_n + n \geq a_n$ , on a clairement les points (i) et (ii) vérifiés.

c) On a d'abord  $\left| \int_0^{\frac{t}{2}} h(s) x(t-s) ds \right| \leq \int_0^{\frac{t}{2}} |h(s) x(t-s)| ds$ .

Ensuite,  $\forall s \in [0; \frac{t}{2}]$ , on a  $t-s \geq \frac{t}{2} \geq t_n$  donc par le b),  $|x(t-s)| \leq \frac{1}{n+1}$  donc

$$\left| \int_0^{\frac{t}{2}} h(s) x(t-s) ds \right| \leq \int_0^{\frac{t}{2}} |h(s) x(t-s)| ds \leq \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{t}{2}} |h(s)| ds \leq \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} |h(s)| ds.$$

D'autre part,  $\forall s \in [\frac{t}{2}; t]$ , on a  $|x(t-s)| \leq C$  par le 2)a), donc

$$\left| \int_{\frac{t}{2}}^t h(s) x(t-s) ds \right| \leq \int_{\frac{t}{2}}^t |h(s) x(t-s)| ds \leq C \int_{\frac{t}{2}}^t |h(s)| ds.$$

Or,  $[\frac{t}{2}; t] \subset [n; +\infty[$  car  $\frac{t}{2} \geq t_n \geq n$ , donc  $\left| \int_{\frac{t}{2}}^t h(s) x(t-s) ds \right| \leq C \int_{\frac{t}{2}}^t |h(s)| ds \leq C \int_n^{+\infty} |h(s)| ds$ .

d) Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} |h(s)| ds + C \int_n^{+\infty} |h(s)| ds \right) = 0$ , il existe un entier  $N$  tel

que  $\frac{1}{N+1} \int_0^{+\infty} |h(s)| ds + C \int_N^{+\infty} |h(s)| ds < \varepsilon$ . Par la question précédente, si  $t \geq 2t_N$ , on a

$$|y(t)| = \left| \int_0^t h(s) x(t-s) ds \right| = \left| \int_0^{\frac{t}{2}} h(s) x(t-s) ds + \int_{\frac{t}{2}}^t h(s) x(t-s) ds \right|$$

$$|y(t)| \leq \left| \int_0^{\frac{t}{2}} h(s)x(t-s)ds \right| + \left| \int_{\frac{t}{2}}^t h(s)x(t-s)ds \right|$$

$$|y(t)| \leq \frac{1}{N+1} \int_0^{+\infty} |h(s)|ds + C \int_N^{+\infty} |h(s)|ds \quad \text{par le 2)c)}$$

$|y(t)| \leq \varepsilon$  par le choix de  $N$ .

Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a  $|y(t)| \leq \varepsilon$  dès que  $t$  est plus grand que  $2t_N$ . Cela signifie que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ .

On a ainsi démontré le résultat très important suivant: la sortie correspondant à un signal qui tend vers 0 en  $+\infty$  tend vers 0 en  $+\infty$ .

3) Cela signifie que  $x(t) = lU(t) + \varepsilon(t)$  où  $t \rightarrow \varepsilon(t)$  est un signal tel que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0$ . Par le 2), la sortie associée à ce signal à une limite nulle en  $+\infty$ , donc, par linéarité du système, le signal  $t \rightarrow y(t)$  à la même limite que  $l \cdot y_{\text{ind}}(t)$ . On déduit du 1) que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = H(0) \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ .

4)

a) Soit  $a \in ]0; 1[$ .

Par la condition (F),  $y$  est alors à durée finie car  $x$  l'est. Donc il existe  $T_0 > 0$  tel que

$\forall t \geq T_0, y(t) = 0$ . Or, puisque  $x(t) = U(t) - U(t-1)$ , par linéarité et invariance dans le temps du système, on a  $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = y_{\text{ind}}(t) - y_{\text{ind}}(t-1)$  donc  $\forall t \geq T_0, y_{\text{ind}}(t) = y_{\text{ind}}(t-1)$  d'où  $\forall t \geq T_0, y_{\text{ind}}(t+a) = y_{\text{ind}}(t)$ .

b) On refait le même raisonnement avec l'entrée  $x(t) = \Pi_{0;a}(t)$  qui est lui aussi à durée finie.

c) Par le b), la relation  $y_{\text{ind}}(n+T_0+a) = y_{\text{ind}}(n+T_0)$  est vraie dès que  $n+T_0 > T_1$  c'est à dire dès que  $n > T_1 - T_0$ .

d) Soit  $n$  un entier tel que  $y_{\text{ind}}(n+T_0+a) = y_{\text{ind}}(n+T_0)$ . La relation

$\forall t \geq T_0, y_{\text{ind}}(t+1) = y_{\text{ind}}(t)$  implique que  $y_{\text{ind}}(n+T_0) = y_{\text{ind}}(n-1+T_0) = \dots = y_{\text{ind}}(T_0)$  et  $y_{\text{ind}}(n+T_0+a) = y_{\text{ind}}(n-1+T_0+a) = \dots = y_{\text{ind}}(T_0+a)$ .

On déduit alors de la relation  $y_{\text{ind}}(n+T_0+a) = y_{\text{ind}}(n+T_0)$  que  $y_{\text{ind}}(T_0) = y_{\text{ind}}(T_0+a)$ . Cela étant valable quel que soit  $a > 0$  donc  $y_{\text{ind}}(t)$  est constante sur  $[T_0; +\infty[$ .

e) On a  $\forall t \geq 0, y_{\text{ind}}(t) = \int_0^t h(s)ds$  donc puisque  $y_{\text{ind}}(t)$  est constante sur  $[T_0; +\infty[$ , on déduit que  $\forall t \geq T_0, h(t) = 0$ .

5) Un système stable ne vérifie pas forcément la condition (F) puisque sa réponse impulsionnelle n'est pas forcément à durée finie : par exemple, considérer le cas  $h(t) = e^{-t}U(t)$ .

En revanche, un système vérifiant la condition (F) est nécessairement stable, puisque si  $h$  est à durée finie, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} |h(t)|dt$  converge donc le système est stable.

6) Supposons que  $h$  soit à durée finie :  $\exists T_0 > 0$  tq  $\forall t \geq T_0, h(t) = 0$ .

Considérons une entrée à durée finie  $x$ , et soit  $y$  la sortie associée.

Il existe  $T_1 > 0$  tel que  $\forall t \geq T_1, x(t) = 0$ .

Alors, pour tout réel  $t > T_0 + T_1$  on a  $y(t) = \int_0^t h(s)x(t-s)ds = 0$ . En effet, sinon, il existerait un réel  $t > T_0 + T_1$  et un réel  $s \in [0; t]$  tels que  $h(s)x(t-s) \neq 0$  c'est à dire  $h(s) \neq 0$  et  $x(t-s) \neq 0$  donc  $s < T_0$  et  $t-s < T_1$  donc  $t = s + (t-s) < T_0 + T_1$  ce qui n'est pas.

Une entrée à durée finie a une sortie à durée finie donc le système vérifie la condition (F).

Ainsi, on a prouvé que la condition (F) est équivalente à ce que la réponse impulsionnelle soit à durée finie.

### Exercice 25

1) Le système se ramène à  $y'(t) = x(t)$ , avec la condition initiale  $y(0) = 0$ , c'est à dire que

$$y(t) = \int_0^t x(s)ds. \text{ On reconnaît l'expression du système intégrateur de réponse impulsionnelle } h(t) = U(t).$$

2) On procède par analyse-synthèse pour montrer l'existence et l'unicité de  $y$ .

Si  $y$  est un signal continu et dérivable par morceaux tel que  $y'(t) + \lambda(e^{-2t}U(t)) * y(t) = x(t)$  et  $y(0) = 0$ , alors par la propriété 10,  $y$  et  $y'$  admettent une transformée de Laplace et on a pour tout nombre complexe de partie réelle assez grande :

$$pY(p) + \lambda TL((e^{-2t}U(t)) * y(t))(p) = X(p)$$

$$pY(p) + \lambda \frac{Y(p)}{p+2} = X(p) \text{ par le Théorème 2}$$

d'où

$$Y(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+\lambda} \cdot X(p)$$

La fonction rationnelle  $p \rightarrow \frac{p+2}{p^2+2p+\lambda}$  qui est de degré strictement négatif, admet un original  $h$

dérivable (propriété 14). En réutilisant le Théorème 2 et aussi le Théorème 3, on déduit que nécessairement  $y = h * x$ . Cela montre l'unicité de  $y$ . Il reste à vérifier que la fonction  $y = h * x$  est un signal continu et dérivable par morceaux tel que  $y'(t) + \lambda(e^{-2t}U(t)) * y(t) = x(t)$  et  $y(0) = 0$ .

Puisque  $x$  et  $h$  sont des signaux, il en est de même de  $y$ , et par la propriété 2 (iv),  $y$  est continue et dérivable par morceaux. On on par le Théorème 2 :

$$Y(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+\lambda} \cdot X(p) = \frac{1}{p + \frac{\lambda}{p+2}} X(p)$$

donc

$$pY(p) + \frac{\lambda}{p+2} Y(p) = X(p)$$

et en prenant l'original, avec les propriétés déjà utilisées ci-dessus :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + \lambda(e^{-2t}U(t)) * y(t) = x(t)$$

La condition  $y(0) = 0$  provient de la continuité et causalité de  $y$ .

La construction de  $y$  montre que l'on définit ainsi un système (S) de fonction de transfert égale à

$$H(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+\lambda}$$

3)  $\lambda \neq 0$ .

4) a) Un pôle est une racine du polynôme  $p^2 + 2p + \lambda$ . Son discriminant vaut  $\Delta = 4(1-\lambda) > 0$  car  $\lambda < 0$ , donc il y a deux pôles réels  $p_1$  et  $p_2$ .

b) Le produit des racines de  $ap^2 + bp + c$  vaut  $\frac{c}{a}$  donc  $p_1 p_2 = \lambda < 0$ .

c) Le système est instable car puisque  $p_1$  et  $p_2$  sont réels avec  $p_1 p_2 < 0$ , un des deux pôles est un réel strictement positif. Le Théorème 5 1) permet de conclure.

5) a) Puisque  $\Delta = 4(1 - \lambda)$ , on a des pôles non réels si et seulement si  $\lambda > 1$ .

b) Si et seulement si  $\lambda = 1$ .

c)  $\lambda \in ]0; 1[$ .

d) Dans le cas  $\lambda > 1$ : on a deux pôles de partie réelle égale à  $-1 < 0$ : le système est stable.

Dans le cas  $\lambda = 1$ : un seul pôle double égal à  $-1 < 0$ : le système est stable.

Dans le cas  $0 < \lambda < 1$ : on a deux pôles  $p_1$  et  $p_2$  tels que  $p_1 p_2 = \lambda$  et  $p_1 + p_2 = -2$ .

La condition  $p_1 p_2 = \lambda > 0$  prouve que  $p_1$  et  $p_2$  sont non nuls et de même signe, et la relation  $p_1 + p_2 = -2 < 0$  montre que le signe commun est  $-$ . On en déduit que: le système est stable.

6) On a  $H(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+10} = \frac{p+1}{(p+1)^2+3^2} + \frac{1}{3} \frac{3}{(p+1)^2+3^2}$  d'où

$$h(t) = e^{-t} \left( \cos(3t) + \frac{1}{3} \sin(3t) \right) U(t).$$

On a

$$Y_{\text{ind}}(p) = \frac{H(p)}{p} = \frac{p+2}{p(p^2+2p+10)} = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{p} - \frac{p-3}{p^2+2p+10} \right) = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{p} - \frac{p+1}{(p+1)^2+3^2} + \frac{4}{3} \frac{3}{(p+1)^2+3^2} \right)$$

d'où

$$y_{\text{ind}}(t) = \frac{1}{5} \left( 1 - e^{-t} \left( \cos(3t) - \frac{4}{3} \sin(3t) \right) \right) U(t).$$

### Exercice 26

1) On procède par analyse-synthèse pour montrer l'existence et l'unicité de  $y_\lambda(t)$ .

Si  $y$  est un signal tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, (e^{-t} U(t)) * y(t) - \lambda y(t) = U(t)$ , alors en prenant la transformée de

Laplace, on obtient  $\left( \frac{1}{p+1} - \lambda \right) Y(p) = \frac{1}{p}$  d'où  $Y(p) = \frac{p+1}{p(1-\lambda-\lambda p)}$ . La fraction rationnelle

$\frac{p+1}{p(1-\lambda-\lambda p)}$  est de degré strictement négatif, donc par la propriété 14, elle admet un original  $y$ .

Réciproquement, si  $y_\lambda = (TL)^{-1} \left( \frac{p+1}{p(1-\lambda-\lambda p)} \right)$ , alors la fonction  $t \rightarrow (e^{-t} U(t)) * y_\lambda(t) - \lambda y_\lambda(t)$

est un signal dont la transformée de Laplace vaut  $\left( \frac{1}{p+1} - \lambda \right) \frac{p+1}{p(1-\lambda-\lambda p)} = \frac{1}{p}$  donc par unicité de

l'original, on a  $\forall t \in \mathbb{R}, (e^{-t} U(t)) * y_\lambda(t) - \lambda y_\lambda(t) = U(t)$ .

2) On a  $Y_\lambda(p) = \frac{p+1}{p(1-\lambda-\lambda p)} = -\frac{1}{\lambda} \frac{p+1}{p(p-\frac{1-\lambda}{\lambda})}$ . Nous avons deux cas :

(i)  $\lambda = 1$ : (pôle double)  $Y_\lambda(p) = \frac{-p+1}{p^2} = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$  donc  $y_\lambda(t) = -(1+t)U(t)$ .

(ii)  $\lambda \neq 1$ : (deux pôles simples)  $Y_\lambda(p) = \frac{1}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \cdot \frac{1}{p-\frac{1-\lambda}{\lambda}}$  d'où

$$y_\lambda(t) = \frac{1}{1-\lambda} \left( 1 - \frac{1}{\lambda} e^{\frac{1-\lambda}{\lambda}t} \right) U(t).$$

3) La solution  $y_\lambda(t)$  est bornée si et seulement si  $\lambda > 1$  (l'exponentielle est alors bornée sur  $[0; +\infty[$ ). On a alors  $\forall \lambda > 1, \lim_{t \rightarrow +\infty} y_\lambda(t) = \frac{1}{1-\lambda}$ .

4) a) On procède encore par analyse-synthèse pour montrer l'existence et l'unicité de  $y(t)$ .

Si  $y$  est un signal tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, (e^{-t} U(t)) * y(t) - \lambda y(t) = x(t)$ , alors en prenant la transformée de Laplace et en utilisant le Théorème 2, on obtient  $\left( \frac{1}{p+1} - \lambda \right) Y(p) = X(p)$  d'où

$$Y(p) = \frac{p+1}{1-\lambda-\lambda p} X(p) \quad (\text{sous-entendu, pour } p \text{ de partie réelle assez grande}). \text{ On a, puisque } \lambda \neq 0,$$

$$\frac{p+1}{1-\lambda-\lambda p} = \frac{-1}{\lambda} + \frac{1}{1-\lambda-\lambda p} = \frac{-1}{\lambda} \left( 1 + \frac{1}{p - \frac{1-\lambda}{\lambda}} \right)$$

donc nécessairement,

$$Y(p) = \frac{-1}{\lambda} \left( X(p) + \frac{X(p)}{p - \frac{1-\lambda}{\lambda}} \right)$$

d'où, en prenant les originaux et en utilisant le Théorème 2, on obtient :

$$y(t) = \frac{-1}{\lambda} \left( x(t) + x(t) * \left( e^{\frac{1-\lambda}{\lambda}t} U(t) \right) \right).$$

Réciproquement, si l'on définit  $y$  par l'expression  $y(t) = \frac{-1}{\lambda} \left( x(t) + x(t) * \left( e^{\frac{1-\lambda}{\lambda}t} U(t) \right) \right)$ , alors on a un signal (par somme et produit de convolution de signaux) dont la transformée de Laplace vaut

$$Y(p) = \frac{-1}{\lambda} \left( X(p) + \frac{X(p)}{p - \frac{1-\lambda}{\lambda}} \right) = \frac{p+1}{1-\lambda-\lambda p} X(p) = \frac{X(p)}{\frac{1}{p+1} - \lambda}$$

d'où

$$\frac{Y(p)}{p+1} - \lambda Y(p) = X(p)$$

et en prenant l'original

$$\forall t \in \mathbb{R}, (e^{-t} U(t)) * y(t) - \lambda y(t) = x(t).$$

On a de plus l'expression  $y(t) = \frac{-1}{\lambda} \left( x(t) + x(t) * \left( e^{\frac{1-\lambda}{\lambda}t} U(t) \right) \right)$  qui se réécrit sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = a x(t) + b \int_0^t x(s) e^{c(t-s)} ds,$$

avec  $a = b = \frac{-1}{\lambda}$  et  $c = \frac{1-\lambda}{\lambda}$ .

b) Remarque : le système  $(S_\lambda)$  n'est pas un système à noyau de convolution (ou plutôt son noyau de convolution contient un Dirac), donc, nous ne pouvons pas utiliser le Théorème 5 tel qu'il a été présenté dans ce cours. Il nous faut revenir à la définition 1.

Le système  $(S_\lambda)$  est stable si et seulement si le système  $(S_{0,\lambda}) : x(t) \rightarrow \tilde{y}(t) = b \int_0^t x(s) e^{c(t-s)} ds$  est stable. En effet, soit  $t \rightarrow x(t)$  un signal d'entrée tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, |x(t)| \leq 1$ . Alors :  
 si  $(S_\lambda)$  est stable avec une constante de stabilité  $C$ , on a  $|\tilde{y}(t)| = |y(t) - a x(t)| \leq (|a| + C)$  donc  $(S_{0,\lambda})$  est stable de constante de stabilité  $(|a| + C)$ ,  
 si  $(S_{0,\lambda})$  est stable avec une constante de stabilité  $C$ , on a  $|y(t)| = |\tilde{y}(t) + a x(t)| \leq (|a| + C)$  donc



$(S_\lambda)$  est stable de constante de stabilité  $(|a| + C)$ .

Or, le système  $(S_{0,\lambda})$  est stable si et seulement si  $\int_0^t |e^{cs}| ds$  converge c'est à dire si  $c = \frac{1-\lambda}{\lambda} < 0$ .

On en déduit que  $(S_\lambda)$  stable  $\Rightarrow \lambda > 1$ .

5) On a par ce qui précède

$$Y(p) = \frac{-1}{\lambda} \left( X(p) + \frac{X(p)}{p - \frac{1-\lambda}{\lambda}} \right) = \frac{-1}{2} \left( \frac{1}{p+3} + \frac{1}{(p+3) \left( p + \frac{1}{2} \right)} \right)$$

d'où par décomposition en éléments simples :

$$Y(p) = \frac{-1}{10} \left( \frac{3}{p+3} + \frac{2}{p + \frac{1}{2}} \right)$$

ce qui permet d'obtenir l'expression  $y(t) = \frac{-1}{10} \left( 3e^{-3t} + 2e^{-\frac{t}{2}} \right) U(t)$ .

### Exercice 27

1) Supposons que  $\forall t \geq 0, y(t) = y_p^{(1)}(t) + y_0^{(1)}(t) = y_p^{(2)}(t) + y_0^{(2)}(t)$ .

Alors,  $\forall t \geq 0, y_p^{(1)}(t) - y_p^{(2)}(t) = y_0^{(2)}(t) - y_0^{(1)}(t)$

d'où

$$(1) : \forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, y_p^{(1)}(t+nT) - y_p^{(2)}(t+nT) = y_0^{(2)}(t+nT) - y_0^{(1)}(t+nT)$$

D'une part, par T-périodicité, on a  $\forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, y_p^{(1)}(t+nT) - y_p^{(2)}(t+nT) = y_p^{(1)}(t) - y_p^{(2)}(t)$ .

D'autre part, puisque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_0^{(i)}(t) = 0$  pour  $i=1, 2$ , on a  $\forall t \geq 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_0^{(2)}(t+nT) - y_0^{(1)}(t+nT) = 0$ .

Ainsi, en faisant tendre  $n$  vers l'infini dans la relation (1), on obtient  $\forall t \geq 0, y_p^{(1)}(t) - y_p^{(2)}(t) = 0$  donc  $y_p^{(1)} = y_p^{(2)}$  et ainsi  $y_0^{(1)} = y_0^{(2)}$ .

2) Par le Théorème 2 du chapitre sur les fonctions élémentaires, il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\forall t \in [0; T], |\tilde{x}(t)| \leq C$ . Par T-périodicité de la fonction  $\tilde{x}$ , on en déduit que  $\forall t \in \mathbb{R}, |\tilde{x}(t)| \leq C$ .

3) Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $|\tilde{x}(t-s)h(s)| \leq C|h(s)|$  et  $\int_0^{+\infty} |h(s)| ds$  converge par stabilité du

système, donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \tilde{x}(t-s)h(s) ds$  est convergente car absolument convergente. Cela prouve que la fonction  $t \rightarrow y_p(t)$  est bien définie.

Enfin,  $y_p(t+T) = \int_0^{+\infty} \tilde{x}(t+T-s)h(s) ds = \int_0^{+\infty} \tilde{x}(t-s)h(s) ds = y_p(t)$  par T-périodicité de la fonction  $\tilde{x}$ . La fonction  $t \rightarrow y_p(t)$  est donc T-périodique.

4) a) On a  $\forall t \geq 0, y(t) - y_p(t) = \int_0^t x(t-s)h(s) ds - \int_0^{+\infty} \tilde{x}(t-s)h(s) ds$ .

Or, pour  $s \in [0; t], t-s \geq 0$  d'où  $x(t-s) = \tilde{x}(t-s)$  ce qui nous autorise à écrire :

$$\forall t \geq 0, y(t) - y_p(t) = \int_0^t \tilde{x}(t-s)h(s) ds - \int_0^{+\infty} \tilde{x}(t-s)h(s) ds = - \int_t^{+\infty} \tilde{x}(t-s)h(s) ds$$

par la relation de Chasles entre intégrales convergentes.

b) On a donc,

$$\forall t \geq 0, |y(t) - y_p(t)| = \left| \int_t^{+\infty} \tilde{x}(t-s)h(s) ds \right| \leq \int_t^{+\infty} |\tilde{x}(t-s)h(s)| ds \leq C \int_t^{+\infty} |h(s)| ds$$

et la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} |h(s)| ds$  permet de déduire que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{+\infty} |h(s)| ds = 0$  d'où l'on conclut que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) - y_p(t) = 0$ .

5)

a) Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On a

$$y_p(t) = \int_0^{+\infty} \tilde{x}(t-s)h(s) ds = \int_t^{-\infty} \tilde{x}(\sigma)h(t-\sigma)(-d\sigma) = \int_{-\infty}^t \tilde{x}(\sigma)h(t-\sigma) d\sigma$$

en faisant le changement de variables  $\sigma = t - s$ . On a alors :

$$y_p(t) = \int_{-\infty}^t \tilde{x}(\sigma) e^{-t} e^{\sigma} U(t-\sigma) d\sigma = e^{-t} \int_{-\infty}^t \tilde{x}(\sigma) e^{\sigma} U(t-\sigma) d\sigma = e^{-t} \int_{-\infty}^t \tilde{x}(\sigma) e^{\sigma} d\sigma \text{ car } \forall \sigma \in ]-\infty; t], t-\sigma \geq 0 \text{ d'où } U(t-\sigma) = 1.$$

b) On a

$$\int_{-\infty}^0 x(s) e^s ds = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-2n-2}^{-2n-1} x(s) e^s ds$$

car  $x(s) = 0$  sur tous les intervalles de la forme  $[-2n-1; -2n[$ , d'où

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^0 x(s) e^s ds = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-2n-2}^{-2n-1} e^s ds = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-2n-2}^{-2n-1} e^s ds = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n-1} - e^{-2n-2} \\ &= (e^{-1} - e^{-2}) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n} = \frac{e^{-1} - e^{-2}}{1 - e^{-2}} \text{ (série géométrique)} \\ &= \frac{1}{e+1}. \end{aligned}$$

c) Supposons  $t \in [0; 1[$ : on a

$$\begin{aligned} y_p(t) &= e^{-t} \int_{-\infty}^t x(s) e^s ds = e^{-t} \left( \int_{-\infty}^0 x(s) e^s ds + \int_0^t x(s) e^s ds \right) = \frac{e^{-t}}{e+1} + e^{-t} \int_0^t e^s ds \\ &= \frac{e^{-t}}{e+1} + 1 - e^{-t} = 1 - \frac{e}{1+e} e^{-t}. \end{aligned}$$

Supposons  $t \in [1; 2[$ : on a, puisque  $\forall s \in [1; t], x(s) = 0$ :

$$\begin{aligned} y_p(t) &= e^{-t} \int_{-\infty}^t x(s) e^s ds = e^{-t} \left( \int_{-\infty}^0 x(s) e^s ds + \int_0^1 x(s) e^s ds \right) = e^{-t} \left( \frac{1}{e+1} + e-1 \right) \\ &= \frac{e^2}{e+1} e^{-t}. \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } y_p(t) = \begin{cases} 1 - \frac{e}{e+1} e^{-t} & \text{si } t \in [0; 1[ \\ \frac{e^2}{e+1} e^{-t} & \text{si } t \in [1; 2[ \end{cases}, \text{ avec 2- périodisation sur } \mathbb{R}.$$

On retrouve, bien heureusement, le résultat obtenu de façon très différente dans l'exercice 20.

6) On reprend la formule  $y_p(t) = \int_0^{+\infty} \tilde{x}(t-s)h(s)ds = \int_0^{+\infty} \cos(\omega t - \omega s)h(s)ds$  puisque dans le cas qui nous intéresse,  $\tilde{x}(t) = \cos(\omega t)$ . Par la formule d'addition du cos, on a alors

$$y_p(t) = \cos(\omega t) \int_0^{+\infty} \cos(\omega s)h(s)ds + \sin(\omega t) \int_0^{+\infty} \sin(\omega s)h(s)ds,$$

avec convergence de toutes les intégrales de par l'absolue convergence de  $\int_0^{+\infty} h(s)ds$ .

On en déduit que  $y_p(t)$  est un signal sinusoïdal de pulsation  $\omega$  car il s'écrit sous la forme

$$y_p(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad \alpha = \int_0^{+\infty} \cos(\omega s)h(s)ds \quad \text{et} \quad \beta = \int_0^{+\infty} \sin(\omega s)h(s)ds.$$

Puisque  $\int_0^{+\infty} |h(s)|ds$  converge, ce qui permet d'affirmer que  $H(p)$  est définie pour tout nombre complexe  $p$  de partie réelle positive ou nulle.

On a donc  $|H(j\omega)|^2 = \left| \int_0^{+\infty} e^{-j\omega s} h(s)ds \right|^2$  avec convergence absolue de l'intégrale donc

$$|H(j\omega)|^2 = \left| \int_0^{+\infty} \cos(\omega s)h(s)ds + j \int_0^{+\infty} \sin(\omega s)h(s)ds \right|^2.$$

Puisque  $h$  est à valeurs réelles, cela donne :

$$|H(j\omega)|^2 = \left( \int_0^{+\infty} \cos(\omega s)h(s)ds \right)^2 + \left( \int_0^{+\infty} \sin(\omega s)h(s)ds \right)^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

cette dernière quantité correspondant au carré de l'amplitude réelle du signal sinusoïdal  $y_p(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$ .

## C - TRANSFORMATION DE FOURIER

Un des objectifs principaux de ce chapitre est de définir la notion de spectre d'un signal non périodique. Rappelons que si  $t \rightarrow x(t)$  est un signal T-périodique continu par morceaux, on peut considérer sa série de Fourier complexe  $S(x)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$  avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  et ainsi définir son spectre complexe comme la fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}$  définie sur l'ensemble des fréquences de  $t \rightarrow x(t)$ , soit  $\{\frac{n}{T}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , par la relation  $\frac{n}{T} \rightarrow C_n$ .

Dans le cas d'un signal  $t \rightarrow x(t)$ , le spectre sera défini comme une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  par la relation  $\nu \rightarrow X(\nu)$  où la fonction  $\nu \rightarrow X(\nu)$  est la transformée de Fourier de  $t \rightarrow x(t)$ .

Ainsi, au lieu de considérer une fonction définie sur l'ensemble discret de fréquences  $\{\frac{n}{T}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , on sera amené à travailler avec des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Ce changement de nature du spectre peut être expliqué intuitivement de la façon suivante : un signal  $t \rightarrow x(t)$  non périodique et qui tend assez vite vers 0 en  $\pm\infty$  peut être d'une certaine façon considéré comme un signal périodique de période T avec  $T \rightarrow +\infty$ . Ainsi, l'ensemble de ses fréquences  $\{\frac{n}{T}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  qui est constitué par l'ensemble des termes d'une suite arithmétique de raison  $\frac{1}{T}$  tendant vers 0 va avoir tendance à « remplir » l'ensemble  $\mathbb{R}$  tout entier : si  $T \rightarrow +\infty$ , l'ensemble des fréquences  $\{\frac{n}{T}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  va devenir  $\mathbb{R}$  tout entier.

### I) **Systemes linéaires invariant dans le temps pour des signaux non causaux.**

#### I.1) Convolution de signaux non causaux.

On considère un système c'est à dire un procédé qui à un signal d'entrée  $x(t)$  fait correspondre un signal de sortie  $y(t)$ .

On suppose ce système :

(i) linéaire (on peut appliquer le principe de superposition, c'est à dire que la sortie correspondant à  $\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)$  sera  $\lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$ )

(ii) Invariant dans le temps : pour  $a \in \mathbb{R}$ , la sortie correspondant à  $x(t-a)$  sera  $y(t-a)$ . Cette définition correspond à l'idée qu'une même cause produira les mêmes effets à un instant donné qu'à un instant ultérieur ou antérieur (mais les effets seront alors décalés dans le temps).

Nous avons déjà rencontré cette situation dans le chapitre sur la transformée de Laplace, mais la différence ici est que nous allons travailler sur des signaux a priori non causaux. Les systèmes étudiés seront aussi définis par un produit de convolution, mais la définition de ce produit de convolution devra être modifiée pour tenir compte du caractère non causal des signaux considérés.

**Définition 1.** Étant données deux fonctions  $x$  et  $y$  continues par morceaux sur  $\mathbb{R}$  on définit leur produit de convolution comme étant la fonction  $x * y$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) y(t-s) ds$  sous réserve de convergence de l'intégrale pour chaque réel  $t$ .

**Remarque :** Si les deux fonctions  $x$  et  $y$  sont causales, l'intégrale est toujours convergente et on retrouve la définition du produit de convolution  $x * y$  donnée dans le cadre du chapitre de la transformation de Laplace. (On rappelle que  $x$  causale signifie que  $\forall t < 0, x(t) = 0$ .)

En effet, dans ce cas, si  $t > 0$  alors la fonction  $s \rightarrow x(s)y(t-s)$  est nulle pour  $s > t$  (car  $y(t-s) = 0$ ) et pour  $s < 0$  (car  $x(s) = 0$ ), donc l'intégrale généralisée  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(s)y(t-s) ds$  n'est rien d'autre que  $\int_0^t x(s)y(t-s) ds$  qui est bien définie.

Si  $t < 0$ , on montrerait que la fonction  $s \rightarrow x(s)y(t-s)$  est identiquement nulle d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(s)y(t-s) ds = \int_0^t x(s)y(t-s) ds = 0 \text{ dans ce cas.}$$

**Exemple :** si  $x(t) = \sin(t)$  et  $y(t) = \Pi_{-1,1}(t)$  alors  $(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)y(t-s) ds = \int_{t-1}^{t+1} \sin(s) ds$

car la fonction  $s \rightarrow y(t-s)$  ne prend que les valeurs 0 et 1, et  $y(t-s) = 1 \Leftrightarrow -1 \leq t-s < 1 \Leftrightarrow t-1 < s \leq t+1$ .

On a donc  $(x * y)(t) = \int_{t-1}^{t+1} \sin(s) ds = [-\cos(s)]_{t-1}^{t+1} = \cos(t-1) - \cos(t+1)$ .

En utilisant la formule  $\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$  on obtient :  
 $(x * y)(t) = -2 \sin(t) \sin(-1) = 2 \sin(1) \sin(t)$ .

On pourra déjà sur cet exemple remarquer que la convolution entre une sinusoïde  $x(t)$  et une fonction  $y(t)$  donne une sinusoïde de même fréquence, mais d'amplitude différente : ce résultat, d'une importance capitale, sera généralisé dans la suite de ce cours.

## 2) Problème de l'existence d'un produit de convolution.

Étant données deux fonctions  $x$  et  $y$  continues par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , on se pose ici le problème de l'existence de leur produit de convolution  $x * y$ , existence qui n'est plus assurée dès que les fonctions considérées ne sont plus causales.

**Remarque :** si les deux fonctions  $x$  et  $y$  sont nulles sur un voisinage de  $-\infty$ , alors l'existence de  $x * y$  est encore assurée. En effet, si  $A$  et  $B$  sont tels que  $\forall t < A, x(t) = 0$  et  $\forall t < B, y(t) = 0$ , on a pour tous réels  $s$  et  $t$   $x(s)y(t-s) \neq 0 \Rightarrow s \geq A$  et  $t-s \geq B$  ce qui équivaut à  $A \leq s \leq t-B$ . Cela n'est possible que si  $t \geq A+B$ . On en déduit que  $\forall t \in ]-\infty, A+B[$ ,  $(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)y(t-s) ds = 0$  et

$$\forall t \in [A+B; +\infty[, (x * y)(t) = \int_A^{t-B} x(s)y(t-s) ds \text{ ce qui permet de définir dans ce cas } x * y.$$

Ces hypothèses sur  $x$  et  $y$  (qui reviennent à dire qu'à une avance ou un retard près,  $x$  et  $y$  sont causales) sont trop restrictives en pratique, c'est la raison pour laquelle on est amené à définir d'autres classes de fonctions que l'on pourra convoluer.

### Définition 2.

On appelle  $L^1(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $t \rightarrow x(t)$  continues par morceaux et absolument intégrables sur  $\mathbb{R}$  c'est à dire telles que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$  converge.

On appelle  $L^2(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $t \rightarrow x(t)$  continues par morceaux à énergie finie sur  $\mathbb{R}$  c'est à dire telles que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$  converge.

On appelle  $L^\infty(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $t \rightarrow x(t)$  continues par morceaux et bornées sur  $\mathbb{R}$  c'est à dire telles que  $\exists M > 0 : \forall t \in \mathbb{R}, |x(t)| \leq M$ .

**Remarque :** Précisons, pour éviter toute confusion, que dans la littérature mathématique,  $L^1(\mathbb{R})$  représente généralement un ensemble différent de celui décrit ci-dessus. En particulier, toutes les fonctions considérées ici sont continues par morceaux.

**Exemple :** la fonction  $x(t) = \frac{1}{1+|t|}$  est telle que  $x \in L^2(\mathbb{R})$  et  $x \in L^\infty(\mathbb{R})$  mais  $x \notin L^1(\mathbb{R})$ .

En effet, en  $\pm\infty$ ,  $|x(t)| \sim \frac{1}{|t|}$  donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$  diverge par le critère de l'équivalent et celui de Riemann, mais  $|x(t)|^2 \sim \frac{1}{t^2}$  donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$  converge par le critère de l'équivalent et celui de Riemann. De plus, on a  $\forall t \in \mathbb{R}, |x(t)| \leq 1$  donc  $x \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

**Remarque :** il n'existe aucune relation d'inclusion entre les trois espaces de fonctions  $L^1(\mathbb{R})$ ,  $L^2(\mathbb{R})$  et  $L^\infty(\mathbb{R})$ . En revanche, on a la

### Propriété 1.

Soient  $x$  et  $y$  deux fonctions continues par morceaux sur  $\mathbb{R}$  et  $p \in \{1; 2; \infty\}$ . Alors :

- 1) Si  $x \in L^p$  et si  $y \in L^p$ , alors  $x + y \in L^p$
- 2)  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ .

### Preuve :

1)

(i) ( $p=1$ ) Soient  $x \in L^1$  et  $y \in L^1$ . Alors  $\forall t \in \mathbb{R}, |x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)|$  (inégalité triangulaire). Du coup, puisque  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)| dt$  convergent, alors  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) + y(t)| dt$  converge (somme de deux intégrales convergentes) donc par le critère de comparaison et l'inégalité ci dessus, on a la convergence de  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) + y(t)| dt$ .

(ii) ( $p=2$ ) Soient  $x \in L^2$  et  $y \in L^2$ . Alors  $\forall t \in \mathbb{R}, |x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)|$  d'où  $\forall t \in \mathbb{R}, |x(t) + y(t)|^2 \leq (|x(t)| + |y(t)|)^2 \leq 2(|x(t)|^2 + |y(t)|^2)$ .

(En effet on a  $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  car

$$2(a^2 + b^2) - (a+b)^2 = 2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2 - 2ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0.$$

On conclut alors de la même façon qu'au (i) par le critère de comparaison et de Riemann pour la convergence des intégrales.

(iii) ( $p=\infty$ ) Soient  $x \in L^\infty$  et  $y \in L^\infty$ . Alors

$$\exists M > 0, \exists M' > 0 : \forall t \in \mathbb{R}, |x(t)| \leq M \text{ et } |y(t)| \leq M'.$$

Ainsi,  $\forall t \in \mathbb{R}, |x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)| \leq M + M'$  ce qui prouve que  $x + y \in L^\infty$ .

2) Soit  $x \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ . Alors  $\exists M > 0 : \forall t \in \mathbb{R}, |x(t)| \leq M$  d'où, en multipliant cette dernière inégalité par  $|x(t)|$  :  $\forall t \in \mathbb{R}, |x(t)|^2 \leq M|x(t)|$ . L'hypothèse  $x \in L^1(\mathbb{R})$  signifie que

$\int_{-\infty}^{+\infty} M|x(t)|dt$  converge d'où la convergence de  $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt$  par le critère de comparaison.

On arrive au résultat d'existence suivant :

**(\*) Théorème 1 (de Young) .**

- (i) Si  $x \in L^2$  et si  $y \in L^2$  alors  $(x * y)(t)$  est défini quel que soit  $t$ , et la fonction  $t \rightarrow (x * y)(t)$  est continue, avec  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (x * y)(t) = 0$  (en particulier  $x * y \in L^\infty$  . )
- (ii) Si  $x \in L^1$  et si  $y \in L^\infty$  alors  $(x * y)(t)$  est défini quel que soit  $t$ , et la fonction  $t \rightarrow (x * y)(t)$  est continue et  $x * y \in L^\infty$  .
- (iii) Dans chacun des cas précédents, si on a de plus  $x \in L^1$  et  $y \in L^1$  alors  $x * y \in L^1$
- (iv) Dans chacun des cas (i) et (ii), si on a de plus  $x \in L^1$  et  $y \in L^2$  alors  $x * y \in L^2$
- (v) Dans tous les cas, on a  $x * y = y * x$  et  $x * (y + z) = x * y + x * z$  . De plus si  $z \in L^1$  on a  $(x * y) * z = x * (y * z)$  (associativité du produit de convolution) pourvu que tous les produits de convolution soient bien définis.

Ce théorème est admis, car sa preuve nécessite des résultats assez poussés et hors programme sur la théorie de l'intégration. Il ne nous servira «seulement » qu' à s'assurer de l'existence des objets considérés.

**Exemple :** si on reprend l'exemple  $x(t) = \sin(t)$  et  $y(t) = \Pi_{-1,1}(t)$  alors  $x \in L^\infty$  et  $y \in L^1$  . On peut donc dire d'après le (ii) que  $(x * y)(t)$  est défini quel que soit  $t$ , et la fonction  $t \rightarrow (x * y)(t)$  est continue, ce que l'on peut vérifier directement avec l'expression trouvée  $(x * y)(t) = 2 \sin(1) \sin(t)$  qui fournit une fonction continue. On peut aussi vérifier que les points (i) (iii) et (iv) ne s'appliquent pas car la fonction  $x$  n'est ni absolument intégrable ni à énergie finie.

## I.2) Systèmes non causaux.

Soit  $h$  une fonction continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  . On définit le système qui à une entrée  $x$  fait correspondre la sortie  $y$  définie par  $y = h * x$  . Il faut, comme on l'a vu ci-dessus, des hypothèses adéquates sur les fonction  $h$  et  $x$  pour que la fonction  $y$  existe.

Par exemple, d'après le théorème 1, si  $h \in L^2$  la sortie  $y$  est bien définie si  $x \in L^2$  .  
 Tout comme les systèmes causaux, on a la

**Définition 3.** La fonction  $h$  est appelée réponse impulsionnelle du système.

## II) Transformée de Fourier de signaux $L^1$ .

### II.1) Motivations

On considère ici  $h \in L^1$  . On définit le système qui à une entrée  $x$  fait correspondre la sortie  $y$  définie par  $y = h * x$  . Par le (ii) du Théorème 1, ce système est définie pour toute entrée  $x \in L^\infty$  . Pour  $\nu \in \mathbb{R}$  considérons l'entrée sinusoïdale complexe de fréquence  $|\nu|$  :  $x_\nu(t) = e^{2j\pi\nu t}$  . Pour tout réel  $t$  on a  $|x_\nu(t)| = 1$  donc  $x_\nu \in L^\infty$  : on peut alors considérer sa sortie correspondante  $y_\nu$  qui se calcule de la façon suivante :

$$y_v(t) = h * x_v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{2j\pi v(t-s)} ds.$$

(On peut démontrer sans le Théorème 1 que l'intégrale ci-dessus converge absolument. En effet,  $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|h(s) e^{2j\pi v(t-s)}| = |h(s)| |e^{2j\pi v(t-s)}| = |h(s)|$  donc puisque  $h \in L^1$  on a  $s \rightarrow h(s) e^{2j\pi v(t-s)}$  qui est aussi dans  $L^1$ .)

Ainsi,

$$y_v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{2j\pi v(t-s)} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{2j\pi vt} e^{-2j\pi vs} ds = e^{2j\pi vt} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{-2j\pi vs} ds.$$

Dans le résultat ci-dessus, remarquons que :

- la quantité  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{-2j\pi vs} ds$  ne dépend que de la fonction  $h$  et de  $v$ . Notons la  $H(v)$ .
- On a  $e^{2j\pi vt} = x_v(t)$ .

Ainsi, la sortie correspondant à  $t \rightarrow e^{2j\pi vt}$  est la fonction  $t \rightarrow H(v) \cdot e^{2j\pi vt}$ . Cela signifie que, si  $v > 0$  la sortie correspondant à une entrée sinusoïdale de fréquence  $v$  et d'amplitude 1 est une fonction sinusoïdale de même fréquence  $v$  et d'amplitude complexe  $H(v)$ . Autrement dit,  $|H(v)|$  représente le gain correspondant à une entrée sinusoïdale de fréquence  $v$  et  $\text{Arg}(H(v))$  le déphasage par rapport à l'entrée. Ainsi, la fonction  $v \rightarrow H(v)$  est la clé pour l'analyse fréquentielle de notre système.

La proportionnalité entre l'entrée  $t \rightarrow e^{2j\pi vt}$  et la sortie  $t \rightarrow H(v) \cdot e^{2j\pi vt}$  se traduit en disant que les fonctions  $t \rightarrow e^{2j\pi vt}$  (pour  $v$  réel) sont des fonctions propres du système, associées aux valeurs propres  $H(v)$ .

Cela nous amène à la

**Définition 4.** Étant donnée une fonction  $x \in L^1$ , on appelle transformée de Fourier de  $x$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par l'expression  $X(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-2j\pi vs} ds$ . On pourra noter aussi cette transformée de Fourier par  $TF(x)(v)$  le cas échéant.

**Remarque :** On notera que d'après cette définition,  $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) ds$  (faire  $v=0$  dans la formule).

**Exemple :** si  $x(t) = \Pi_{-1,1}(t)$ , on a

$$\begin{aligned} \forall v \neq 0, X(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-2j\pi vs} ds = \int_{-1}^1 e^{-2j\pi vs} ds = \left[ \frac{1}{-2j\pi v s} e^{-2j\pi vs} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{-2j\pi v} (e^{-2j\pi v} - e^{2j\pi v}) \\ &= \frac{1}{2j\pi v} (e^{2j\pi v} - e^{-2j\pi v}) = \frac{2j \sin(2\pi v)}{2j\pi v} = \frac{\sin(2\pi v)}{\pi v}. \end{aligned}$$

$$\text{Si } v=0, X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) ds = \int_{-1}^1 ds = 2.$$

**Remarque :** Il y a une ressemblance très nette entre la transformation de Laplace et celle de Fourier. En effet, dans la définition 4, si la fonction  $x$  est causale, on a  $X(v) = \int_0^{+\infty} x(s) e^{-2j\pi vs} ds = TL(x)(2j\pi v)$  où

$TL(x)$  désigne la transformée de Laplace qui est définie pour tout complexe  $p$  tel que  $\text{Re}(p) \geq 0$  car l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(s)| ds$  converge, d'où la possibilité de prendre  $p = 2j\pi v$ .

Chacune de ces deux transformations possède ses propres avantages ; la transformée de Laplace s'applique à une classe de signaux  $x(t)$  plus grande que l'ensemble  $L^1$  mais la transformation de Fourier s'applique à des signaux qui peuvent ne pas être causaux. C'est la raison pour laquelle la transformation de Laplace est plutôt utilisée pour l'étude des signaux décrivant un régime transitoire tandis que la transformation de Fourier s'applique plutôt à l'étude des régimes permanents.



## II.2) Premières propriétés de la transformée de Fourier $L^1$ .

La propriété ci-dessous donne des premières informations sur la fonction  $v \rightarrow X(v)$  :

**Propriété 2.** Étant donnée une fonction  $x \in L^1$ , sa transformée de Fourier  $v \rightarrow X(v)$  est une fonction continue. De plus,  $\forall v \in \mathbb{R}, |X(v)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$  (donc  $X \in L^\infty$ ) et  $\lim_{v \rightarrow \pm\infty} X(v) = 0$ .

Enfin, la transformation de Fourier est un opérateur linéaire, c'est à dire que si  $x \in L^1$  et  $y \in L^1$ , et si  $\lambda \in \mathbb{C}$  alors puisque  $x + y \in L^1$  (propriété 1.1) et puisque  $\lambda x \in L^1$  (évident) on peut considérer leur transformées de Fourier qui valent  $v \rightarrow X(v) + Y(v)$  et  $v \rightarrow \lambda X(v)$  respectivement.

Preuve (très) partielle : On admet la continuité de  $X$  et le fait que  $\lim_{v \rightarrow \pm\infty} X(v) = 0$ , dont la preuve fait appel à des notions assez poussées.

On a  $\forall v \in \mathbb{R}, |X(v)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi vt} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) e^{-2j\pi vt}| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$ , cette dernière intégrale étant convergente puisque  $x \in L^1$ .

La preuve de la linéarité de la transformation de Fourier découle directement de la linéarité de l'intégrale.

Si on reprend l'exemple de  $x(t) = \Pi_{-1,1}(t)$ , où l'on avait établi que  $X(v) = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi v)}{\pi v} & \text{si } v \neq 0 \\ 2 & \text{si } v = 0 \end{cases}$ ,

on peut vérifier les résultats de la propriété 2 :

(i)  $v \rightarrow X(v)$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}^*$  et de l'équivalence  $\sin(\varepsilon) \sim \varepsilon$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$  on déduit que  $\lim_{v \rightarrow 0} X(v) = 2 = X(0)$ , d'où la continuité de  $v \rightarrow X(v)$  sur tout  $\mathbb{R}$ .

(ii)  $\forall v \in \mathbb{R}, |X(v)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = 2$  car de l'inégalité classique  $|\sin(x)| \leq |x|$  on tire que  $\forall v \in \mathbb{R}, |X(v)| \leq 2$ .

(iii)  $\lim_{v \rightarrow \pm\infty} X(v) = 0$  car  $\forall v \in \mathbb{R}^*, \left| \frac{\sin(2\pi v)}{\pi v} \right| \leq \frac{1}{\pi|v|}$  et le Théorème des Gendarmes permet de conclure.

### Remarques :

(i) la fonction  $X \rightarrow \frac{\sin(X)}{X}$  qui intervient dans l'exemple précédent (« sinus cardinal ») est d'une très grande utilité dans les applications de la transformée de Fourier en théorie du signal : son étude fera l'objet d'un paragraphe spécial dans la suite de ce cours.

(ii) On pourrait compléter la propriété 2 en mentionnant que plus la fonction  $x$  est régulière (continue, ou dérivable ou deux fois dérivable) plus la fonction  $v \rightarrow X(v)$  tend rapidement vers 0 en  $+\infty$ . Et réciproquement : plus la fonction  $x$  tend rapidement vers 0 à l'infini, plus la fonction  $v \rightarrow X(v)$  est régulière.

Contrairement à ce que pourrait laisser penser le dernier exemple étudié, il n'y a aucune raison que la fonction  $v \rightarrow X(v)$  prenne des valeurs réelles même si  $x$  est à valeurs réelles. Précisons ce dernier point :

**Propriété 3.** Soit  $x \in L^1$ . Alors :

(i) La fonction  $\bar{x} : t \rightarrow \overline{x(t)}$  admet comme transformée de Fourier la fonction  $v \rightarrow \overline{X(-v)}$

(ii) Si la fonction  $x$  est paire et à valeurs réelles, la fonction  $v \rightarrow X(v)$  est paire et à valeurs réelles.

(iii) Si la fonction  $x$  est impaire et à valeurs réelles, la fonction  $v \rightarrow X(v)$  est impaire et à valeurs imaginaires pures.

(iv) Si la fonction  $x$  est à valeurs réelles, la fonction  $v \rightarrow |X(v)|$  est paire

(\*) Preuve :

(i) Il faut d'abord remarquer que pour toute fonction  $f$  définie sur un intervalle  $[a; b]$  et à valeurs dans

$\mathbb{C}$  on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) + j \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) - j \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$$

$$= \int_a^b (\operatorname{Re}(f(t)) - j \operatorname{Im}(f(t))) dt = \int_a^b \overline{f(t)} dt.$$

On a alors :

$$\overline{X(-\nu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(s) e^{2j\pi\nu s}} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(s)} e^{2j\pi\nu s} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(s)} e^{-2j\pi\nu s} ds$$

(la convergence des intégrales est assurée par le fait que  $x \in L^1$ .)

et on reconnaît dans la dernière expression la transformée de Fourier de la fonction  $\bar{x} : t \rightarrow \overline{x(t)}$ .

(ii) Dans ce cas, on a  $X(-\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{2j\pi\nu s} ds$ . En faisant le changement de variables  $t = -s$  dans cette dernière intégrale, on obtient :

$$X(-\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{2j\pi\nu s} ds = \int_{+\infty}^{-\infty} x(-t) e^{-2j\pi\nu t} (-dt) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t) e^{-2j\pi\nu t} dt$$

Puisque  $x$  est paire, on obtient  $X(-\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi\nu t} dt = X(\nu)$ .

De plus

$$\overline{X(\nu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(s) e^{-2j\pi\nu s}} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(s)} e^{-2j\pi\nu s} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-2j\pi\nu s} ds \quad (\text{car } x \text{ est à valeurs réelles})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{2j\pi\nu s} ds = X(-\nu) = X(\nu). \quad \text{On en déduit que la fonction } \nu \rightarrow X(\nu) \text{ est à valeurs réelles.}$$

(iii) Dans ce cas, on a  $X(-\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{2j\pi\nu s} ds$ . En faisant le changement de variables  $t = -s$  dans cette dernière intégrale, on obtient :

$$X(-\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{2j\pi\nu s} ds = \int_{+\infty}^{-\infty} x(-t) e^{-2j\pi\nu t} (-dt) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t) e^{-2j\pi\nu t} dt$$

Puisque  $x$  est impaire, on obtient  $X(-\nu) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi\nu t} dt = -X(\nu)$ .

De plus

$$\overline{X(\nu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(s) e^{-2j\pi\nu s}} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(s)} e^{-2j\pi\nu s} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-2j\pi\nu s} ds \quad (\text{car } x \text{ est à valeurs réelles})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{2j\pi\nu s} ds = X(-\nu) = -X(\nu).$$

Puisque  $\overline{X(\nu)} = -X(\nu)$ , cela prouve que la fonction  $\nu \rightarrow X(\nu)$  est impaire et à valeurs imaginaires pures.

(iv) On écrit que  $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \left( \frac{x(t) + x(-t)}{2} \right) + \left( \frac{x(t) - x(-t)}{2} \right) = x_p(t) + x_i(t)$ .

La fonction  $t \rightarrow x(-t)$  est encore dans  $L^1$  car elle est toujours continue par morceaux et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(-t)| dt = \int_{+\infty}^{-\infty} |x(s)| (-ds) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(s)| ds < +\infty \quad (\text{changement de variable } s = -t). \quad \text{Donc les}$$

fonctions  $t \rightarrow x_p(t)$  et  $t \rightarrow x_i(t)$  sont dans  $L^1$  et la linéarité de la transformation de Fourier implique que  $X(\nu) = X_p(\nu) + X_i(\nu)$ . Maintenant, il est facile de vérifier que les fonctions

$t \rightarrow x_p(t)$  et  $t \rightarrow x_i(t)$  sont respectivement paires et impaires, et que leurs transformées de Fourier sont respectivement à valeurs réelles et imaginaires pur. On en déduit que la forme algébrique de  $X(\nu)$  est

$$X(\nu) = X_p(\nu) + \left(\frac{1}{j} X_i(\nu)\right) j \text{ d'où}$$

$$(1) |X(\nu)|^2 = X_p^2(\nu) + \left(\frac{1}{j} X_i(\nu)\right)^2 = X_p^2(\nu) - X_i^2(\nu) .$$

Les fonctions  $X_p$  et  $X_i$  étant respectivement paires et impaires (points (ii) et (iii) déjà démontrés de la propriété 3), les fonctions  $X_p^2$  et  $X_i^2$  sont toutes les deux paires donc la relation (1) montre que la fonction  $\nu \rightarrow |X(\nu)|^2$  est paire : la fonction  $\nu \rightarrow |X(\nu)|$  est donc paire.

**Exemple :** si  $x(t) = \Pi_{-1,1}(t)$ , fonction qui est paire et à valeurs réelles, alors

$$X(\nu) = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi\nu)}{\pi\nu} & \text{si } \nu \neq 0 \\ 2 & \text{si } \nu = 0 \end{cases} \text{ est aussi paire et à valeurs réelles, ce qu'on peut vérifier immédiatement.}$$

**Définition 5.** Soit  $x \in L^1$ . Alors la fonction  $\nu \rightarrow |X(\nu)|$  est appelé spectre d'amplitude de  $x$ .

Cette notion de spectre d'amplitude est très importante en physique : le spectre d'amplitude de la réponse impulsionnelle mesure la capacité du système à laisser passer un sinusoïde d'une fréquence donnée. En effet, si  $h$  est la réponse impulsionnelle du système, alors  $|H(\nu)|$  est l'amplitude réelle de la sortie correspondant à une entrée sinusoïdale de fréquence  $\mu$  et d'amplitude 1.

**Remarque :** le (iv) de la propriété 3 montre que le spectre d'amplitude est une fonction paire .

### II.3) Lien avec le produit de convolution.

La transformation de Fourier joue, vis à vis du produit de convolution de fonctions non causales, le même rôle que la transformée de Laplace vis à vis du produit de convolution de fonctions causales : elle transforme le produit de convolution en produit simple. C'est la raison pour laquelle la transformation de Fourier est un outil incontournable pour l'étude de systèmes non causaux.

#### **Théorème 2.**

On suppose que l'on a  $x \in L^1$  et  $y \in L^1$ , et que  $x * y \in L^1$ .  
Alors  $TF(x * y) = TF(x) \cdot TF(y)$ .

#### Preuve :

On considère les systèmes  $(S_x)$  et  $(S_y)$  de réponses impulsionnelles  $x$  et  $y$  respectivement.

Soit  $\nu \in \mathbb{R}$  fixé et soit l'entrée  $e_\nu(t) = e^{2j\pi\nu t}$ .

On utilise le résultat obtenu dans le II)1) : la sortie correspondant à  $t \rightarrow e^{2j\pi\nu t}$  pour un système de réponse impulsionnelle  $h \in L^1$  est la fonction  $t \rightarrow TF(h)(\nu) \cdot e^{2j\pi\nu t}$  ce qui se réécrit

$$(1) \quad \forall h \in L^1 \quad (e_\nu * h) = (TF(h)(\nu)) e_\nu .$$

Alors cela donne ,

$$(2) \quad e_\nu * (x * y) = (TF(x * y))(\nu) e_\nu$$

D'autre part, par associativité du produit de convolution ,

$$e_\nu * (x * y) = (e_\nu * x) * y = (X(\nu) e_\nu) * y = X(\nu) (e_\nu * y) = X(\nu) Y(\nu) e_\nu .$$

Par comparaison avec (2) on obtient :

$\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $(TF(x * y))(\nu) e_\nu(t) = X(\nu) Y(\nu) e_\nu(t)$  ce qui implique (vu que la fonction  $e_\nu$  n'est jamais nulle) que  $(TF(x * y))(\nu) = X(\nu) Y(\nu) = (TF(x)(\nu)) \cdot (TF(y)(\nu))$  ce qu'il fallait démontrer.

**Application :** On considère ici  $h \in L^1$ . On définit le système qui à une entrée  $x \in L^1 \cap L^\infty$  fait correspondre la sortie  $y$  définie par  $y = h * x$ . Par le Théorème 1,  $y \in L^1 \cap L^\infty$  (elle est même continue) donc on peut considérer les transformées de Fourier de  $x$ ,  $y$  et  $h$ , et on a par le Théorème 2 :

$TF(y) = TF(h) \cdot TF(x)$ . Cela se traduit par le fait que le système agit, aux niveaux des transformées de Fourier comme une simple multiplication par  $H(v) = TF(h)(v)$ , cette fonction étant appelée fonction de transfert du système. Encore une fois, on remarque l'analogie avec la transformation de Laplace.

## II.4) Autres propriétés importantes de la transformation de Fourier.

### Propriété 4 (concentration dilution).

Soit  $a \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq 0$  et  $x \in L^1$ . Soit  $X$  sa transformée de Fourier. Alors la fonction  $t \rightarrow x(at)$  est dans  $L^1$  et a pour transformée de Fourier la fonction  $v \rightarrow TF(x(at))(v) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{v}{a}\right)$ .

Preuve : On a, si  $a > 0$  :  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(at)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(s)| \frac{ds}{a}$  qui est fini

(changement de variables  $s = at$ .)

Si  $a < 0$  on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(at)| dt = \int_{+\infty}^{-\infty} |x(s)| \frac{ds}{a} = \left(\frac{-1}{a}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} |x(s)| ds$  qui est fini aussi.

La continuité par morceaux de  $t \rightarrow x(at)$  est évidente donc elle appartient à  $L^1$ .

Sa transformée de Fourier se calcule encore par le changement de variables  $s = at$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-2j\pi vt} dt = \int_{-\text{sgn}(a) \cdot \infty}^{+\text{sgn}(a) \cdot \infty} x(s) e^{-2j\pi v \frac{s}{a}} \left(\frac{ds}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) \int_{-\text{sgn}(a) \cdot \infty}^{+\text{sgn}(a) \cdot \infty} x(s) e^{-2j\pi v \frac{s}{a}} ds$$

où  $\text{sgn}(a) = \begin{cases} -1 & \text{si } a < 0 \\ +1 & \text{si } a > 0 \end{cases}$ .

On a alors  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-2j\pi vt} dt = \left(\frac{1}{a}\right) \int_{-\text{sgn}(a) \cdot \infty}^{+\text{sgn}(a) \cdot \infty} x(s) e^{-2j\pi v \frac{s}{a}} ds = \text{sgn}(a) \left(\frac{1}{a}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-2j\pi v \frac{s}{a}} ds$

en regardant l'ordre des bornes.

On obtient donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-2j\pi vt} dt = \text{sgn}(a) \left(\frac{1}{a}\right) X\left(\frac{v}{a}\right) = \left(\frac{1}{|a|}\right) X\left(\frac{v}{a}\right)$ .

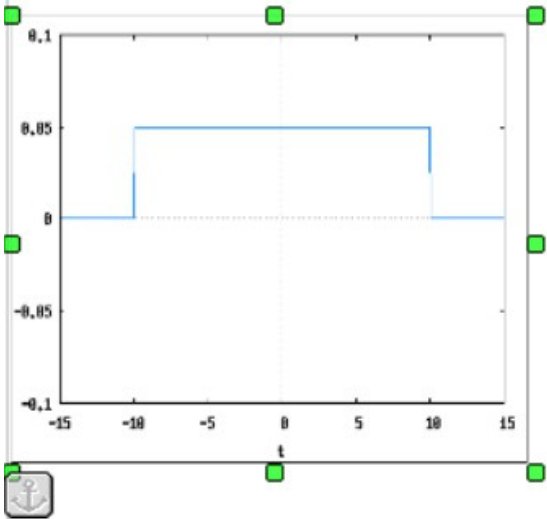
**Exemple :** si  $x(t) = \Pi_{-4,4}(t)$ , on a  $x(t) = \Pi_{-1,1}\left(\frac{t}{4}\right)$ . On peut donc appliquer la propriété 4 (avec

$a = \frac{1}{4}$ ) et utiliser le calcul de la transformée de Fourier de  $\Pi_{-1,1}$  déjà effectué précédemment pour

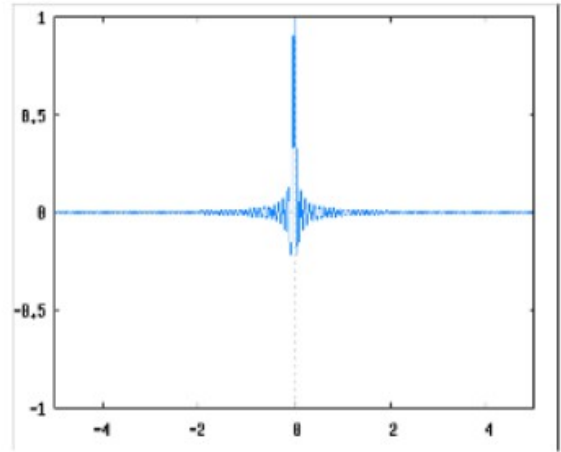
obtenir que  $X(v) = \begin{cases} \frac{\sin(8\pi v)}{\pi v} & \text{si } v \neq 0 \\ 8 & \text{si } v = 0 \end{cases}$ .

**Remarque :** Si on prend un signal à durée finie dans la propriété 4, on voit que plus un signal est court (c'est à dire  $a$  est grand), plus son spectre est étalé (c'est à dire que la courbe représentative de  $X$  tend à s'aplanir). Inversement, plus un signal est long (c'est à dire  $a$  est petit), plus son spectre se concentre sur des petites valeurs (c'est à dire que la courbe représentative de  $X$  tend à ressembler à un Dirac).

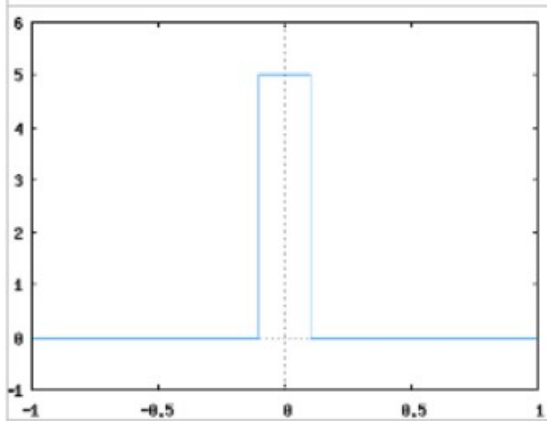
Signal long



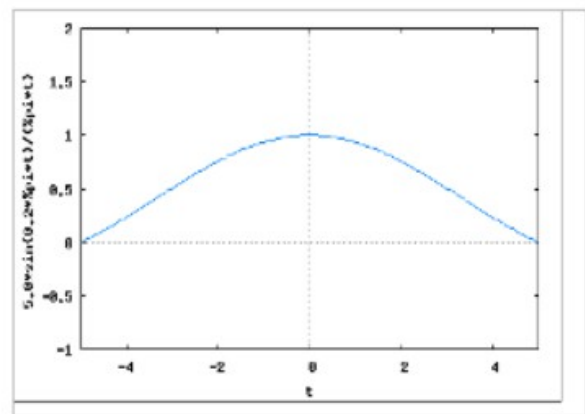
Transformée de Fourier



Signal court



Transformée de Fourier



**Propriété 5 (avance, retard et modulation en amplitude).**

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $x \in L^1$ . Soit  $X$  sa transformée de Fourier.

(i) La fonction  $t \rightarrow x(t-a)$  est dans  $L^1$  et a pour transformée de Fourier la fonction  $v \rightarrow e^{-2j\pi av} X(v)$ .

(ii) Réciproquement, la fonction  $t \rightarrow e^{+2j\pi at} x(t)$  (modulation d'amplitude) est dans  $L^1$  et a pour transformée de Fourier la fonction  $v \rightarrow X(v-a)$ .

**Preuve :**

(i) Le fait que la fonction  $t \rightarrow x(t-a)$  est dans  $L^1$  résulte de sa continuité par morceaux et de la relation  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t-a)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(s)| ds$ , obtenue par le changement de variables  $t = s + a$ .

Sa transformée de Fourier est donc définie par

$$TF(x(\cdot - a))(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-a) e^{-2j\pi vt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-2j\pi v(s+a)} ds \quad (\text{changement de variables } t = s + a)$$

$$TF(x(\cdot - a))(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-2j\pi vs} e^{-2j\pi va} ds = e^{-2j\pi va} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-2j\pi vs} ds = e^{-2j\pi va} X(v).$$

(ii) Le fait que la fonction  $t \rightarrow e^{2j\pi at} x(t)$  est dans  $L^1$  résulte de sa continuité par morceaux et de la

relation  $|e^{2j\pi at} x(t)| = |x(t)|$  d'où la convergence de  $\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{2j\pi at} x(t)| dt$ . Sa transformée de Fourier est donc définie par  $TF(e^{2j\pi at} x(t))(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{2j\pi at} e^{-2j\pi vt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi(v-a)t} dt$  ce qui donne  $TF(e^{2j\pi at} x(t))(v) = X(v-a)$ .

**Exemple :** si  $x(t) = \Pi_{-1,1}(t)$ , on a vu que  $X(v) = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi v)}{\pi v} & \text{si } v \neq 0 \\ 2 & \text{si } v = 0 \end{cases}$ .

Si l'on désire maintenant calculer la transformée de Fourier de  $y(t) = \Pi_{0,2}(t)$ , on remarque que  $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = x(t-1)$  donc d'après la propriété ci-dessus,  $Y(v) = e^{-2j\pi v} X(v)$ .

### Propriété 6 (dérivation)

- (i) Soit  $x \in L^1$  une fonction continue et dérivable par morceaux à dérivée continue par morceaux telle que  $x' \in L^1$ . Alors, la transformée de Fourier de  $t \rightarrow x'(t)$  est donnée par  $v \rightarrow 2j\pi v X(v)$ .
- (ii) Soit  $x \in L^1$  telle que la fonction  $t \rightarrow t \cdot x(t)$  soit encore dans  $L^1$ . Alors, la fonction  $v \rightarrow X(v)$  est dérivable et sa dérivée est égale à la transformée de Fourier de la fonction  $t \rightarrow -(2j\pi t)x(t)$ .

### (\*) Preuve :

(i) On a besoin d'abord du résultat suivant :

**Lemme.** Soit  $x \in L^1$  une fonction continue et dérivable par morceaux à dérivée continue par morceaux, telle que  $x' \in L^1$ . Alors  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$ .

Preuve du lemme. Soit  $m \in \mathbb{R}$ . On a alors

$$(1) \quad x(m) = \int_0^m x'(t) dt + x(0).$$

Puisque  $x' \in L^1$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} x'(t) dt$  est absolument

convergente, donc convergente. On en déduit que les intégrales  $\int_0^{+\infty} x'(t) dt$  et  $\int_0^{-\infty} x'(t) dt$  sont convergentes. La relation (1) implique alors que les limites  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t)$  existent et sont finies.

Maintenant, puisque  $x \in L^1$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$  converge ce qui implique que les deux limites  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t)$  ne peuvent être autres que 0.

On calcule maintenant la transformée de Fourier de  $t \rightarrow x'(t)$  par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \forall T > 0, \quad \int_{-T}^T x'(t) e^{-2j\pi vt} dt &= [x(t) e^{-2j\pi vt}]_{-T}^T + (2j\pi v) \int_{-T}^T x(t) e^{-2j\pi vt} dt \\ &= x(T) e^{-2j\pi vT} - x(-T) e^{2j\pi vT} + (2j\pi v) \int_{-T}^T x(t) e^{-2j\pi vt} dt. \end{aligned}$$

Puisque  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$  et puisque  $|e^{-2j\pi vT}| = |e^{2j\pi vT}| = 1$ , on en déduit que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} (x(T) e^{-2j\pi vT} - x(-T) e^{2j\pi vT}) = 0 \quad \text{et donc en faisant } T \rightarrow +\infty \text{ dans le calcul d'intégration par}$$

parties on obtient :  $\int_{-\infty}^{+\infty} x'(t) e^{-2j\pi vt} dt = (2j\pi v) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi vt} dt$ , c'est à dire que la transformée de Fourier de  $t \rightarrow x'(t)$  est donnée par  $v \rightarrow 2j\pi v X(v)$ .

(ii) On ne donnera ici que l'idée de la preuve. On a formellement :

$$\frac{d}{dv}(X(v)) = \frac{d}{dv} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-2j\pi vs} ds \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dv} (x(s) e^{-2j\pi vs}) ds$$

(Théorème de dérivation sous le signe intégrale, qui pourrait être justifié rigoureusement par un théorème hors-programme)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \frac{d}{dv} (e^{-2j\pi vs}) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2j\pi s x(s)) e^{-2j\pi vs} ds$$

ce qui donne la transformée de Fourier de la fonction  $t \rightarrow -(2j\pi t)x(t)$  calculée en  $v$ .

### Exemples :

1) si  $x$  est un signal continu par morceaux à durée finie, alors  $v \rightarrow X(v)$  est indéfiniment dérivable.

En effet, étant à durée finie, on a clairement  $x \in L^1$  donc  $v \rightarrow X(v)$  existe. Ensuite, le signal  $t \rightarrow (-2j\pi t) \cdot x(t)$  étant encore continu par morceaux et à durée finie, il vit encore dans  $L^1$  et le (ii) de la propriété implique que  $v \rightarrow X(v)$  est dérivable. En réitérant le processus, on voit que  $v \rightarrow X(v)$  est indéfiniment dérivable, et sa dérivée d'ordre  $n$  est la transformée de Fourier de la fonction  $t \rightarrow (-2j\pi t)^n \cdot x(t)$ .

De façon générale, plus le signal  $t \rightarrow x(t)$  tend rapidement vers 0 en  $\pm\infty$ , plus sa transformée de Fourier est régulière. Et le point (i) nous dit aussi qu'inversement, plus le signal  $t \rightarrow x(t)$  est régulier, plus sa transformée de Fourier tend rapidement vers 0 en  $\pm\infty$ .

2) Considérons le signal « triangle »  $\Lambda$  défini par  $\Lambda(t) = \begin{cases} 2+t & \text{si } t \in [-2; 0[ \\ 2-t & \text{si } t \in [0; 2[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Ce signal

étant continu à durée finie, il vit dans  $L^1$ . C'est aussi une fonction dérivable par morceaux à (pseudo-)dérivée continue par morceaux et  $\Lambda'(t) = \Pi_{-2;0}(t) - \Pi_{0;2}(t)$  pour  $t \notin \{-2; 0; 2\}$ . On peut calculer directement la transformée de Fourier de  $t \rightarrow \Lambda'(t)$  par l'égalité ci-dessus : en effet, la

transformée de Fourier de  $\Pi_{0;2}(t)$  est donnée par  $v \rightarrow e^{-2j\pi v} \frac{\sin(2\pi v)}{\pi v}$  (voir exemple suivant la

propriété 5) donc celle de  $\Pi_{-2;0}(t)$  est donnée par  $v \rightarrow e^{2j\pi v} \frac{\sin(-2\pi v)}{-\pi v} = e^{2j\pi v} \frac{\sin(2\pi v)}{\pi v}$  par application de la propriété 4 avec  $a = -1$ . On en déduit que

$$TF(\Lambda')(v) = e^{2j\pi v} \frac{\sin(2\pi v)}{\pi v} - e^{-2j\pi v} \frac{\sin(2\pi v)}{\pi v} = (e^{2j\pi v} - e^{-2j\pi v}) \frac{\sin(2\pi v)}{\pi v}$$

$$TF(\Lambda')(v) = (2j \sin(2\pi v)) \frac{\sin(2\pi v)}{\pi v} = 2j \frac{\sin^2(2\pi v)}{\pi v}$$

Maintenant, le point (i) de la propriété 6 nous dit que  $TF(\Lambda')(v) = 2j\pi v TF(\Lambda)(v)$  ce qui nous

permet de déduire que  $(2j\pi v) TF(\Lambda)(v) = 2j \frac{\sin^2(2\pi v)}{\pi v}$  d'où :

$$TF(\Lambda)(v) = \frac{\sin^2(2\pi v)}{\pi^2 v^2}$$

## II.5) Transformation de Fourier inverse.

### Propriété 7 (« transformée de Fourier de la transformée de Fourier »)

Soit  $x \in L^1$  tel que sa transformée de Fourier  $\nu \rightarrow X(\nu)$  vérifie aussi  $X \in L^1$ . Alors le signal  $x$  est une fonction continue et la transformée de Fourier de  $\nu \rightarrow X(\nu)$  est l'application  $t \rightarrow x(-t)$  (attention au signe -)

Autrement dit,  $\forall t \in \mathbb{R}, TF(TF(x))(t) = x(-t)$ .

(Admis)

**Remarques :** La condition  $X \in L^1$  est nécessaire pour pouvoir parler de la transformée de Fourier de  $\nu \rightarrow X(\nu)$ .

**Exemple :** considérons à nouveau le signal « triangle »  $\Lambda$  défini par

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 2+t & \text{si } t \in [-2; 0[ \\ 2-t & \text{si } t \in [0; 2[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a établi que  $TF(\Lambda)(\nu) = \frac{\sin^2(2\pi\nu)}{\pi^2\nu^2}$ . Cette fonction vit bien dans  $L^1$  car

$$\forall \nu \neq 0, |TF(\Lambda)(\nu)| \leq \frac{1}{\pi^2\nu^2} \text{ qui est bien intégrable en } \pm\infty.$$

On déduit alors de la propriété 7 que la transformée de Fourier de  $\nu \rightarrow \frac{\sin^2(2\pi\nu)}{\pi^2\nu^2}$  est  $t \rightarrow \Lambda(-t)$  c'est à dire  $\Lambda$ , car cette dernière fonction est paire.

### Définition 6

On appelle transformation de Fourier inverse la transformation  $TF^{-1}$  qui à tout signal  $x \in L^1$  fait correspondre  $TF^{-1}(x)(\nu) = TF(x)(-\nu)$ .

On introduit à partir de maintenant les nouvelles notations ci-dessous, pour alléger les calculs :

$$\hat{x} := TF(x)$$

$$\check{x} := TF^{-1}(x)$$

$$\tilde{x}(t) := x(-t)$$

La propriété 7 s'écrit alors (avec les bonnes hypothèses sur  $x$ ) (1)  $\hat{\hat{x}} = \tilde{x}$ , et la définition 6 s'écrit

(2)  $\check{\check{x}} = \tilde{\tilde{x}}$ . On remarquera que la propriété 4 avec  $a = -1$  permet de dire que  $\tilde{\tilde{x}} = \hat{\hat{x}}$  d'où l'on déduit (3)  $\check{\check{x}} = \tilde{\tilde{x}} = \hat{\hat{x}}$ .

La propriété ci-dessous explique la dénomination de « transformée de Fourier inverse » donnée dans la définition 6 :

### Propriété 8 (formule de réciprocité)

Soit  $x \in L^1$  telle que  $\hat{x} \in L^1$ . Alors  $\hat{\check{x}} = \tilde{x} = x$  ce qui signifie que  $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\nu) e^{2j\pi\nu t} d\nu$  (pour toute valeur de  $t$  où  $x$  est continue. Sinon, l'expression exacte est  $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\nu) e^{2j\pi\nu t} d\nu = \frac{x(t^-) + x(t^+)}{2}$ ).



**Preuve :** La preuve utilise les relations (1), (2) et (3) établies ci-dessus.

Puisque  $x \in L^1$ , alors  $\tilde{x} \in L^1$  car  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(-t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(s)| ds$  (changement de variable  $s = -t$  avec remise dans l'ordre des bornes d'intégration).

On a de plus  $\check{x} = \hat{\tilde{x}}$  (voir (3)) donc

$$\hat{\check{x}} = \hat{\hat{\tilde{x}}} = \tilde{\tilde{x}} \quad ((1) \text{ avec } \tilde{x} \text{ à la place de } x)$$

$$= x \quad \text{car } \tilde{\tilde{x}} = x \text{ de façon évidente.}$$

Enfin,  $\check{\check{x}} = \tilde{\tilde{x}}$  (relation (2) avec  $\hat{x}$  à la place de  $x$ ) donc  $\check{\check{x}} = \tilde{\tilde{x}}$  (relation (1)) d'où  $\check{\check{x}} = x$ .

La relation  $x = \check{\check{x}}$  s'écrit  $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\nu) e^{2j\pi\nu t} d\nu$ .

**Remarque :** avec les hypothèses de la propriété 8, on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\nu) d\nu = x(0)$  (faire  $t=0$  dans la formule).

**Exemple :** supposons que l'on veuille calculer  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$  (on prolonge par continuité en 0 la fonction

$$\nu \rightarrow \frac{\sin^2(t)}{t^2} \text{ par la valeur } 1 \text{ en remarquant que si } t \rightarrow 0, \sin(t) \sim t).$$

Posons  $x(t) = \begin{cases} 2+t & \text{si } t \in [-2; 0[ \\ 2-t & \text{si } t \in [0; 2[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . On a vu (exemple de la propriété 7) que  $x \in L^1$  et que

$\hat{x}(\nu) = \frac{\sin^2(2\pi\nu)}{\pi^2\nu^2}$  et  $\hat{x} \in L^1$ . On a donc  $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\nu) e^{2j\pi\nu t} d\nu$ , et en particulier, pour  $t=0$  cela donne :

$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\nu) d\nu \text{ c'est à dire } 2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(2\pi\nu)}{\pi^2\nu^2} d\nu. \text{ En faisant le changement de variable}$$

$t = 2\pi\nu$  on obtient :

$$2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(2\pi\nu)}{\pi^2\nu^2} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{\left(\frac{t^2}{4}\right)} \frac{1}{2\pi} dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt \text{ d'où } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \pi.$$

**Remarque :** Il y a une analogie frappante entre la formule de réciprocity de la propriété 8 et celle des séries de Fourier :  $x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{2j\frac{\pi}{T}n t}$  pour une fonction continue T-périodique. Dans la propriété 8 :

(i) la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de terme général  $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-2j\frac{\pi}{T}n t} dt$  est remplacée par la fonction

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-2j\pi\nu s} ds \text{ où la variable } \nu \text{ remplace la fréquence } \frac{n}{T}$$

(ii) la somme  $\sum_{-\infty}^{+\infty}$  est remplacée par l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} ds$ .

On verra plus loin comment on peut relier ces deux représentations.

Terminons par une application intéressante de la propriété 8 qui nous permet d'obtenir une réciproque du Théorème 2 :

**(\*)Théorème 3.**

Soient  $x \in L^1$  et  $y \in L^1$  tels que  $\hat{x} \in L^1$  et  $\hat{y} \in L^1$ .

Alors  $xy \in L^1$  et  $\widehat{xy} = \hat{x} * \hat{y}$ .

**(\*)Preuve :**

Puisque  $\hat{x} \in L^1$ , alors  $\hat{\hat{x}} \in L^\infty$  (propriété 2), c'est à dire  $\tilde{x} \in L^\infty$  (propriété 7) donc  $x \in L^\infty$ .

Puisque  $y \in L^1$ , on en déduit que  $xy \in L^1$  : en effet, puisque  $x \in L^\infty$ , il existe M tel que

$\forall t \in \mathbb{R}, |x(t)| \leq M$  donc  $|x(t)y(t)| \leq M|y|$  Puisque  $\int_{-\infty}^{+\infty} M|y(t)| dt$  converge ( $y \in L^1$ ) par le théorème de comparaison  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)y(t)| dt$  converge, c'est à dire que  $xy \in L^1$ .

Sachant que  $\hat{x} \in L^1$ ,  $\hat{y} \in L^1$  et que  $\hat{\hat{x}} \in L^\infty$  (propriété 2), on peut appliquer le théorème 2 à

$\hat{x}$  et  $\hat{y}$  ce qui donne :

$$\widehat{\hat{x} * \hat{y}} = \hat{\hat{x}} \cdot \hat{\hat{y}}$$

(1)  $\widehat{\hat{x} * \hat{y}} = \tilde{\tilde{x}} \tilde{\tilde{y}} = \widetilde{\widetilde{xy}}$  par la propriété 7 et le fait évident que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{\tilde{x}}(t) = \widetilde{\widetilde{x}}(t) = x(-t), \tilde{\tilde{y}}(t) = \widetilde{\widetilde{y}}(t) = y(-t).$$

Puisque  $xy \in L^1$ , alors  $\widetilde{\widetilde{xy}} \in L^1$  donc par la relation (1) de cette preuve, on a  $\widehat{\hat{x} * \hat{y}} \in L^1$ . On a donc en prenant les transformées de Fourier inverses des deux membres de (1) :

$$\widehat{\widehat{\hat{x} * \hat{y}}} = \widetilde{\widetilde{\widetilde{\widetilde{xy}}}}$$

d'où  $\hat{x} * \hat{y} = \widetilde{\widetilde{\widetilde{\widetilde{xy}}}}$  (propriété 8)

et enfin  $\hat{x} * \hat{y} = \widehat{\widehat{xy}}$  car par la définition 6,  $\widetilde{\widetilde{\widetilde{\widetilde{xy}}}} = \widehat{\widehat{xy}}$ .

## II.6) Égalité de Plancherel.

Le but de ce paragraphe est d'établir l'analogie du Théorème de Parseval pour la transformation de Fourier.

**(\*)Propriété 9 (symétrie de la transformation de Fourier)**

Soient  $x \in L^1$  et  $y \in L^1$ . Alors si  $\hat{x} \in L^1$  et  $\hat{y} \in L^1$  les deux intégrales  $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t)y(t) dt$  et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\hat{y}(t) dt$$
 convergent et sont égales :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t)y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\hat{y}(t) dt$

**(\*)Preuve :**

On note tout d'abord que  $y$  est continue par morceaux et que  $\hat{x}$  est continue (propriété 2) donc  $y\hat{x}$  est continue par morceaux donc intégrable sur tout intervalle borné.

Toujours d'après la propriété 2,  $\forall t \in \mathbb{R}, |\hat{x}(t)| \leq M = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(s)| dt$  donc  $|y(t)\hat{x}(t)| \leq M|y(t)|$

Puisque  $\int_{-\infty}^{+\infty} M|y(t)| dt$  converge ( $y \in L^1$ ) par le théorème de comparaison  $\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)\hat{x}(t)| dt$

converge (c'est à dire que  $t \rightarrow y(t)\hat{x}(t)$  vit dans  $L^1$ ) donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\hat{x}(t) dt$  converge aussi (intégrale absolument convergente  $\Rightarrow$  intégrale convergente)

De la même façon, en échangeant les rôles de  $x$  et de  $y$ , on prouve que  $t \rightarrow x(t)\hat{y}(t)$  vit dans  $L^1$  et que  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\hat{y}(t)dt$  converge.

Appliquons maintenant le Théorème 3 avec  $\hat{y}$  à la place de  $y$ , ce qu'on a le droit de faire car  $\hat{y} \in L^1$  et  $\hat{\hat{y}} = \tilde{y} \in L^1$  (propriété 8).

On a donc  $\widehat{x\hat{y}} = \hat{x} * \hat{\hat{y}} = \hat{x} * \tilde{y}$  d'où :

$$(1) \quad \widehat{x\hat{y}}(0) = \hat{x} * \tilde{y}(0) .$$

D'une part,  $\widehat{x\hat{y}}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\hat{y}(t)dt$  (utiliser la définition 4).

D'autre part, puisque  $\hat{x} * \tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(s)\tilde{y}(t-s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(s)y(-t+s)ds$

on a :

$$\hat{x} * \tilde{y}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(s)y(s)ds .$$

La relation (1) donne alors  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\hat{y}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(s)y(s)ds$  ce qu'il fallait démontrer.

On est maintenant en mesure d'établir le

#### ***Théorème 4 (Égalité de Plancherel)***

Soit  $x \in L^1$  tel que  $\hat{x} \in L^1$ . Alors  $x \in L^2$  et  $\hat{x} \in L^2$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(v)|^2 dv$ .

(\*) Preuve :

On applique la propriété 9 avec  $y = \overline{\hat{x}}$ . Puisque  $\hat{x} \in L^1$ , on déduit de la précédente égalité que

$$\begin{aligned} y \in L^1 . \text{ On a } \hat{y}(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(s)e^{-2j\pi vs} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{x}(s)} e^{-2j\pi vs} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(s) e^{+2j\pi vs} ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(s) e^{+2j\pi vs} ds = \overline{\hat{x}(v)} \text{ par la propriété 8, donc } \hat{y} \in L^1 \text{ car } x \in L^1 . \end{aligned}$$

On a donc par application de la propriété 9 :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t)y(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\hat{y}(t)dt \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t)\overline{\hat{x}(t)}dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{x(t)}dt \text{ car } \hat{y} = x . \end{aligned}$$

c'est à dire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt .$$

La propriété 9 assurant la convergence de ces intégrales, on a  $x \in L^2$  et  $\hat{x} \in L^2$ .

**Exemple :** Si  $x(t) = e^{-|t|}$ , on a  $\forall t \neq 0, x(t) = e^{-t}U(t) + e^tU(-t)$ .

Clairement,  $x \in L^1$  car  $\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-|t|}| dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 2 < +\infty$ .

La transformée de Fourier de  $t \rightarrow e^{-t} U(t)$  (qui est causale) est égale à sa transformée de Laplace pour  $p = 2j\pi\nu$  donc correspond à  $\nu \rightarrow \frac{1}{1+2j\pi\nu}$  et par la propriété 4 avec  $a = -1$ , celle de l'application  $t \rightarrow e^t U(-t)$  vaut  $\nu \rightarrow \frac{1}{1-2j\pi\nu}$ . On en déduit que  $\hat{x}(\nu) = \frac{1}{1+2j\pi\nu} + \frac{1}{1-2j\pi\nu} = \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}$ .

On voit donc que  $|\hat{x}(\nu)| \sim \frac{1}{2\pi^2\nu^2}$  si  $\nu \rightarrow \pm\infty$ , donc par le critère de Riemann et d'équivalence pour la convergence des intégrales, on a  $\hat{x} \in L^1$ .

L'égalité de Plancherel  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(t)|^2 dt$  donne ici :

$$4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{(1+4\pi^2\nu^2)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|} dt = 1, \text{ c'est à dire } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{(1+4\pi^2\nu^2)^2} = \frac{1}{4}.$$

### III) Transformée de Fourier de signaux qui ne sont pas $L^1$ .

Dans la pratique, on ne peut pas se borner à travailler uniquement sur des signaux  $L^1$ . En effet, en réalité, de nombreux signaux ne vérifient pas cette condition, comme par exemple les signaux périodiques non nuls. C'est pourquoi, nous devons étendre la définition de transformée de Fourier à d'autres types de fonctions. La très belle (mais difficile!) théorie des distributions permettrait de définir la transformée de Fourier d'une façon très générale, mais nous n'en aurons pas besoin ici de la développer.

#### III.1) Transformation de Fourier dans $L^2$ .

On admettra que l'on peut étendre la définition de transformée de Fourier pour un signal  $x$  tel que  $x \in L^2$  mais  $x \notin L^1$ . La transformée de Fourier de  $x$  sera encore notée  $\hat{x}$ ; c'est une fonction qui n'est pas forcément continue par morceaux, mais si c'est le cas, on a aussi  $\hat{x} \in L^2$ . On verra dans le paragraphe suivant un exemple très important de signal qui est dans  $L^2$  mais pas dans  $L^1$ : c'est la fonction « sinus-cardinal », dont la transformée de Fourier (qui peut être définie par ce que l'on vient de dire) est d'une très grande utilité en traitement du signal. C'est la raison pour laquelle on ne peut pas faire l'économie, dans le cadre de ce cours, de parler de transformée de Fourier de fonctions qui ne sont pas dans  $L^1$  mais dans  $L^2$ .

La théorie de la transformation de Fourier sur  $L^2$ , dite transformation de Plancherel est complexe à aborder de façon rigoureuse, et dépasse le cadre de ce cours.

On admettra qu'elle vérifie un certain nombre de propriétés que l'on a déjà démontrées pour des signaux  $L^1$ .

Précisons cela :

(i) Si  $x \in L^2$ , la définition 4 n'est plus valable car l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-2j\pi\nu s} ds$  peut ne pas converger. On n'a donc plus forcément de moyen explicite de calculer une expression de  $\hat{x}(\nu)$ , mais on verra que l'on peut se débrouiller quand même pour en obtenir une dans certains cas.

(ii) Si  $x \in L^2$  et  $y \in L^2$ , le Théorème 2 ( $\widehat{x * y} = \hat{x} \cdot \hat{y}$ ) ne reste rigoureusement valable que dans certains cas. En effet, la seule chose que l'on peut dire est que  $x * y \in L^\infty$  (Théorème 1 (i)) ce qui ne permet pas de définir sa transformée de Fourier.

(iii) Les propriétés 3, 4 et 5 restent vraies.

(iv) La transformée de Fourier inverse se définit de la même façon par  $\check{x} = \tilde{\hat{x}} = \hat{\check{x}}$  et on a, si  $\hat{x}$  est continue par morceaux, la relation  $\hat{\check{x}}(t) = \tilde{\hat{x}}(t) = x(t)$  pour toutes les valeurs de  $t$  pour lesquelles la fonction  $x$  est continue ( la relation générale est  $\hat{\check{x}}(t) = \tilde{\hat{x}}(t) = \frac{x(t^-) + x(t^+)}{2}$  )

(v) La relation  $\widehat{xy} = \hat{x} * \hat{y}$  est par contre vraie pour tout  $x \in L^2$  et  $y \in L^2$ . Plus précisément on a la

### Propriété 10

Soient  $x \in L^2$  et  $y \in L^2$  tels que  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  soient continus par morceaux. Alors  $xy \in L^1$  et  $\hat{x} \hat{y} \in L^1$  et on a les relations :

$$\widehat{xy} = \hat{x} * \hat{y} \quad \text{et} \quad x * y = (\hat{\check{x}} \hat{\check{y}})$$

(vi) La relation  $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t) y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \hat{y}(t) dt$  est vraie pour tout  $x \in L^2$  et  $y \in L^2$  de même que l'égalité de Plancherel  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(t)|^2 dt$ .

**Exemple :** soit  $x(t) = \frac{1}{1 + 2j\pi t} \left( = \frac{1}{1 + 4\pi^2 t^2} - j \left( \frac{2\pi t}{1 + 4\pi^2 t^2} \right) \right)$ . C'est un signal à valeurs complexes avec  $x \in L^2$  mais  $x \notin L^1$ . En effet :  $|x(t)|^2 = \frac{1}{1 + 4\pi^2 t^2} \sim \frac{1}{4\pi^2 t^2}$  et le critère de Riemann et d'équivalence pour les intégrales permet de conclure que  $x \in L^2$ .

De même,  $|x(t)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 t^2}} \sim \frac{1}{2\pi|t|}$  et le critère de Riemann et d'équivalence pour les intégrales permet de conclure que  $x \notin L^1$ . Pour trouver sa transformée de Fourier (au sens des fonctions  $L^2$ ), on remarque que  $x = \hat{y}$  où  $y(t) = e^{-t} U(t)$  (voir exemple du Théorème 4).

Puisque  $y \in L^2$ , on a  $\hat{\hat{y}} = \check{y}$  ce qui donne  $\hat{x} = \check{y}$  (on rappelle que les transformées de Fourier au sens  $L^2$  et  $L^1$  sont égales pour toutes les fonctions dans  $L^1 \cap L^2$ ) On en déduit que  $\hat{x}(v) = e^v U(-v)$ .

### Définition 7.

Si  $x \in L^2$ , la fonction  $v \rightarrow |\hat{x}(v)|^2$  est appelée distribution spectrale d'énergie de  $x$ .

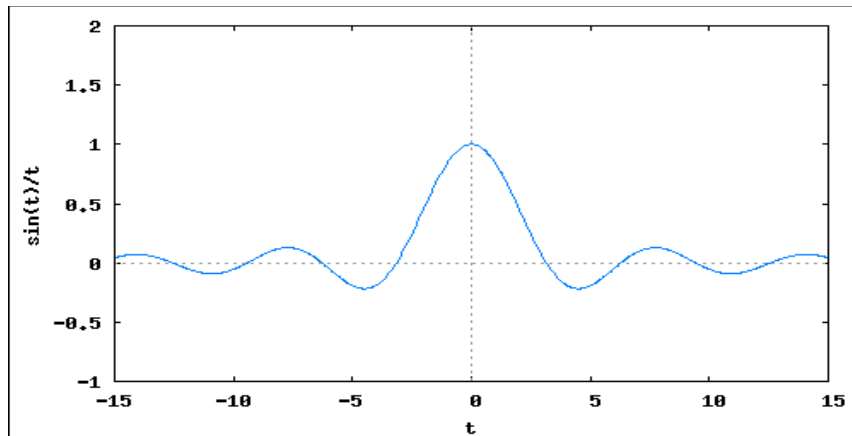
Remarque : comme son nom l'indique, cette fonction a une signification physique importante comme on le verra dans le paragraphe suivant.

### III.2) Fonction Sinus Cardinal ; application aux filtres parfaits.

#### Définition 8.

On appelle fonction sinus cardinal la fonction définie par 
$$SC(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases} .$$

Graphe de la fonction SC : le nom de cette fonction provient du fait que son graphe ressemble à un chapeau de cardinal !



La fonction SC est continue en 0 car  $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$ . On pourrait montrer (en utilisant la théorie des séries entières) qu'elle est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Elle est paire car

$\forall t \neq 0, SC(-t) = \frac{\sin(-t)}{-t} = \frac{-\sin(t)}{-t} = \frac{\sin(t)}{t} = SC(t)$ . Elle est également bornée ( $SC \in L^\infty$ ), et on a le résultat suivant :

#### Propriété II

$$SC \in L^2 \text{ mais } SC \notin L^1$$

#### Preuve :

On a  $\forall t \neq 0, |SC(t)|^2 \leq \frac{1}{t^2}$  donc le critère de comparaison et le critère de Riemann pour la convergence des intégrales permet de dire que  $SC \in L^2$ .

Puisque la quantité  $\sin(t)$  est toujours comprise entre -1 et +1 on a  $|\sin(t)| \geq \sin^2(t)$  donc

$$(1) \forall t \geq 1, \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| = \frac{|\sin(t)|}{t} \geq \frac{\sin^2(t)}{t} = \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t} \text{ par linéarisation de } \sin^2(t).$$

D'une part, par intégration par parties, on a

$$(2) \forall X \geq 1, \int_1^X \frac{\cos(2t)}{2t} dt = \left[ \frac{\sin(2t)}{4t} \right]_1^X + \int_1^X \frac{\sin(2t)}{4t^2} dt = \frac{\sin(2X)}{4X} - \frac{\sin(2)}{4} + \int_1^X \frac{\sin(2t)}{4t^2} dt$$

et d'autre part,

$$(3) \quad \forall X \geq 1, \int_1^X \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \ln(X).$$

En reportant dans (1) que l'on intègre entre 1 et  $X \geq 1$  on obtient :

$$(4) \quad \forall X \geq 1, \int_1^X \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \geq \frac{1}{2} \ln(X) - \frac{\sin(2X)}{4X} + \frac{\sin(2)}{4} - \int_1^X \frac{\sin(2t)}{4t^2} dt.$$

Remarquons que  $\forall t \geq 1, \left| \frac{\sin(2t)}{4t^2} \right| \leq \frac{1}{4t^2}$  donc par le critère de comparaison et le critère de Riemann pour la convergence des intégrales, on en déduit que  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{4t^2} dt$  est absolument convergente, donc convergente.

En calculant la limite du membre de droite de (4), on obtient

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \ln(X) - \frac{\sin(2X)}{4X} + \frac{\sin(2)}{4} - \int_1^X \frac{\sin(2t)}{4t^2} dt \right) = +\infty - 0 + \frac{\sin(2)}{4} - \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{4t^2} dt = +\infty$$

donc par comparaison de limites,

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt = +\infty : \text{ cela prouve que } \text{SC} \notin L^1.$$

Étant dans  $L^2$ , la fonction sinus cardinal admet une transformée de Fourier :

### Propriété 12

$$\widehat{\text{SC}}(\nu) = \pi \cdot \Pi_{-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}}(\nu)$$

Preuve : si on pose  $y(t) = \Pi_{-1,1}(t)$ , on a vu dans l'exemple de la définition 4 que  $x$  admet une transformée de Fourier égale à  $\hat{y}(\nu) = 2 \text{SC}(2\pi\nu)$ . En appliquant la propriété 4 avec  $a = 2\pi$  on obtient que la transformée de Fourier de la fonction  $t \rightarrow \Pi_{-1,1}(2\pi t)$  vaut  $\frac{1}{2\pi} \hat{y}\left(\frac{\nu}{2\pi}\right) = \frac{1}{\pi} \text{SC}(\nu)$ , donc la transformée de Fourier de la fonction  $t \rightarrow \pi \cdot \Pi_{-1,1}(2\pi t)$  vaut  $\nu \rightarrow \text{SC}(\nu)$ .

Remarquons que la fonction  $t \rightarrow \pi \cdot \Pi_{-1,1}(2\pi t)$  est égale à  $t \rightarrow \pi \cdot \Pi_{-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}}(t)$ . Posons alors

$x(t) = \pi \cdot \Pi_{-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}}(t)$ . On a  $x \in L^2$  et  $\hat{x} = \text{SC} \in L^2$ . On peut donc dire que  $\tilde{x} = \hat{\hat{x}} = \widehat{\text{SC}}$  et puisque la fonction  $x$  est paire, on obtient le résultat de la propriété 12.

**Corollaire** Soit  $T > 0$ . Alors  $\widehat{\Pi_{-T,T}}(\nu) = 2T \cdot \text{SC}(2\pi T \nu)$  et  $\Pi_{-T,T}(\nu) = 2T \cdot \widehat{\text{SC}(2\pi T t)}(\nu)$

Preuve :

On prouve d'abord le

**Lemme**  $\forall a > 0, \forall \nu \in \mathbb{R}, \Pi_{-T,T}(a\nu) = \Pi_{-\frac{T}{a}, \frac{T}{a}}(\nu)$

*Preuve du lemme* : la fonction  $v \rightarrow \Pi_{-T,T}(av)$  ne peut prendre que les valeurs 0 et 1 et on a l'équivalence  $\Pi_{-T,T}(av)=1 \Leftrightarrow -T \leq av < T \Leftrightarrow -\frac{T}{a} \leq v < \frac{T}{a}$  ce qui signifie que les fonctions  $v \rightarrow \Pi_{-T,T}(av)$  et  $v \rightarrow \Pi_{-\frac{T}{a},\frac{T}{a}}(v)$  sont égales.

On revient à la preuve du corollaire. Puisque  $\widehat{SC}(v) = \pi \cdot \Pi_{-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}}(v)$ , alors la propriété 4 avec  $a = 2\pi T$  donne  $\widehat{SC}(2\pi T t)(v) = \frac{\pi}{2\pi T} \Pi_{-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}}\left(\frac{v}{2\pi T}\right) = \frac{1}{2T} \Pi_{-T,T}(v)$  (lemme) donc  $\Pi_{-T,T}(v) = 2T \widehat{SC}(2\pi T t)(v)$ .

En prenant la transformée de Fourier de ces deux fonctions qui sont dans  $L^2$  on a  $\widehat{\Pi_{-T,T}}(t) = 2T \widehat{\widehat{SC}(2\pi T t)}(t) = 2T \widehat{SC}(2\pi T t) = 2T SC(2\pi T t)$  car la fonction SC est paire.

### Application : modélisation d'un filtre parfait.

Soit  $v_0 > 0$ . Posons  $h(t) = 2v_0 SC(2\pi v_0 t)$  et définissons le système de réponse impulsionnelle  $h$ .

Si  $x \in L^2$  et  $\hat{x}$  est continue par morceaux, alors on a par la propriété 10 :

$y = x * h = (\hat{x} \hat{h}) = (\hat{x} \check{\Pi}_{-v_0,v_0})$  par le corollaire de la propriété 12. Dans ce cas précis,

$|\hat{x}(v) \check{\Pi}_{-v_0,v_0}(v)| \leq |\hat{x}(v)|$  donc  $\hat{x} \check{\Pi}_{-v_0,v_0} \in L^2$  donc  $y = (\hat{x} \check{\Pi}_{-v_0,v_0}) \in L^2$  et en appliquant la transformation de Fourier on obtient :

$$(1) : \forall v \in \mathbb{R}, \hat{y}(v) = \hat{x}(v) \check{\Pi}_{-v_0,v_0}(v).$$

La relation (1) montre que concernant ce système, pour déterminer le spectre de la sortie  $y$ , on conserve celui de  $x$  pour les valeurs de  $v$  appartenant à  $[-v_0; +v_0[$  et on annule le reste du spectre. Ce système forme ce que l'on appelle un filtre passe bas idéal de fréquence de coupure  $v_0$ .

On dissipe *a priori* ainsi une partie de l'énergie de  $x$  car, par l'égalité de Plancherel on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{y}(v)|^2 dv \\ &= \int_{-v_0}^{+v_0} |\hat{x}(v)|^2 dv \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(v)|^2 dv \text{ par la relation (1).} \end{aligned}$$

**Exemple** : posons  $v_0 = 4$  et considérons l'entrée  $x(t) = e^{2j\pi t} h(t) = 8e^{2j\pi t} SC(8\pi t)$ .

Alors par la propriété 5 on a  $\hat{x}(v) = \hat{h}(v-1) = \Pi_{-3,5}(v)$  donc la relation (1) donne

$$\hat{y}(v) = \Pi_{-3,5}(v) \Pi_{-4,4}(v) = \Pi_{-3,4}(v).$$

Toutes les fréquences appartenant à  $[-4; 3[ \cup ]4; 5[$  ont été supprimées dans le signal de sortie.

En écrivant que  $\hat{y}(v) = \Pi_{-3,4}(v) = \Pi_{-3,5,3,5}(v-0,5)$  on obtient que  $y(t) = 7e^{j\pi t} SC(7\pi t)$ .



### III.3) Utilisation des distributions.

On étendra encore, dans le paragraphe suivant, la transformation de Fourier à des signaux qui ne sont ni  $L^1$  ni  $L^2$  (par exemple des signaux périodiques). La difficulté est que les transformées de Fourier obtenues ne seront plus forcément des fonctions mais des distributions. Il faut pour cela étudier quelques points sur ces objets, sans rentrer en profondeur dans la théorie des distributions dont on n'aura pas vraiment besoin dans le cadre de ce cours ; c'est l'objet du présent paragraphe.

Nous avons vu dans le chapitre sur la transformation de Laplace que l'on peut définir de façon approximative l'impulsion de Dirac  $\delta$  comme la « limite » (dans un certain sens) de la famille de

fonctions  $\delta^{(\epsilon)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{si } -\frac{\epsilon}{2} \leq x < \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  avec  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . Remarquer que l'on avait modifié très

légèrement la définition de la fonction  $\delta^{(\epsilon)}$  dans le cadre de la transformation de Laplace pour la rendre causale, tandis que nous la considérons ici comme une fonction porte dont le support est centré en 0. Cela ne change que très peu de choses pour les propriétés que nous avons démontrées alors.

On rappelle que l'on s'intéresse à la limite de  $\delta^{(\epsilon)}$  quand  $\epsilon \rightarrow 0^+$  par l'effet que produit la fonction

$\delta^{(\epsilon)}(t)$  dans le calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\epsilon)}(t) \varphi(t) dt$  pour une fonction arbitraire  $\varphi$  continue sur  $\mathbb{R}$  : on parle de limite au sens des distributions.

On considérera aussi, pour  $a \in \mathbb{R}$ , la distribution  $\delta_a$ , le Dirac translaté de  $a$ , de la même façon en

considérant la limite au sens des distributions des fonctions  $\delta_a^{(\epsilon)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{si } a - \frac{\epsilon}{2} \leq x < a + \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ , avec

$\epsilon \rightarrow 0^+$ .

On rappelle la propriété fondamentale :

#### Propriété

Si  $\varphi$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  alors  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a^{(\epsilon)}(t) \varphi(t) dt = \varphi(a)$ , ce qu'on écrira de façon

abusive  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t) \varphi(t) dt = \varphi(a)$ . Si  $\varphi$  est une fonction continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a^{(\epsilon)}(t) \varphi(t) dt = \frac{\varphi(a^+) + \varphi(a^-)}{2} \quad \text{ce qu'on écrira : } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t) \varphi(t) dt = \frac{\varphi(a^+) + \varphi(a^-)}{2}.$$

(la différence avec la propriété 4 du chapitre sur la transformation de Laplace dans le cas où  $\varphi$  est seulement continue par morceaux étant due au changement de la définition de  $\delta_a^{(\epsilon)}$ .)

Rappelons aussi la :

#### Propriété

Pour toute fonction  $x(t)$  continue on a :

$$(i) \quad \forall t \in \mathbb{R}, (\delta * x)(t) = x(t), \quad (ii) \quad (\delta_a * x)(t) = x(t-a), \quad (iii) \quad (\delta_a * \delta_b) = \delta_{a+b}$$

$$(iv) \quad x(t) \delta = x(0) \cdot \delta, \quad (v) \quad x(t) \delta_a = x(a) \cdot \delta_a$$

Remarque : si  $x$  n'est que continue par morceaux, les égalités ci-dessus deviennent

$$(i) \forall t \in \mathbb{R}, (\delta * x)(t) = \frac{x(t^-) + x(t^+)}{2}, \quad (ii) (\delta_a * x)(t) = \frac{x(t^- - a) + x(t^+ - a)}{2},$$

$$(iv) x(t)\delta = \frac{x(0^-) + x(0^+)}{2} \cdot \delta, \quad (v) x(t)\delta_a = \frac{x(a^-) + x(a^+)}{2} \cdot \delta_a$$

Nous allons devoir, dans la suite de ce cours travailler avec des distributions du type  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta_{na}$  où :

$(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite bornée de nombres complexes  
 $a > 0$ .

**Exemple :** si  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite finie, par exemple  $c_0 = 2, c_1 = 1$  et tous les autres termes de la suite sont nuls, alors la distribution  $2\delta + \delta_a$  associée à toute fonction continue sur  $\mathbb{R}$  (« fonctions tests ») le

$$\text{nombre } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} (2\delta^{(\varepsilon)}(t) + \delta_a^{(\varepsilon)}(t)) \varphi(t) dt = 2\varphi(0) + \varphi(a)$$

ce que l'on notera  $\langle 2\delta + \delta_a | \varphi \rangle = 2\varphi(0) + \varphi(a)$ .

Pour définir maintenant la distribution  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta_{na}$ , on va restreindre l'ensemble des fonctions tests (jusqu'à présent, l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ ) à un ensemble plus petit, celui des fonctions continues à durée finie, c'est à dire des fonctions continues  $\varphi$  telles qu'il existe  $M > 0$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, |t| > M \Rightarrow \varphi(t) = 0$ . Notons  $C_c^0$  cet ensemble de fonctions test.

La distribution  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta_{na}$  représente donc l'action sur  $C_c^0$  définie par

$$\varphi \rightarrow \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta_{na} \middle| \varphi \right\rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\langle \sum_{n=-N}^{n=+N} c_n \delta_{na} \middle| \varphi \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \varphi(an),$$

cette dernière série étant bien convergente puisque étant constituée d'une somme finie. En effet, si  $M > 0$  est tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, |t| > M \Rightarrow \varphi(t) = 0$ , alors pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel  $|n| > \frac{M}{a}, \varphi(na) = 0$  donc la

somme  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \varphi(an) = \sum_{n \in \mathbb{Z}, |n| \leq \frac{M}{a}} c_n \varphi(an)$  est bien finie, donc convergente.

On dira que la série  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta_{na}$  converge au sens des distributions (et en ce sens, elle est toujours convergente!)

Dans le cas très important où la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est constante égale à 1, on a la

### Définition 10

Soit  $a > 0$ . On définit le peigne de Dirac de fréquence  $\frac{1}{a}$  comme la distribution  $\text{III}_a$  définie par la relation  $\text{III}_a = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{an}$ .

Remarque : la lettre  $\text{III}$  est issue de l'alphabet cyrillique et se prononce « cha ».

### III.4) Transformées de Fourier de signaux qui ne sont pas dans $L^1 \cup L^2$ .

Dans cette section, nous allons chercher à définir, de façon indirecte, la transformée de Fourier de certaines fonctions (ou même de distributions) qui ne sont plus dans  $L^1 \cup L^2$ . Il existe une théorie (que nous n'allons pas expliquer ici) qui permet de le faire dans un cadre très large : la théorie des distributions tempérées.

#### III.4.a) Transformée de Fourier d'un Dirac et d'une sinusoïde.

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$ . Alors on a  $\delta_a^{(\varepsilon)} \in L^2 \cap L^1$ . Soit  $\widehat{\delta_a^{(\varepsilon)}}$  sa transformée de Fourier. Pour définir la transformée de Fourier de  $\delta_a$ , nous allons montrer que si  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , alors  $\widehat{\delta_a^{(\varepsilon)}}$  converge au sens des distributions. Cette limite sera ce que l'on appellera « transformée de Fourier de  $\delta_a$  ».

On a

$$\forall \varphi \in C_c^0, \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\delta_a^{(\varepsilon)}} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a^{(\varepsilon)} \widehat{\varphi}(t) dt \quad (\text{voir III)1) (vi) en remarquant que } \delta_a^{(\varepsilon)} \in L^2 \text{ et } \varphi \in L^2)$$

donc

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in C_c^0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\delta_a^{(\varepsilon)}} \varphi(t) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a^{(\varepsilon)} \widehat{\varphi}(t) dt = \widehat{\varphi}(a) \quad (\text{vu que } \varphi \in L^1, \widehat{\varphi} \text{ est continue}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2j\pi at} \varphi(t) dt \quad (\text{définition de } \widehat{\varphi} \text{ (définition 4) avec } \varphi \in L^1) \\ &= \langle e^{-2j\pi at} \mid \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Cela montre que si  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , alors  $\widehat{\delta_a^{(\varepsilon)}}$  converge au sens des distributions vers la fonction  $t \rightarrow e^{-2j\pi at}$ , d'où la :

#### Propriété 13

$$\widehat{\delta_a} = e^{-2j\pi av}.$$

Maintenant, notons que  $\widehat{\delta_a^{(\varepsilon)}} = \widetilde{\delta_a^{(\varepsilon)}} = \delta_{-a}^{(\varepsilon)}$ , et

$$\forall \varphi \in C_c^0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle \widehat{\delta_a^{(\varepsilon)}} \mid \varphi \rangle = \langle e^{-2j\pi at} \mid \varphi \rangle \quad (\text{propriété 13})$$

$$\forall \varphi \in C_c^0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle \widetilde{\delta_a^{(\varepsilon)}} \mid \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle \delta_{-a}^{(\varepsilon)} \mid \varphi \rangle = \langle \delta_{-a} \mid \varphi \rangle.$$

Autrement dit, puisque au sens des distributions,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta_a^{(\varepsilon)} = e^{-2j\pi at}$  on définit la transformée de Fourier de

$t \rightarrow e^{-2j\pi at}$  par la limite  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \widehat{\delta_a^{(\varepsilon)}}$  au sens des distributions. Le calcul ci-dessus donne alors la :

#### Propriété 14

On a  $\forall a \in \mathbb{R}, \widehat{e^{-2j\pi at}} = \delta_{-a}$  c'est à dire  $\forall a \in \mathbb{R}, \widehat{e^{2j\pi at}} = \delta_a$

**Corollaire**

Soit  $P(t) = \sum_{n=-N}^N C_n e^{2j\pi n v_0 t}$  un polynôme trigonométrique de fréquence  $v_0 > 0$ . Alors, il admet une transformée de Fourier (au sens des distributions) égale à  $\hat{P}(v) = \sum_{n=-N}^N C_n \delta_{nv_0}(v)$ .

En particulier, la fonction sinusoïdale  $x : t \rightarrow \cos(2\pi v_0 t)$  admet une transformée de Fourier au sens des distributions égale à  $\hat{x}(v) = \frac{\delta_{v_0}(v) + \delta_{-v_0}(v)}{2}$ .

Preuve : On a  $\hat{P}(v) = \sum_{n=-N}^N C_n \widehat{e^{2j\pi n v_0 t}}(v) = \sum_{n=-N}^N C_n \delta_{nv_0}(v)$  par linéarité de la transformation de Fourier.

En effet,

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in C_c^0, \langle P(t) | \varphi \rangle &= \left\langle \sum_{n=-N}^N C_n e^{2j\pi n v_0 t} | \varphi \right\rangle = \sum_{n=-N}^N C_n \langle e^{2j\pi n v_0 t} | \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{n=-N}^N C_n \langle \widehat{\delta_{-nv_0}^{(\epsilon)}} | \varphi \rangle \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\langle \sum_{n=-N}^N C_n \delta_{-nv_0}^{(\epsilon)} | \varphi \right\rangle, \end{aligned}$$

et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\langle \sum_{n=-N}^N C_n \delta_{-nv_0}^{(\epsilon)} | \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\langle \sum_{n=-N}^N C_n \delta_{nv_0}^{(\epsilon)} | \varphi \right\rangle = \left\langle \sum_{n=-N}^N C_n \delta_{nv_0} | \varphi \right\rangle.$$

Ainsi, puisque  $P = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{n=-N}^N C_n \delta_{-nv_0}^{(\epsilon)}$  au sens des distributions,

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{n=-N}^N C_n \delta_{-nv_0}^{(\epsilon)} = \sum_{n=-N}^N C_n \delta_{nv_0}(v) \text{ par le calcul ci-dessus, ce qui montre que} \\ \hat{P}(v) &= \sum_{n=-N}^N C_n \delta_{nv_0}(v) \text{ au sens des distributions.} \end{aligned}$$

Dans le cas particulier de la fonction sinusoïdale  $x(t)$ , on a par les formules d'Euler :

$$x(t) = \frac{e^{2\pi v_0 t} + e^{-2\pi v_0 t}}{2}$$

ce qui donne  $\hat{x}(v) = \frac{1}{2} \delta_{v_0}(v) + \frac{1}{2} \delta_{-v_0}(v)$ .

**III.4.b) Transformée de Fourier d'une fonction périodique.**

Soit  $t \rightarrow x(t)$  un signal continu par morceaux et T-périodique. On peut alors considérer sa série de Fourier

$$S(x)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2jn\pi v_0 t} \text{ avec } v_0 = \frac{1}{T} \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}, C_n = v_0 \int_{\frac{-1}{2v_0}}^{\frac{1}{2v_0}} e^{-2jn\pi v_0 t} x(t) dt.$$

On pourrait prouver que dans le cas qui nous intéresse ici, le corollaire de la propriété 14 est encore valable si on fait tendre N vers  $+\infty$ . On obtient donc que la fonction  $t \rightarrow x(t)$  admet une transformée de

Fourier (au sens des distributions) égale à la distribution  $\hat{x}(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta_{nv_0}(v)$ . Précisons cela :

**Propriété 15**

Avec les hypothèses ci-dessus, la fonction  $t \rightarrow x(t)$  admet une transformée de Fourier (au sens des distributions égale formellement à  $\hat{x}(v) = (v_0 \text{III}_{v_0}) \hat{x}_0(v)$  où  $x_0$  est la « fonction motif » associée à  $x$

c'est à dire que 
$$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in \left[-\frac{1}{2v_0}; \frac{1}{2v_0}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Remarque : la formule  $\hat{x}(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta_{nv_0}(v)$  montre le lien très fort entre la représentation en série de Fourier  $S(x)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2jn\pi v_0 t}$  et la transformée de Fourier  $\hat{x}(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta_{nv_0}(v)$  .

Idée de preuve : Notons d'abord que  $x_0$  est continue par morceaux et à durée finie donc  $x_0 \in L^1$  et

$$\hat{x}_0(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t) e^{-2j\pi vt} dt = \int_{-\frac{1}{2v_0}}^{\frac{1}{2v_0}} x(t) e^{-2j\pi vt} dt . \text{ On a donc } \forall n \in \mathbb{Z}, C_n = v_0 \hat{x}_0(nv_0) .$$

Ensuite, formellement,  $(v_0 \text{III}_{v_0}) \hat{x}_0 = \left(v_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nv_0}\right) \hat{x}_0 = v_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{x}_0(nv_0) \delta_{nv_0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta_{nv_0} = \hat{x}$ , en remarquant que  $\forall n \in \mathbb{Z}, \hat{x}_0(v) \delta_{nv_0} = \hat{x}_0(nv_0) \delta_{nv_0}$

**Exemple :** Soit  $x$  la fonction 2-périodique dont la fonction motif associée est

$$x_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ c'est à dire que } x_0 = \Pi_{-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}} . \text{ On a alors } v_0 = \frac{1}{2} \text{ et, par la propriété 12,}$$

on a  $\hat{x}_0(v) = \text{SC}(\pi v)$  . On obtient alors que  $\hat{x} = v_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{x}_0(nv_0) \delta_{nv_0} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{SC}\left(\pi \frac{n}{2}\right) \delta_{\frac{n}{2}}$  .

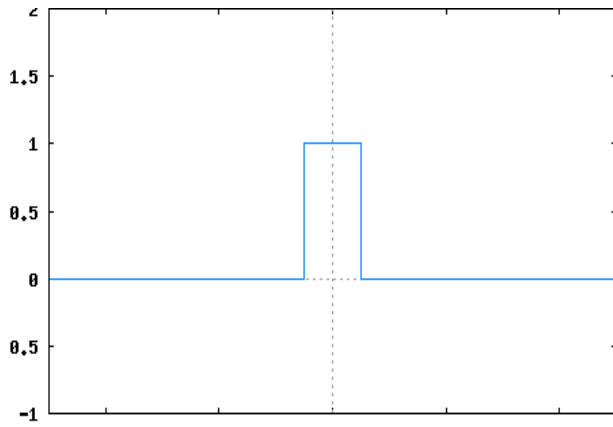
Puisque la fonction SC est paire, on a :  $\hat{x} = \frac{1}{2} \text{SC}(0) \delta + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \text{SC}\left(\pi \frac{n}{2}\right) (\delta_{\frac{n}{2}} + \delta_{-\frac{n}{2}})$  .

En remarquant que  $\text{SC}\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{n \frac{\pi}{2}} = \frac{2 \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{n \pi}$  et que

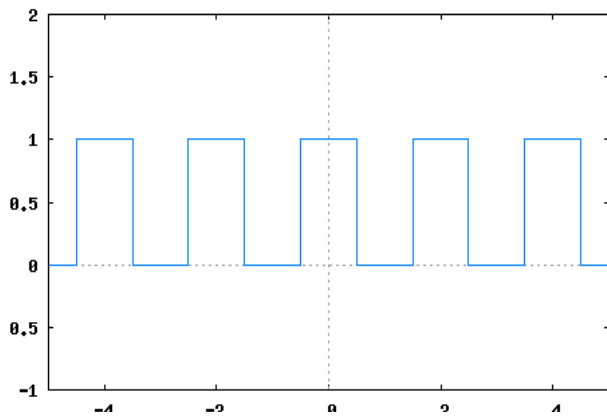
$$\left(\sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)\right)_{n \geq 1} = (1; 0; -1; 0; 1; 0; -1; 0; \dots)$$

$$\hat{x} = \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\delta_{n+\frac{1}{2}} + \delta_{-n-\frac{1}{2}}) .$$

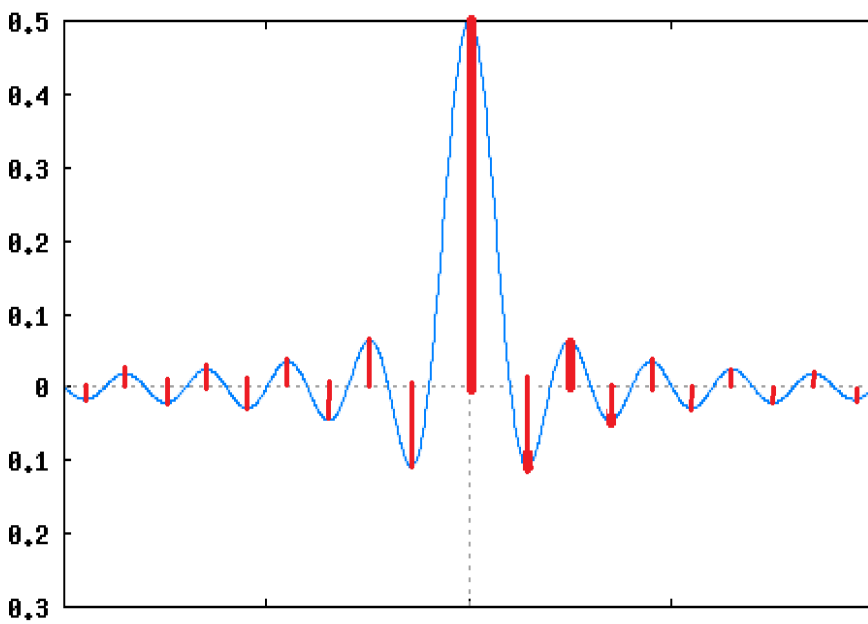
Fonction « motif »  $t \rightarrow x_0(t)$  :



Fonction périodique  $t \rightarrow x(t)$  :



Fonction  $\nu \rightarrow \nu_0 \hat{x}_0(\nu)$  (en bleu) et distribution  $\hat{x} = \nu_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{x}_0(n \nu_0) \delta_{n \nu_0}$  (en rouge) :



**Quelques remarques :**

Si  $t \rightarrow x(t)$  est un signal continu par morceaux et T-périodique, alors sa transformée de Fourier est une distribution de la forme  $\hat{x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \delta_{n\nu_0}$  (avec  $\nu_0 = \frac{1}{T}$ ), où  $C_n$  est le coefficient de rang  $n$  de son développement en série de Fourier complexe  $S(x)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2jn\pi\nu_0 t}$  : c'est en cela que l'on considère parfois que la théorie de la transformation de Fourier généralise celle des séries de Fourier.

De plus, si l'on considère maintenant la fonction « motif »  $t \rightarrow x_0(t)$  telle qu'on l'a définie plus haut, on obtient une fonction qui vit dans  $L^1$ , donc sa transformée de Fourier  $\nu \rightarrow \hat{x}_0(\nu)$  est une fonction, continue, qui est reliée aux coefficients de Fourier de  $x$  par la relation  $\forall n \in \mathbb{Z}, C_n = \nu_0 \hat{x}_0(n\nu_0)$ .

On admettra que la plupart des propriétés sur la transformation de Fourier vues précédemment dans ce cours restent valables avec les fonctions périodiques, en particulier les formules  $\widehat{\hat{x}y} = \hat{x} * \hat{y}$  et  $\widehat{x * y} = \hat{x} \hat{y}$ , sous certaines hypothèses que nous ne préciserons pas mais que nous supposons vérifiées dans la pratique...

**Exemple :** Soit  $\nu_0 > 0$ . Posons  $h(t) = 2\nu_0 SC(2\pi\nu_0 t)$  et définissons le système de réponse impulsionnelle  $h$ . On a vu dans le III) 2) que ce système définit un filtre passe bas parfait de fréquence de coupure  $\nu_0$ . Au lieu de considérer une entrée  $x \in L^2$ , considérons une entrée 2-périodique dont la série de Fourier associée est  $S(x)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\pi t}$

On a alors  $y = h * x$ . Notons que, rigoureusement puisque  $h \in L^2$  et  $x \in L^\infty$  le théorème 1 ne permet pas de définir le produit de convolution  $h * x$ . On admet donc que cette formule a bien un sens et que  $\widehat{x * h} = \hat{x} \hat{h}$  ce qui donne formellement

$$\hat{y}(\nu) = \hat{h}(\nu) \hat{x}(\nu) = \Pi_{-\nu_0; \nu_0}(\nu) \left( \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \delta_{\frac{n}{2}} \right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \Pi_{-\nu_0; \nu_0} \left( \frac{n}{2} \right) \delta_{\frac{n}{2}} .$$

En remarquant que  $\forall n \in \mathbb{Z}, |n| > 2\nu_0 \Rightarrow \Pi_{-\nu_0; \nu_0} \left( \frac{n}{2} \right) = 0$  on obtient :

$$\hat{y}(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}, |n| \leq 2\nu_0} C_n \delta_{\frac{n}{2}} .$$

On reconnaît la transformée de Fourier de la somme partielle  $\sum_{n \in \mathbb{Z}, |n| \leq 2\nu_0} C_n e^{j\pi n t}$  donc

$$y(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}, |n| \leq 2\nu_0} C_n e^{j\pi n t} .$$

Là encore, le filtre joue son rôle de filtre passe bas parfait de fréquence de coupure  $\nu_0$  (comparer avec la section 2)) : toutes les harmoniques du signal d'entrée de fréquence supérieure à  $\nu_0$  ont été supprimées tandis que les autres sont intégralement conservées.

### III.4.c) (\*) Transformée de Fourier de la distribution $\text{III}_a$

La distribution  $\text{III}_a$  joue un rôle très important dans l'étude théorique de l'échantillonnage d'un signal, où l'on est amené à considérer sa transformée de Fourier  $\widehat{\text{III}}_a$  que nous allons essayer de définir.

**Propriété 16 :** Soit  $a > 0$ . Alors,  $\widehat{\text{III}}_a = \frac{1}{a} \text{III}_{\frac{1}{a}}$  au sens des distributions.

Preuve : Soit  $a > 0$  et  $\varphi \in C_c^0$  : on a la relation :  $\langle \text{III}_a | \varphi \rangle = \left\langle \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{na} \middle| \varphi \right\rangle$ . Si  $M > 0$  est tel que

$\forall t \in \mathbb{R}, |t| > M \Rightarrow \varphi(t) = 0$ , alors pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel  $|n| > \frac{M}{a}$ ,  $\varphi(na) = 0$ . En choisissant

un entier  $N$  tel que  $N > \frac{M}{a}$  on a  $\langle \text{III}_a | \varphi \rangle = \left\langle \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{na} \middle| \varphi \right\rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(na) = \sum_{-N}^{+N} \varphi(na) = \left\langle \sum_{-N}^{+N} \delta_{na} \middle| \varphi \right\rangle$

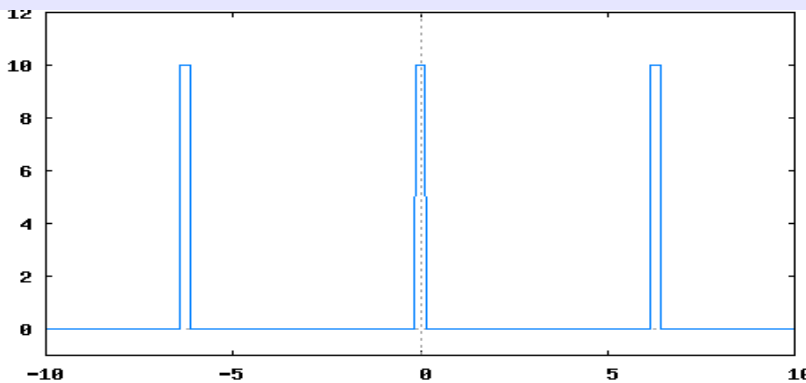
(noter que le choix de  $N$  dépend du choix de  $\varphi$ )

donc  $\langle \text{III}_a | \varphi \rangle = \left\langle \sum_{-N}^{+N} \delta_{na} \middle| \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\langle \sum_{-N}^{+N} \delta_{na}^{(\varepsilon)} \middle| \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\langle \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{na}^{(\varepsilon)} \middle| \varphi \right\rangle$ . (on rappelle que pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel  $|n| > N$ , on a  $\varphi(na) = 0$ )

Essayons de déterminer maintenant  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\langle \widehat{\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{na}^{(\varepsilon)}} \middle| \varphi \right\rangle$ . Notons déjà que si  $\varepsilon < a$ , alors la fonction

$t \rightarrow x^{(\varepsilon)}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{na}^{(\varepsilon)}(t)$  est un signal « carré » périodique de période  $a$  donc de fréquence  $\nu_0 = \frac{1}{a}$  :

Représentation de  $t \rightarrow x^{(\varepsilon)}(t)$  avec  $a = \frac{1}{2\pi}$  et  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ .



La fonction motif associée est  $x_0 = \frac{1}{\varepsilon} \Pi_{\frac{-\varepsilon}{2}, +\frac{\varepsilon}{2}}$  dont la transformée de Fourier est

$\hat{x}_0(\nu) = \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon \text{SC}(\pi \varepsilon \nu) = \text{SC}(\pi \varepsilon \nu)$  donc la propriété 15 donne

$$\widehat{x^{(\varepsilon)}}(\nu) = \left( \frac{1}{a} \text{III}_{\frac{1}{a}} \right) \text{SC}(\pi \varepsilon \nu) = \frac{1}{a} \sum_{-\infty}^{+\infty} \text{SC}\left(\frac{n \pi \varepsilon}{a}\right) \delta_{\frac{n}{a}}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{na}^{(\varepsilon)}} \middle| \varphi \right\rangle &= \left\langle \widehat{x^{(\varepsilon)}} \middle| \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{a} \sum_{-\infty}^{+\infty} \text{SC}\left(\frac{n \pi \varepsilon}{a}\right) \delta_{\frac{n}{a}} \middle| \varphi \right\rangle = \frac{1}{a} \sum_{-\infty}^{+\infty} \text{SC}\left(\frac{n \pi \varepsilon}{a}\right) \varphi\left(\frac{n}{a}\right) = \frac{1}{a} \sum_{n=-N}^{+N} \text{SC}\left(\frac{n \pi \varepsilon}{a}\right) \varphi\left(\frac{n}{a}\right) \end{aligned}$$



où  $N$  est l'entier choisi précédemment tel que  $N > \frac{M}{a}$ .

On en déduit que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\langle \widehat{\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{na}^{(\varepsilon)}} \middle| \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{a} \sum_{n=-N}^{+N} \text{SC} \left( \frac{n\pi\varepsilon}{a} \right) \varphi \left( \frac{n}{a} \right) \right) = \frac{1}{a} \sum_{n=-N}^{+N} \varphi \left( \frac{n}{a} \right)$  car

$$\forall n \in \{-N; \dots; +N\} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{SC} \left( \frac{n\pi\varepsilon}{a} \right) = \text{SC}(0) = 1.$$

On a donc  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\langle \widehat{\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{na}^{(\varepsilon)}} \middle| \varphi \right\rangle = \frac{1}{a} \sum_{n=-N}^{+N} \varphi \left( \frac{n}{a} \right) = \frac{1}{a} \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi \left( \frac{n}{a} \right) = \left\langle \frac{1}{a} \text{III}_{\frac{1}{a}} \middle| \varphi \right\rangle$ .

Résumons :  $\langle \text{III}_a \middle| \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\langle \widehat{\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{na}^{(\varepsilon)}} \middle| \varphi \right\rangle$  et  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\langle \widehat{\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{na}^{(\varepsilon)}} \middle| \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{1}{a} \text{III}_{\frac{1}{a}} \middle| \varphi \right\rangle$ , et ce, quelle que soit la fonction  $\varphi \in C_c^0$ . Cela nous amène à la conclusion

### III.5) Modélisation et réalité .

Les signaux qui n'appartiennent pas à  $L^2$ , c'est à dire à énergie infinie, sont plus une vue de l'esprit qu'une réalité physique : on modélise des signaux réels (donc de durée finie) par des signaux qui ne sont pas à énergie finie parce que cette modélisation donne de bons résultats tout en simplifiant les calculs.

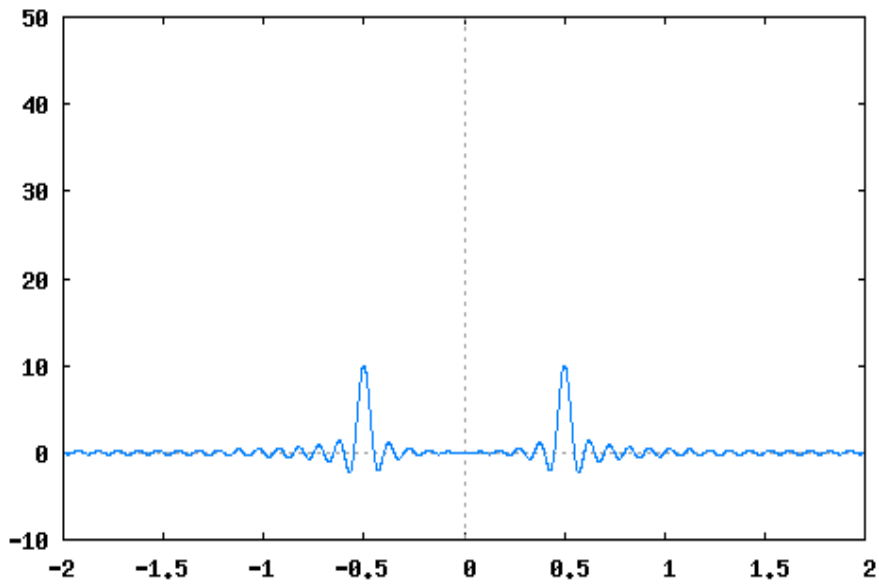
Prenons l'exemple d'un signal périodique. En réalité, dans la pratique, ce dernier a bien un début et une fin, donc il peut se modéliser, par exemple (d'autres modélisations sont possibles) par une fonction de la forme :

$$t \rightarrow \Pi_{-nT, nT}(t) \cdot x(t), \text{ où } x \text{ est un signal } T\text{-périodique et } n \text{ un entier naturel « grand » .}$$

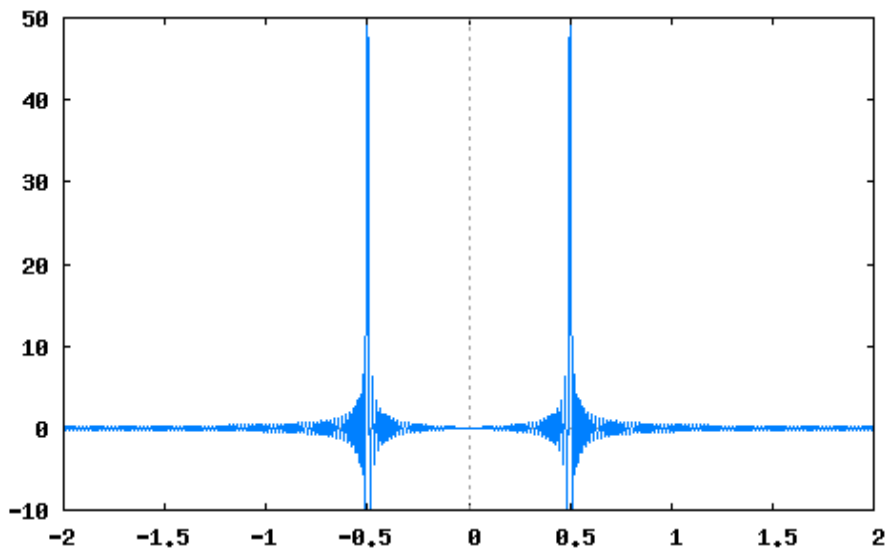
Prenons par exemple  $T=2$ , et  $x(t) = \cos(\pi t)$ . Le signal  $y(t) = \Pi_{-2n, 2n}(t) \cos(\pi t)$  est à énergie finie, et on a :  $\hat{y}(v) = \widehat{\Pi_{-2n, 2n}(t) \cdot \cos(t)}(v) = \left( \widehat{\Pi_{-2n, 2n}(t)} * \widehat{\cos(\pi t)} \right)(v)$  (nous admettons que la formule  $\widehat{\hat{x}\hat{y}} = \hat{x} * \hat{y}$  est valable dans ce cas) ce qui donne

$$\begin{aligned} \hat{y}(v) &= 4n \cdot \text{SC}(4\pi n v) * \left( \frac{\delta_{\frac{1}{2}}(v) + \delta_{-\frac{1}{2}}(v)}{2} \right) = 2n \left( \text{SC}(4\pi n(v - \frac{1}{2})) + \text{SC}(4\pi n(v + \frac{1}{2})) \right) \\ &= 2n \left( \frac{2v \cdot \sin(4\pi n v)}{\pi n(4v^2 - 1)} \right) = \frac{4v \cdot \sin(4\pi n v)}{\pi(4v^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Graphe de  $\nu \rightarrow \hat{y}(\nu)$  pour  $n = 5$



Graphe de  $\nu \rightarrow \hat{y}(\nu)$  pour  $n = 50$



Les deux tracés ci-dessus montrent clairement que plus  $n$  est grand, plus le spectre de  $y$  se rapproche de la distribution  $\frac{1}{2}\delta_{0,5} + \frac{1}{2}\delta_{-0,5}$  (observer les deux « pics » de la courbe qui se forment aux points d'abscisse  $\pm 0,5$ ).

**IV) Transformée de Fourier de quelques signaux importants.**

$x(t)$	$\hat{x}(\nu)$
$\Pi_{-T,T}(t)$	$2T \cdot \text{SC}(2\pi T \nu)$
$2\nu_0 \cdot \text{SC}(2\pi \nu_0 t)$	$\Pi_{-\nu_0, \nu_0}(t)$
$\Lambda_{-T,T}(t)$	$T \cdot (\text{SC}(\pi T \nu))^2$
$\nu_0 \cdot (\text{SC}(\pi \nu_0 t))^2$	$\Lambda_{-\nu_0, \nu_0}(t)$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi \nu^2}$
$\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} U(t)$	$\frac{1}{1 + 2j\pi \tau \nu}$
1	$\delta$
$\delta$	1
$\sin(2\pi \nu_0 t)$	$\frac{1}{2j}(\delta_{\nu_0} - \delta_{-\nu_0})$
$\sin(2\pi \nu_0 t)$	$\frac{1}{2}(\delta_{\nu_0} + \delta_{-\nu_0})$

$$\Lambda_{-T,T}(t) = \begin{cases} T+t & \text{si } t \in [-T; 0[ \\ T-t & \text{si } t \in [0; T[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

## V) Exercices

### Exercice 1

On considère la fonction  $t \rightarrow x(t)$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x(t) = (1-t)(U(t-1) - U(t))$ .

- 1) Représenter graphiquement la fonction  $t \rightarrow x(t)$ .
- 2) La fonction  $t \rightarrow x(t)$  est-elle continue ? Préciser si elle appartient à  $L^1(\mathbb{R})$  et  $L^2(\mathbb{R})$ .
- 3) Mêmes question pour  $\nu \rightarrow X(\nu)$ , la transformée de Fourier de  $t \rightarrow x(t)$  (utiliser le 2).
- 4) Calculer l'expression de  $X(\nu)$ .

(\*)5) En utilisant les équivalences :  $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$  si  $x \rightarrow 0$  et  $x - \sin(x) \sim \frac{x^3}{6}$  si  $x \rightarrow 0$  vérifier la continuité de la fonction  $\nu \rightarrow X(\nu)$  en 0.

### Exercice 2

On considère la fonction  $t \rightarrow x(t)$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x(t) = \sin(t) \Pi_{-n\pi, +n\pi}(t)$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- 1) Étudier la continuité de  $t \rightarrow x(t)$ . Étudier la parité de  $t \rightarrow x(t)$ .
- 2) Après avoir justifié son existence, calculer une expression de  $\nu \rightarrow X(\nu)$ , la transformée de Fourier de  $t \rightarrow x(t)$ .
- 3) On suppose  $n$  très grand. Dessiner une allure de la fonction  $\nu \rightarrow |X(\nu)|$  et justifier intuitivement.

### Exercice 3

On considère la fonction 2-périodique  $t \rightarrow x(t)$ , paire et définie sur  $[0; 1[$  par  $x(t) = t$ .

- 1) Représenter graphiquement la fonction  $t \rightarrow x(t)$ .
- 2) On admet qu'une expression de sa série de Fourier complexe est :  
$$S(x)(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n \in \mathbb{Z}'} \frac{1}{n^2 \pi^2} (1 - (-1)^n) e^{jn\pi t}$$
. Calculer une expression de la distribution  $\nu \rightarrow X(\nu)$ , la transformée de Fourier de  $t \rightarrow x(t)$ .
- 3) On considère la fonction  $t \rightarrow x_1(t)$  définie sur  $\mathbb{R}$  par l'expression  $x_1(t) = x(t) \Pi_{-1,1}(t)$ .
  - a) Représenter graphiquement la fonction  $t \rightarrow x_1(t)$ .
  - b) En écrivant la fonction  $t \rightarrow x_1(t)$  comme différence d'une fonction porte et d'une fonction triangle, calculer simplement la transformée de Fourier de  $t \rightarrow x_1(t)$ .
- 4) On considère la fonction  $t \rightarrow x_2(t)$  définie sur  $\mathbb{R}$  par l'expression  $x_2(t) = x(t) \Pi_{-3,3}(t)$ .
  - a) Représenter graphiquement la fonction  $t \rightarrow x_2(t)$ .
  - b) En utilisant le résultat de la question 3)b) et à l'aide du théorème du retard, calculer la transformée de Fourier de  $t \rightarrow x_2(t)$ .
- 5) On considère plus généralement pour  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  la fonction  $t \rightarrow x_n(t)$  définie sur  $\mathbb{R}$  par l'expression  $x_n(t) = x(t) \Pi_{-(2n-1), +2n-1}(t)$ . Calculer une expression de  $\nu \rightarrow X_n(\nu)$ .

### Exercice 4

On considère la fonction  $t \rightarrow x(t)$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x(t) = e^{-|t|}$

- 1) Montrer que  $x \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ .
- 2) Calculer une expression de  $\nu \rightarrow X(\nu)$ , la transformée de Fourier de  $t \rightarrow x(t)$  sachant que la transformée de Fourier de la fonction  $t \rightarrow y(t)$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $y(t) = e^{-t} U(t)$  est

$$Y(\nu) = \frac{1}{1 + 2j\pi\nu}$$

3) A l'aide de la formule de réciprocity, en déduire la transformée de Fourier de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$

par  $z(t) = \frac{1}{1+t^2}$ .

4) Déduire du Théorème de Plancherel la valeur de  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$ .

### Exercice 5

1) On rappelle la formule suivante : la transformée de Fourier de la fonction  $t \rightarrow e^{-\pi t^2}$  est la fonction  $\nu \rightarrow e^{-\pi \nu^2}$ .

Pour  $\alpha > 0$ , montrer que la transformée de Fourier de  $t \rightarrow e^{-\alpha t^2}$  est  $\nu \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} \nu^2}$  (on pourra utiliser la formule de concentration-dilution).

En déduire la valeur de  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

On considère la fonction  $t \rightarrow x(t)$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x(t) = e^{-t^2}$ .

2) Montrer que la fonction  $t \rightarrow (x * x)(t)$  est bien définie et que  $x * x \in L^1(\mathbb{R})$ .

3) a) Calculer l'expression de la transformée de Fourier de  $t \rightarrow (x * x)(t)$

b) En déduire une expression de  $(x * x)(t)$ .

### Exercice 6

Soit  $\nu_0 > 0$ . On définit pour  $t \in \mathbb{R}$  la distribution :  $h_{\nu_0}(t) = \delta(t) - \frac{\sin(\pi \nu_0 t)}{\pi t}$  de sorte que pour toute fonction  $\varphi$  à support compact et continue sur  $\mathbb{R}$  on ait

$$\int_{\mathbb{R}} h_{\nu_0}(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) - \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\pi \nu_0 t)}{\pi t} \varphi(t) dt.$$

Soit  $H_{\nu_0}$  sa transformée de Fourier ; on considère le système qui à tout signal  $x(t)$  fait correspondre le signal  $y = x * h_{\nu_0}$  (sous réserve que ce produit de convolution soit défini).

1) Montrer que si  $x \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  et est continu par morceaux,  $y$  est bien définie.

2) Calculer l'expression de  $H_{\nu_0}(\nu)$ .

3) Dans cette question,  $\nu_0 = 18$  et on considère le signal d'entrée

$$x(t) = -2 + 3 \cos(4\pi t) - \cos(16\pi t) + 2 \sin(20\pi t).$$

a) Le signal  $x$  est-il à énergie finie ? A puissance moyenne finie ? Si oui, les déterminer.

b) Donner l'expression de la sortie  $y(t)$ . Comment se comporte le système vis à vis de  $x(t)$  ?

c) Comment aurait-il fallu choisir  $\nu_0$  pour que le système conserve toutes les harmoniques du signal  $x(t)$  ?

4) Dans cette question,  $\nu_0 = 20$  et on considère l'entrée  $x(t) = e^{-t} U(t)$ .

a) Donner une expression de  $Y(\nu)$ , la transformée de Fourier de la sortie  $y(t)$ .

b) Prouver que  $\forall X \geq 0, \int_0^X \frac{1}{1+4\pi^2 \nu^2} d\nu = \frac{1}{2\pi} \arctan(2\pi X)$ .

c) En déduire alors la valeur de l'énergie de  $y(t)$ .

5) Dans cette question,  $\nu_0 > 0$  est quelconque et on considère toujours l'entrée  $x(t) = e^{-t} U(t)$ . Comment choisir  $\nu_0$  pour que l'énergie de  $y(t)$  soit inférieure à 0,01 ?

**(\*)Exercice 7**

Soit  $t \rightarrow x(t)$  un signal continu par morceaux à valeurs complexes et soient deux nombres réels  $\nu_0$  et  $\nu_1$  tels que  $\nu_1 > \nu_0 > 0$ . On considère le signal modulé en amplitude

$t \rightarrow y(t) = \cos(2\pi \nu_1 t)x(t)$ . On suppose que,  $\nu \rightarrow X(\nu)$ , la transformée de Fourier de  $t \rightarrow x(t)$  existe. On suppose enfin que le spectre de  $t \rightarrow x(t)$  est contenu dans l'intervalle  $[-\nu_0, +\nu_0]$ , c'est à dire que  $\forall \nu \in \mathbb{R}, |\nu| > \nu_0 \Rightarrow X(\nu) = 0$  (signal à bande de fréquences limitée).

1) a) Exprimer  $Y(\nu)$ , la transformée de Fourier de  $t \rightarrow y(t)$  en fonction de  $X(\nu)$ .

b) Montrer que  $\forall \nu \in \mathbb{R}, X(\nu + \nu_1) \neq 0 \Rightarrow \nu < 0$ .

c) En déduire que  $Y(\nu)U(\nu) = \frac{1}{2}X(\nu - \nu_1)$  (on rappelle que U est la fonction échelon).

2) Application On suppose que

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, Y(\nu) = 3\delta(\nu + 50) + 8\delta(\nu + 45) + 3\delta(\nu + 40) + 3\delta(\nu - 40) + 8\delta(\nu - 45) + 3\delta(\nu - 50).$$

a) Calculer l'expression de  $X(\nu - \nu_1)$  en utilisant le 1)c).

b) En déduire l'expression de  $X(\nu + \nu_1)$  à l'aide de l'expression donnée de  $Y(\nu)$ .

c) Retrouver alors la valeur de  $\nu_1$  et l'expression du signal  $t \rightarrow x(t)$ . Vérifier que  $t \rightarrow x(t)$  vérifie bien la condition de bande de fréquence limitée et donner une valeur convenable pour  $\nu_0$ .

A partir de maintenant, on suppose que  $t \rightarrow x(t)$  est à énergie finie.

3) Montrer que  $t \rightarrow y(t)$  est aussi à énergie finie, et d'énergie inférieure ou égale à celle de  $t \rightarrow x(t)$ .

4) a) Prouver que  $\forall \nu \in \mathbb{R}, \operatorname{Re}(X(\nu - \nu_1)\overline{X(\nu + \nu_1)}) = 0$ .

b) En déduire que  $\forall \nu \in \mathbb{R}, |Y(\nu)|^2 = \frac{1}{4}(|X(\nu - \nu_1)|^2 + |X(\nu + \nu_1)|^2)$ .

c) En déduire que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$ ; interpréter.

**(\*)Exercice 8**

Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  continue par morceaux.

On s'intéresse à l'équation différentielle (E)  $y' + y = f$  et à ses solutions éventuelles à énergie finie et absolument intégrables sur  $\mathbb{R}$ , c'est à dire telles que  $y \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ .

1) Dans cette question, on suppose que  $y$  est une solution de (E) avec  $y \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ .

a) Montrer que  $y'$  est continue par morceaux et que  $y' \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ .

b) En déduire que  $Y(\nu) = \frac{F(\nu)}{1 + 2j\pi\nu}$ .

c) Montrer alors que nécessairement,  $y(t) = (f * h)(t)$  où  $h(t) = e^{-t}U(t)$  (on vérifiera d'abord que le produit de convolution est bien défini et donne une fonction dans  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ .)

2) Réciproquement, on définit  $z(t) = (f * h)(t)$ . Le raisonnement de la question 1)c) permet de dire que  $z \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ .

a) Vérifier que  $\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^t f(s)e^s ds$ .

b) En déduire que  $z(t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , dérivable sur tout intervalle où  $f$  est continue et que  $z$  est solution de  $(E)$ .

3) Conclure sur l'ensemble des solutions dans  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  de  $(E)$ .

4) Application 1. Déterminer l'unique solution dans  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  de  $(E)$  dans le cas où  $f(t) = \Pi_{-1,1}(t)$ .

5) Application 2. On suppose ici que  $f(t) = e^{-2|t|}$ .

On pose  $g(t) = e^{-2t}U(t)$ .

a) Trouver une relation en  $f(t)$ ,  $g(t)$  et  $g(-t)$  valable pour tout réel  $t$  non nul.

b) En déduire une expression de  $F(v)$ .

c) Montrer que  $Y(v) = T(j\pi v)$  où  $T(X)$  est la fraction rationnelle

$$T(X) = \frac{1}{(1+2X)(1-X^2)}.$$

d) En déduire une expression de l'unique solution dans  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  de  $(E)$ .

### (\*)Exercice 9

Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant : si  $t \rightarrow x(t)$  est un signal continu par morceaux à durée finie et à spectre limité, alors  $t \rightarrow x(t)$  est le signal nul.

Autrement dit, soit  $t \rightarrow x(t)$  un signal continu par morceaux. On suppose qu'il existe  $T_0 > 0$  tel que

$\forall t \in \mathbb{R}, |t| > T_0 \Rightarrow x(t) = 0$  et qu'il existe  $v_0 > 0$  tel que  $\forall v \in \mathbb{R}, |v| > v_0 \Rightarrow X(v) = 0$ . On va montrer que  $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = 0$ .

1) Justifier, pour tout signal  $x$  à durée finie, l'existence de la fonction  $v \rightarrow X(v)$ . Établir quelques propriétés de cette fonction (régularité, absolue intégrabilité, à énergie finie ou pas etc...).

2) Soit  $\omega > 0$  et  $P(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{jn\omega t}$  un polynôme trigonométrique de degré  $N$  avec  $\forall n, c_n \in \mathbb{C}$ .

On suppose que la fonction  $t \rightarrow P(t)$  n'est pas la fonction identiquement nulle.

a) Justifier l'existence d'un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P(t) = e^{-jN\omega t} Q(e^{j\omega t})$ .

b) Déterminer en fonction des données de l'exercice le nombre maximal de racines de  $Q(X)$ .

c) En déduire que l'équation  $P(t) = 0$  n'a qu'un nombre fini de solutions sur l'intervalle  $[0; \frac{2\pi}{\omega}]$ .

Soit  $T = 2T_0 + 2$ . On définit  $t \rightarrow \tilde{x}(t)$  la fonction  $T$ -périodique continue par morceaux par la relation

$\forall t \in [-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}], \tilde{x}(t) = x(t)$  (ce qui revient à périodiser la fonction  $t \rightarrow x(t)$ ).

3) Justifier que  $\forall t \in ]T_0, \frac{T}{2}[, \tilde{x}(t) = 0$ .

4) On pose  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Soit  $S(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{jn\omega t}$  la série de Fourier de  $t \rightarrow x(t)$ .

a) Vérifier que  $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = \frac{1}{T} X\left(\frac{n\omega}{2\pi}\right)$ .

b) En déduire que  $t \rightarrow \tilde{x}(t)$  est un polynôme trigonométrique. Conclure.

### Exercice 10

Soit  $h$  une fonction continue par morceaux et admettant une transformée de Fourier  $\nu \rightarrow H(\nu)$ . On considère le système défini par  $y = h * x$  où  $x$  est un signal d'entrée, et  $y$  est le signal de sortie correspondant (sous réserve que le produit de convolution  $y = h * x$  ait un sens).

1) Si  $\nu_0 > 0$  et si  $x(t) = x_{\nu_0}(t) = e^{2j\pi\nu_0 t}$ , montrer que  $y = H(\nu_0)x_{\nu_0}$  (on suppose  $H$  continue en  $\nu_0$ .)

Soit  $\nu_1 > 0$ . On suppose dorénavant que  $h(t) = \frac{\sin(\pi\nu_1 t)}{\pi t}$  (prolongé par continuité en  $t=0$ ).

2) a) Donner l'expression de  $\nu \rightarrow H(\nu)$ .

b) On considère le cas  $\nu_0 = 3$  et l'entrée  $x(t) = x_3(t) = e^{6j\pi t}$ . Pour quelles valeurs du paramètre  $\nu_1$  la sortie correspondante  $y$  est-elle nulle? Vérifier que si  $y$  n'est pas la fonction nulle, alors  $y = x$ .

On considère dorénavant l'entrée  $x(t) = -\sin(\pi t) + 3 \cos(2\pi t) - 5 \sin(5\pi t)$ .

3) a) Donner une expression de la densité spectrale d'énergie de  $h$  et en déduire son énergie.

b) Dans le cas où  $\nu_1 = 4$  trouver l'expression de la sortie  $y(t)$ .

c) Pour quelles valeurs de  $\nu_1$  a-t-on  $y(t) = -\sin(\pi t)$ ?

### Exercice 11

Soit  $h$  la fonction continue sur  $\mathbb{R}$  par  $h(t) = 2 \sin(10\pi t) \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$  pour  $t \neq 0$ . On considère le système défini par  $y = h * x$  où  $x$  est un signal d'entrée, et  $y$  est le signal de sortie correspondant (sous réserve que le produit de convolution  $y = h * x$  ait un sens).

1) Déterminer  $h(0)$ . Justifier.

2) Montrer que  $h$  est à énergie finie.

3) Montrer que  $H(\nu) = \frac{1}{j} \left( \Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu - 5) - \Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu + 5) \right)$ .

4) Donner l'expression du spectre d'amplitude de  $h$ .

5) Déterminer  $\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt$ .

6) Dans cette question, on suppose que l'entrée est  $x(t) = 1 + \cos(5\pi t) + \frac{1}{2} \sin(10\pi t)$ . Déterminer une expression de la sortie  $y(t)$  associée.

7) Dans cette question on considère  $z = h * h$ .

a) Justifier que  $z$  est bien définie. On admet que  $Z(\nu)$ , la transformée de Fourier de  $z$ , est bien définie et vérifie  $Z(\nu) = H(\nu)^2$  (on fait comme si  $h$  était absolument intégrable sur  $\mathbb{R}$ , ce qu'elle n'est pas).

b) Prouver que  $\forall \nu \in \mathbb{R}, \Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu - 5) \cdot \Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu + 5) = 0$  (on pourra démontrer l'implication

$$\Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu - 5) \neq 0 \Rightarrow \Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu + 5) = 0. )$$

c) En déduire une expression de  $Z(\nu)$  puis de  $z(t)$ .



**(\*)Exercice 12 (Théorème de Shannon)**

Soit  $t \rightarrow x(t)$  un signal continu appartenant à  $L^1(\mathbb{R})$  à spectre limité, c'est à dire qu'il existe  $\nu_0 > 0$  tel que  $\forall \nu \in \mathbb{R}, |\nu| > \nu_0 \Rightarrow X(\nu) = 0$ .

Soit  $\delta$  un réel vérifiant  $0 < \delta \leq \frac{1}{2\nu_0}$ . On échantillonne le signal  $t \rightarrow x(t)$  sur  $\mathbb{R}$  avec un pas de  $\delta$  ; autrement dit, on considère la suite  $(x(n\delta))_{n \in \mathbb{Z}}$ .

On veut montrer dans cet exercice que le signal  $t \rightarrow x(t)$  peut être déterminé par la seule connaissance des termes de la suite  $(x(n\delta))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Autrement dit, si  $t \rightarrow x_1(t)$  et  $t \rightarrow x_2(t)$  sont deux signaux continus et appartenant à  $L^1(\mathbb{R})$  tels que  $\forall \nu \in \mathbb{R}, |\nu| > \nu_0 \Rightarrow X_1(\nu) = X_2(\nu) = 0$ , et si les suites  $(x_1(n\delta))_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(x_2(n\delta))_{n \in \mathbb{Z}}$  sont égales, alors  $\forall t \in \mathbb{R}, x_1(t) = x_2(t)$ .

Cette propriété, connue sous le nom de Théorème de Shannon, est remarquable au sens où la connaissance d'un signal  $t \rightarrow x(t)$  (à spectre limité) pour un ensemble dénombrable de valeurs de  $t$  implique la connaissance du signal tout entier.

Pour  $i$  entier égal à 1 ou 2, on définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $\nu \rightarrow \tilde{X}_i(\nu)$  la fonction périodique de période  $\frac{1}{\delta}$  par la relation  $\forall \nu \in \left[ \frac{-1}{2\delta}; \frac{1}{2\delta} \right], \tilde{X}_i(\nu) = X_i(\nu)$ .

1) Étude d'un exemple.

On suppose ici que  $\nu_0 = 1$  et  $\delta = \frac{1}{2}$ . On définit le signal  $x_1$  par l'expression  $x_1(t) = \left( \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right)^2$ .

a) Montrer que les réels  $\nu_0$  et  $\delta$  et le signal  $x_1$  vérifient les conditions imposées dans l'énoncé.

b) Expliciter la suite  $(x_1(n\delta))_{n \in \mathbb{Z}}$ .

c) Représenter graphiquement les fonctions  $\nu \rightarrow X_1(\nu)$  et  $\nu \rightarrow \tilde{X}_1(\nu)$  sur l'intervalle  $[-3; 3]$ .

2) Étude d'un contre-exemple.

On suppose encore ici que  $\nu_0 = 1$  et  $\delta = \frac{1}{2}$ . On définit le signal  $x_1$  par l'expression

$$x_1(t) = \left( \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t} \right)^2 \quad \text{et} \quad x_2(t) = \left( \frac{\sin(4\pi t)}{4\pi t} \right)^2$$

a) Vérifier que  $x_1$  et ne  $x_2$  ne vérifient pas les conditions imposées par l'énoncé.

b) Expliciter les suites  $(x_1(n\delta))_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(x_2(n\delta))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Que remarque-t-on ?

On revient au cas général.

3) Justifier que les fonctions  $\nu \rightarrow \tilde{X}_1(\nu)$  et  $\nu \rightarrow \tilde{X}_2(\nu)$  sont continues.

Soient  $S_1(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n^{(1)} e^{jn\omega\nu}$  et  $S_2(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n^{(2)} e^{jn\omega\nu}$  les séries de Fourier de  $\nu \rightarrow \tilde{X}_1(\nu)$  et  $\nu \rightarrow \tilde{X}_2(\nu)$  respectivement.

4) a) Montrer que dans les définitions de  $S_1(\nu)$  et  $S_2(\nu)$  ci-dessus, on a  $\omega = 2\pi\delta$ .

b) Vérifier que  $\forall v \in \mathbb{R}, |v| > \frac{1}{2\delta} \Rightarrow X_1(v) = X_2(v) = 0$ .

c) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n^{(i)} = \delta \int_{-\infty}^{+\infty} X_i(v) e^{-2j\pi n v \delta} dv$ .

d) A l'aide de la formule de réciprocity (dont on justifiera la validité ici), en déduire que  $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n^{(i)} = \delta \cdot x_i(-n\delta)$ .

e) Conclure que  $x_1 = x_2$ .

### (\*)Exercice 13

On considère un système défini par  $y = h * x$  où

$h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  et  $h$  est continue par morceaux

$x$  est un signal d'entrée continue par morceaux tel que  $x \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

$y$  est le signal de sortie correspondant

1) Vérifier que  $y$  est un signal continu tel que  $y \in L^1(\mathbb{R})$ . En déduire qu'elle admet une transformée de Fourier.

2) Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt \right)$  (on pourra utiliser la transformée de Fourier).

3) a) Montrer que  $\forall v \in \mathbb{R}, |H(v)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt$ .

b) Montrer que  $\forall v \in \mathbb{R}, |Y(v)|^2 \leq |X(v)|^2 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \right)^2$ .

c) En déduire que  $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt \leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$

4) Application : on suppose que  $M \ h(t) = \Pi_{-1,1}(t)$ . Montrer que pour obtenir une sortie d'énergie égale à 1 (i.e.  $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt = 1$ ), il est nécessaire que l'entrée ait une énergie minimale de 0,25 (i.e.  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \geq 0,25$ )

### (\*)Exercice 14

Dans cet exercice, on suppose que  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , telle que l'on ait la relation :

$$(1) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} f(s) ds = f(t).$$

Cette relation peut s'interpréter de la façon suivante : pour chaque réel  $t$ ,  $f(t)$  est égal à la valeur moyenne de  $f$  sur l'intervalle de longueur 1 centré en  $t$ .

Pour les questions qui suivent, on rappelle que  $\forall X \in \mathbb{R}, (\sin(X) = X) \Rightarrow X = 0$ .

1) Montrer que toute fonction affine vérifie (1).

2) On suppose dans cette question que  $f$  est périodique de période  $T > 0$ .

a) Montrer que  $\forall v \in \mathbb{R}, \left( 1 - \frac{\sin(\pi v)}{\pi v} \right) F(v) = 0$

b) En déduire une expression de  $f(t)$ .

3) On suppose dans cette question que  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

a) Montrer que la fonction  $t \rightarrow \left( \Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} * f \right)(t)$  est bien définie, et est continue

et appartient à  $L^1(\mathbb{R})$ .

b) Prouver que  $f$  est la fonction nulle.

### Exercice 15

On considère le système défini par  $y = h * x$ . Calculer l'expression de la sortie associée à la fonction échelon  $t \rightarrow U(t)$  dans les cas suivants :

1)  $h(t) = \Pi_{-1,1}(t)$ .    2)  $h(t) = e^{-|t|}$

### (\* Exercice 16 (autour du principe d'incertitude temps-fréquence).

Soit  $T > 0$  et soit  $h$  une impulsion de durée  $T$ , c'est à dire une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  vérifiant les trois propriétés suivantes :

(i)  $\forall t \in \mathbb{R}, h(t) \geq 0$       (ii)  $\forall t \notin [0; T], h(t) = 0$       (iii)  $\int_0^T h(t) dt = 1$ .

On considère enfin le système (S) de réponse impulsionnelle  $h$ .

- 1) Montrer que le système est défini pour toute entrée  $x \in L^\infty$  bornée, et que la sortie correspondante  $y = h * x$  est une fonction continue vérifiant la condition  $y \in L^\infty$ .
- 2) Montrer que  $H(\nu)$ , la transformée de Fourier de  $h$ , est bien définie et vérifie la relation  $\forall \nu \in \mathbb{R}, |H(\nu)| \leq H(0) = 1$ .
- 3) On considère une entrée  $x \in L^\infty$  égale à un polynôme trigonométrique (c'est à dire dont la série de Fourier est finie). Soit  $y = h * x$  la sortie correspondante.  
Montrer que  $y$  est un polynôme trigonométrique et que  $\langle y^2 \rangle \leq \langle x^2 \rangle$ .

Le but des questions suivantes est de montrer que si toutes les fréquences des harmoniques contenues dans le polynôme trigonométrique  $x$  sont inférieures à  $\frac{1}{4T}$ , alors on a  $\langle y^2 \rangle \geq \frac{1}{2} \langle x^2 \rangle$ , c'est à dire qu'au moins la moitié de la puissance moyenne de l'entrée est conservée.

### Remarques:

- (a) plus la réponse impulsionnelle est courte (c'est à dire  $T$  petit) et moins la condition sur les fréquences des harmoniques contenues dans le polynôme trigonométrique  $x$  est restrictive (l'intervalle  $[0; \frac{1}{4T}]$  devenant de plus en plus grand)
- (b) Cette condition est indépendante de la réponse impulsionnelle  $h$  du système, pourvu qu'elle vérifie bien les conditions (i) (ii) et (iii).

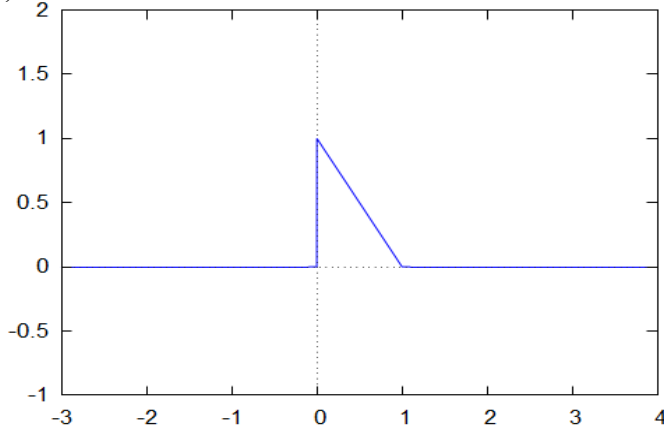
Notons  $A(\nu) = \text{Re}(H(\nu))$  et  $B(\nu) = \text{Im}(H(\nu))$ .

- 4) a) Montrer que  $\forall \nu \in \mathbb{R}, H(-\nu) = \overline{H(\nu)}$   
b) Conclure quant à la parité de la fonction  $\nu \rightarrow |H(\nu)|$ .
- 5) Montrer les relations : (iv)  $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \geq \frac{(a-b)^2}{2}$   
(v)  $\forall \theta \in [0; \frac{\pi}{2}], \cos(\theta) + \sin(\theta) \geq 1$ .
- 6) a) Démontrer que  $\forall \nu \in [0; \frac{1}{4T}], A(\nu) - B(\nu) \geq 1$ .  
b) Montrer alors que  $\forall \nu \in [\frac{-1}{4T}; \frac{1}{4T}], |H(\nu)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- 7) Conclure.

## VI) Corrigés

### Exercice 1

1)



2) La fonction  $t \rightarrow x(t)$  est discontinue en 0. Elle est continue ailleurs. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \frac{1}{2} < +\infty, \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^1 |x(t)|^2 dt = \int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{1}{3} < +\infty \text{ donc } x \in L^1(\mathbb{R}) \text{ et } x \in L^2(\mathbb{R}).$$

3)  $x \in L^1(\mathbb{R})$  donc  $v \rightarrow X(v)$  est continue (propriété 2). On a  $X \notin L^1(\mathbb{R})$ . En effet, si  $X \in L^1(\mathbb{R})$ , vu que  $x \in L^1(\mathbb{R})$ , la propriété 7 impliquerait que  $\tilde{x} = \hat{X}$  et la propriété 2 que  $\tilde{x}$  serait continue, et donc  $x$  aussi, ce qui n'est pas vrai. Donc,  $X \notin L^1(\mathbb{R})$ . Enfin, puisque alors que  $x \in L^2(\mathbb{R})$  et que  $X$  est continue, alors  $X \in L^2(\mathbb{R})$  (on est dans le cadre de la transformation de Plancherel).

4) On a par la définition 4 et une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \forall v \neq 0, X(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-2j\pi v s} ds = \int_0^1 (1-s) e^{-2j\pi v s} ds \\ &= \left[ \frac{-1}{2j\pi v} (1-s) e^{-2j\pi v s} \right]_0^1 - \frac{1}{2j\pi v} \int_0^1 e^{-2j\pi v s} ds \\ &= \frac{1}{2j\pi v} - \frac{1}{4\pi^2 v^2} (e^{-2j\pi v} - 1) = \frac{1}{2j\pi v} - \frac{1}{4\pi^2 v^2} (e^{-2j\pi v} - 1) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2 v^2} (e^{-2j\pi v} + 2j\pi v - 1), \end{aligned}$$

et  $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) ds = \frac{1}{2}$ . On a donc :

$$X(v) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2 v^2} (1 - e^{-2j\pi v} - 2j\pi v) & \text{si } v \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } v = 0 \end{cases}.$$

En remarquant que  $-e^{-2j\pi v} - 2j\pi v + 1 = 1 - \cos(2\pi v) + j(\sin(2\pi v) - 2\pi v) \sim 2\pi^2 v^2 - \frac{4}{3}\pi^3 v^3 j$  si

$v \rightarrow 0$  d'après les rappels de l'énoncé, cela implique que  $\frac{1}{4\pi^2 v^2} (1 - e^{-2j\pi v} - 2j\pi v) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\pi v j$  si

$v \rightarrow 0$  d'où  $\lim_{v \rightarrow 0, v \neq 0} X(v) = \frac{1}{2} = X(0)$  et la continuité de la fonction  $v \rightarrow X(v)$  en 0.

## Exercice 2

1) On a  $\lim_{t \rightarrow n\pi^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow n\pi^-} \sin(t) = 0 = x(0)$  et  $\lim_{t \rightarrow n\pi^+} x(t) = \lim_{t \rightarrow n\pi^+} 0 = 0$  d'où la continuité de la fonction  $t \rightarrow x(t)$  en  $n\pi$ . Même raisonnement pour prouver la continuité en  $-n\pi$ . La fonction  $t \rightarrow x(t)$  est clairement continue en les autres points, et elle est clairement impaire.

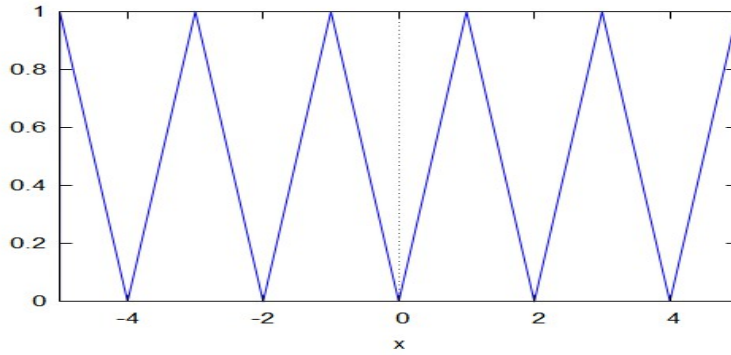
2) La fonction  $t \rightarrow x(t)$  étant à durée finie et continue, elle vit dans  $L^1(\mathbb{R})$  ce qui assure l'existence de la transformée de Fourier de  $t \rightarrow x(t)$ . On peut procéder comme dans le 5) du III) du cours ou faire un calcul direct :

$$\begin{aligned} X(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-2j\pi v s} ds = \int_{-n\pi}^{n\pi} \sin(s) e^{-2j\pi v s} ds \\ &= \frac{1}{2j} \int_{-n\pi}^{n\pi} e^{j(1-2\pi v)s} - e^{j(-1-2\pi v)s} ds \quad (\text{formule d'Euler}) \\ &= \frac{1}{2j} \left[ \frac{e^{j(1-2\pi v)s}}{j(1-2\pi v)} + \frac{e^{j(-1-2\pi v)s}}{j(1+2\pi v)} \right]_{-n\pi}^{n\pi} \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{e^{nj(1-2\pi v)\pi} - e^{-nj(1-2\pi v)\pi}}{j(1-2\pi v)} + \frac{e^{nj(-1-2\pi v)\pi} - e^{-nj(-1-2\pi v)\pi}}{j(1+2\pi v)} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2} \left( \frac{e^{-2nj\pi^2 v} - e^{2nj\pi^2 v}}{(1-2\pi v)} + \frac{e^{-2nj\pi^2 v} - e^{2nj\pi^2 v}}{(1+2\pi v)} \right) \\ &= (-1)^n j \sin(2n\pi^2 v) \left( \frac{1}{(1-2\pi v)} + \frac{1}{(1+2\pi v)} \right) \\ &= (-1)^n \cdot 2j \frac{\sin(2n\pi^2 v)}{1-4\pi^2 v^2} \end{aligned}$$

3) La fonction  $v \rightarrow |X(v)|$ , pour  $n$  grand, présente deux pics en  $v = \frac{\pm 1}{2\pi}$  : cela est dû au fait que pour  $n$  grand, le signal  $t \rightarrow x(t)$  se rapproche d'une vraie sinusoïde de fréquence  $v = \frac{1}{2\pi}$ , donc son spectre d'amplitude se concentre autour de ces deux valeurs (voir la partie 5 du III) du cours).

### Exercice 3

1)



2) On utilise la formule  $X(\nu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \delta_{n\nu_0}(\nu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \delta_{\frac{n}{2}}(\nu)$  où  $C_0 = \frac{1}{2}$  et

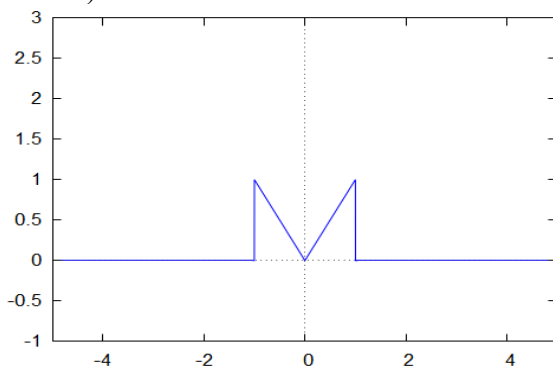
$C_n = -\frac{1}{n^2 \pi^2} (1 - (-1)^n)$  pour  $n \neq 0$ . On obtient que  $X(\nu) = \frac{1}{2} - \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} (1 - (-1)^n) \delta_{\frac{n}{2}}(\nu)$ . En

remarquant que  $C_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{2}{\pi^2 n^2} & \text{sinon} \end{cases}$ , on arrive à l'expression

$$X(\nu) = \frac{1}{2} - 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2 \pi^2} \delta_{p+\frac{1}{2}}(\nu).$$

3)

a)



b) On remarque que  $x_1(t) = \Pi_{-1,1}(t) - \Lambda_{-1,1}(t)$  donc d'après le formulaire, on a

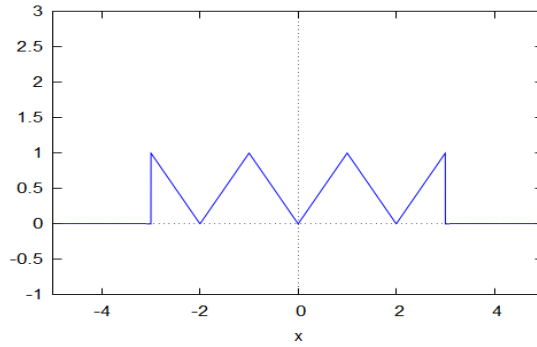
$$\forall \nu \neq 0, X_1(\nu) = 2 \cdot \text{SC}(2\pi\nu) - (\text{SC}(\pi\nu))^2 = \frac{\sin(2\pi\nu)}{\pi\nu} - \frac{\sin^2(\pi\nu)}{\pi^2\nu^2} = \frac{\pi\nu \sin(2\pi\nu) - \sin^2(\pi\nu)}{\pi^2\nu^2}.$$

Si  $\nu = 0$ , on a  $X_1(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) dt = 1$ .

$$\text{On a donc } X_1(\nu) = \begin{cases} \frac{\pi\nu \sin(2\pi\nu) - \sin^2(\pi\nu)}{\pi^2\nu^2} & \text{si } \nu \neq 0 \\ 1 & \text{si } \nu = 0 \end{cases}$$

4)

a)



b) Puisque  $x_2(t) = x_1(t-2) + x_1(t) + x_1(t+2)$ , la propriété 5 nous dit que

$$X_2(\nu) = (e^{4j\pi\nu} + 1 + e^{-4j\pi\nu})X_1(\nu) = e^{-4j\pi\nu}(1 + e^{4j\pi\nu} + e^{8j\pi\nu})X_1(\nu) = e^{-4j\pi\nu} \frac{e^{12j\pi\nu} - 1}{e^{4j\pi\nu} - 1} X_1(\nu)$$

$$= e^{-4j\pi\nu} \frac{2je^{6j\pi\nu} \sin(6\pi\nu)}{2je^{2j\pi\nu} \sin(2\pi\nu)} X_1(\nu) = \frac{\sin(6\pi\nu)}{\sin(2\pi\nu)} X_1(\nu).$$

En utilisant l'expression

$$X_1(\nu) = \begin{cases} \frac{\pi\nu \sin(2\pi\nu) - \sin^2(\pi\nu)}{\pi^2\nu^2} & \text{si } \nu \neq 0 \\ 1 & \text{si } \nu = 0 \end{cases} = \begin{cases} \sin(\pi\nu) \cdot \frac{2\pi\nu \cos(\pi\nu) - \sin(\pi\nu)}{\pi^2\nu^2} & \text{si } \nu \neq 0 \\ 1 & \text{si } \nu = 0 \end{cases},$$

on obtient 
$$X_2(\nu) = \begin{cases} \sin(6\pi\nu) \left( \frac{1}{\pi\nu} - \frac{\tan(\pi\nu)}{2\pi^2\nu^2} \right) & \text{si } \nu \neq 0 \\ 3 & \text{si } \nu = 0 \end{cases}.$$

5)

Un raisonnement similaire à celui de la question précédente conduit à

$$X_2(\nu) = \frac{\sin(2(2n-1)\pi\nu)}{\sin(2\pi\nu)} X_1(\nu). \text{ On aboutit cette fois à :}$$

$$X_2(\nu) = \begin{cases} \sin(2(2n-1)\pi\nu) \left( \frac{1}{\pi\nu} - \frac{\tan(\pi\nu)}{2\pi^2\nu^2} \right) & \text{si } \nu \neq 0 \\ 2n-1 & \text{si } \nu = 0 \end{cases}.$$

#### Exercice 4

1) Il suffit de remarquer  $x$  est paire, que  $\int_0^{+\infty} |x(t)| dt = 1$  et  $\int_0^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$ .

2) On a  $\forall t \neq 0, x(t) = y(t) + y(-t)$ , et en prenant la transformée de Fourier et en utilisant la propriété

4, on a 
$$X(\nu) = Y(\nu) + Y(-\nu) = \frac{2}{1 + 4\pi^2\nu^2}.$$

3) On a  $x \in L^1$  et, d'après le 2),  $X \in L^1$  (critère de l'équivalent et de Riemann en  $+\infty$ ) donc la propriété 8 nous dit que  $x$  est la transformée de Fourier de  $X$  (remarquer que  $X$  est paire).

Puisque  $\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = 2X(2\pi t)$ , on a par la propriété 4 :

$$\forall v \in \mathbb{R}, Z(v) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \text{TF}(X)\left(\frac{v}{2\pi}\right) = \frac{1}{\pi} x\left(\frac{v}{2\pi}\right) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{|v|}{2\pi}}$$

4)

On a  $z \in L^1$  (critère de l'équivalent et de Riemann en  $+\infty$ ) et  $Z \in L^1$  (car  $x \in L^1$ ). Alors, par

le Théorème de Plancherel,  $\int_{-\infty}^{+\infty} |z(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Z(v)|^2 dv$  ce qui donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|v|}{\pi}} dv = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{v}{\pi}} dv = \frac{2}{\pi^2} \cdot \pi = \frac{2}{\pi}.$$

### Exercice 5

1) Posons  $f(t) = e^{-\pi t^2}$  et  $g(t) = e^{-\alpha t^2}$ . Alors  $f \in L^1$  ( $|f(t)| \leq \frac{1}{t^2}$  en  $\pm\infty$ ) et

$g(t) = f\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} t\right)$  donc la formule de concentration-dilution nous dit que  $g$  admet une transformée de

Fourier égale à  $G(v) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} F\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} v\right) = v \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} v^2}$ . En posant  $\alpha = 1$ , on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = G(0) = \sqrt{\pi}.$$

2) On a  $\forall x \in \mathbb{R}, |x(t)| \leq 1$  donc  $x \in L^\infty$ . On a aussi  $x \in L^1$  donc les points (ii) et (iii) du Théorème 1 disent que la fonction  $t \rightarrow (x * x)(t)$  est bien définie, continue, et que  $x * x \in L^1(\mathbb{R})$ .

3) a) Puisque  $x \in L^\infty$  et  $x \in L^1$ , le Théorème 2) nous dit que :

$\text{TF}(x * x)(v) = X(v) \cdot X(v) = \pi e^{-2\pi^2 v^2}$  grâce à la question précédente ( $\alpha = 1$ ).

b) On a prouvé que  $x * x \in L^1(\mathbb{R})$  et l'expression obtenue à la question précédente montre que

$\text{TF}(x * x) \in L^1$ . La propriété 7 dit alors que  $(x * x)(-t) = \text{TF}(\text{TF}(x * x))(t)$ . Grâce à la question 1 ( $\alpha = 2\pi^2$ ) on obtient

$$(x * x)(-t) = \text{TF}(\text{TF}(x * x))(t) = \pi \sqrt{\frac{\pi}{2\pi^2}} e^{-\frac{\pi^2}{2\pi^2} t^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

### Exercice 6

Soit  $v_0 > 0$ . On définit pour  $t \in \mathbb{R}$  la distribution :  $h_{v_0}(t) = \delta(t) - \frac{\sin(\pi v_0 t)}{\pi t}$  de sorte que pour

toute fonction  $\varphi$  à support compact et continue sur  $\mathbb{R}$  on ait

$$\int_{\mathbb{R}} h_{v_0}(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) - \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\pi v_0 t)}{\pi t} \varphi(t) dt.$$

Soit  $H_{v_0}$  sa transformée de Fourier ; on considère le système qui à tout signal  $x(t)$  fait correspondre le signal  $y = x * h_{v_0}$  (sous réserve que ce produit de convolution soit défini).

1) Si la fonction  $x$  est continue par morceaux,  $\delta * x$  est bien défini et  $\delta * x(t) = x(t)$  pour toute valeur de  $t$  où  $x$  est continue.

On a vu en cours que la fonction sinus cardinal  $\frac{\sin(\pi v_0 t)}{\pi t}$  est dans  $L^2 \cap L^\infty$ . Les points (i) (ii) et (iv)



du Théorème 1 montrent que  $\left(\frac{\sin(\pi v_0 t)}{\pi t}\right) * x(t)$  est bien défini, et c'est une fonction continue, qui vit dans  $L^2 \cap L^\infty$ .

On en déduit que  $y = x * h_{v_0}$  est alors bien définie et continue, et vit dans  $L^2 \cap L^\infty$ .

2)  $H_{v_0}(v) = 1 - \Pi_{-\frac{v_0}{2}; \frac{v_0}{2}}(v)$ .

3)

a) Le signal  $x$  est à énergie infinie et à puissance moyenne finie (c'est un polynôme trigonométrique). Par le Théorème de Parseval, cette puissance moyenne vaut 11.

b) On a  $Y(v) = -2\delta(v) + \frac{3}{2}(\delta_2(v) + \delta_{-2}(v)) - \frac{1}{2}(\delta_8(v) + \delta_{-8}(v))$ . Cela donne  $y(t) = -2 + 3 \cos(4\pi t) - \cos(16\pi t)$ . Le système se comporte comme un filtre passe bas parfait de fréquence de coupure  $v_0$ .

c)  $v_0 > 10$ , 10 étant la plus grande fréquence des harmoniques de l'entrée  $x$ .

4) Dans cette question,  $v_0 = 20$  et on considère l'entrée  $x(t) = e^{-t} U(t)$ .

a) On a  $Y(v) = X(v) \left(1 - \Pi_{-10; 10}(v)\right) = \frac{1 - \Pi_{-10; 10}(v)}{1 + 2j\pi v}$ .

b) Par le changement de variables  $\theta = 2\pi v$ , on a

$$\forall X \geq 0, \int_0^X \frac{1}{1 + 4\pi^2 v^2} dv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi X} \frac{1}{1 + \theta^2} d\theta = \frac{1}{2\pi} \arctan(2\pi X).$$

c) On calcule par le Théorème 4 dans sa version générale (voir le (vi) du III)1) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(v)|^2 dv = \int_{-\infty}^{-10} \left| \frac{1}{1 + 2j\pi v} \right|^2 dv + \int_{10}^{+\infty} \left| \frac{1}{1 + 2j\pi v} \right|^2 dv \\ &= \int_{-\infty}^{-10} \frac{1}{1 + 4\pi^2 v^2} dv + \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 v^2} dv = 2 \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 v^2} dv. \end{aligned}$$

Par le b),  $\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 v^2} dv = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 v^2} dv - \int_0^{10} \frac{1}{1 + 4\pi^2 v^2} dv = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arctan(20\pi)$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan(20\pi).$$

5) En reprenant le calcul précédent, on trouve  $\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan(\pi v_0)$ .

On résout donc  $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan(\pi v_0) < \frac{1}{100}$  ce qui donne  $v_0 > \frac{1}{\pi} \tan(0,49\pi)$ .

### Exercice 7

1) a)  $Y(\nu) = \frac{1}{2}(\delta_{\nu_1} + \delta_{-\nu_1}) * X(\nu) = \frac{1}{2}(X(\nu - \nu_1) + X(\nu + \nu_1)).$

b) On a  $\forall \nu \in \mathbb{R}, \nu \geq 0 \Rightarrow \nu + \nu_1 \geq \nu_1 > \nu_0 \Rightarrow X(\nu + \nu_1) = 0$  à cause de la condition  $\forall \nu \in \mathbb{R}, |\nu| > \nu_0 \Rightarrow X(\nu) = 0$ , donc par contraposée,  $\forall \nu \in \mathbb{R}, X(\nu + \nu_1) \neq 0 \Rightarrow \nu < 0$ .

c) On a  $Y(\nu)U(\nu) = \frac{1}{2}U(\nu)(X(\nu - \nu_1) + X(\nu + \nu_1)) = \frac{1}{2}U(\nu)X(\nu - \nu_1) + \frac{1}{2}U(\nu)X(\nu + \nu_1).$

D'après le b), on a  $U(\nu)X(\nu + \nu_1) = 0$  donc  $Y(\nu)U(\nu) = \frac{1}{2}X(\nu - \nu_1)U(\nu)$ . Si  $\nu < 0$ , on a  $\nu - \nu_1 < -\nu_1 < -\nu_0$  donc  $X(\nu - \nu_1) = 0$  ce qui veut dire que  $\forall \nu \in \mathbb{R}, X(\nu - \nu_1)U(\nu) = X(\nu - \nu_1)$ .

On a donc  $Y(\nu)U(\nu) = \frac{1}{2}X(\nu - \nu_1)U(\nu) = \frac{1}{2}X(\nu - \nu_1).$

2)

a) On a par le 1)c) :  $X(\nu - \nu_1) = 2Y(\nu)U(\nu) = 6\delta(\nu - 40) + 16\delta(\nu - 45) + 6\delta(\nu - 50).$

b) En déduire l'expression de  $X(\nu + \nu_1)$  à l'aide de l'expression donnée de  $Y(\nu)$ .

On a  $X(\nu + \nu_1) = 2Y(\nu) - X(\nu - \nu_1) = 6\delta(\nu + 50) + 16\delta(\nu + 45) + 6\delta(\nu + 40).$

c) On a  $\nu_1 = 45$  et  $\forall t \in \mathbb{R}, X(\nu) = 6\delta(\nu + 50) + 16\delta(\nu + 45) + 6\delta(\nu - 50)$ . Cela donne  $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = 16 + 3\cos(10\pi t)$ .

On a  $\forall \nu > 5, X(\nu) = 0$  donc  $t \rightarrow x(t)$  vérifie bien la condition de bande de fréquence limitée et l'on peut prendre pour  $\nu_0$  n'importe quel réel strictement plus grand que 5.

3) On a  $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq y^2(t) = \cos^2(2\pi\nu_1 t)x^2(t) \leq x^2(t)$  donc puisque  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$  converge, par le critère de comparaison pour la convergence des intégrales,  $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt$  converge aussi et  $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$  de par la comparaison  $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq y^2(t) \leq x^2(t)$ .

4) a) On va montrer en raisonnant par l'absurde que  $X(\nu - \nu_1)\overline{X(\nu + \nu_1)} = 0$ .

En effet, s'il existait  $\nu \in \mathbb{R}$  tel que  $X(\nu - \nu_1)\overline{X(\nu + \nu_1)} \neq 0$ , alors  $X(\nu - \nu_1) \neq 0$  donc  $\nu \geq \nu_1 - \nu_0$  et  $\overline{X(\nu + \nu_1)} \neq 0$ , donc  $\nu \leq \nu_0 - \nu_1$ . On aurait alors  $\nu_1 - \nu_0 \leq \nu \leq \nu_0 - \nu_1$  ce qui est impossible vu que  $\nu_1 - \nu_0 > 0$ . On a donc  $\forall \nu \in \mathbb{R}, X(\nu - \nu_1)\overline{X(\nu + \nu_1)} = 0$  donc  $\forall \nu \in \mathbb{R}, \operatorname{Re}(X(\nu - \nu_1)\overline{X(\nu + \nu_1)}) = 0$ .

b) On a  $\forall \nu \in \mathbb{R}, |Y(\nu)|^2 = Y(\nu)\overline{Y(\nu)} = \frac{1}{4}(X(\nu - \nu_1) + X(\nu + \nu_1)) \cdot (\overline{X(\nu - \nu_1)} + \overline{X(\nu + \nu_1)})$   
 $= \frac{1}{4}(X(\nu - \nu_1) \cdot \overline{X(\nu - \nu_1)} + X(\nu + \nu_1) \cdot \overline{X(\nu + \nu_1)} + X(\nu + \nu_1) \cdot \overline{X(\nu - \nu_1)} + X(\nu - \nu_1) \cdot \overline{X(\nu + \nu_1)})$   
 $= \frac{1}{4}(|X(\nu - \nu_1)|^2 + |X(\nu + \nu_1)|^2) + 2\operatorname{Re}(X(\nu - \nu_1)\overline{X(\nu + \nu_1)})$   
 $= \frac{1}{4}(|X(\nu - \nu_1)|^2 + |X(\nu + \nu_1)|^2)$  par le 4)a).

c) Par le Théorème de Plancherel pour la fonction  $y \in L^2$  on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(\nu)|^2 d\nu \\ &= \frac{1}{4} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu - \nu_1)|^2 d\nu + \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu + \nu_1)|^2 d\nu \right) \quad (4b) \\ &= \frac{1}{4} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\theta)|^2 d\theta + \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\varphi)|^2 d\varphi \right) \text{ en faisant les changements de variables } \theta = \nu - \nu_1 \text{ et } \\ &\varphi = \nu + \nu_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \text{ en ré-appliquant le Théorème de Plancherel pour la fonction } x \in L^2. \end{aligned}$$

L'énergie du signal modulé est alors égal à la moitié de l'énergie du signal non modulé.

### Exercice 8

1)

a) Les fonctions  $f$  et  $y$  sont supposées continues par morceaux et sont dans  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ .  
Puisque  $y' = f - y$  on en déduit que  $y'$  est continue par morceaux et que  $y' \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ .

b) On applique le 1) de la propriété 6 à  $y$  (possible car  $y \in L^1(\mathbb{R})$  et  $y' \in L^1(\mathbb{R})$ ) à l'égalité (E) pour obtenir  $\forall \nu \in \mathbb{R}, 2j\pi \nu Y(\nu) + Y(\nu) = F(\nu)$  d'où  $Y(\nu) = \frac{F(\nu)}{1 + 2j\pi \nu}$ .

c) On a  $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  et  $h \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ . Par les points (i), (iii) et (iv) du Théorème 1 la fonction  $t \rightarrow (f * h)(t)$  est une fonction continue qui est dans  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ .

On a aussi  $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ , donc le Théorème 2 dit que

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \text{TF}((f * h))(\nu) = F(\nu) \cdot H(\nu) = \frac{F(\nu)}{1 + 2j\pi \nu} = Y(\nu).$$

En prenant la transformée de Fourier inverse, on obtient  $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = (f * h)(t)$ .

2) Puisque  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  et  $h \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  les points (ii), (iii) et (iv) du Théorème 1 permettent de dire que  $z \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ .

$$\text{a) On a } \forall t \in \mathbb{R}, z(t) \stackrel{\text{def}}{=} (f * h)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)h(t-s)ds$$

$$= \int_{-\infty}^t f(s)h(t-s)ds \text{ car si } s > t, t-s < 0 \text{ et alors } h(t-s) = 0 \text{ car } h \text{ est causale.}$$

On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = \int_{-\infty}^t f(s)h(t-s)ds = \int_{-\infty}^t f(s)e^{-(t-s)}ds = \int_{-\infty}^t f(s)e^{-t}e^s ds = e^{-t} \int_{-\infty}^t f(s)e^s ds.$$

b) La fonction  $s \rightarrow \int_{-\infty}^s f(s)e^s ds$  est continue et dérivable en tout point où  $f$  est continue (propriété 6 bis du chapitre sur l'intégration) donc il en est de même de  $z(t)$ .

On a enfin pour toute valeur de  $t$  où  $f$  est continue :

$$z'(t) + z(t) = -e^{-t} \int_{-\infty}^t f(s)e^s ds + e^{-t} f(t)e^t + e^{-t} \int_{-\infty}^t f(s)e^s ds = f(t)$$

ce qui montre que  $z$  est solution de (E).

3) L'équation différentielle (E) possède une unique solution dans  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  donnée par l'expression  $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = (f * h)(t)$ .

4) On calcule directement  $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = (f * h)(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^t f(s) e^s ds = e^{-t} \int_{-\infty}^t \Pi_{-1,1}(s) e^s ds$ .

Si  $t < -1$ , alors  $y(t) = (f * h)(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^t \Pi_{-1,1}(s) e^s ds = 0$ .

Si  $-1 \leq t \leq 1$ , alors  $y(t) = (f * h)(t) = e^{-t} \int_{-1}^t e^s ds = 1 - e^{-t-1}$ .

Si  $t > 1$ , alors  $y(t) = (f * h)(t) = e^{-t} \int_{-1}^1 e^s ds = e^{1-t} - e^{-1-t}$ .

On a donc  $y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ 1 - e^{-t-1} & \text{si } t \in [-1; 1] \\ e^{1-t} - e^{-1-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$ .

5)

a)  $\forall t \neq 0, f(t) = g(t) + g(-t)$ .

b) Par la propriété de concentration-dilution, on a

$$\forall v \in \mathbb{R}, F(v) = G(v) + G(-v) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + j\pi v} + \frac{1}{1 - j\pi v} \right) = \frac{1}{1 + \pi^2 v^2}.$$

c) On a  $Y(v) = \frac{F(v)}{1 + 2j\pi v} = \frac{1}{(1 + 2j\pi v)(1 + \pi^2 v^2)} = T(j\pi v)$ .

d) On a  $T(X) = \frac{1}{(1 + 2X)(1 - X^2)} = \frac{\frac{4}{3}}{1 + 2X} + \frac{\frac{1}{6}}{1 - X} - \frac{\frac{1}{2}}{1 + X}$  donc

$$Y(v) = \frac{\frac{4}{3}}{1 + 2j\pi v} + \frac{\frac{1}{6}}{1 - j\pi v} - \frac{\frac{1}{2}}{1 + j\pi v} = \frac{1}{6} \left( \frac{8}{1 + 2j\pi v} + \frac{1}{1 - j\pi v} - \frac{3}{1 + j\pi v} \right).$$

Cela donne  $\forall t \in \mathbb{R}^*, y(t) = \frac{4}{3} e^{-t} U(t) + \frac{1}{3} e^{2t} U(-t) - e^{-2t} U(t)$ .

### Exercice 9

1) La fonction  $t \rightarrow x(t)$  étant à durée finie, on a  $x \in L^1$  d'où l'existence de la fonction  $v \rightarrow X(v)$ . On a pour les mêmes raisons  $\forall n \in \mathbb{N}, t^n x(t) \in L^1$  donc par le (ii) de la propriété 6, la fonction  $v \rightarrow X(v)$  est indéfiniment dérivable.

Toujours par la durée finie de  $t \rightarrow x(t)$ , on a aussi  $x \in L^2$  donc  $X \in L^2$ . Il n'y a par contre aucune garantie que  $X \in L^1$  (si  $t \rightarrow x(t)$  est une fonction porte,  $X$  est un sinus cardinal qui n'est pas dans  $L^1(\mathbb{R})$ ).

2) a)

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{jn\omega t} = e^{-jN\omega t} \sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{j(n+N)\omega t} = e^{-jN\omega t} \sum_{n=0}^{n=2N} c_{n-N} e^{jn\omega t} = e^{-jN\omega t} Q(e^{j\omega t})$$

avec  $Q(X) = \sum_{n=0}^{n=2N} c_{n-N} X^n = c_N X^N + c_{N-1} X^{N-1} + \dots + c_{-N}$ .

b) Il y en a au plus  $2N$ , qui est le degré de  $Q$ .

c) Puisque  $P(t) = e^{-jN\omega t} Q(e^{j\omega t})$ ,  $t \in [0; \frac{2\pi}{\omega}]$  est une solution de l'équation  $P(t) = 0$  si et seulement si  $e^{j\omega t}$  est une racine de Q. Or, pour  $z \in \mathbb{C}$ , il n'y a au plus qu'un réel  $t \in [0; \frac{2\pi}{\omega}]$  tel que  $e^{j\omega t} = z$ , donc puisque le nombre de racines de Q est fini, (Q n'est pas le polynôme nul car P n'est pas la fonction nulle), il n'y a qu'un nombre fini de solutions à l'équation  $P(t) = 0$ .

3) On a  $\forall t \in ]T_0, \frac{T}{2}[$ ,  $\tilde{x}(t) = x(t)$  (car  $t < \frac{T}{2}$ ) = 0 (car  $t > T_0$ ).

4)

a)

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \frac{1}{T} X\left(\frac{n\omega}{2\pi}\right) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi \left(\frac{n\omega}{2\pi}\right)t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jn\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (\text{car } \forall t \notin [-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}], x(t) = 0).$$

On reconnaît alors la formule qui donne  $c_n$ . D'où  $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = \frac{1}{T} X\left(\frac{n\omega}{2\pi}\right) = \frac{1}{T} X\left(\frac{n}{T}\right)$ .

b) Puisque  $\forall v \in \mathbb{R}, |v| > v_0 \Rightarrow X(v) = 0$ , on déduit de la question précédente que si  $|n| > T v_0$  alors  $c_n = 0$ , ce qui prouve que la série de Fourier de  $t \rightarrow \tilde{x}(t)$  est finie, autrement dit,  $t \rightarrow \tilde{x}(t)$  est un polynôme trigonométrique. Or, on a vu que cette fonction est nulle sur tout l'intervalle  $]T_0, \frac{T}{2}[ = ]T_0, T_0 + \frac{1}{2}[$ , donc  $t \rightarrow \tilde{x}(t)$  a une infinité de racines, ce qui, d'après la question 2)c), implique que la fonction  $t \rightarrow \tilde{x}(t)$  est nulle sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $x$  est donc nulle.

### Exercice 10

1) Si  $v_0 > 0$  et si  $x(t) = x_{v_0}(t) = e^{2j\pi v_0 t}$ , montrer que  $y(t) = H(v_0) x_{v_0}(t)$  (on suppose H continue en  $v_0$ .)

On a

$$y(t) = h * x_{v_0}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{2j\pi v_0(t-s)} ds \quad \text{sous réserve que l'intégrale converge (par exemple si } h \in L^1)$$

Ainsi,

$$y(t) = h * x_{v_0}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{2j\pi v_0(t-s)} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{2j\pi v_0 t} \cdot e^{-2j\pi v_0 s} ds = e^{2j\pi v_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) \cdot e^{-2j\pi v_0 s} ds$$

$$y(t) = H(v_0) x_{v_0}(t).$$

2) a)  $H(v) = \Pi_{\frac{-v_1}{2}, \frac{v_1}{2}}(v)$

b) On a  $Y(v) = H(v) X_{v_0}(v) = \Pi_{\frac{-v_1}{2}, \frac{v_1}{2}}(v) \cdot \delta_3$ . Le résultat est nul ssi  $3 > \frac{v_1}{2}$  c'est à dire  $v_1 < 6$ . Pour les autres valeurs de  $v_1$ ,  $Y(v) = \Pi_{\frac{-v_1}{2}, \frac{v_1}{2}}(v) \cdot \delta_3 = \delta_3$  donc  $y = x$ .

3) a) La densité spectrale d'énergie de  $h$  est  $|H(\nu)|^2 = \Pi_{-\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_1}{2}}(\nu)$ . Son énergie vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\nu)|^2 d\nu = \nu_1.$$

b) On a  $y(t) = -\sin(\pi t) + 3 \cos(2\pi t)$  le système jouant le rôle de filtre passe-bas parfait de fréquence de coupure 2.

c) On doit avoir  $\nu_1 > 1$ .

### Exercice 11

1) On a par continuité de  $h$   $h(0) = \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$ .  $SC(0) = 0 \times 1 = 0$ .

2) On a  $\forall t \in \mathbb{R}^*$ ,  $|h(t)|^2 \leq \frac{4}{\pi^2 t^2}$ . Le critère de comparaison et de Riemann pour la convergence des intégrales assure que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt$  converge.

3) On écrit que  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $h(t) = \frac{1}{j}(e^{10j\pi t} - e^{-10j\pi t}) \cdot SC(\pi t)$  donc par passage à la transformée de Fourier,

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, H(\nu) = \frac{1}{j}(\delta_5 - \delta_{-5}) * \Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu) = \frac{1}{j}\delta_5 * \Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu) - \frac{1}{j}\delta_{-5} * \Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu)$$

d'où par les propriétés de convolution par un Dirac :

$$H(\nu) = \frac{1}{j}(\Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu - 5) - \Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu + 5)).$$

4) On a  $|H(\nu)| = \left| \frac{1}{j}(\Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu - 5) - \Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu + 5)) \right| = \Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu - 5) + \Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu + 5)$ .

5) Par l'égalité de Plancherel,  $\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\nu)| d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu - 5) + \Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu + 5) \right| d\nu = 2$ .

6) On a

$$\begin{aligned} Y(\nu) &= H(\nu)X(\nu) = \frac{1}{j}(\Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu - 5) - \Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu + 5)) \left( \delta + \frac{1}{2}(\delta_{\frac{5}{2}} + \delta_{\frac{5}{2}}) + \frac{1}{4j}(\delta_5 - \delta_{-5}) \right) \\ &= \frac{1}{j}(\Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu - 5) - \Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu + 5)) \left( \frac{1}{4j}(\delta_5 - \delta_{-5}) \right) \\ &= \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{4j} \delta_5 - \frac{1}{j} \cdot \frac{(-1)}{4j} \delta_{-5} = -\frac{1}{4}(\delta_5 + \delta_{-5}), \end{aligned}$$

la fonction  $H(\nu) = \frac{1}{j}(\Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu - 5) - \Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu + 5))$  agissant comme une multiplication par  $\frac{-1}{j}$  sur

l'intervalle  $[-5, 5; -4, 5[$ , par  $\frac{1}{j}$  sur l'intervalle  $[4, 5; 5, 5[$  et par 0 ailleurs.

De l'expression  $Y(\nu) = -\frac{1}{4}(\delta_5 + \delta_{-5})$ , on déduit que  $y(t) = \frac{-1}{2} \cos(10\pi t)$ .

7) Dans cette question on considère  $z = h * h$ .

a) La fonction  $h$  étant dans  $L^2$ , le point (i) du Théorème 1 permet de dire que  $z$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .

b) Il suffit, plus simplement que par l'indication proposée, de remarquer que les deux fonctions  $\nu \rightarrow \Pi_{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu - 5)$  et  $\nu \rightarrow \Pi_{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu + 5)$  sont deux fonctions portées à supports disjoints (car  $[-5, 5] \cap [-4, 5] = \emptyset$ ). Leur produit est donc la fonction nulle.

c)  $Z(\nu) = H(\nu)^2$   
 $= -(\Pi_{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu - 5) - \Pi_{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu + 5))^2 = \Pi_{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu - 5)^2 + \Pi_{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu + 5)^2 - 2\Pi_{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu - 5) \cdot \Pi_{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu + 5)$   
 $= \Pi_{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu - 5)^2 + \Pi_{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu + 5)^2$  par la question précédente  
 $= \Pi_{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu - 5) + \Pi_{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu + 5)$  car une fonction porte vaut 0 ou 1.

On en déduit par transformation de Fourier inverse que  $z(t) = 2 \cos(10\pi t) \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ .

### Exercice 12 (Théorème de Shannon)

1) Étude d'un exemple.

a) On a  $x_1 \in L^1$  (car  $\forall t \in \mathbb{R}^*$ ,  $|x_1(t)| \leq \frac{1}{\pi^2 t^2}$  et le critère de comparaison et de Riemann pour la convergence des intégrales assure que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t)| dt$  converge) et  $X_1(\nu) = \Lambda_{-1,1}(\nu)$  (on rappelle

que  $\Lambda_{-T,T}(t) = \begin{cases} T+t & \text{si } t \in [-T; 0[ \\ T-t & \text{si } t \in [0; T[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ). On a donc  $\forall \nu \in \mathbb{R}$ ,  $|\nu| > 1 \Rightarrow X(\nu) = 0$ . On a aussi

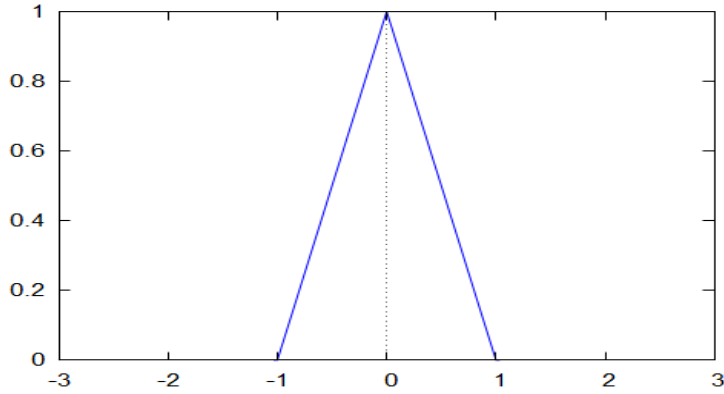
bien  $0 < \delta \leq \frac{1}{2\nu_0}$ .

b)

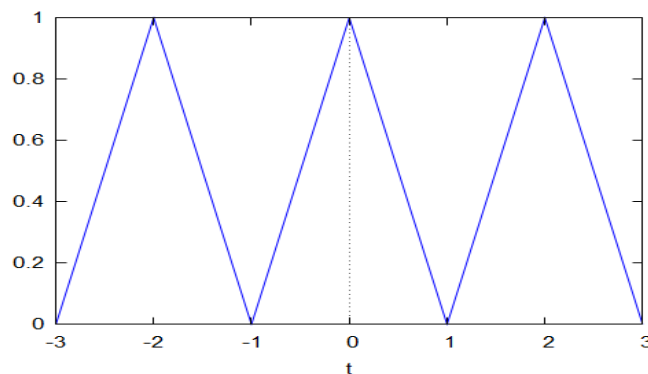
On a  $x_1(n\delta) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair et non nul} \\ \frac{4}{n^2 \pi^2} & \text{si } n \text{ est impair.} \\ 1 & \text{si } n=0 \end{cases}$

c)

$v \rightarrow X_1(v) :$



$v \rightarrow \tilde{X}_1(v) :$



## 2) Étude d'un contre-exemple.

a) Le support de la fonction  $v \rightarrow X_1(v)$  est égal à l'intervalle  $[-2; 2]$  qui n'est pas inclus dans l'intervalle  $[-v_0; v_0]$ .

De même, le support de la fonction  $v \rightarrow X_2(v)$  est égal à l'intervalle  $[-4; 4]$  qui n'est pas inclus dans l'intervalle  $[-v_0; v_0]$ .

b) On a  $(x_1(n\delta))_{n \in \mathbb{Z}} = (x_2(n\delta))_{n \in \mathbb{Z}} = (\delta(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  alors que les fonctions  $x_1$  et  $x_2$  sont différentes.

Les suites échantillonnées ne peuvent donc pas nous permettre de retrouver la fonction  $x$ , car les conditions du Théorème de Shannon ne sont pas remplies.



3) Les fonctions  $x_1$  et  $x_2$  appartenant à  $L^1(\mathbb{R})$ , leurs transformées de Fourier sont continues sur  $\mathbb{R}$  (Théorème 1), et en particulier  $X_1\left(\left(-\frac{1}{2\delta}\right)^+\right) = X_1\left(-\frac{1}{2\delta}\right) = 0$  et  $X_1\left(\left(\frac{1}{2\delta}\right)^-\right) = X_1\left(\frac{1}{2\delta}\right) = 0$  car  $\frac{1}{2\delta} \geq v_0$  et que  $\forall v \in \mathbb{R}, |v| > v_0 \Rightarrow X_i(v) = 0$ . Par périodisation des fonctions  $v \rightarrow X_1(v)$  et  $v \rightarrow X_2(v)$ , on en déduit que  $v \rightarrow \tilde{X}_1(v)$  et  $v \rightarrow \tilde{X}_2(v)$  sont continues partout.

4) a) Puisque les fonctions  $v \rightarrow \tilde{X}_1(v)$  et  $v \rightarrow \tilde{X}_2(v)$  sont périodiques de période  $\frac{1}{\delta}$ , on a  $\omega = 2\frac{\pi}{\frac{1}{\delta}} = 2\pi\delta$ .

b) Cela découle du fait que  $\frac{1}{2\delta} \geq v_0$  et que  $\forall v \in \mathbb{R}, |v| > v_0 \Rightarrow X_i(v) = 0$  pour  $i=1$  ou  $i=2$ .

c) On a par définition des  $c_n^{(i)}$  la relation :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n^{(i)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{-1}{2\delta}}} \int_{\frac{-1}{2\delta}}^{\frac{+1}{2\delta}} X_i(v) e^{-2j\pi n v \delta} dv$$

$$= \delta \int_{-\infty}^{+\infty} X_i(v) e^{-2j\pi n v \delta} dv$$

car les fonctions  $v \rightarrow X_1(v)$  et  $v \rightarrow X_2(v)$  sont nulles en dehors de l'intervalle  $[-\frac{1}{2\delta}; +\frac{1}{2\delta}]$  par le 4)b).

d) Les deux fonctions  $t \rightarrow x_i(t)$  sont  $L^1$  par hypothèse et les deux fonctions  $v \rightarrow X_i(v)$  étant continues et à support compact, elles le sont aussi. Le Théorème de réciprocity implique donc que la transformée de Fourier de  $v \rightarrow X_i(v)$  est la fonction  $t \rightarrow x_i(-t)$  ce qui s'écrit :

$$x_i(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_i(v) e^{-2j\pi v t} dv \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{Z}, c_n^{(i)} = \delta \int_{-\infty}^{+\infty} X_i(v) e^{-2j\pi n v \delta} dv = \delta x_i(-n\delta).$$

e) Les suites  $(x_1(n\delta))_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(x_2(n\delta))_{n \in \mathbb{Z}}$  étant égales, on déduit de la question précédente que les fonctions  $v \rightarrow \tilde{X}_1(v)$  et  $v \rightarrow \tilde{X}_2(v)$  ont les mêmes séries de Fourier. Étant continues, elles sont donc égales, donc en particulier,  $\forall v \in [-\frac{1}{2\delta}; +\frac{1}{2\delta}[, X_1(v) = \tilde{X}_1(v) = \tilde{X}_2(v) = X_2(v)$ .

Les fonctions  $v \rightarrow X_1(v)$  et  $v \rightarrow X_2(v)$  étant nulles en dehors de l'intervalle  $[-\frac{1}{2\delta}; +\frac{1}{2\delta}]$  par le 4)b), on déduit donc que  $\forall v \in \mathbb{R} = X_1(v) = X_2(v)$ . D'où  $x_1 = x_2$ .

### Exercice 13

1) En utilisant les points 1 et 3 du Théorème 1, on prouve que  $y$  est un signal continu tel que  $y \in L^1(\mathbb{R})$ . On peut donc considérer sa transformée de Fourier.

2) On peut appliquer le Théorème 2 qui dit que  $\forall v \in \mathbb{R}, Y(v) = H(v) \cdot X(v)$ . En prenant  $v=0$ ,

on obtient la relation  $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt \right)$  (remarquer que chaque intégrale converge car  $y, x, h \in L^1(\mathbb{R})$ ).

3) a) On a  $\forall v \in \mathbb{R}, |H(v)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{-2j\pi v s} ds \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(s) e^{-2j\pi v s}| ds = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(s)| ds$  (cette dernière intégrale converge car  $h \in L^1(\mathbb{R})$ ).

b) On a  $\forall v \in \mathbb{R}, |Y(v)|^2 = |X(v)|^2 \cdot |H(v)|^2 \leq |X(v)|^2 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \right)^2$  par la question précédente.

c) D'après les points (i) et (iv) du Théorème 1, on a  $y \in L^2(\mathbb{R})$  ce qui permet d'appliquer l'égalité de Plancherel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(v)|^2 dv$$

$$\leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |X(v)|^2 dv \text{ d'après le résultat du 3)b.}$$

On applique maintenant l'égalité de Plancherel à  $x \in L^2(\mathbb{R})$  pour dire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(v)|^2 dv < +\infty$$

d'où l'on tire l'inégalité  $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt \leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$  : l'énergie de la sortie est majorée par celle de l'entrée avec un facteur égal à  $\left( \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \right)^2$ .

4) On a ici  $\left( \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \right)^2 = 4$  d'où la relation  $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt \leq 4 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$ . On en déduit  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \geq \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt = \frac{1}{4} = 0,25$ .

## Exercice 14

1) Si  $f(t) = at + b$  alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} f(s) ds = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} (as + b) ds = \frac{1}{2} a \left( \left( t + \frac{1}{2} \right)^2 - \left( t - \frac{1}{2} \right)^2 \right) + b = at + b = f(t)$$

donc toute fonction affine vérifie (1).

2)

a) Considérons  $S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2jn\pi v_0 t}$  la série de Fourier de  $f$  avec  $v_0 = \frac{1}{T}$ . On a

$$F(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \delta_{nv_0}(v)$$

Remarquons maintenant que  $\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} f(s) ds = \left( \Pi_{-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}} * f \right)(t)$  donc la relation (1) peut s'écrire

$$\Pi_{-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}} * f = f$$

d'où, en prenant la transformée de Fourier des deux membres de cette relation :

$$\forall v \in \mathbb{R}, \frac{\sin(\pi v)}{\pi v} F(v) = F(v)$$

c'est à dire

$$\forall v \in \mathbb{R}, \frac{\sin(\pi v)}{\pi v} F(v) = F(v)$$

b) En utilisant l'expression  $F(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \delta_{nv_0}(v)$  le résultat trouvé ci dessus se réécrit :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \left( 1 - \frac{\sin(\pi n v_0)}{n \pi v_0} \right) \delta_{nv_0}(v) = 0$$

ce qui implique que  $\forall n \in \mathbb{Z}, C_n \left( 1 - \frac{\sin(\pi n v_0)}{n \pi v_0} \right) = 0$ .

Or  $\forall n \neq 0, 1 - \frac{\sin(\pi n v_0)}{n \pi v_0} \neq 0$  donc  $\forall n \neq 0, C_n = 0$ .

Si  $\forall n = 0, 1 - \frac{\sin(\pi n v_0)}{n \pi v_0} = 0$  donc  $C_0$  peut être quelconque.

La fonction  $f$  est donc constante (ce qui est un cas particulier du résultat du 1)).

3)

a) On a  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ . Les points (ii) et (iii) du Théorème 1 impliquent alors que la fonction  $t \rightarrow (\Pi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} * f)(t)$  est bien définie, est continue et appartient à  $L^1(\mathbb{R})$ .

On peut alors appliquer le Théorème 2 pour dire que sa transformée de Fourier est la fonction

$$v \rightarrow \frac{\sin(\pi v)}{\pi v} F(v) \text{ et la relation (1) équivaut à ce que } \forall v \in \mathbb{R}, \frac{\sin(\pi v)}{\pi v} F(v) = F(v) .$$

b) On a  $\forall v \in \mathbb{R}, \left( 1 - \frac{\sin(\pi v)}{\pi v} \right) F(v) = F(v)$ , donc, puisque  $\forall v \neq 0, 1 - \frac{\sin(\pi v)}{\pi v} \neq 0$ , on en déduit que  $\forall v \neq 0, F(v) = 0$ .

Puisque  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $F$  est continue donc par ce qui précède, elle est identiquement nulle.

Donc  $f$  est nulle.

### Exercice 15

1)  $y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) U(t-s) ds = \int_{-1}^1 U(t-s) ds = \int_{t-1}^{t+1} U(\alpha) d\alpha$  en faisant le changement de variables  $\alpha = t-s$ .

On trouve que  $y(t) = (t+1)U(t+1) - (t-1)U(t-1)$ .

2)  $y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) U(t-s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s|} U(t-s) ds = \int_{-\infty}^t e^{-|s|} ds$ .

On trouve que  $y(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } t < 0 \\ 2 - e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$ .

**Exercice 16**

1) Il s'agit d'une conséquence directe du (ii) du Théorème 1 : puisque  $h \in L^1$ , alors si  $x \in L^\infty$ ,  $y = h * x \in L^\infty$  et est une fonction continue.

2) Puisque  $h \in L^1$ ,  $H(\nu)$  est bien définie par la relation

$$H(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{-2j\pi\nu s} ds = \int_{-0}^T h(s) e^{-2j\pi\nu s} ds \quad \text{par la condition (ii)}$$

donc  $\forall \nu \in \mathbb{R}, |H(\nu)| \leq \int_{-0}^T |h(s) e^{-2j\pi\nu s}| ds = \int_{-0}^T |h(s)| |e^{-2j\pi\nu s}| ds$  par la condition (i)

d'où  $\forall \nu \in \mathbb{R}, |H(\nu)| \leq \int_{-0}^T h(s) ds = H(0) = 1$  par la condition (iii).

3) On peut écrire  $x(t) = \sum_{n=-N}^N C_n e^{2j\pi n \nu_0 t}$  pour un certain entier  $N$ , un certain réel  $\nu_0 > 0$  et  $C_n \in \mathbb{C}$  pour  $-N \leq n \leq N$ .

On a  $y = h * x = \sum_{n=-N}^N C_n (h * e^{2j\pi n \nu_0 t}) = \sum_{n=-N}^N C_n H(n \nu_0) e^{2j\pi n \nu_0 t}$  (voir II) 1), ce qui constitue bien

l'expression d'un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à celui de  $x$  et où le coefficient  $C_n$  a été formellement remplacé par  $C_n \cdot H(n \nu_0)$ .

Par le Théorème de Parseval appliqué à  $y$ , on a

$$\langle y^2 \rangle = \sum_{n=-N}^N |H(n \nu_0) \cdot C_n|^2 \leq \sum_{n=-N}^N C_n^2 \quad \text{car, d'après le 2), on a } |H(n \nu_0)|^2 \leq 1$$

d'où, par le Théorème de Parseval appliqué à  $x$ , on déduit  $\langle y^2 \rangle \leq \langle x^2 \rangle$ .

4) a) On a  $\overline{H(\nu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(s) e^{-2j\pi\nu s}} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{2j\pi\nu s} ds$  car  $h$  est à valeurs réelles

d'où l'on déduit que  $\overline{H(\nu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{-2j\pi(-\nu)s} ds = H(-\nu)$ .

b) On a  $|H(\nu)|^2 = H(\nu) \overline{H(\nu)} = H(\nu) \cdot H(-\nu)$  par la question précédente.

On en déduit que  $|H(-\nu)|^2 = H(-\nu) \cdot H(+\nu) = |H(\nu)|^2$  donc  $|H(-\nu)| = |H(\nu)|$ : la fonction  $\nu \rightarrow |H(\nu)|$  est paire.

5) On a  $a^2 + b^2 - \frac{(a-b)^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{2} = \frac{(a+b)^2}{2} \geq 0$  d'où l'inégalité (iv).

Pour  $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$  on a  $1 \geq \cos(\theta) \geq 0$  et  $1 \geq \sin(\theta) \geq 0$  donc  $\cos(\theta) \geq \cos^2(\theta)$  et

$\sin(\theta) \geq \sin^2(\theta)$ . Cela aboutit à  $\cos(\theta) + \sin(\theta) \geq \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ .

6) a) On a  $H(\nu) = \int_0^T h(s) e^{-2j\pi\nu s} ds = \int_0^T h(s) \cos(2\pi\nu s) ds - j \int_0^T h(s) \sin(2\pi\nu s) ds$ . Puisque  $h$

est à valeurs réelles, on a  $\int_0^T h(s) \cos(2\pi\nu s) ds \in \mathbb{R}$  et  $\int_0^T h(s) \sin(2\pi\nu s) ds \in \mathbb{R}$ . Puisque

$A(\nu) = \text{Re}(H(\nu))$  et  $B(\nu) = \text{Im}(H(\nu))$ , on en déduit par identification que

$$\int_0^T h(s) \cos(2\pi\nu s) ds = A(\nu) \quad \text{et} \quad \int_0^T h(s) \sin(2\pi\nu s) ds = -B(\nu).$$

Soit maintenant  $\nu \in [0; \frac{1}{4T}]$  fixé. Alors  $\forall s \in [0; T], 0 \leq 2\pi \nu s \leq 2\pi \nu T \leq \frac{\pi}{2}$  donc par la relation (v) on a  $\forall s \in [0; T], \cos(2\pi \nu s) + \sin(2\pi \nu s) \geq 1$ , d'où, par multiplication par  $h(s) \geq 0$  on a :  $\forall s \in [0; T], (\cos(2\pi \nu s) + \sin(2\pi \nu s))h(s) \geq h(s)$ .

Par intégration entre 0 et T, on obtient :  $\int_0^T h(s) \cos(2\pi \nu s) ds + \int_0^T h(s) \sin(2\pi \nu s) ds \geq \int_0^T h(s) ds = 1$   
c'est à dire  $A(\nu) - B(\nu) \geq 1$ .

b) Soit  $\nu \in [0; \frac{1}{4T}]$ . On applique la relation (iv) à  $A(\nu)$  et  $B(\nu)$  : on obtient alors

$$|H(\nu)|^2 = A^2(\nu) + B^2(\nu) \geq \frac{1}{2}(A(\nu) - B(\nu))^2 \geq \frac{1}{2} \text{ par le résultat du a).}$$

Cela donne  $|H(\nu)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$  et par parité de la fonction  $\nu \rightarrow |H(\nu)|$ , on en déduit que cette relation reste vraie aussi si  $-\nu \in [0; \frac{1}{4T}]$ .

7) On considère une entrée d'expression  $x(t) = \sum_{n=-N}^N C_n e^{2j\pi n \nu_0 t}$  pour un certain entier N, un certain réel  $\nu_0 > 0$  et  $C_n \in \mathbf{C}$  pour  $-N \leq n \leq N$ .

$$\text{On a } y = h * x = \sum_{n=-N}^N C_n (h * e^{2j\pi n \nu_0 t}) = \sum_{n=-N}^N C_n H(n \nu_0) e^{2j\pi n \nu_0 t}.$$

On remarque que puisque toutes les fréquences des harmoniques contenues dans le polynôme trigonométrique x sont inférieures à  $\frac{1}{4T}$ , on a  $n \nu_0 \leq \frac{1}{4T}$  donc par le 6), il vient que

$$|H(n \nu_0)|^2 \geq \frac{1}{2} \text{ pour tout entier relatif } n \text{ compris entre } -N \text{ et } +N.$$

Par le Théorème de Parseval appliqué à y, on a

$$\langle y^2 \rangle = \sum_{n=-N}^N |H(n \nu_0)|^2 \cdot |C_n|^2 \geq \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N C_n^2 \text{ d'où, par le Théorème de Parseval appliqué à } x, \text{ on déduit}$$

$$\langle y^2 \rangle \geq \frac{1}{2} \langle x^2 \rangle.$$

## D - TRANSFORMATION EN Z ET APPLICATIONS

### I) Signaux discrets

Un signal analogique est une fonction de la variable réelle  $t$ . Dans la pratique, ce signal est échantillonné avec un pas  $h > 0$  pour devenir un signal discret.

Plus précisément : soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $h > 0$ . On considère alors la suite  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  définie par l'expression  $x(n) = f(hn)$ . Cela revient à ne regarder que les valeurs de la fonction  $f$  prises à des instants multiples de  $h$ . Une telle opération est appelée échantillonnage de la fonction  $f$  avec un pas de  $h$ .

Par exemple, si  $f(t) = \cos(\pi t)$  et  $h = \frac{1}{2}$ , on obtient, si l'on ne considère que les termes d'indice positifs ou nul :  $(x(n))_{n \in \mathbb{N}} = (1; 0; -1; 0; 1; 0; -1; 0; \dots)$ .

Dans ce cours, on ne s'intéressera qu'à des suites  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  causales à valeurs réelles ou plus généralement complexes, c'est à dire telles que  $\forall n < 0, x(n) = 0$ . On ne travaillera donc effectivement que sur les termes d'indice positif ou nul, ce qui revient à considérer des suites de la forme

$(x(n))_{n \in \mathbb{N}} = (x(0); x(1); x(2); \dots)$ , étant sous-entendu que les termes d'indices négatifs sont nuls. De telles suites seront appelées ici signaux numériques.

Les deux suites définies ci-dessous seront d'une importance capitale dans ce chapitre :

**Définition 1** On définit la suite  $(\delta(n))$  comme la suite causale  $(\delta(n))_{n \in \mathbb{N}} = (1; 0; 0; \dots)$ . Cette suite est appelée Dirac discret.

De même, on définit la suite échelon discret comme la suite causale  $(U(n))_{n \in \mathbb{N}} = (1; 1; 1; \dots)$ .

#### Remarques :

(i) Si  $k \in \mathbb{N}$ , le Dirac discret retardé de  $k$  est la suite  $(\delta(n-k))_{n \in \mathbb{N}}$  dont tous les termes sont nuls sauf celui de rang  $k$  qui vaut 1. De même, l'échelon discret retardé de  $k$  est la suite  $(U(n-k))_{n \in \mathbb{N}}$  dont tous les termes de rang inférieur à  $k$  sont nuls et tous les autres égaux à 1. Par exemple :

$$(U(n-2))_{n \in \mathbb{N}} = (0; 0; 1; 1; 1; \dots)$$

(ii) On remarquera que  $(U(n-(k+1)) - U(n-k))_{n \in \mathbb{N}} = (\delta(n-k))_{n \in \mathbb{N}}$ .

On utilisera la notation  $(\delta_k(n))_{n \in \mathbb{N}} = (\delta(n-k))_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Définition 2** On dit qu'une suite causale  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est finie si il existe un rang  $N$  tel que  $\forall n > N, x(n) = 0$ .

On remarque que toute suite finie s'exprime comme une somme finie de Diracs discrets retardés.

En effet, si  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est finie, alors  $(x(n))_{n \in \mathbb{N}} = (x(0); x(1); x(2); \dots; x(N); 0; 0; \dots)$  pour un certain  $N$ . On a alors de façon claire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x(n) = x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + \dots + x(N)\delta(n-N) \quad (1)$$

cette relation restant évidemment valable pour  $n < 0$ .

Remarquons que dans le membre de droite de (1), il n'y a au maximum qu'un seul terme non nul, et que la relation (1) peut s'écrire

$$(2) \quad (x(n))_{n \in \mathbb{N}} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \delta_k,$$

la série du membre de droite calculée au rang  $n$  étant finie car il n'y a qu'un terme éventuellement non nul dans  $\sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \delta_k(n)$ , celui qui correspond à  $k=n$ . Cela montre en fait que l'écriture (2) reste valable même si la suite  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  n'est pas finie.

### Propriété 1

Soit  $(x(n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite causale et  $(S(n))_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de ses sommes partielles (on rappelle que  $\forall n \geq 0, S_n = x(0) + x(1) + \dots + x(n)$ ).

Alors, on a les relations

$$(1) \quad x = x * \delta$$

$$(2) \quad S = x * U.$$

où  $*$  désigne le produit de convolution des suites numériques (voir chapitre correspondant).

Preuve :

Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(x * \delta)(n) = \sum_{k=0}^n x(k) \delta(n-k)$  (par définition du produit de convolution) donc :

$$(x * \delta)(n) = x(n) \delta(n-n) = x(n), \text{ car si } k \neq n, \delta(n-k) = 0 \text{ et } \delta(0) = 1.$$

D'autre part, si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(x * U)(n) = \sum_{k=0}^n x(k) U(n-k) = \sum_{k=0}^n x(k) = S(n)$ , car pour tous les termes de la somme,  $n-k \geq 0$  donc  $U(n-k) = 1$ .

### Propriété 2

Soit  $(x(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y(n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(z(n))_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites causales et soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors on a :

$$(1) \quad (x + y) * z = x * z + y * z$$

$$(2) \quad x * (\lambda y) = \lambda (x * y)$$

$$(3) \quad x * y = y * x$$

$$(4) \quad (x * y) * z = x * (y * z).$$

Preuve :

(1) : Pour tout entier  $n$  positif ou nul, on a

$$\begin{aligned} ((x + y) * z)(n) &= \sum_{k=0}^n (x(k) + y(k)) z(n-k) = \sum_{k=0}^n x(k) z(n-k) + \sum_{k=0}^n y(k) z(n-k) \\ &= (x * z)(n) + (y * z)(n) \end{aligned}$$

(2) : Pour tout entier  $n$  positif ou nul, on a

$$(x * \lambda y)(n) = \sum_{k=0}^n x(k) \lambda y(n-k) = \lambda \sum_{k=0}^n x(k) y(n-k) = \lambda (x * y)(n).$$

(3) : Pour tout entier  $n$  positif ou nul, on a

$$(x * y)(n) = \sum_{k=0}^n x(k) y(n-k) = x(0) y(n) + x(1) y(n-1) + \dots + x(n-1) y(1) + x(n) y(0)$$

tandis que

$$(y * x)(n) = \sum_{k=0}^n y(k) x(n-k) = y(0) x(n) + y(1) x(n-1) + \dots + y(n-1) x(1) + y(n) x(0)$$

On voit que les deux sommes ci-dessus sont égales : l'ordre des termes est seulement inversé.

(\*) (4) La démonstration est plus technique que celle des autres points, mais présente des idées intéressantes et utiles à retenir concernant la manipulation des sommes. On a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, ((x * y) * z)(n) &= \sum_{k=0}^n (x * y)(k) z(n-k) = \sum_{k=0}^n \left( \sum_{l=0}^k x(l) y(k-l) \right) z(n-k) \\ &= \sum_{\substack{(k;l) \in \mathbb{N}^2 \\ 0 \leq l \leq k \leq n}} x(l) y(k-l) z(n-k). \end{aligned}$$

Pour décrire l'ensemble des couples  $\{(k;l) \in \mathbb{N}^2 / 0 \leq l \leq k \leq n\}$ , on peut commencer par considérer tous les entiers  $l$  compris entre 0 et  $n$ , puis, pour chaque entier  $l$  fixé, regarder tous les entiers  $k$  compris entre  $l$  et  $n$ , ce qui revient à transformer l'égalité ci-dessus en :

$$\forall n \in \mathbb{N}, ((x * y) * z)(n) = \sum_{l=0}^n \sum_{k=l}^n x(l) y(k-l) z(n-k) = \sum_{l=0}^n x(l) \left( \sum_{k=l}^n y(k-l) z(n-k) \right).$$

On remarque ensuite que si  $k$  va de  $l$  à  $n$ , alors  $n-k$  va de 0 à  $n-l$  d'où

$$\sum_{k=l}^n y(k-l) z(n-k) = \sum_{i=0}^{n-l} z(i) y(n-l-i) = (y * z)(n-l) \text{ en posant } i = n-k$$

d'où, par le calcul précédent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, ((x * y) * z)(n) = \sum_{l=0}^n x(l) (y * z)(n-l) = (x * (y * z))(n) .$$

### Définition 3

Soit  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite causale et  $k \in \mathbb{N}$ . On définit la suite  $x$  retardée de  $k$  comme étant la suite  $(x(n-k))_{n \in \mathbb{Z}}$ . De même, on définit la suite  $x$  avancée de  $k$  comme étant la suite  $(x(n+k) \cdot U(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ .

### Remarques :

(i) La suite  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  étant causale, il en est de même de la suite  $(x(n-k))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Par exemple, si  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{N}} = (1; 2; 3; 4; 5; \dots)$  alors,  $x = (x(n-3))_{n \in \mathbb{N}} = (0; 0; 0; 1; 2; \dots)$  et tous les termes de rang négatifs de la suite  $(x(n-3))_{n \in \mathbb{Z}}$  sont nuls.

(ii) Même si la suite  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est causale, il n'en est, en général, pas de même de la suite

$(x(n+k))_{n \in \mathbb{Z}}$  ! En effet, les termes de cette suite de rang,  $-1, -2, \dots, -k$  qui sont égaux respectivement à  $x(k-1), x(k-2), \dots, x(0)$  n'ont aucune raison d'être nuls. Par contre, la suite avancée

$(x(n+k) \cdot U(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est, elle, bien causale grâce à la multiplication par  $U(n)$  qui annule les termes de rang négatifs. Par contre, on « perd » les premiers termes de la suite. Par exemple, si

$x = (x(n))_{n \in \mathbb{N}} = (1; 2; 3; 4; 5; \dots)$  alors,  $(x(n+3)U(n))_{n \in \mathbb{N}} = (4; 5; 6; 7; 8; \dots)$ , les termes de rang négatifs sont nuls grâce au facteur  $U(n)$ . On a par contre « perdu » les termes 1, 2 et 3 de la suite.

Terminons cette section par deux notions qui nous seront très utiles par la suite de ce chapitre :

### Définition 4

On définit  $l^1(\mathbb{N})$  comme l'ensemble des suites  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{N}}$  de série absolument convergente, c'est à dire que  $\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|$  converge. On notera  $\|x\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|$ .

On définit  $l^\infty(\mathbb{N})$  comme l'ensemble des suites  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{N}}$  bornées, c'est à dire pour lesquelles il existe une constante  $M$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, |x(n)| \leq M$ . La plus petite de ces constantes  $M$  sera notée  $\|x\|_\infty$  et appelée borne supérieure de la suite  $(|x(n)|)_{n \in \mathbb{N}}$ .



**Remarque :** on vérifie facilement que  $l^1(\mathbb{N}) \subseteq l^\infty(\mathbb{N})$  car toute suite de série convergente est bornée.

**Exemples:**

(i) si  $x = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ , alors  $x \notin l^1(\mathbb{N})$  car  $\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$  diverge. Cependant  $x \in l^\infty(\mathbb{N})$  et on peut voir que  $\|x\|_\infty = 1$  car  $x(0) = 1$  et la suite  $x$  décroît vers 0.

(ii) si  $x = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ , alors  $x \in l^1(\mathbb{N})$  et  $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ .

(iii) si  $x = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ , alors  $x \in l^\infty(\mathbb{N})$  et  $\|x\|_\infty = 1$  car la suite  $x = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive, croissante et tend vers 1. Remarquer que si, pour l'exemple du (i), la valeur de  $\|x\|_\infty$  correspondait au module d'une valeur de la suite (celle pour  $n=0$  en l'occurrence), dans cet exemple, le module de la suite ne prend jamais la valeur de  $\|x\|_\infty$ .

**II) Systèmes discrets**

Pour expliquer l'intérêt des systèmes discrets, on peut s'intéresser au système analogique qui, à tout signal causal  $f(t)$  fait correspondre la sortie causale  $g(t)$  vérifiant sur  $[0; +\infty[$  l'équation différentielle :

$$(1) \tau g'(t) + g(t) = f(t) \quad (\tau > 0) \text{ avec la condition initiale } g(0) = 0.$$

On reconnaît un système du premier ordre bien connu.

Supposons que l'entrée ne soit connue que par un échantillonnage de pas  $h > 0$  : on forme donc la suite causale  $(x(n))_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $\forall n \geq 0, x(n) = f(nh)$ . Considérons la suite  $(y(n))_{n \in \mathbb{N}}$  avec

$\forall n \geq 0, y(n) = g(nh)$ . En remarquant que si  $h$  est « assez petit », on a, par la définition d'une dérivée:

$$g'(nh) \sim \frac{g(nh) - g((n-1)h)}{h} = \frac{y(n) - y(n-1)}{h}.$$

La relation (1) appliquée à  $t = nh$  donne

$$\tau \left( \frac{y(n) - y(n-1)}{h} \right) + y(n) = x(n) \text{ moyennant l'approximation } g'(nh) = \frac{y(n) - y(n-1)}{h}.$$

On obtient donc la relation :

$$(2) y(n) = \frac{\tau}{\tau + h} y(n-1) + \frac{h}{\tau + h} x(n) \text{ et } y(0) = g(0.h) = 0,$$

ce qui fournit une relation de récurrence permettant de calculer les termes de la suite  $(y(n))_{n \in \mathbb{N}}$ .

On obtient là un exemple de système discret : la formule (2) donne un moyen récursif de calculer la sortie discrète  $(y(n))_{n \in \mathbb{N}}$  en fonction de l'entrée discrète  $(x(n))_{n \in \mathbb{N}}$ .

La discrétisation obtenue par la formule (2) permet d'obtenir une approximation de la solution  $g$  de (1) d'autant plus précise que le pas de discrétisation  $h$  est petit (voir exercice 20).

Nous définissons maintenant plus généralement le concept de système discret :

### Définition 5

On appelle système discret une transformation  $(S)$  qui à toute suite causale  $x$  (appelée entrée) associe une suite causale (appelée sortie)  $y = S(x)$  telle que :

- (i)  $S(\lambda x) = \lambda S(x)$  pour toute suite  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{N}}$  et tout nombre complexe  $\lambda$ .
- (ii)  $S(x + y) = S(x) + S(y)$  pour toute suite  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $y = (y(n))_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (iii) Pour toute suite  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{N}}$  de sortie associée  $y = (y(n))_{n \in \mathbb{N}}$  et tout entier naturel  $k$ , la sortie correspondant à la suite retardée  $(x(n-k))_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite  $(y(n-k))_{n \in \mathbb{N}}$ . Autrement dit,  $S((x(. - k)))(n) = (S(x))(n - k)$ .

Les propriétés (i) et (ii) constituent ce que l'on appelle « propriété de linéarité » tandis que la propriété (iii) est celle de « l'invariance dans le temps ».

Le Théorème suivant permet de décrire tous les systèmes discrets. L'analogie avec les systèmes causaux définis dans le chapitre sur la transformation de Laplace est remarquable.

### Théorème 1

Les systèmes discrets sont de la forme suivante :

$$y = h * x,$$

où

$h = (h(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite causale telle que  $h$  soit la sortie associée à  $\delta$

$x = (x(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une entrée et  $y = (y(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est la sortie correspondante.

#### Preuve :

A) Soit  $h = (h(n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite causale. Définissons la transformation  $(S)$  qui à toute suite causale  $x$  associe la suite  $y$  causale telle que l'on ait  $\forall n \geq 0; y(n) = (h * x)(n)$ . Montrons que la transformation  $(S)$  vérifie bien les points (i) (ii) et (iii) de la définition.

Avec les notations de la définition précédente, on a :

(i) Pour tout entier  $n$  positif ou nul, on a  $S(\lambda x)(n) = (h * \lambda x)(n) = \lambda (h * x)(n) = \lambda S(x)(n)$ , grâce au point (2) de la propriété 2.

(ii) Pour tout entier  $n$  positif ou nul, on a

$S(x + y)(n) = (h * (x + y))(n) = (h * x)(n) + (h * y)(n) = S(x)(n) + S(y)(n)$  grâce au point (1) de la propriété 2.

(iii)  $S((x(. - k)))(n) = (h * x(. - k))(n) = \sum_{l=0}^n h(l) x(n-l-k)$ .

On a deux cas :

Si  $n < k$  : alors quel que soit l'entier  $l$  compris entre 0 et  $n$ , on a  $n-l-k < -l \leq 0$  donc par causalité de la suite  $x$ ,  $x(n-l-k) = 0$  donc par la relation ci-dessus,  $S((x(. - k)))(n) = 0$ . Or, la suite  $S(x)$  étant par définition causale et puisque  $n < k$ , on a aussi  $S(x)(n-k) = 0$  d'où

$$S((x(. - k)))(n) = S(x)(n-k).$$

Si  $n \geq k$  : alors dans la somme  $\sum_{l=0}^n h(l) x(n-l-k)$ , tous les termes pour  $l > n-k$  sont nuls car

$x(n-l-k) = 0$  par causalité de la suite  $x$ , donc on a

$$S((x(. - k)))(n) = \sum_{l=0}^{n-k} h(l) x(n-l-k) = \sum_{l=0}^{n-k} h(l) x(n-k-l) = S(x)(n-k).$$

(\* B) Soit maintenant  $(S)$  un système discret.

On prouve un premier résultat intermédiaire :

**Lemme :** Soit une suite causale  $x$ . Alors pour tout entier naturel  $p$ , on a  $S\left(\left(x(n)U(n-p-1)\right)_{n \in \mathbb{N}}\right)(p) = 0$ .

En effet, on a  $\left(x(n)U(n-p-1)\right)_{n \in \mathbb{N}} = (0; 0; \dots; 0; x(p+1); x(p+2); x(p+3); \dots)$  avec  $p+1 \ll 0$  en début de suite. On reconnaît ici la suite  $(x(p+1); x(p+2); x(p+3); \dots)$  retardée de  $p+1$ , c'est à dire la suite  $\left(x(n+p+1)U(n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$  retardée de  $p+1$ . Posons  $y = S\left(\left(x(n+p+1)U(n)\right)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ . Alors, par le point (iii) de la définition d'un système discret, on a  $S\left(\left(x(n)U(n-p-1)\right)_{n \in \mathbb{N}}\right)(n) = y(n-p-1)$ . En posant  $n = p$ , on obtient  $S\left(\left(x(n)U(n-p-1)\right)_{n \in \mathbb{N}}\right)(p) = y(-1) = 0$ .

Revenons à la preuve du Théorème. Soit  $x$  une suite causale quelconque. On a pour tout entier naturel  $p$  la relation  $\left(x(n)\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x(n)U(n-p-1)\right)_{n \in \mathbb{N}} + \left(x(n)(1-U(n-p-1))\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Par le point (ii) de la définition d'un système discret, on a

$$S(x) = S\left(\left(x(n)U(n-p-1)\right)_{n \in \mathbb{N}}\right) + S\left(\left(x(n)(1-U(n-p-1))\right)_{n \in \mathbb{N}}\right), \text{ donc par le lemme :}$$

$$S(x)(p) = 0 + S\left(\left(x(n)(1-U(n-p-1))\right)_{n \in \mathbb{N}}\right)(p)$$

c'est à dire

$$(1) \quad S(x)(p) = S\left(\left(x(n)(1-U(n-p-1))\right)_{n \in \mathbb{N}}\right)(p).$$

Or on a :

$$\left(x(n)(1-U(n-p-1))\right)_{n \in \mathbb{N}} = (x(0); x(1); x(2); \dots; x(p); 0; 0; \dots)$$

c'est à dire

$$\left(x(n)(1-U(n-p-1))\right)_{n \in \mathbb{N}} = x(0)\delta + x(1)\delta_1 + \dots + x(p)\delta_p.$$

Posons  $h = S(\delta)$ . Par le point (iii) de la définition d'un système discret, on a pour tout entier naturel  $k$ ,  $h_k = S(\delta_k)$  (où  $h_k$  désigne la suite  $h$  retardée de  $k$ ) donc la relation ci-dessus donne

$$S\left(\left(x(n)(1-U(n-p-1))\right)_{n \in \mathbb{N}}\right) = S(x(0)\delta + x(1)\delta_1 + \dots + x(p)\delta_p)$$

$$= S(x(0)\delta) + S(x(1)\delta_1) + \dots + S(x(p)\delta_p)$$

par le point (ii) de la définition d'un système discret,

$$= x(0)S(\delta) + x(1)S(\delta_1) + \dots + x(p)S(\delta_p)$$

par le point (i) de la définition d'un système discret

$$= x(0)h_0 + x(1)h_1 + \dots + x(p)h_p.$$

La relation (1) donne alors (en adoptant la notation  $h(k) \stackrel{\text{def}}{=} h_k$ ):

$$S(x)(p) = x(0)h(p) + x(1)h_1(p) + \dots + x(p)h_p(p)$$

$$S(x)(p) = x(0)h(p) + x(1)h(p-1) + \dots + x(p)h_p(0) = \sum_{k=0}^p x(k)h(p-k) = (h * x)(p)$$

ce qui prouve le Théorème.

**Exemple :** si  $\left(h(n)\right)_{n \geq 0} = (1; 2; -3; 0; 0; \dots)$ , et si l'on considère l'entrée  $x$  de terme général

$$x(n) = \frac{1}{2^n} U(n). \text{ Calculons l'expression de la sortie associée. Remarquons que } h = \delta + 2\delta_1 - 3\delta_2,$$

donc la sortie  $y$  associée à  $x$  a pour expression :

$$y(n) = (h * x)(n) = ((\delta + 2\delta_1 - 3\delta_2) * x)(n) = (\delta * x)(n) + 2(\delta_1 * x)(n) - 3(\delta_2 * x)(n) \text{ (propriété 2)}$$

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) - 3x(n-2) \text{ (point (iii) de la définition 5). On obtient après calculs :}$$

$$y(n) = 8\delta(n) + 6\delta(n-1) - \frac{7}{2}U(n), \text{ c'est à dire : } (y(n))_{n \geq 0} = \left(1; \frac{5}{2}; -\frac{7}{4}; -\frac{7}{8}; -\frac{7}{16}; -\frac{7}{32}; \dots\right)$$

**Définition 6** Étant donné un système discret d'écriture  $y = h * x$ , la suite  $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est appelée réponse impulsionnelle du système : c'est la réponse à l'entrée  $x = \delta$ .

On appellera réponse indicielle du système la réponse  $y_{ind}$  à l'entrée  $x = U$ . On a

$$\forall n \geq 0, y_{ind}(n) = \sum_{k=0}^n h(k).$$

**Remarque** : l'expression  $y_{ind}(n) = \sum_{k=0}^n h(k)$  est une conséquence directe du (2) de la propriété 1.

Les systèmes dont la réponse impulsionnelle ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls (comme celui donné en exemple du Théorème 1) sont particulièrement intéressants, car la sortie devient simple à calculer.

En effet, si  $(h(n))_{n \in \mathbb{N}} = (h(0); h(1); \dots; h(N); 0; 0; \dots)$  pour un certain entier naturel N, alors on peut

écrire  $h = \sum_{k=0}^N h(k) \delta_k$  donc la sortie  $y$  associée à une entrée  $x$  quelconque a pour expression

$$y(n) = (h * x)(n) = \left( \left( \sum_{k=0}^N h(k) \delta_k \right) * x \right)(n) = \sum_{k=0}^N h(k) x(n-k)$$

ce qui peut se calculer en un nombre limité d'opérations.

**Définition 7** Un système discret d'écriture  $y = h * x$  sera dit à réponse impulsionnelle finie (RIF) si la suite  $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  n'a qu'un nombre fini de termes non nuls.

Il sera dit à réponse impulsionnelle infinie (RII) sinon.

D'une certaine façon, si l'on se place du point de vue d'un numéricien, tous les systèmes numériques « concrets » sont RIF : on ne peut calculer l'expression de la sortie qu'en utilisant un nombre fini de termes de la suite  $(h(n))_{n \in \mathbb{N}}$ . Cependant, les modélisations mathématiques de systèmes numériques utilisés en physique nous amènent à travailler avec des systèmes théoriquement RII ; ainsi, pour les traiter numériquement, on doit tronquer la suite  $(h(n))_{n \in \mathbb{N}}$  en faisant comme si elle était nulle à partir d'un certain rang. La question que l'on se pose alors naturellement est la suivante : peut-on obtenir une bonne approximation numérique de la sortie en tronquant la suite  $(h(n))_{n \in \mathbb{N}}$  à partir d'un rang élevé ? La réponse est affirmative pour les systèmes dits « stables » (voir exercice 15):

**Définition 8** Un système discret est dit stable si il existe une constante  $C > 0$  telle que pour toute entrée  $x$  bornée vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}, |x(n)| \leq M$ , la sortie vérifie la condition  $\forall n \in \mathbb{N}, |y(n)| \leq C \cdot M$ . Autrement dit, nous avons  $\|y\|_{\infty} \leq C \|x\|_{\infty}$ . La plus petite constante  $C$  vérifiant cette propriété est appelée constante de stabilité du système.

Par exemple, pour un système stable de constante de stabilité égale à  $C = 2$ , on peut dire que pour toute entrée  $x$  vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}, |x(n)| \leq 1$ , la sortie associée vérifiera  $\forall n \in \mathbb{N}, |y(n)| \leq 2$ .

Pourquoi parle-t-on de stabilité ? Pour simplifier, on pourrait dire que c'est parce que pour un tel système, on peut assurer que la sortie est aussi petite que l'on veut pourvu que l'entrée soit assez petite. Ainsi, par linéarité, pour un système stable de constante de stabilité  $C > 0$ , si l'on connaît l'entrée  $x$  avec une précision de  $\varepsilon$ , la sortie sera connue avec une précision de  $C \times \varepsilon$ .

Prenons par exemple le cas d'un système stable avec  $C = 10$  et une entrée dont on sait qu'elle est constante égale à 1 avec une précision de 0,001. Cela signifie que  $\forall n \in \mathbb{N}, x(n) = U(n) + \tilde{x}(n)$  où  $\tilde{x}$  est une suite telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, |\tilde{x}(n)| \leq 0,001$ .

On a alors, par linéarité du système :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y(n) = y_{ind}(n) + \tilde{y}(n) \text{ où :}$$

$y$  est la sortie associée à  $x$

$y_{ind}$  est la réponse indicielle, c'est à dire la réponse associée à  $U(n)$

$\tilde{y}$  est la réponse associée à  $\tilde{x}$ .

Puisque le système est stable de constante de stabilité  $C = 10$ , on peut assurer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\tilde{y}(n)| \leq 0,001 \cdot C = 0,01,$$

ce qui veut dire que  $y$  est environ égale à  $y_{ind}$  avec une précision de 0,01.

Voici un premier lien entre les deux définitions précédentes :

**Propriété 3** Un système RIF est stable.

**Remarque :** la réciproque est fautive ! Un système stable n'a aucune raison d'être RIF comme on verra ultérieurement sur des exemples.

Preuve : Considérons un système discret d'écriture  $y = h * x$ . Si ce système est RIF, c'est que  $(h(n))_{n \in \mathbb{N}} = (h(0); h(1); \dots; h(N); 0; 0; \dots)$  pour un certain entier naturel  $N$ . On peut alors écrire

$$h = \sum_{k=0}^N h(k) \delta_k \text{ donc la sortie } y \text{ associée à une entrée } x \text{ quelconque a pour expression}$$

$$y(n) = (h * x)(n) = \left( \left( \sum_{k=0}^N h(k) \delta_k \right) * x \right)(n) = \sum_{k=0}^N h(k) x(n-k) \text{ comme on l'a vu plus haut.}$$

Maintenant, si  $\exists M : \forall n \in \mathbb{N}, |x(n)| \leq M$ , alors, pour tout entier naturel  $n$  on a :

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=0}^N h(k) x(n-k) \right| \leq \sum_{k=0}^N |h(k) x(n-k)| = \sum_{k=0}^N |h(k)| \cdot |x(n-k)| \leq M \sum_{k=0}^N |h(k)|$$

ce qui prouve que la sortie  $y$  est bornée. Le système est stable et la constante de stabilité  $C$  est telle que

$$C \leq \sum_{k=0}^N |h(k)|.$$

Si l'on essaye d'adapter cette preuve au cas d'un système RII, c'est la quantité  $\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)|$  qui intervient.

Cela nous amène à considérer le :

**Théorème 2** Un système discret d'écriture  $y = h * x$  est stable si, et seulement si  $h \in l^1(\mathbb{N})$ . De plus, la constante de stabilité du système est égale à  $\|h\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)|$ .

**Remarque :** on retrouve directement par ce théorème qu'un système RIF est stable.

Preuve :

(i) On prouve tout d'abord que si la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)|$  converge, alors le système est stable.

Soit  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que  $\exists M : \forall n \in \mathbb{N}, |x(n)| \leq M$ , alors on a, pour tout entier naturel  $n$  :

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=0}^n h(k) x(n-k) \right| \leq \sum_{k=0}^n |h(k)| |x(n-k)| \leq M \sum_{k=0}^n |h(k)| \leq M \sum_{k=0}^{+\infty} |h(k)|$$

ce qui prouve que la sortie est bornée. Cela étant vraie pour toute suite  $x$  bornée, le système est stable et la

constante de stabilité  $C$  est telle que  $C \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |h(k)|$ .

(\*)(ii) Prouvons maintenant que si le système est stable, alors la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)|$  converge.

Soit  $C$  la constante de stabilité du système.

On définit la suite causale  $\eta$  constituée de nombres complexes de module 1 en posant pour tout entier

naturel  $n$   $\eta(n) = \begin{cases} \frac{\overline{h(n)}}{|h(n)|} & \text{si } h(n) \neq 0 \\ 0 & \text{si } h(n) = 0 \end{cases}$  avec donc bien sûr  $\eta(n) = 0$  si  $n$  est strictement négatif. Pour  $p$

entier fixé, on définit l'entrée  $(x^{(p)}(n))_{n \geq 0} = (\eta(p); \eta(p-1); \dots; \eta(0); 0; 0; \dots)$ . Autrement dit,

$$(1) \quad x^{(p)}(n) = \eta(p-n)$$

et on remarquera que par causalité de la suite  $\eta$  on a  $\forall n > p, x^{(p)}(n) = \eta(p-n) = 0$ . Remarquons aussi que les termes de la suite  $\eta$ , donc aussi ceux de la suite  $x^{(p)}$ , sont soit nuls, soit de module égal à 1.

Soit enfin  $y^{(p)}$  la sortie associée à  $x^{(p)}$ .

D'une part, puisque  $\forall n \in \mathbb{N}, |x^{(p)}(n)| \leq 1$  alors on a par définition de  $C$  :

$$(2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, |y^{(p)}(n)| \leq C.$$

D'autre part, on a aussi  $y^{(p)} = h * x^{(p)}$  ce qui signifie que  $\forall n \in \mathbb{N}, y^{(p)}(n) = \sum_{k=0}^n x^{(p)}(k) h(n-k)$  et en faisant  $n=p$  cela donne :

$$(3) \quad y^{(p)}(p) = \sum_{k=0}^p x^{(p)}(k) h(p-k) = \sum_{k=0}^p \eta(p-k) h(p-k) \text{ d'après (1)}$$

Remarquons dans la somme ci-dessus que si  $h(p-k) = 0$ , alors  $\eta(p-k) = 0$  et donc

$$\eta(p-k) h(p-k) = 0 = |h(p-k)|, \text{ et si } h(p-k) \neq 0, \text{ alors } \eta(p-k) = \frac{\overline{h(p-k)}}{|h(p-k)|} \text{ et donc}$$

$$\eta(p-k) h(p-k) = \frac{\overline{h(p-k)}}{|h(p-k)|} \cdot h(p-k) = \frac{|h(p-k)|^2}{|h(p-k)|} = |h(p-k)|.$$

Dans tous les cas,  $\eta(p-k) h(p-k) = |h(p-k)|$  et (3) devient

$$\begin{aligned} y^{(p)}(p) &= \sum_{k=0}^p |h(p-k)| = |h(p)| + |h(p-1)| + \dots + |h(0)| \\ &= |h(0)| + \dots + |h(p-1)| + |h(p)| \end{aligned}$$

c'est à dire que :

$$y^{(p)}(p) = \sum_{k=0}^p |h(k)|.$$

En utilisant (2) avec  $n=p$  on déduit que

$$\sum_{k=0}^p |h(k)| \leq C,$$

et ce, quel que soit l'entier naturel  $p$ .

On en déduit d'une part la convergence de la série  $\sum_{p=0}^{+\infty} |h(p)|$  et d'autre part que  $\sum_{p=0}^{+\infty} |h(p)| \leq C$ .

En reprenant alors le calcul fait au (i), on en déduit que  $C \leq \sum_{p=0}^{+\infty} |h(p)|$  soit finalement la relation

$$C = \sum_{p=0}^{+\infty} |h(p)|.$$

### III) Transformation en Z

#### III.1) Généralités.

Rappelons la propriété vue dans le chapitre sur les séries entières :

**Propriété (produit de Cauchy)** On considère deux séries entières  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$  de rayons de convergence respectifs  $R_1$  et  $R_2$ . Alors, la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} [u * v]_n x^n$  a un rayon de convergence au minimum égal à  $\text{Min}(R_1, R_2)$  et pour tout complexe  $x$  tel que  $|x| < \text{Min}(R_1, R_2)$  on a :

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} [u * v]_n x^n$$

Cette propriété est très intéressante car si on l'utilise pour étudier un système discret d'écriture  $y = h * x$ , alors on a sous certaines conditions :  $\left( \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) X^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) X^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} y(n) X^n$  pour tout complexe  $X$  de module assez petit pour avoir convergence des séries. Cela permet d'obtenir une expression de la sortie  $y$ . Pour certaines raisons, on préférera travailler avec la variable  $z = \frac{1}{X}$ .

Cela aboutit à la définition suivante :

**Définition – propriété 9** Soit une suite  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs complexes. Alors :

- (i) soit il existe  $R \geq 0$  tel que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(n)}{z^n}$  converge absolument pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $|z| > R$  et diverge pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $|z| < R$ ,
- (ii) soit elle diverge pour tout nombre complexe  $z$ .

Dans le premier cas, la fonction  $z \rightarrow \text{TZ}(x)(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(n)}{z^n}$ ,  $|z| > R$  est appelée transformée en z de la suite  $x$ . Elle est définie sur  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ . Le nombre  $R$  sera appelé rayon de convergence de  $\text{TZ}(x)$  et c'est l'inverse de celui de la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) X^n$ .

Preuve :

Remarquons tout d'abord que  $z=0$  est toujours une valeur interdite.

Soit  $R_0$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) X^n$ .

Si  $R_0 = 0$ , la série entière ne peut converger que pour  $X=0$  : on voit que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(n)}{z^n}$  ne converge pour aucune valeur de  $z$ .

Si  $R_0 = +\infty$ , avec le changement de variable  $z = \frac{1}{X}$ , on voit que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(n)}{z^n}$  converge absolument pour toute valeur non nulle de  $z$ , ce qui prouve la propriété avec  $R=0$ .

Si  $R_0 \in ]0, +\infty[$  alors en utilisant les propriétés du rayon de convergence d'une série entière, la propriété est prouvée en prenant  $R = \frac{1}{R_0}$  car  $|z| > R \Leftrightarrow |X| < R_0$ .

La preuve ci-dessus nous montre que la fonction  $TZ(x)$  est définie sur un domaine non vide de  $\mathbb{C}$  si et seulement si la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)X^n$  a un rayon de convergence non nul. Une condition nécessaire et suffisante pour cela est que la suite  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{N}}$  soit à croissance au plus exponentielle, c'est à dire qu'on ait la condition :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, |x(n)| \leq M A^n.$$

En effet, si la condition ci-dessus est vérifiée, alors la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)X^n$  converge absolument pour tout nombre complexe  $X$  de module strictement inférieur à  $|A|$ , et réciproquement, s'il existe

$X_0 \in \mathbb{C}$ ,  $X_0 \neq 0$ , tel que la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)X_0^n$  converge, alors la suite  $(x(n)X_0^n)_n$  est bornée donc  $\exists M \in \mathbb{R}$  tq  $\forall n \in \mathbb{N}, |x(n)| \leq \frac{M}{|X_0|^n}$ .

Nous supposons cette condition vérifiée pour tout signal discret dans ce cours.

La principale propriété de la transformation en  $z$  (et la plus intéressante) est la suivante :

**Théorème 3.** Étant données deux suites  $x$  et  $y$  à croissance au plus exponentielle, la suite  $x * y$  l'est aussi, et on a  $TZ(x * y)(z) = TZ(x)(z) \cdot TZ(y)(z)$  pour tout nombre complexe  $z$  de module supérieur aux rayons de convergence de  $TZ(x)(z)$  et  $TZ(y)(z)$ .

Preuve : Soient  $M, N, A$  et  $B$  quatre réels strictement positifs tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, |x(n)| \leq M A^n$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, |y(n)| \leq N B^n$ .

Cette dernière inégalité restant vraie si l'on remplace  $B$  par tout nombre qui lui est supérieur, on peut supposer que  $A < B$ .

Alors, pour tout entier naturel  $n$  on a :

$$\begin{aligned} |x * y(n)| &= \left| \sum_{k=0}^n x(k)y(n-k) \right| \leq \sum_{k=0}^n |x(k)||y(n-k)| \leq M \cdot N \sum_{k=0}^n A^k B^{n-k} \\ &\leq M \cdot N \sum_{k=0}^n A^k B^n B^{-k} = M \cdot N B^n \sum_{k=0}^n A^k B^{-k} = M \cdot N B^n \cdot \sum_{k=0}^n \left(\frac{A}{B}\right)^k \\ &\leq M \cdot N |B|^n \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{A}{B}\right)^k = M \cdot N \frac{|B|^n}{1 - \frac{A}{B}} = \frac{MNB}{B-A} B^n \quad (\text{la série converge car } 0 < \frac{A}{B} < 1) \end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite  $x * y$  est à croissance au plus exponentielle.

On utilise maintenant la propriété du produit de Cauchy rappelée ci-dessus.

Soit  $R_0$  le plus petit des deux rayons de convergence des deux séries de la variable  $t$   $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$  et

$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n t^n$ . Alors on a  $R_0 > 0$  sinon le domaine de convergence de  $TZ(x)$  ou de  $TZ(y)$  serait

vide ce qui est impossible vu que les suites  $x$  et  $y$  sont à croissance au plus exponentielle. D'après la propriété du produit de Cauchy rappelée ci-dessus, pour tout complexe  $t$  tel que  $|t| < R_0$ , la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x * y)(n)t^n \text{ converge et } \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} y(n)t^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x * y)(n)t^n.$$



En considérant  $z = \frac{1}{t}$ , on obtient que

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| > \frac{1}{R_0}, \quad \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(n)}{z^n} \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y(n)}{z^n} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x * y)(n)}{z^n} \quad \text{c'est à dire que}$$

$$\text{TZ}(x * y)(z) = \text{TZ}(x)(z) \cdot \text{TZ}(y)(z) \quad \text{pour tout nombre complexe } z \text{ appartenant à l'ensemble}$$

$$\left\{ z \in \mathbb{C} / |z| > R = \frac{1}{R_0} \right\} .$$

Cette propriété est bien sûr très intéressante pour l'étude des systèmes discrets puisqu'ils sont mathématiquement définis via un produit de convolution. Cela sera étudié dans la prochaine partie de ce cours.

### III.2) Cas particuliers importants.

Commençons par la propriété suivante qui découle directement de la définition de la transformée en  $z$  :

**Propriété 4**  $\text{TZ}(\delta)$  est défini sur  $\mathbb{C}^*$  par l'expression  $\text{TZ}(\delta)(z) = 1$ .  
Plus généralement, si  $k$  est un entier naturel, alors  $\text{TZ}(\delta_k)$  est défini sur  $\mathbb{C}^*$  par l'expression

$$\text{TZ}(\delta_k)(z) = \frac{1}{z^k}.$$

De même, si  $x$  est une suite finie, elle est de la forme

$(x(n))_{n \in \mathbb{N}} = (x(0); x(1); x(2); \dots; x(N); 0; 0; \dots)$  pour un certain entier naturel  $N$ , donc  $\text{TZ}(x)$  est défini sur  $\mathbb{C}^*$  par l'expression  $\text{TZ}(x)(z) = x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \dots + \frac{x(N)}{z^N}$  c'est à dire que

$\text{TZ}(x)$  admet une expression de la forme  $\text{TZ}(x)(z) = \frac{P(z)}{z^N}$  où  $P$  est le polynôme

$$P(z) = \sum_{k=0}^N x(N-k) z^k$$

Considérons maintenant la cas de la transformée en  $Z$  d'une suite géométrique.

**Propriété 5** Soit  $a \in \mathbb{C}$  et  $x = (a^n U(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Alors  $\text{TZ}(x)(z)$  est définie sur  $\{z \in \mathbb{C} / |z| > |a|\}$  et  $\text{TZ}(x)(z) = \frac{z}{z-a}$  pour tout nombre complexe de module strictement supérieur à  $|a|$ .

**Corollaire** Soient  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{C}$  et  $x = (r^n \cos(n\theta) U(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Alors  $\text{TZ}(x)(z)$  est définie sur  $\{z \in \mathbb{C} / |z| > r\}$  et  $\text{TZ}(x)(z) = \frac{z^2 - (r \cos(\theta))z}{z^2 - 2(r \cos(\theta))z + r^2}$  pour tout nombre complexe  $z$  de module strictement supérieur à  $r$ .

Soient  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{C}$  et  $x = (r^n \sin(n\theta) U(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Alors  $\text{TZ}(x)(z)$  est définie sur  $\{z \in \mathbb{C} / |z| > r\}$  et  $\text{TZ}(x)(z) = \frac{r \sin(\theta)z}{z^2 - 2(r \cos(\theta))z + r^2}$  pour tout nombre complexe  $z$  de module strictement supérieur à  $r$ .

Preuve : La série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n}$  est une série géométrique convergente si et seulement si  $\left| \frac{a}{z} \right| < 1$  c'est à dire si

et seulement si  $|z| > |a|$  et sa somme vaut  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}$ .

Pour la preuve du corollaire : en écrivant que  $r^n \cos(n\theta) = \frac{1}{2} r^n e^{jn\theta} + \frac{1}{2} r^n e^{-jn\theta}$  (formule d'Euler) on obtient pour tout nombre complexe  $z$  de module strictement supérieur à  $r$  :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n \cos(n\theta)}{z^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n e^{jn\theta}}{z^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n e^{-jn\theta}}{z^n},$$

ce qui donne en posant  $a = r e^{j\theta}$  puis  $a = r e^{-j\theta}$  dans le résultat précédemment obtenu :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n \cos(n\theta)}{z^n} = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{z - r e^{j\theta}} + \frac{z}{z - r e^{-j\theta}} \right) = \frac{z^2 - (r \cos(\theta))z}{z^2 - 2(r \cos(\theta))z + r^2}$$

en utilisant encore les formules d'Euler.

Cela donne donc que si  $x = (r^n \cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$  alors  $\text{TZ}(x)(z)$  est définie sur  $\{z \in \mathbb{C} / |z| > r\}$  et

$$\text{TZ}(x)(z) = \frac{z^2 - (r \cos(\theta))z}{z^2 - 2(r \cos(\theta))z + r^2} \text{ pour tout nombre complexe } z \text{ de module strictement supérieur à } r.$$

La démonstration est similaire pour le cas où  $x = (r^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ .

### III.3) Propriétés importantes

On retrouve des propriétés similaires à celles de la transformation de Laplace.

La première d'entre elle découle directement de la définition de la transformée en  $Z$  et des propriétés élémentaires sur les séries vues dans les chapitres précédents :

**Propriété 6** La transformation en  $Z$  est linéaire, c'est à dire que pour toutes suites causales  $x$  et  $y$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  on a :

$$\text{TZ}(\lambda x) = \lambda \text{TZ}(x) \text{ et } \text{TZ}(\lambda x) \text{ a le même rayon de convergence que } \text{TZ}(x)$$

$\text{TZ}(x + y) = \text{TZ}(x) + \text{TZ}(y)$  et la rayon de convergence de  $\text{TZ}(x + y)$  est égal au plus grand des rayons de convergence de  $\text{TZ}(x)$  et  $\text{TZ}(y)$ .

**Exemple :** si  $x(n) = \left(1 + \frac{3}{2^n}\right) U(n)$  alors  $\text{TZ}(x) = \text{TZ}(1) + 3 \text{TZ}\left(\left(\frac{1}{2^n}\right)_n\right)$ . Les transformées en  $Z$

$\text{TZ}(1)$  et  $\text{TZ}\left(\left(\frac{1}{2^n}\right)_n\right)$  ont pour rayons de convergence respectifs 1 et  $\frac{1}{2}$  donc le rayon de

convergence de  $\text{TZ}(x)$  vaut 1 et  $\forall z \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |z| > 1, \text{TZ}(x)(z) = \frac{z}{z-1} + 3 \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{4z^2 - \frac{7}{2}z}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}$ .

Concernant les signaux retardés ou avancés nous avons les deux propriétés suivantes.

**Propriété 7** Soit  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite causale et  $k \in \mathbb{N}$ . On considère la suite  $x$  retardée de  $k$   $(x(n-k))_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Alors si  $\text{TZ}(x)$  a pour rayon de convergence  $R$ , il en est de même de  $\text{TZ}((x(n-k))_{n \in \mathbb{Z}})$  et

$$\text{TZ}((x(n-k))_{n \in \mathbb{Z}})(z) = \frac{\text{TZ}(x)(z)}{z^k}$$

**Preuve :** On a  $x = (x(0); x(1); x(2); \dots)$  donc  $((x(n-k))_{n \in \mathbb{Z}}) = (0; \dots; 0; x(0); x(1); x(2); \dots)$

avec  $k \ll 0$  au début donc  $\text{TZ}((x(n-k))_{n \in \mathbb{Z}})(z) = 0 + \frac{0}{z} + \dots + \frac{0}{z^{k-1}} + \frac{x(0)}{z^k} + \frac{x(1)}{z^{k+1}} + \frac{x(2)}{z^{k+2}} + \dots$

c'est à dire que  $\text{TZ}((x(n-k))_{n \in \mathbb{Z}})(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(n)}{z^{k+n}} = \frac{1}{z^k} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(n)}{z^n} = \frac{\text{TZ}(x)(z)}{z^k}$

et les séries ont bien sûr le même domaine de convergence.

Cette propriété permet de calculer la transformée en  $Z$  d'une suite périodique. Plutôt que de donner une formule générale, donnons la marche à suivre sur un exemple (voir aussi l'exercice 16).

Soit la suite  $x = (1; 2; 3; 1; 2; 3; 1; 2; 3; \dots)$ . Cette suite est bornée donc la transformée en  $Z$  de la suite est bien définie et possède un rayon de convergence au maximum égal à 1 :

$$\forall z \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |z| > 1, \text{TZ}(x)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(n)}{z^n}.$$

La propriété 7 nous dit que  $\text{TZ}((x(n-3))_{n \in \mathbb{Z}})$  a un rayon de convergence au maximum égal à 1 et

$$\text{TZ}((x(n-3))_{n \in \mathbb{Z}})(z) = \frac{\text{TZ}(x)(z)}{z^3}.$$

Considérant cette fois la suite  $(x(n) - x(n-3))_{n \in \mathbb{Z}} = (1; 2; 3; 0; 0; 0; \dots) = \delta + 2\delta_1 + 3\delta_3$  nous avons, en calculant leurs transformées en  $Z$  :

$$\text{TZ}(x)(z) - \frac{\text{TZ}(x)(z)}{z^3} = 1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2},$$

pour tout nombre complexe  $z$  de module strictement plus grand que 1, c'est à dire

$$\left(1 - \frac{1}{z^3}\right) \text{TZ}(x)(z) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2}$$

$$\text{d'où } \text{TZ}(x)(z) = \frac{1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2}}{1 - \frac{1}{z^3}} = \frac{z^2 + 2z + 3}{z^3 - 1}.$$

La propriété suivante est assez similaire pour des suites avancées et tronquées avant 0 :

### Propriété 8

(i) Soit  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite causale. On considère la suite  $x$  avancée de 1, c'est à dire la suite  $(x(n+1)U(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Alors si  $\text{TZ}(x)$  a pour rayon de convergence  $R$ , il en est de même de  $\text{TZ}((x(n+1)U(n))_{n \in \mathbb{Z}})$  et

$$\text{TZ}((x(n+1)U(n))_{n \in \mathbb{Z}})(z) = z \text{TZ}(x)(z) - z x(0).$$

(ii) Plus généralement, soit  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite causale. On considère la suite  $x$  avancée de  $k$ , c'est à dire la suite  $(x(n+k)U(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Alors si  $\text{TZ}(x)$  a pour rayon de convergence  $R$ , il en est de même de  $\text{TZ}((x(n+k)U(n))_{n \in \mathbb{Z}})$  et

$$\text{TZ}((x(n+k)U(n))_{n \in \mathbb{Z}})(z) = z^k \text{TZ}(x)(z) - x(0)z^k - x(1)z^{k-1} - \dots - x(k-1)z.$$

Preuve : nous ne prouvons que le point (i), la démonstration du cas général s'en déduisant par récurrence .  
 On a  $x = (x(0); x(1); x(2); \dots)$  donc  $((x(n+1)U(n))_{n \in \mathbb{Z}}) = (x(1); x(2); \dots)$  .

On a d'une part

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| > R, \quad \text{TZ}(x)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(n)}{z^n} = x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \dots + \frac{x(n)}{z^n} + \dots$$

$$= x(0) + \frac{1}{z} \cdot \left( x(1) + \frac{x(2)}{z} + \dots + \frac{x(n+1)}{z^n} + \dots \right) = x(0) + \frac{1}{z} \cdot \text{TZ}((x(n+1)U(n))_{n \in \mathbb{Z}})(z)$$

c'est à dire que

$$\text{TZ}(x)(z) = x(0) + \frac{1}{z} \cdot \text{TZ}((x(n+1)U(n))_{n \in \mathbb{Z}})(z)$$

d'où l'on déduit

$$\text{TZ}((x(n+1)U(n))_{n \in \mathbb{Z}})(z) = z \text{TZ}(x)(z) - z x(0)$$

et l'égalité des domaines de convergence des deux transformées en Z ci-dessus.

**Exemple** : calcul de la transformée en Z de la suite causale  $x$  de terme général  $x(n) = n$  pour tout entier naturel  $n$ .

Nous avons  $x = (0; 1; 2; 3; \dots)$  et  $((x(n+1)U(n))_{n \in \mathbb{Z}}) = (1; 2; 3; \dots)$  .

Le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)X^n = \sum_{n=0}^{+\infty} nX^n$  vaut 1 car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x(n+1)}{x(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \quad (\text{cf propriété 1 du chapitre sur les séries entières}), \text{ donc } \text{TZ}(x) \text{ est}$$

bien définie et a pour rayon de convergence 1.

On remarque que  $\forall n \in \mathbb{N}, x(n+1)U(n) - x(n) = (1; 1; 1; \dots) = U(n)$  donc en prenant les transformées en Z des deux membres de cette égalité et en utilisant la propriété 8, il vient :

$$z \text{TZ}(x)(z) - x(0) - \text{TZ}(x)(z) = \text{TZ}(U)(z) = \frac{z}{z-1} \quad (\text{propriété 5 avec } a=1)$$

ce qui donne :

$$(z-1) \text{TZ}(x)(z) = \frac{z}{z-1} \quad \text{d'où } \text{TZ}(x)(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad \text{pour tout nombre complexe de module strictement}$$

plus grand que 1.

Plus généralement, nous serons capables de déterminer une expression de la transformée en Z de n'importe quelle suite causale  $x$  de terme général  $x(n) = P(n)U(n)$  pour n'importe quelle fonction polynomiale P grâce à la propriété suivante :

### Propriété 9

Soit  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite causale et  $X \stackrel{\text{def}}{=} \text{TZ}(x)$  sa transformée en Z, de rayon de convergence  $R > 0$ .

Alors,

(i) la fonction  $X : ]-\infty; -R[ \cup ]R; +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  est dérivable

(ii) la suite  $(nx(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  admet une transformée en Z de même rayon R que  $X$

(iii)  $\forall z \in ]-\infty; -R[ \cup ]R; +\infty[, -z \frac{dX(z)}{dz} = \text{TZ}((nx(n))_{n \in \mathbb{Z}})(z)$  .

Preuve : On considère la série entière de la variable réelle  $t$   $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)t^n$  : son rayon de

convergence vaut donc  $\frac{1}{R}$  . On sait (propriété 7 du chapitre sur les séries entières) que la fonction S est

dérivable sur  $]-\frac{1}{R}; \frac{1}{R}[$ , que la série entière  $S_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n x(n) t^{n-1}$  a pour rayon de convergence  $\frac{1}{R}$  (propriété 5 du chapitre sur les séries entières) et que  $S'(t) = S_1(t)$  (propriété 7 du chapitre sur les séries entières). La série entière  $t.S_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n x(n) t^n$  a donc aussi pour rayon de convergence  $\frac{1}{R}$  donc, par le changement de variables  $t = \frac{1}{z}$ , on voit que la suite  $(n x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  admet une transformée en Z de rayon R ce qui prouve le point (ii).

On a  $\forall z \in ]-\infty; -R[ \cup ]R; +\infty[$ ,  $X(z) = S\left(\frac{1}{z}\right)$ .

Par composée de fonction dérivables, cela prouve que  $X : ]-\infty; -R[ \cup ]R; +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  est dérivable (ce qui prouve le point (i)) et par le théorème de dérivation des fonctions composées on a :

$$\begin{aligned} \forall z \in ]-\infty; -R[ \cup ]R; +\infty[, \quad X'(z) &= \frac{-1}{z^2} S'\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-1}{z^2} S_1\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-1}{z^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n x(n)}{z^{n-1}} \\ &= \frac{-1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n x(n)}{z^n} = \frac{-1}{z} \text{TZ}\left((n x(n))_{n \in \mathbb{Z}}\right)(z) \end{aligned}$$

ce qui donne  $\forall z \in ]-\infty; -R[ \cup ]R; +\infty[, \quad -z \frac{dX(z)}{dz} = \text{TZ}\left((n x(n))_{n \in \mathbb{Z}}\right)(z)$  : le point (ii) est prouvé.

**Exemple :** retrouvons à l'aide de cette propriété le calcul de la transformée en Z de la suite causale  $y$  de terme général  $y(n) = n$ . On applique la propriété 9 avec la suite  $x = U$  et  $R=1$ , ce qui donne que la suite  $(n U(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  admet une transformée en Z de rayon 1 et que

$$\text{TZ}\left((n U(n))_{n \in \mathbb{Z}}\right)(z) = -z \frac{dX(z)}{dz} = -z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) = -z \left( \frac{-1}{(z-1)^2} \right) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Remarque : si l'on reprend la preuve ci-dessus, la relation :

$$\forall z \in ]-\infty; -R[ \cup ]R; +\infty[, \quad X(z) = S\left(\frac{1}{z}\right)$$

et le corollaire 2 de la propriété 7 du chapitre sur les séries entières, qui dit que la fonction S est indéfiniment dérivable, on peut prouver que la fonction X est indéfiniment dérivable sur  $]-\infty; -R[ \cup ]R; +\infty[$ . Ainsi, une transformée en Z est une fonction indéfiniment dérivable.

La propriété suivante est utile pour calculer la transformée en Z de suites de la forme  $x = (a^n \cdot x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ .

### Propriété 10

Soit  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite causale et  $X \stackrel{\text{def}}{=} \text{TZ}(x)$  sa transformée en Z, de rayon de convergence  $R > 0$ . Soit  $a$  un nombre complexe non nul. Alors la transformée en Z de la suite  $(a^n \cdot x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  a pour rayon de convergence  $|a| \cdot R$  et  $\text{TZ}\left((a^n \cdot x(n))_{n \in \mathbb{Z}}\right)(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$ .

Preuve : pour tout nombre complexe de module strictement supérieur à  $|a|.R$  , on a  $\left| \frac{z}{a} \right| > R$  et

$$X\left(\frac{z}{a}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(n)}{\left(\frac{z}{a}\right)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n x(n)}{z^n} \quad \text{ce qui montre que la transformée en Z de } (a^n \cdot x(n))_{n \in \mathbb{Z}} \text{ est définie}$$

au moins pour tout nombre complexe de module strictement supérieur à  $|a|.R$  . Le calcul ci-dessus

montre que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n x(n)}{z^n}$  ne peut pas converger pour  $|z| < |a|.R$  ce qui montre que la rayon de

convergence de la transformée en Z de  $(a^n \cdot x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est exactement  $|a|.R$  et que

$$\text{TZ}\left((a^n \cdot x(n))_{n \in \mathbb{Z}}\right)(z) = X\left(\frac{z}{a}\right) \quad \text{pour tout nombre complexe de module strictement supérieur à } |a|.R .$$

Terminons par une dernière propriété qui permet de relier les valeurs de  $x(0)$  et de  $x(+\infty)$  (sous réserve d'existence et de finitude de cette limite ) à des propriétés asymptotiques de la transformée en Z de la suite.

#### ***Théorème 4 (« de la valeur initiale et finale »).***

Soit  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite causale et  $X \stackrel{\text{def}}{=} \text{TZ}(x)$  sa transformée en Z, de rayon de convergence  $R > 0$ . Alors

(i) Alors si  $|z| \rightarrow +\infty$ ,  $X(z)$  tend vers  $x(0)$ .

(ii) Supposons de plus que  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n)$  existe et soit finie. Alors  $R \leq 1$  et on a :

$$\lim_{z \in \mathbb{R}, z \rightarrow 1^+} (z-1)X(z) = l.$$

Preuve :

(i) On considère la série entière de la variable complexe  $t$  :  $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)t^n$  Son rayon de convergence

vaut  $\frac{1}{R}$  et

$$(1) : |S(t) - x(0)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x(n)t^n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x(n)| \cdot |t|^n ,$$

la série du membre de droite étant bien convergente pour tout nombre complexe  $t$  de module strictement plus petit que  $\frac{1}{R}$  car la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)t^n$  converge absolument.

L'application de la propriété 6 du chapitre sur les séries entières à la série entière  $\sum_{n=1}^{+\infty} |x(n)|t^n$  , dont le

rayon de convergence est aussi égal à  $\frac{1}{R}$  et qui est nulle pour  $t=0$  montre que  $\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} |x(n)||t|^n = 0$

donc  $\lim_{|t| \rightarrow 0} S(t) = x(0)$  grâce à (1).

Il suffit enfin de remarquer que  $X(z) = S\left(\frac{1}{z}\right)$  pour en déduire, par composition de limites, que si

$$|z| \rightarrow +\infty, \text{ alors } \frac{1}{z} \text{ tend vers } 0 \text{ (car } \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \text{ ) et } X(z) \text{ tend vers } x(0).$$

(\*) (ii) La preuve de ce point là est plus difficile car il nous faut revenir à la définition d'une limite et procéder par des inégalités assez subtiles.

Puisque  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n)$  existe et est finie, la suite  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est bornée et le rayon de convergence

de la série entière  $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)t^n$  est donc supérieur ou égal à 1. On en déduit que le rayon de

convergence de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(n)}{z^n}$  est inférieur ou égal à 1.

Supposons dans un premier temps que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = 0$ . Nous avons pour tout réel  $z$  strictement plus grand

que 1 la relation  $(z-1)X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) \frac{z-1}{z^n}$ .

L'idée ici est de découper cette somme en deux avec :

une somme finie où chaque terme peut être rendu aussi petit que l'on veut si  $z \rightarrow 1^+$  avec  $z \in \mathbb{R}$   
 une somme infinie que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut.

Soit  $\varepsilon > 0$ . On veut démontrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $\forall z \in ]1; 1+\delta[$ ,  $|(z-1)X(z)| \leq \varepsilon$ .

Le découpage de la série en deux nous invite à diviser  $\varepsilon$  par deux.

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\forall n \geq N$  on ait  $|x(n)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Soit  $z \in ]1; +\infty[$ . Alors la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z-1}{z^n}$  converge et la relation  $\forall n \geq N$ ,  $|x(n)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  montre que

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} x(n) \frac{z-1}{z^n} \right| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \left| x(n) \frac{z-1}{z^n} \right| \leq \frac{\varepsilon(z-1)}{2} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{\varepsilon(z-1)}{2} \frac{\frac{1}{z^N}}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{\varepsilon}{2z^{N-1}}$$

d'où l'on tire, :

$$(2) : \forall z \in ]1; +\infty[, \left| \sum_{n=N}^{+\infty} x(n) \frac{z-1}{z^n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors

$$(3) : \forall z \in ]1; +\infty[, \left| \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) \frac{z-1}{z^n} \right| \leq \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \frac{z-1}{z^n} \right| + \left| \sum_{n=N}^{+\infty} x(n) \frac{z-1}{z^n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|.$$

Puisque  $\lim_{z \in \mathbb{R}, z \rightarrow 1^+} (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)| = 0$  (on rappelle que  $N$  a été fixé), on peut dire qu'il existe  $\delta > 0$

tel que  $\forall z \in ]1; 1+\delta[$ ,  $(z-1) \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

On déduit alors de (3) que  $\forall z \in ]1; 1+\delta[$ ,  $|(z-1)X(z)| \leq \varepsilon$ .

Cela prouve que  $\lim_{z \in \mathbb{R}, z \rightarrow 1^+} (z-1)X(z) = 0$ .

On revient maintenant au cas général où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = l \in \mathbb{R}$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x(n) - lU(n)) = 0$  le point

précédent montre que  $\lim_{z \in \mathbb{R}, z \rightarrow 1^+} (z-1)TZ((x(n) - lU(n)))_n(z) = 0$  c'est à dire

$$0 = \lim_{z \in \mathbb{R}, z \rightarrow 1^+} (z-1) \left( X(z) - \frac{lz}{z-1} \right) = \lim_{z \in \mathbb{R}, z \rightarrow 1^+} (z-1)X(z) - l$$

d'où  $\lim_{z \in \mathbb{R}, z \rightarrow 1^+} (z-1)X(z) = l$ .

**Remarque:** pour le point (ii) de ce théorème, l'hypothèse de savoir *a priori* que la suite  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  converge vers une limite fini si  $n \rightarrow +\infty$  est indispensable. On ne peut donc pas utiliser cette propriété pour démontrer la convergence d'une suite, mais seulement pour savoir la valeur de la limite quand on sait qu'elle existe.

Par exemple, si  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}} = (2^n U(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , nous avons

$$\lim_{z \in \mathbb{R}, z \rightarrow 1^+} (z-1)X(z) = \lim_{z \in \mathbb{R}, z \rightarrow 1^+} (z-1) \cdot \frac{z}{z-2} = 0 \quad \text{et pourtant} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = +\infty !$$

## IV) Application de la transformation en Z aux systèmes

### IV.1) Transformation en Z inverse

On considère un système discret d'écriture  $y = h * x$  où  $h$  est une suite causale à croissance au plus exponentielle et  $x$  est une entrée quelconque à croissance au plus exponentielle. D'après le Théorème 3, la suite  $y = x * h$  est aussi à croissance exponentielle, et nous pouvons calculer  $\text{TZ}(y)(z)$  qui est égal à  $\text{TZ}(x)(z) \cdot \text{TZ}(h)(z)$  pour tout nombre complexe  $z$  de module supérieur aux rayons de convergence de  $\text{TZ}(x)(z)$  et  $\text{TZ}(h)(z)$ .

Notre problème revient donc à retrouver la suite  $y$  à partir de la connaissance de  $\text{TZ}(y)(z)$ . Si nous arrivions à écrire la fonction  $\text{TZ}(y)(z)$  sous la forme  $\text{TZ}(y)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n} \stackrel{\text{def}}{=} \text{TZ}((a_n)_{n \in \mathbb{N}})(z)$ , nous serions tentés d'identifier la suite  $y$  à  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mais pour cela, il faudrait être capable de justifier que si  $\text{TZ}(y)(z) = \text{TZ}((a_n)_{n \in \mathbb{N}})(z)$  pour tout nombre complexe de module assez grand, alors  $y = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Cela est rendu possible grâce au

**Théorème 5** Supposons que l'on ait deux suites causales  $x$  et  $y$  à croissance au plus exponentielle telles que  $\forall z \in ]-\infty; -R[ \cup ]R; +\infty[$ ,  $\text{TZ}(x)(z) = \text{TZ}(y)(z)$  pour un certain  $R > 0$ , alors les suites  $x$  et  $y$  sont égales.

Preuve: On a  $\forall z \in ]-\infty; -R[ \cup ]R; +\infty[$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} y(n) \frac{1}{z^n}$  donc en posant  $t = \frac{1}{z}$ , on obtient  $\forall t \in ]-\frac{1}{R}; 0[ \cup ]0; +\frac{1}{R}[$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} y(n) t^n$ .

En faisant tendre  $t$  vers 0 et en utilisant la propriété 6 du chapitre sur les séries entières, on en déduit que  $\forall t \in ]-\frac{1}{R}; +\frac{1}{R}[$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} y(n) t^n$ . La propriété 8 du chapitre sur les séries entières permet alors d'affirmer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x(n) = y(n)$ .



**Exemple :** Considérons une suite causale  $x$  dont on sait que la transformée en  $Z$  a pour expression

$X(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2}$  pour tout nombre complexe  $z$  de module assez grand. Si on arrive à trouver une suite

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\text{TZ}((a_n)_{n \in \mathbb{N}})(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2}$ , alors le Théorème 5 permettra d'affirmer que

$x = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Il reste à trouver la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Une façon de faire est de chercher la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle  $\frac{X(z)}{z}$ .

En effet, on a pour tout nombre complexe de module assez grand :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z(z^2 - z - 2)} = \frac{1}{z(z-2)(z+1)} = \frac{-1}{z} + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+1}$$

d'où

$$X(z) = \frac{1}{z(z^2 - z - 2)} = \frac{1}{6} \left( -3 + \frac{z}{z-2} + \frac{2z}{z+1} \right),$$

c'est à dire, par linéarité de la transformation en  $Z$  et en utilisant les propriétés 4 et 5:

$$X(z) = \frac{1}{6} \left( \text{TZ}(-3\delta(n) + 2^n U(n) + 2(-1)^n U(n))_{n \in \mathbb{Z}} \right)(z).$$

On déduit alors du Théorème 5 que  $\forall n \in \mathbb{N}, x(n) = -3\delta(n) + 2^n + 2(-1)^n$ .

**Définition 10** Étant donnée une fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{C}$  ou sur une partie de  $\mathbb{C}$ , on appelle l'original de  $F$  (par la transformation en  $Z$ ) une suite causale  $x$  telle que  $\text{TZ}(x)(z) = F(z)$  pour tout nombre complexe  $z$  de module assez grand. Une telle suite  $x$  est unique d'après le théorème ci-dessus, ce qui permet de parler de l'original de  $F$  et non pas d'un original de  $F$ .

**Remarque importante :** Beaucoup de fonctions  $F$  n'ont pas d'original. Une condition nécessaire (mais non suffisante) pour qu'une fonction  $F$  admette un original est que si  $|z| \rightarrow +\infty$ ,  $F(z)$  tende vers une valeur finie (voir Théorème 4 (i)). Par exemple, une fonction aussi simple que celle définie par l'expression  $F(z) = z^{-n}$  n'a pas d'original.

En revanche, on a la

**(\*Propriété 11** Soit  $F(z)$  une fraction rationnelle de la variable  $z$  telle que  $\deg(F) \leq 0$  et soit  $R$  le plus grand module de ses pôles (on pose  $R=0$  si  $F(z)$  n'a pas de pôle, ce qui ne peut arriver que dans le cas où  $F(z)$  est une constante).

Alors,  $F$  possède un original  $x$  tel que  $\text{TZ}(x)(z) = F(z)$  pour tout nombre complexe  $z$  de module strictement plus grand que  $R$ .

**Remarque :** la propriété dit deux choses différentes :

l'existence de l'original  $x$  de  $F(z)$

et le fait que la relation  $\text{TZ}(x)(z) = F(z)$  est vraie pour tout nombre complexe  $z$  de module strictement plus grand que  $R$ , ce qui est plus précis que « pour  $|z|$  assez grand ».

L'exemple qui suit le Théorème 5 avec  $F(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2}$ ,  $\deg(F) = -2 \leq 0$  et  $R=2$ , montre la méthode générale qui permet de trouver explicitement l'original d'une fraction rationnelle de degré négatif.

Preuve : Considérons la fraction rationnelle  $G(z) = \frac{F(z)}{z}$ . On a  $\deg(G) < 0$  donc sa décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}[z]$  est de la forme :

$$G(z) = \sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k}{(z-a_k)^{p_k}} \quad \text{où } p \in \mathbb{N}^*, \alpha_k, a_k \in \mathbb{C} \text{ et } p_k \in \mathbb{N}^* .$$

On a ainsi  $F(z) = \sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k z}{(z-a_k)^{p_k}}$  où chaque  $a_k$  est soit nul, soit un pôle de  $F(z)$ .

Par linéarité de la transformation en Z, il suffit de prouver que chaque fonction de la forme

$z \rightarrow \frac{z}{(z-a_k)^{p_k}}$  admet un original dont la transformée en Z est égale à  $\frac{z}{(z-a_k)^{p_k}}$  pour tout nombre complexe de module strictement supérieur à  $|a_k|$ .

On est donc amené à prouver le résultat suivant :

*Pour tout nombre complexe a et pour tout entier naturel non nul p, la fonction  $z \rightarrow \frac{z}{(z-a)^p}$  admet un*

*original dont la transformée en Z est égale à  $\frac{z}{(z-a)^p}$  pour tout nombre complexe de module strictement supérieur à  $|a|$ .*

On procède par récurrence sur p. Pour  $p=1$ , le résultat correspond exactement à la propriété 5.

Supposons que la fonction  $z \rightarrow \frac{z}{(z-a)^p}$  admette un original x dont la transformée en Z est égale à

$$\frac{z}{(z-a)^p} \quad \text{pour tout nombre complexe de module strictement supérieur à } |a|.$$

Définissons la suite y par l'expression  $y(n) = a^{n-1} U(n-1)$ .

Alors, d'après la propriété 5 combinée au Théorème du retard (propriété 7),  $\text{TZ}(y)(z) = \frac{1}{z-a}$  pour tout nombre complexe de module strictement supérieur à  $|a|$ . Le Théorème 3 dit alors que  $\text{TZ}(x * y)(z)$  est aussi définie pour tout nombre complexe de module strictement supérieur à  $|a|$  et on a

$$\text{TZ}(x * y)(z) = \text{TZ}(x)(z) \cdot \text{TZ}(y)(z) = \frac{z}{(z-a)^p} \cdot \frac{1}{z-a} = \frac{z}{(z-a)^{p+1}} \quad \text{donc } x * y \text{ est l'original de}$$

$\frac{z}{(z-a)^{p+1}}$  et sa transformée en Z est définie pour tout nombre complexe de module strictement supérieur à  $|a|$ . Cela prouve la propriété au rang  $p+1$  et achève la récurrence.

## IV.2) Application aux systèmes discrets.

On considère un système discret d'écriture  $y = h * x$  où h est une suite causale à croissance au plus exponentielle et x est une entrée quelconque à croissance au plus exponentielle.

**Définition 11** On appelle fonction de transfert du système la fonction  $z \rightarrow H(z) \stackrel{\text{def}}{=} \text{TZ}(h)(z)$ .

Le rôle important de cette fonction, qui est en quelque sorte la « carte d'identité » du système, est donnée par la propriété suivante qui est une conséquence directe du Théorème 3 :

**Propriété 12** Pour toute entrée causale, la transformée en Z de la sortie y est donnée par la relation  $Y(z) = H(z)X(z)$  pour tout nombre complexe de module assez grand.

L'intérêt de cette formule est bien sûr de pouvoir trouver la sortie  $y$  en calculant l'original de la fonction  $H(z)X(z)$ .

Reprenons l'exemple qui suit le Théorème 1. Considérons donc le cas d'un système de réponse impulsionnelle  $(h(n))_{n \geq 0} = (1; 2; -3; 0; 0; \dots)$ , c'est à dire  $h = \delta + 2\delta_1 - 3\delta_2$ , considérons l'entrée

$x(n) = \frac{1}{2^n} U(n)$ . Calculons l'expression de  $y$ , la sortie associée. On a pour tout nombre complexe de

module strictement supérieur à 2  $X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$  et  $H(z) = 1 + \frac{2}{z} - \frac{3}{z^2}$  donc

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{H(z)X(z)}{z} = \frac{1}{z - \frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{2}{z} - \frac{3}{z^2} \right) = \frac{z^2 + 2z - 3}{z^2 \left( z - \frac{1}{2} \right)} = \frac{8}{z} + \frac{6}{z^2} - \frac{7}{z - \frac{1}{2}}$$

d'où  $Y(z) = 8 + \frac{6}{z} - \frac{7z}{z - \frac{1}{2}}$  ce qui permet de trouver  $y$  l'original de  $Y(z)$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y(n) = 8\delta(n) + 6\delta(n-1) - \frac{7}{2^n}, \text{ ce qui correspond bien à ce que l'on avait précédemment}$$

trouvé dans l'exemple suivant le Théorème 1.

### IV.3) Systèmes définis par des équations aux différences.

On se place dans le cas très fréquent où la fonction de transfert  $H(z)$  est une fraction rationnelle, c'est à dire que  $H(z)$  admet une expression de la forme  $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  avec  $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ .

Par le Théorème 4(i), il est nécessaire que si  $|z| \rightarrow +\infty$ ,  $H(z)$  tende vers une valeur finie (voir Théorème 4 (i)). Cela implique que  $\deg(H(z)) \leq 0$ . Et, réciproquement, par la propriété 11, on peut affirmer que  $H(z)$  peut être égale à n'importe quelle fraction rationnelle de degré négatif ou nul et  $H(z) = \text{TZ}(h)(z)$  pour tout nombre complexe  $z$  dont le module est strictement plus grand que  $R$ , où  $R$  est le plus grand module des pôles de  $H(z)$ .

Nous allons voir que dans ce cas, le système peut s'écrire sous une forme particulière, appelée équation aux différences, qui est particulièrement bien adaptée aux calculs numériques.

Si  $H(z)$  est une fraction rationnelle de degré négatif ou nul, alors

$$H(z) = \frac{a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \dots + a_0}{z^p + b_{p-1} z^{p-1} + \dots + b_0} \text{ où } p \text{ est un entier naturel et les } a_i \text{ et } b_j \text{ sont des nombres}$$

complexes.

Bien sûr, si le degré de  $H(z)$  n'est pas nul, c'est à dire si  $\deg(H(z)) < 0$  nécessairement  $a_p = 0$ .

Nous avons donc, pour tout nombre complexe de module assez grand :  $Y(z) = H(z)X(z)$

où  $X(z)$  et  $Y(z)$  sont les transformées en  $Z$  des suites  $x$  et  $y$ . Cela donne :

$$Y(z) = X(z)H(z) = X(z) \cdot \frac{a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \dots + a_0}{z^p + b_{p-1} z^{p-1} + \dots + b_0}$$

d'où

$$Y(z)(z^p + b_{p-1} z^{p-1} + \dots + b_0) = X(z) \cdot (a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \dots + a_0)$$

soit, après division par  $z^p$ :

$$Y(z) \left( 1 + \frac{b_{p-1}}{z} + \dots + \frac{b_0}{z^p} \right) = X(z) \cdot \left( a_p + \frac{a_{p-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^p} \right)$$

c'est à dire

$$Y(z) + \frac{b_{p-1}}{z} Y(z) + \dots + \frac{b_0}{z^p} Y(z) = a_p X(z) + \frac{a_{p-1}}{z} X(z) + \dots + \frac{a_0}{z^p} X(z).$$

En utilisant la propriété 7 on obtient que les suites de terme général :

$$y(n) + b_{p-1} y(n-1) + \dots + b_0 y(n-p), \quad n \in \mathbb{Z}$$

et

$$a_p x(n) + a_{p-1} x(n-1) + \dots + a_0 x(n-p), \quad n \in \mathbb{Z}$$

ont les mêmes transformées en Z (toujours pour tout nombre complexe de module assez grand) ce qui implique, via le Théorème 5 que

$$(E) : \forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) + b_{p-1} y(n-1) + \dots + b_0 y(n-p) = a_p x(n) + a_{p-1} x(n-1) + \dots + a_0 x(n-p)$$

Cette équation est appelée équation aux différences associée au système. Elle constitue un procédé commode (c'est à dire facilement programmable) permettant de calculer la sortie connaissant l'entrée et la fonction de transfert.

On pourrait démontrer, en remontant les calculs ci-dessus, que réciproquement, la relation (E) permet de

définir un système de fonction de transfert 
$$H(z) = \frac{a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \dots + a_0}{z^p + b_{p-1} z^{p-1} + \dots + b_0}.$$

**Remarque :** Expliquons la terminologie « équation aux différences ». L'origine de cette expression vient du fait que ce type d'équation est souvent obtenu par discrétisation d'une équation différentielle. Reprenons l'exemple donné en introduction de la section II où l'on a discrétisé l'équation différentielle

$$\tau g'(t) + g(t) = f(t), \quad \text{en gardant les mêmes notations. La quantité } g'(t) \text{ calculée au point}$$

$$t = nh \text{ avait alors été approximée par la quantité } \frac{y(n) - y(n-1)}{h} \text{ qui correspond bien à la différence}$$

entre deux valeurs consécutives de la suite  $y$ . On avait alors obtenu l'équation aux différences

$$y(n) - \frac{\tau}{\tau + h} y(n-1) = \frac{h}{\tau + h} x(n) \quad \text{qui définit bien un système discret de fonction de transfert}$$

$$H(z) = \frac{\frac{hz}{\tau + h}}{z - \frac{h}{\tau + h}} = \frac{hz}{(\tau + h)z - h}.$$

**Exemple :** considérons le système défini par la fonction de transfert  $H(z) = \frac{2z+3}{z^2+z+1}$ . On a donc

$$p=2, \quad a_2=0, \quad a_1=2, \quad a_0=3 \quad \text{et} \quad b_1=b_0=1. \quad \text{L'équation aux différences est donnée par}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) + y(n-1) + y(n-2) = 2x(n-1) + 3x(n-2) \quad \text{ce qui donne la relation}$$

$$(1) : \forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = 2x(n-1) + 3x(n-2) - y(n-1) - y(n-2)$$

Cette formule constitue un procédé récursif permettant de calculer une réponse à un système. Par exemple, calculons les premiers termes de sa réponse indicielle (c'est à dire avec  $x(n) = U(n)$ ) : on utilise (1) successivement avec  $n=0, 1, 2, 3, \dots$  et on utilise le fait que les suites  $x$  et  $y$  sont causales :

$$y(0) = 2U(-1) + 3U(-2) - y(-1) - y(-2) = 0$$

$$y(1) = 2U(0) + 3U(-1) - y(0) - y(-1) = 2$$

$$y(2) = 2U(1) + 3U(0) - y(1) - y(0) = 5 - y(1) = 3$$

$$y(3) = 2U(2) + 3U(1) - y(2) - y(1) = 5 - y(2) - y(1) = 5 - 3 - 2 = 0$$

$$y(4) = 2U(3) + 3U(2) - y(3) - y(2) = 5 - y(2) - y(1) = 5 - 0 - 3 = 2$$

etc....

On peut conjecturer que  $(y(n))_{n \in \mathbb{N}} = (0; 2; 3; 0; 2; 3; 0; 2; 3; \dots)$  ce qui pourra être démontré en exercice (voir par exemple le raisonnement utilisé dans l'exercice 16).

Nous avons deux cas particuliers importants de systèmes définis par des équations aux différences, correspondant aux cas  $p=1$  et  $p=2$  :

**Définition 12.**

On appelle système d'ordre 1 tout système dont la fonction de transfert est de la forme  $H(z) = \frac{az + b}{z + c}$

avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

On appelle système d'ordre 2 tout système dont la fonction de transfert est de la forme

$$H(z) = \frac{az^2 + bz + c}{z^2 + dz + e} \quad \text{avec } a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

Ces systèmes sont de première importance car ils sont facilement réalisables, et peuvent être associés pour réaliser des systèmes plus complexes, tant que la fonction de transfert  $H(z)$  reste rationnelle de degré inférieur ou égal à 0, ce qui est quasiment toujours le cas en pratique. Cela résulte du Théorème de décomposition d'un polynôme en produit de polynômes irréductibles.

Par exemple, considérons le cas où l'on a un système  $(S)$  défini par la fonction de transfert

$$H(z) = \frac{z(z-1)(z+2)}{(z-2)^2(z^2+z+1)}. \quad \text{On peut écrire (par exemple) } H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot H_3(z) \quad \text{avec}$$

$$H_1(z) = \frac{z}{z-2}, \quad H_2(z) = \frac{z-1}{z-2} \quad \text{et} \quad H_3(z) = \frac{z+2}{z^2+z+1}.$$

Les fonctions  $H_1$  et  $H_2$  définissent les fonctions de transfert de deux systèmes d'ordre 1 (qu'on appellera  $(S_1)$  et  $(S_2)$ ) tandis que la fonction  $H_3$  définit un système d'ordre 2 (disons  $(S_3)$ ). Alors, le système  $(S)$  est la composée des trois systèmes  $(S_1), (S_2)$  et  $(S_3)$  c'est à dire que si

$$x(n) \xrightarrow{(S)} y(n) \quad \text{et si} \quad x(n) \xrightarrow{(S_1)} x_1(n) \xrightarrow{(S_2)} x_2(n) \xrightarrow{(S_3)} x_3(n) \quad \text{alors} \quad y = x_3.$$

En effet, pour tout nombre complexe de module assez grand on a :

$$X_3(z) = H_3(z) X_2(z) = H_3(z) (H_2(z) X_1(z)) = H_3(z) (H_2(z) (H_1(z) X(z)))$$

$$X_3(z) = (H_3(z) \cdot H_2(z) \cdot H_1(z)) X(z) = H(z) X(z) = Y(z).$$

On comprend alors aisément que l'on peut construire tout système de fonction de transfert rationnelle, aussi complexe soit-il, par composition de systèmes d'ordre 1 ou d'ordre 2. La règle étant alors que lorsqu'on compose des systèmes, leurs fonctions de transfert se multiplient. On remarquera aussi que cela est toujours possible grâce au théorème de factorisation des polynômes à coefficients réels en produit de polynômes de degré 1 ou de degré 2 avec discriminant négatif.

On termine cette section par une caractérisation (très importante en pratique) des systèmes stables via l'étude de la fonction de transfert, qui est beaucoup plus facilement utilisable et pratique que celle donnée par le théorème 2.

**Théorème 6** On considère un système  $(S)$  de fonction de transfert rationnelle  $H(z) \in \mathbb{C}(z)$ . Alors le système  $(S)$  est stable si et seulement si **tous** les pôles de  $H(z)$  sont de module strictement inférieur à 1.

**Remarque :**

Une conséquence utile qui découle directement de ce Théorème et du Théorème 2 est que l'original  $x$  d'une fraction rationnelle dont tous les pôles sont de module strictement inférieur à 1 vérifie  $x \in l^1(\mathbf{N})$  : en particulier,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = 0$ .

**Exemples :**

(1) Si l'on considère le système défini par l'équation aux différences

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2) = x(n-2)$$

alors sa fonction de transfert vaut  $H(z) = \frac{z}{z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}}$ . Les pôles de cette dernière sont solutions de

l'équation  $z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0$  et valent donc  $\frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{4}$  : leur module vaut  $\frac{1}{2} < 1$  donc le système est stable.

(2) Si l'on considère le système défini par l'équation aux différences

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) + y(n-3) = x(n) \quad \text{alors sa fonction de transfert vaut}$$

$$H(z) = \frac{z^3}{z^3 + \frac{1}{2}z^2 + 1}$$

Les pôles de cette dernière sont solutions de l'équation  $z^3 + \frac{1}{2}z^2 + 1 = 0$ . Si

l'on considère  $a_1, a_2$  et  $a_3$  les trois racines complexes du polynôme  $P(X) = X^3 + \frac{1}{2}X^2 + 1$  (c'est à dire les pôles de la fonction de transfert), on a  $X^3 + \frac{1}{2}X^2 + 1 = (X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)$  donc en posant  $X = 0$ , on obtient  $a_1 a_2 a_3 = -1$  d'où  $|a_1||a_2||a_3| = 1$  : au moins un des modules des trois pôles n'est pas strictement inférieur à 1 donc le système n'est pas stable.

**(\*) Preuve du Théorème 6 :**

(i) Supposons que tous les pôles de  $H(z)$  soient de module strictement inférieur à 1. Si l'on considère  $R$  le plus grand module de ses pôles, alors  $R < 1$  et d'après la propriété 11, la transformée en Z de la réponse impulsionnelle  $h$  est égale à  $H(z)$  pour tout nombre complexe de module strictement plus grand que  $R$ . Puisque  $R < 1$ , alors la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h(n)}{z^n}$  converge absolument pour  $z=1$  (par définition du rayon de convergence), donc  $\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)|$  converge et le système est stable par le Théorème 2.

(ii) Supposons que le système soit stable. Alors, la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)|$  converge (Théorème 2) ce qui implique que la suite  $(h(n))_{n \in \mathbf{N}}$  est bornée et tend vers 0. Il vient alors que pour tout nombre complexe  $z$  de module strictement plus grand que 1, la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h(n)}{z^n}$  converge. On en déduit que  $R$ , le rayon de convergence de la transformée en Z de  $h$  est tel que  $R \leq 1$ . La propriété 11 implique alors que tous les pôles de  $H(z)$  ont un module inférieur ou égal à 1. Il reste à démontrer que  $H(z)$  n'a pas de pôle de module égal à 1. On raisonne par l'absurde et l'on suppose que  $H(z)$  possède un pôle de la forme  $z = e^{j\theta}$ . Considérons alors la suite  $g$  de terme général  $g(n) = e^{-jn\theta} h(n)$ . Alors d'après la propriété 10, la suite  $g$  admet une transformée en Z, définie pour tout nombre complexe de module strictement plus grand que 1 et l'on a :

$G(z) = H(e^{j\theta} z)$ . On a clairement  $G \in \mathbf{C}(z)$  et admet 1 comme pôle, donc  $G(z)$  est de la forme  $G(z) = \frac{K(z)}{(z-1)^k}$  où  $k \in \mathbf{N}^*$  et  $K \in \mathbf{C}(z)$  n'admet pas 1 comme pôle et est tel que

$K(1) \neq 0$  ( $k$  est l'ordre du pôle 1).

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(n) = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = 0$  et le Théorème 4 implique que

$$0 = \lim_{z \in \mathbf{R}, z \rightarrow 1^+} (z-1)G(z) = \lim_{z \in \mathbf{R}, z \rightarrow 1^+} \frac{K(z)}{(z-1)^{k-1}}, \text{ d'où, puisque } k \geq 1,$$

$$0 = \lim_{z \in \mathbf{R}, z \rightarrow 1^+} K(z) = K(1) \text{ par continuité de la fonction } K \text{ en } z=1, \text{ ce qui contredit la relation}$$

$K(1) \neq 0$ . On en déduit que tous les pôles de  $H(z)$  ont un module strictement plus petit que 1.

## V) Exercices

### Exercice 1

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On considère la suite  $x = \left( \frac{n^2}{n^\alpha + n + 1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- 1) Pour quelles valeurs du paramètre  $\alpha$  a-t-on  $x \in l^1(\mathbb{N})$  ?
- 2) Pour quelles valeurs du paramètre  $\alpha$  a-t-on  $x \in l^\infty(\mathbb{N})$  ?

### Exercice 2

On considère la suite  $x = (2^n U(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Trouver trois constantes réelles telles que  $\forall n \in \mathbb{Z}, x(n-2) + 3x(n-1) = a\delta(n) + b\delta(n-1) + cx(n)$ .

### Exercice 3

1) Démontrer que la suite  $x = (nU(n-1)U(5-n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite causale finie et l'exprimer comme une somme de Diracs.

2) Même question pour la suite  $x = (nU(n) + 2nU(n-2) - 3nU(n-5))_{n \in \mathbb{Z}}$

### Exercice 4

On considère deux suites causales  $x$  et  $y$  de longueurs finies respectives  $N$  et  $M$  (c'est à dire que  $\forall n \geq N, x(n) = 0$  et  $\forall n \geq M, y(n) = 0$ ).

- 1) Soit  $n$  un entier naturel et soit un entier  $k$  vérifiant  $0 \leq k \leq n$ . Montrer que  $x(k)y(n-k) \neq 0 \Rightarrow n - M < k < N$ .
- 2) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  vérifiant  $n \geq N + M$  et pour tout entier  $k$  vérifiant  $0 \leq k \leq n$ , on a  $x(k)y(n-k) = 0$ .
- 3) En déduire que la suite  $x * y$  est de longueur finie.

### Exercice 5

Écrire les 6 premiers termes de chacune des suites suivantes :

- a)  $(2^n U(n-3))_{n \in \mathbb{N}}$
- b)  $(2^{n-3} U(n-3))_{n \in \mathbb{N}}$
- c)  $(2^{n-3} U(n))_{n \in \mathbb{N}}$

### Exercice 6

Expliquer pourquoi les procédés ci-dessous ne définissent pas un système discret remplissant toutes les conditions de la définition 5 du cours.

- 1) Pour toute entrée causale  $x$ , on définit la suite  $y$  par la relation :  $\forall n \in \mathbb{Z}, y(n-1) = x(n) + x(n-1)$ .
- 2) Pour toute entrée causale  $x$ , on définit la suite  $y$  par la relation :  $\forall n \in \mathbb{Z}, y(n) = \frac{1}{2}(x(n))^2$
- 3) Pour toute entrée causale  $x$ , on définit la suite  $y$  par la relation :  $\forall n \in \mathbb{Z}, y(n) = 2^n x(n)$

(pour ce dernier cas, on pourra comparer les suites  $y$  obtenues quand  $x = (U(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $x = (U(n-1))_{n \in \mathbb{Z}}$ .)



### Exercice 7

Calculer directement à partir de la définition du produit de convolution une expression de  $x * y(n)$  où  $x = (3^n U(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $y = \left(\frac{1}{2^n} U(n)\right)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

### Exercice 8

On considère un système stable de réponse impulsionnelle  $h$ .

- 1) Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(n) = 0$ .
- 2) On considère  $y_{ind}$  la réponse impulsionnelle du système.
  - a) Rappeler la relation entre  $y_{ind}$  et  $h$ .
  - b) Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{ind}(n)$  existe est finie
  - c) On suppose que  $H(z)$ , la fonction de transfert du système, est une fraction rationnelle. Justifier que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{ind}(n) = H(1)$ .

### Exercice 9

On considère un système de réponse impulsionnelle  $h$  et de fonction de transfert égale à  $H(z)$ . Démontrer que le système est RIF si et seulement si la fonction de transfert est de la forme

$$H(z) = \frac{P(z)}{z^k} \text{ où } P \text{ est un polynôme que l'on explicitera à l'aide de } h.$$

### Exercice 10

Calculer les transformées en Z des suites  $x$  suivantes :

- 1)  $x(n) = \left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) U(n)$
- 2)  $x(n) = n U(n)$
- 3)  $x(n) = \sin\left(n \frac{\pi}{3}\right) U(n)$
- 4)  $x(n) = (1; 2; 1; 2; 1; 2; 1; 2; \dots)$
- 5)  $x(n) = \frac{2 U(n)}{1 + 3 U(n-3)}$
- 6)  $x(n) = \frac{n}{2^n} U(n)$
- 7)  $x(n) = \frac{1}{5^n} \cos(n\theta) U(n), \quad \theta \in \mathbb{R}$

### Exercice 11

Soit  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite causale et  $X = \text{TZ}(x)$  sa transformée en Z, de rayon de convergence  $R > 0$ . On pose  $y = (n^2 x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ .

- 1) Montrer que la suite  $y$  admet une transformée en Z (que l'on notera Y) de rayon de convergence R et montrer que  $\forall z \in ]-\infty; -R[ \cup ]R; +\infty[$ ,  $Y(z) = z \frac{dX}{dz}(z) + z^2 \frac{d^2 X}{dz^2}(z)$ .
- 2) En déduire une expression de la transformée en Z de la suite  $y = (n^2 U(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  pour tout nombre complexe de module strictement plus grand que 1.
- 3) Déduire des questions précédentes la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$ .

### Exercice 12

Trouver les originaux des fonctions suivantes et déterminer leur rayon de convergence.

- 1)  $F(z) = \frac{1}{z+1}$
- 2)  $F(z) = \frac{z}{(z-1)\left(z + \frac{2}{3}\right)}$
- 3)  $F(z) = \frac{1}{z^p(z-2)}, \quad p \in \mathbb{N}$
- 4)  $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{2n}}$
- 5)  $F(z) = \frac{z+3}{z^2-4z+3}$
- 6)  $F(z) = \frac{2z+1}{z^2+1}$
- 7)  $F(z) = \frac{z^2}{z^2-z+1}$
- 8)  $F(z) = \frac{2z}{z^3+1}$
- 9)  $F(z) = \frac{z^4+1}{z^4-4z^3}$
- 10)  $F(z) = \frac{z^3}{(z-1)(z-2)(z-3)}$

### Exercice 13

Le but de cet exercice est de prouver qu'il n'existe pas de suite causale  $x$  telle que  $X(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$  pour tout nombre réel  $z$  assez grand.

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une suite causale  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  et un réel  $R > 0$  tels que  $X(z)$ , la transformée en  $Z$  de  $x$ , vérifie  $\forall z \in ]R; +\infty[$ ,  $X(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ .

On pose  $y = x * x$ .

- 1) Calculer une expression de  $Y(z)$ , la transformée en  $Z$  de  $y$ , pour  $z \in ]R; +\infty[$ . En déduire une expression de  $y$ .
- 2) Aboutir à une contradiction en calculant  $y(0)$  et  $y(1)$ .
- 3) Adapter la méthode précédente pour prouver qu'il n'existe pas de suite causale  $x$  telle que

$$X(z) = \frac{1}{z\sqrt{z}} \text{ pour tout nombre } \underline{\text{réel}} \text{ } z \text{ assez grand.}$$

### Exercice 14

On considère la suite  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1, u_1 = 4$  et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n \text{ pour tout entier naturel } n.$$

- 1) Calculer  $u_2, u_3$  et  $u_4$ .
- 2) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 4$ .

On définit la suite causale  $x$  par l'expression  $x(n) = u_n U(n)$  et la suite  $y$  par l'expression

$$y(n) = x(n) - \frac{2}{3}x(n-1) - \frac{1}{3}x(n-2).$$

- 3) Dédire du 2) que  $X(z)$ , la transformée en  $Z$  de  $x$ , est définie pour tout nombre complexe de module strictement plus grand que 1.
- 4) Montrer que  $y$  est une suite finie que l'on exprimera comme une somme de Diracs retardés.
- 5) Exprimer  $Y(z)$ , la transformée en  $Z$  de  $y$ , en fonction de  $X(z)$ .
- 6) En déduire une expression de  $X(z)$ , puis celle de  $x(n)$ .

### Exercice 15

On considère un système discret  $(S)$  stable de réponse impulsionnelle  $h$ . Pour tout entier naturel non nul  $p$ , on définit le signal  $h_p$  par l'expression  $h_p(n) = (1 - U(n-p))h(n)$  et le système discret  $(S_p)$  de réponse impulsionnelle  $h_p$ .

Soit  $x \in l^\infty(\mathbb{N})$  et soit  $y$  la sortie de  $x$  via le système  $(S)$  et  $y_p$  la sortie de  $x$  via le système  $(S_p)$ .

- 1) Montrer que  $y \in l^\infty(\mathbb{N})$  et que pour tout entier naturel  $p$  on a  $y_p \in l^\infty(\mathbb{N})$ .
- 2) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  et tout entier naturel  $p$  on a

$$|y(n) - y_p(n)| \leq \left( \sum_{k=p}^{+\infty} |h(k)| \right) \|x\|_\infty.$$

En déduire qu'un système stable peut être approximé aussi précisément que l'on veut par un système RIF.

3) Application : soit un système  $(S) : x \rightarrow y$  de réponse impulsionnelle  $h$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |h(n)| \leq \frac{3}{10^n}. \text{ Trouver et décrire un système RIF } (\tilde{S}) : x \rightarrow \tilde{y} \text{ tel que pour toute entrée}$$

$$x \in l^\infty(\mathbb{N}), \text{ l'on ait } \|y - \tilde{y}\|_\infty \leq \frac{1}{100} \|x\|_\infty.$$

### Exercice 16

Le but de cet exercice est de trouver une expression de l'original de  $F(z) = \frac{a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_{p-1} z}{z^p - 1}$

où  $p$  est un entier naturel non nul et  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{C}$ .

Soit  $x$  l'original de  $F(z)$ .

- 1) Montrer que  $x$  existe bien et que la transformée en  $Z$  de  $x$  est définie pour tout nombre complexe de module strictement plus grand que 1.
- 2) Montrer que la suite  $(x(n) - x(n-p))_{n \in \mathbb{Z}}$  est finie, et l'exprimer comme une somme de Diracs retardés.
- 3) En déduire que la suite  $x$  est périodique de période  $p$  à partir du rang  $n = 0$  et déterminer ses  $p$  premiers termes.
- 4) En utilisant la formule de la somme des termes d'une suite géométrique, montrer que l'original de

$$F(z) = \frac{z^4 + 3z}{1 + z + z^2 + z^3 + z^4}$$

est périodique à partir du rang  $n = 0$  et déterminer sa période  $p$  et ses  $p$  premiers termes.

### Exercice 17

Soit  $X \in \mathbb{C}(z)$  d'écriture irréductible  $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  avec  $\deg(X(z)) \leq 0$ . Soit enfin  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $x$  l'original de  $X(z)$ .

On veut démontrer l'équivalence :

$$x(0) = x(1) = \dots = x(p-1) = 0 \text{ et } x(p) \neq 0 \Leftrightarrow \deg(X(z)) = -p.$$

1) Supposons que  $x(0) = x(1) = \dots = x(p-1) = 0$  et  $x(p) \neq 0$ . Soit  $y$  le signal  $x$  avancé de  $p$  et  $Y(z)$  sa transformée en  $Z$ .

a) Exprimer  $X(z)$  en fonction de  $Y(z)$ .

b) Démontrer alors à l'aide du théorème de la valeur initiale que  $\deg(X(z)) = -p$ .

2) Supposons que  $\deg(X(z)) = -p$ .

a) Montrer que la fraction rationnelle  $Y(z) = z^p X(z)$  possède un original  $y$ .

b) Démontrer que  $y(0) \neq 0$ .

c) En déduire enfin que  $x(0) = x(1) = \dots = x(p-1) = 0$  et  $x(p) \neq 0$ .

### (\*Exercice 18

On considère une suite  $x$ . On dira que  $x$  est inversible par rapport au produit de convolution, ou plus brièvement, inversible, s'il existe une suite  $y$  telle que  $x * y = \delta$ .

1) On considère une suite  $x$  inversible. Supposons que l'on ait deux suites  $y_1$  et  $y_2$  telles que  $x * y_1 = x * y_2 = \delta$ .

En calculant de deux façons différentes  $y_2 * x * y_1$ , démontrer que  $y_1 = y_2$ .

Le résultat prouvé montre que si s'il existe une suite  $y$  telle que  $x * y = \delta$ , il n'en n'existe qu'une seule. La suite  $y$  sera notée  $x^{-1}$  et appelée l'inverse de  $x$ .

2) a) Vérifier que  $U$  est inversible et que  $U^{-1} = \delta - \delta_1$ .

b) (i) Montrer que pour toute suite  $y$ ,  $(\delta_1 * y)(0) = 0$ .

(ii) En déduire que  $\delta_1$  n'est pas inversible.

3) Montrer que si  $x$  est inversible, alors  $x(0) \neq 0$ .

4) Réciproquement, on suppose que la suite  $x$  est telle que  $x(0) \neq 0$ . Montrer que  $x$  est inversible d'inverse la suite  $y$  définie par  $y(0) = \frac{1}{x(0)}$  et la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, y(n) &= -\sum_{k=1}^n \frac{x(k)}{x(0)} y(n-k) \\ &= \frac{-1}{x(0)} (x(1)y(n-1) + x(2)y(n-2) + \dots + x(n)y(0)). \end{aligned}$$

5) Dans cette question, et dans cette question seulement, on suppose que  $x$  est inversible et que  $x^{-1} = x$ .

a) Montrer que  $(x - \delta) * (x + \delta) = 0$ .

b) Démontrer qu'au moins une des deux suites  $x - \delta$  ou  $x + \delta$  est inversible.

c) En déduire que  $x = \delta$  ou  $x = -\delta$ .

6) On suppose maintenant que  $x$  admet une transformée en  $Z$   $X(z)$  telle que  $X(z) \in \mathbb{R}(z)$ .

a) A l'aide du Théorème de la valeur initiale, démontrer que  $x$  est inversible si, et seulement si,  $\deg(X(z)) = 0$ .

b) On suppose que  $x$  est inversible. Démontrer que  $x^{-1}$  admet une transformée en  $Z$  égale à  $\frac{1}{X(z)}$  (« la transformée en  $Z$  de l'inverse est l'inverse de la transformée en  $Z$  »).

7) Application : on suppose que  $x$  est la suite définie par  $x(n) = (2 + 3^n)U(n)$ . Montrer que  $x$  est inversible et déterminer une expression de son inverse.

### (\*)Exercice 19

On considère un système stable de fonction de transfert  $H(z) \in \mathbb{R}(z)$ . Soit  $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  une écriture irréductible de  $H(z)$ .

Soit  $\omega$  un réel strictement positif. On considère l'entrée  $x_\omega$  d'expression  $x_\omega(n) = e^{jn\omega}U(n)$ . Soit  $y_\omega$  la sortie associée à  $x_\omega$  et  $Y_\omega(z)$  sa transformée en  $Z$ .

1) Vérifier que  $x_{\omega+2\pi} = x_\omega$ .

On considérera donc par la suite que  $\omega \in [0; 2\pi[$ .

2) a) Prouver que  $Q(e^{j\omega}) \neq 0$ .

b) Montrer que le polynôme en  $z$  :  $z(P(z) - H(e^{j\omega})Q(z))$  est divisible par  $z - e^{j\omega}$  dans  $\mathbb{C}[z]$ .

c) En déduire que pour tout nombre complexe de module strictement plus grand que 1 on a :

$Y_\omega(z) = \frac{A(z)}{Q(z)} + H(e^{j\omega}) \frac{z}{z - e^{j\omega}}$  où  $A(z) \in \mathbb{C}[z]$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à celui de  $Q(z)$ .

3) Déduire de la question précédente que :

$$y_\omega(n) = \varepsilon_\omega(n) + H(e^{j\omega})e^{jn\omega} \quad \text{où} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_\omega(n) = 0.$$

On peut donc considérer que la sortie associée à une sinusoïde de pulsation  $\omega > 0$  et d'amplitude 1 est une sinusoïde de même pulsation et d'amplitude complexe  $H(e^{j\omega})$ , donc d'amplitude réelle  $|H(e^{j\omega})|$ . La fonction  $G(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} |H(e^{j\omega})|$  sera appelée fonction gain du système.

4) a) On considère le cas où  $H(z) = \frac{z}{z-a}$  avec  $a \in ]-1; 1[$ . Montrer que

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2a \cos(\omega) + 1}}.$$

b) Calculer l'expression de la fonction de gain dans le cas où  $H(z) = \frac{z-2}{2z-1}$ . La connaissance de la fonction de gain suffit-elle pour caractériser un système ?

### Exercice 20

On considère un système de fonction de transfert  $H(z) = \frac{z^2 + 4z}{z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}}$ .

1) Etudier la stabilité du système.

- 2) Écrire l'équation aux différences associée au système.
- 3) Donner une expression de la réponse impulsionnelle et de la réponse indicielle du système.
- 4) Trouver l'expression de l'entrée qui donne  $y=U$  en sortie.

### (\*Exercice 21

On considère le système **analogique** qui, à tout signal causal  $f(t)$  fait correspondre la sortie causale  $g(t)$  vérifiant sur  $[0; +\infty[$  l'équation différentielle :

$$(1) \tau g'(t) + g(t) = f(t) \quad (\tau > 0) \text{ avec la condition initiale } g(0) = 0.$$

Avec un procédé de discrétisation avec un pas égal à  $h$ , on modélise ce système analogique par un système discret d'équation aux différences :

$$y_h(n) = \frac{\tau}{\tau+h} y_h(n-1) + \frac{h}{\tau+h} x_h(n) \quad \text{et} \quad y_h(0) = 0.$$

On suppose  $h$  de la forme  $h = \frac{1}{N}$  où  $N$  est un entier naturel grand. On est sensé avoir

$$\forall n \geq 0, y_h(n) \sim g(nh) \text{ pour } h \text{ petit, donc en prenant } n=N, \text{ on doit avoir } y_h(N) \sim g(1).$$

C'est ce que l'on va vérifier dans cet exercice dans le cas où  $f(t) = 1$ .

- 1) Montrer que  $g(1) = 1 - e^{-\frac{1}{\tau}}$  dans le cas où  $f(t) = 1$ .
- 2) Calculer la fonction de transfert du système discret qui à toute entrée  $x_h$  causale fait correspondre la sortie  $y_h$  définie par  $y_h(n) = \frac{\tau}{\tau+h} y_h(n-1) + \frac{h}{\tau+h} x_h(n)$ . Vérifier que

$$H_h(z) = \frac{1}{\tau+h} \cdot \frac{hz}{z - \frac{\tau}{\tau+h}}$$

- 3) On considère le cas  $x_h = U$ . Montrer que  $Y_h(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{\tau}{\tau+h} \cdot \frac{z}{z - \frac{\tau}{\tau+h}}$ . En déduire une expression de  $y_h(n)$ .

- 4) Vérifier que  $y_h(N) = 1 - \frac{N\tau}{N\tau+1} \left(1 - \frac{1}{N\tau+1}\right)^N$  (on rappelle que  $h = \frac{1}{N}$ )

- 5) a) Montrer que  $N \ln \left(1 - \frac{1}{N\tau+1}\right) \rightarrow -\frac{1}{\tau}$  si  $N \rightarrow +\infty$ .

- b) En déduire  $\lim_{N \rightarrow +\infty} y_h(N)$ . Que remarque-t-on ?

### Exercice 22

Soit la suite  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0, u_1 = 1$  et la relation de récurrence  $u_{n+2} = \frac{1}{3} u_{n+1} + \alpha u_n$  pour tout entier naturel  $n$ , où  $\alpha$  est un réel quelconque.

On définit la suite  $x$  par l'expression  $x(n) = u_n U(n)$ . On admet que la suite  $x$  est à croissance au plus exponentielle ce qui assure l'existence de  $X(z)$  pour tout nombre complexe  $z$  de module assez grand.

- 1) Calculer  $X(z)$ .
- 2) Trouver toutes les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles on a  $\lim u_n = 0$ .

**(\*)Exercice 23**

On rappelle la propriété suivante (Propriété 6 du chapitre sur les séries entières) :

La fonction  $x \rightarrow S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$  définie sur l'ensemble  $\{x \in \mathbb{C} / |x| < R\}$  est continue, où  $R$  est le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ .

On considère une suite  $x$  admettant une transformée en  $Z$  de rayon de convergence  $R < 1$ . On notera  $X(z)$  cette transformée en  $Z$ .

- 1) a) Démontrer que la fonction  $z \rightarrow X(z)$  est continue sur  $\{z \in \mathbb{C} / |z| > R\}$   
 b) En déduire que la fonction  $\theta \rightarrow \varphi(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} X(e^{-j\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) e^{jn\theta}$  est continue et  $2\pi$ -périodique.  
 c) Démontrer que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)$  converge absolument.
- 2) Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on considère  $c_n$  le coefficient de Fourier complexe d'indice  $n$  de la fonction  $\varphi$  (on rappelle que  $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) e^{-nj\theta} d\theta$ ). Soit  $p \in \mathbb{N}$ .  
 a) Montrer que pour tout entier relatif  $n$  inférieur ou égal à  $p$  on a  

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^p x(k) e^{kj\theta} e^{-nj\theta} d\theta = x(n).$$
  
 b) Montrer alors que  $|c_n - x(n)| \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} |x(k)|$ . En déduire que  $c_n = x(n)$ .

La suite  $x$  est donc la suite des coefficients de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique  $\theta \rightarrow X(e^{-j\theta})$ . On remarquera que pour cette fonction, tous les coefficients de Fourier d'indice négatif sont nuls.

- 3) Application 1. On considère le système de fonction de transfert  $H(z) = \frac{z-3}{3z-1}$ . Soit  $x$  une entrée admettant une transformée en  $Z$  de rayon de convergence  $R < 1$ .  
 a) Montrer que la transformée en  $Z$  de  $y$  admet un rayon de convergence strictement plus petit que 1.  
 b) Prouver que pour tout nombre complexe  $z$ , on a  $|z|=1 \Rightarrow |H(z)|=1$ .  
 c) En déduire que les deux séries  $\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|^2$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} |y(n)|^2$  convergent et sont égales. On dit que le système conserve l'énergie.
- 4) Application 2. On considère le système de fonction de transfert  $H(z) = \frac{z}{z-a}$  où  $a \in ]-1; 1[$ . Soit  $x$  une entrée admettant une transformée en  $Z$  de rayon de convergence  $R < 1$ . Montrer que la transformée en  $Z$  de  $y$  admet un rayon de convergence strictement plus petit que 1 et que  

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |y(n)|^2 \leq \frac{1}{(1-|a|)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|^2$$

**(\*) Exercice 24**

Partie A

Dans cette partie on s'intéresse au problème suivant : caractériser les fonctions rationnelles  $z \rightarrow X(z)$  dont l'original est une suite bornée, c'est à dire une suite  $x \in l^\infty(\mathbb{N})$ .

1) Démontrer que si  $\deg(X(z)) > 0$ , alors  $z \rightarrow X(z)$  n'a pas d'original.

Soit  $x \in l^\infty(\mathbb{N})$ . Posons  $M = \|x\|_\infty$

2)

a) Montrer  $X(z)$ , la transformée en Z de  $x$ , existe et que son rayon de convergence  $R$  vérifie  $R \leq 1$ .

b) Que peut-on dire des pôles de la fraction rationnelle  $X(z)$  ?

3) Soit  $A(z) = a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[z]$  un polynôme de degré  $p \in \mathbb{N}$ . On définit la suite causale  $y$  de terme général  $y(n) = a_p x(n) + a_{p-1} x(n-1) + \dots + a_0 x(n-p)$ .

a) Montrer que  $y \in l^\infty(\mathbb{N})$  et que  $\|y\|_\infty \leq M \sum_{k=0}^p |a_k|$ .

b) Montrer que  $Y(z)$ , la transformée en Z de  $y$ , a pour expression  $Y(z) = \frac{A(z)X(z)}{z^p}$  pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $|z| > 1$ .

4) Soit  $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  une écriture irréductible de  $X(z)$ . Soit  $z_0$  un pôle de  $X(z)$  de module 1. Le but de cette question est de prouver par l'absurde que  $z_0$  est un pôle simple. On suppose donc que  $z_0$  est un pôle multiple.

a) Montrer que  $Q(z) = (z - z_0)^2 Q_1(z)$  avec  $Q_1(z) \in \mathbb{C}[z]$ . Soit  $p = \deg(Q_1(z))$ .

b) En utilisant le résultat de la question 3), prouver que l'original  $y$  de  $Y(z) = \frac{P(z)}{z^p(z - z_0)^2}$  est une suite bornée.

c) Justifier que  $Y(z)$  peut s'écrire sous la forme  $Y(z) = \sum_{k=0}^p \frac{A_k}{z^k} + \frac{B}{z - z_0} + \frac{C}{(z - z_0)^2}$  avec

$A_k, B, C \in \mathbb{C}$  et  $C \neq 0$ .

d) En déduire que  $\forall n > p, |y(n)| = |B + Cn|$ . Conclure.

Réciproquement, on suppose que  $F(z) \in \mathbb{C}(z)$  avec  $\deg(F) \leq 0$  et on suppose également que les pôles de  $F(z)$  sont soit de module strictement inférieurs à 1, soit de module 1 mais simples.

5) a) En considérant la décomposition en éléments simples formelle dans  $\mathbb{C}[z]$  de

$$F(z), \text{ prouver que } F(z) \text{ peut s'écrire sous la forme : } F(z) = F_1(z) + \sum_{k=0}^p \frac{A_k}{z - z_k}$$

avec

(i)  $F_1(z) \in \mathbb{C}(z)$  avec  $\deg(F_1) \leq 0$  et de pôles éventuels de module strictement inférieur à 1.

(ii)  $z_0, z_1, \dots, z_p$  sont les éventuels pôles de  $F(z)$  de module égal à 1

(iii)  $A_0, A_1, \dots, A_k \in \mathbb{C}$ .



- b) Soit  $f_1$  l'original de  $F_1(z)$ . Montrer que  $f_1 \in l^1(\mathbb{N}) \subset l^\infty(\mathbb{N})$ .
- c) Exprimer l'original de  $F(z)$  à l'aide de  $f_1$  et des suites  $(z_k^n U(n))$ . En déduire que cet original appartient à  $l^\infty(\mathbb{N})$ .

### Partie B

On considère un système  $(S)$  de fonction de transfert  $H(z) \in \mathbb{C}(z)$ . On suppose que pour toute entrée bornée  $x \in l^\infty(\mathbb{N})$  on a une sortie bornée  $S(x) \in l^\infty(\mathbb{N})$ . Il est clair qu'un système stable vérifie cette condition, et nous prouverons la réciproque dans la question 2.

On définit  $E = \{x \in l^\infty(\mathbb{N}) / \text{TZ}(x)(z) \in \mathbb{C}(z)\}$ .

- 1) Montrer que  $\forall x \in E, S(x) \in E$ .

On peut donc considérer que  $(S)$  définit une transformation de  $E$  dans  $E$ .

- 2) a) En travaillant sur la réponse impulsionnelle, montrer que  $\deg(H(z)) \leq 0$  et que les pôles de  $H(z)$  sont soit de module strictement inférieurs à 1, soit de module égal à 1 mais simples (on devra se servir des résultats de la partie A).
- b) En considérant l'entrée  $x = (z_0^n U(n))$  pour  $z_0 \in \mathbb{C}, |z_0| = 1$ , montrer que le système  $(S)$  est stable. (on devra également se servir des résultats de la partie A). Reformuler alors de façon plus simple la définition 8 dans le cas où la fonction de transfert d'un système est une fraction rationnelle.

**On dit que la transformation  $(S)$  est inversible si, pour toute suite  $y \in E$ , il existe une unique suite  $x \in E$  telle que  $y = S(x)$ .**

- 3) Dans cette question, on veut démontrer que pour toute suite  $y \in E$ , il existe au maximum une seule suite  $x \in E$  telle que  $y = S(x)$ . On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux suites différentes  $x_1 \in E$  et  $x_2 \in E$  telles que  $S(x_1) = S(x_2)$ . On suppose aussi que  $(S)$  n'est pas le système nul (c'est à dire que  $H(z)$  n'est pas la fonction nulle).

- a) Montrer que  $\exists M > 1: \forall z \in \mathbb{C}, |z| > M \Rightarrow H(z) \neq 0$ .

- b) En déduire que pour tout nombre complexe  $z$  de module assez grand on a  $X_1(z) = X_2(z)$ . Conclure.

Supposons que  $(S)$  soit inversible.

- 4) En considérant  $x \in E$  telle que  $S(x) = \delta$ , prouver que  $\deg(H(z)) = 0$  et que toutes les racines complexes éventuelles de  $H(z)$  sont de module strictement inférieur à 1 ou de module 1 mais simples.

(N.B : si  $H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$  est une écriture irréductible de  $H(z)$ , une racine de  $H(z)$  est exactement une racine de  $A(z)$ ).

- 5) Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$ , avec  $|z_0| = 1$ . En considérant  $x \in E$  telle que  $S(x) = (z_0^n U(n))$  prouver que toutes les racines complexes éventuelles de  $H(z)$  sont de module strictement inférieur à 1.

- 6) On suppose maintenant que, réciproquement,  $\deg(H(z)) = 0$  et que toutes les racines

complexes éventuelles de  $H(z)$  sont de module strictement inférieur à 1. Démontrer que le système  $(S)$  est inversible.

- 7) Application : on définit le spectre de  $(S)$  comme étant l'ensemble des nombres complexes  $\lambda$  tels que le système de fonction de transfert  $H(z) - \lambda$  soit non inversible.

Dans le cas où  $H(z) = \frac{z}{z-a}$  où  $a$  est un nombre complexe non nul et de module strictement

inférieur à 1, montrer que le spectre de  $(S)$  est un disque de  $\mathbb{C}$  dont on déterminera le centre et le rayon.

### (\*) Exercice 25

Soit  $p \in \mathbb{N}$  avec  $p \geq 2$ . Dans cet exercice, on s'intéresse au système  $(S_p)$  linéaire et causal d'ordre  $p-1$  qui à toute entrée causale  $x(n)$  fait correspondre la sortie causale  $y(n)$  définie par la relation :

$$p y(n) + (p-1)y(n-1) + \dots + y(n-(p-1)) = p x(n),$$

ce que l'on peut écrire aussi :

$$\sum_{k=0}^{p-1} (p-k) y(n-k) = p x(n).$$

Soit  $H_p(z)$  la fonction de transfert de ce système.

- 1) Étudier complètement  $(S_2)$  (fonction de transfert, réponses impulsionnelles et indicielles, stabilité et type).
- 2) Supposons  $p \geq 2$ .
  - a) Donner une expression de  $H_p(z)$ .
  - b) Montrer que  $\forall z \in \mathbb{C}, (z-1) \left( \sum_{k=1}^p k z^{k-1} \right) = p z^p - (1 + z + \dots + z^{p-1})$ .
  - c) En déduire que  $H_p(z) = \frac{p z^{p-1} (z-1)^2}{p z^{p+1} - (p+1) z^p + 1}$ , mais que cette écriture n'est pas irréductible.
- 3) Soit  $z_0$  un pôle de  $H_p(z)$ .
  - a) Montrer que  $z_0^p = \frac{1}{p} (1 + z_0 + z_0^2 + \dots + z_0^{p-1})$ .
  - b) En déduire par l'absurde que  $|z_0| \leq 1$ .
- 4) Dans cette question, on va montrer par l'absurde que  $H_p(z)$  n'a pas de pôle de module 1. Supposons que  $z_0 = e^{j\theta}$  soit un pôle de  $H_p(z)$ .
  - a) Montrer à l'aide du 3)a) que  $\cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(p\theta) = p$ .
  - b) En déduire que  $z_0 = 1$  et aboutir à une contradiction.
- 5) Que peut-on dire de la stabilité de  $(S_p)$  ?
- 6) a) Montrer que toutes les racines différentes de 1 de  $P(X) = p X^{p+1} - (p+1) X^p + 1$  sont simples.
  - b) En déduire que les pôles de  $H_p(z)$  sont tous simples.
- 7) Fixons  $p \geq 2$ . On considère  $y_{\text{ind}}$  la réponse indicielle du système  $(S_p)$ .
 

On admettra dans cette question la formule  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

  - a) Montrer que  $Y_{\text{ind}}(z)$ , la transformée en Z de  $y_{\text{ind}}$  admet une expression de la forme

$Y_{\text{ind}}(z) = \frac{A}{z-1} + F_0(z)$  où  $F_0(z)$  est une fraction rationnelle dont tous les pôles sont simples et de module strictement inférieur à 1.

b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\text{ind}}(n) = \frac{2}{p+1}$ .

A partir de maintenant, fixons  $p \geq 2$ . On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+p} = \frac{1}{p}(u_{n+p-1} + u_{n+p-2} + \dots + u_n) .$$

8) Dans cette question, on suppose que  $p=3$  et que  $u_0=1, u_1=3$  et  $u_2=-2$ . On définit le signal causal  $y$  par  $y(n)=u_n$  si  $n \geq 0$ .

a) Calculer les valeurs de  $u_3, u_4$  et  $u_5$ .

b) Calculer l'expression de  $Y(z)$ .

c) En déduire la limite de  $(u_n)$  après avoir prouvé la convergence de cette suite.

On revient au cas général. On définit le signal causal  $y$  par  $y(n)=u_n$  si  $n \geq 0$ , et on définit le signal causal  $x$  par l'expression  $x(n) = y(n) - \frac{1}{p}(y(n-1) + y(n-2) + \dots + y(n-p))$ .

9) a) Prouver que  $x$  est un signal fini.

b) Montrer que  $X(z)$ , la transformée en  $Z$  de  $x$ , est de la forme  $X(z) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \dots + \frac{\alpha_{p-1}}{z^{p-1}}$ ,

où  $\alpha_0 = u_0$  et pour  $1 \leq k \leq p-1$ ,  $\alpha_k = u_k - \frac{1}{p}(u_0 + u_1 + \dots + u_{k-1})$ .

10) a) Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$  où  $M = \text{Max}(|u_k| \mid 0 \leq k \leq p-1)$ .

b) En déduire que  $Y(z)$ , la transformée en  $Z$  de  $y$ , est bien définie pour tout nombre complexe

de module strictement plus grand que 1 et que  $X(z) = \frac{1}{p} \frac{z-1}{z^p} \left( \sum_{k=1}^p k z^{k-1} \right) Y(z)$ .

11) Déduire de la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, y(n) = \alpha_0 y_{\text{ind}}(n) + \alpha_1 y_{\text{ind}}(n-1) + \dots + \alpha_{p-1} y_{\text{ind}}(n-(p-1)) ,$$

où  $y_{\text{ind}}$  est la réponse indicielle du système  $(S_p)$  introduite à la question 7).

12) Montrer alors que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et prouver que

$$\lim u_n = \frac{2}{p(p+1)}(u_0 + 2u_1 + \dots + pu_{p-1}) ,$$

c'est à dire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la moyenne des  $p$  premiers termes de la suite, pondérée par les coefficients  $(1, 2, \dots, p)$ .

13) Application : on déplace un pion sur un axe gradué de 1 en 1 à l'aide d'un dé à 6 faces bien équilibré. Il est situé au départ sur le point d'abscisse 0. A chaque étape, on lance le dé et on avance le pion du nombre d'unités indiqué par le dé.

On appelle  $u_n$  la probabilité que le pion s'arrête à un moment donné sur le point d'abscisse  $n$ . On a bien sûr  $n < 0 \Rightarrow u_n = 0$  et  $u_0 = 1$  car le pion est situé au départ sur le pont d'abscisse 0, et on remarquera que l'arrêt du pion sur le point d'abscisse  $n$  ne peut se faire qu'en au plus  $n$  étapes. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

## VI) Corrigés

### Exercice 1

1) On a trois cas :

Si  $\alpha < 1$ ,  $n^\alpha + n + 1 \sim n$  car  $\lim \frac{n^\alpha + n + 1}{n} = 1$  donc par quotient d'équivalents,

$x(n) \sim n > 0$  et par le critère d'équivalence pour les séries,  $x \notin l^1(\mathbb{N})$ .

Si  $\alpha = 1$ ,  $n^\alpha + n + 1 \sim 2n$  et par le critère d'équivalence,  $x \notin l^1(\mathbb{N})$ .

Si  $\alpha > 1$ ,  $n^\alpha + n + 1 \sim n^\alpha$  car  $\lim \frac{n^\alpha + n + 1}{n^\alpha} = 1$  donc  $x(n) \sim \frac{1}{n^{\alpha-2}} > 0$  et par le critère

d'équivalence pour les séries,  $x \in l^1(\mathbb{N}) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n^{\alpha-2}}\right) \in l^1(\mathbb{N})$  ce qui équivaut par le critère de Riemann à

$\alpha > 3$ .

Conclusion :  $x \in l^1(\mathbb{N}) \Leftrightarrow \alpha > 3$ .

2) On reprend le travail fait au 1) :

Si  $\alpha < 1$ ,  $x(n) \sim n$  donc  $\lim x(n) = +\infty$  :  $x \notin l^\infty(\mathbb{N})$ .

Si  $\alpha = 1$ ,  $x(n) \sim \frac{1}{2}n$  donc  $\lim x(n) = +\infty$  :  $x \notin l^\infty(\mathbb{N})$ .

Si  $\alpha > 1$ ,  $x(n) \sim \frac{1}{n^{\alpha-2}}$  donc :

soit  $\alpha > 2$ , et  $\left(\frac{1}{n^{\alpha-2}}\right) \rightarrow 0$  donc  $\lim x(n) = 0$  d'où  $x \in l^\infty(\mathbb{N})$

soit  $\alpha = 2$ , et  $\lim x(n) = 1$  d'où  $x \in l^\infty(\mathbb{N})$

soit  $\alpha < 2$ , et  $\left(\frac{1}{n^{\alpha-2}}\right) \rightarrow +\infty$  donc  $\lim x(n) = +\infty$  d'où  $x \notin l^\infty(\mathbb{N})$ .

Conclusion :  $x \in l^\infty(\mathbb{N}) \Leftrightarrow \alpha \geq 2$ .

### Exercice 2

Méthode 1 : avec la transformation en Z.

Le signal  $x$  admet comme transformée en Z  $X(z) = \frac{z}{z-2}$  pour tout nombre complexe de module strictement plus grand que 2, et la relation

$$\forall n \in \mathbb{Z}, x(n-2) + 3x(n-1) = a\delta(n) + b\delta(n-1) + cx(n)$$

équivaut à :

$$\left(\frac{1}{z^2} + \frac{3}{z}\right) \frac{z}{z-2} = a + \frac{b}{z} + \frac{cz}{z-2}$$

c'est à dire après calculs, toujours pour tout nombre complexe de module strictement plus grand que 2 :

$$\frac{3z+1}{z(z-2)} = \frac{(a+c)z^2 + (b-2a)z - 2b}{z(z-2)}$$

ce qui, par identification, donne :  $a = \frac{-7}{4}$ ,  $b = \frac{-1}{2}$  et  $c = \frac{7}{4}$ .

On a donc  $\forall n \in \mathbb{Z}, x(n-2) + 3x(n-1) = \frac{-7}{4}\delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1) + \frac{7}{4}x(n)$ .

### Méthode 2 : sans la transformation en $\mathbb{Z}$ .

Par causalité, la relation  $x(n-2) + 3x(n-1) = a\delta(n) + b\delta(n-1) + cx(n)$  est vraie pour tout entier strictement négatif.

Si  $n \geq 2$ , on a  $x(n-2) + 3x(n-1) = 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-1} = \frac{7}{4}2^n = \frac{7}{4}x(n)$  donc, pour tout entier relatif

différent de 0 et de 1, la relation  $x(n-2) + 3x(n-1) = a\delta(n) + b\delta(n-1) + \frac{7}{4}x(n)$  est vraie pour tout réel  $a$  et  $b$ , les deux Dirac étant alors nuls.

La relation  $\forall n \in \mathbb{Z}, x(n-2) + 3x(n-1) = a\delta(n) + b\delta(n-1) + \frac{7}{4}x(n)$  est donc vraie si et seulement si elle est vraie pour  $n=0$  et  $n=1$  c'est à dire :

$$0 = a + \frac{7}{4}$$

$$3 = b + \frac{7}{2}$$

d'où  $a = -\frac{7}{4}$  et  $b = -\frac{1}{2}$ .

On a donc  $\forall n \in \mathbb{Z}, x(n-2) + 3x(n-1) = -\frac{7}{4}\delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1) + \frac{7}{4}x(n)$ .

### Exercice 3

1) On remarque que  $U(n-1)U(5-n) = 0$  dès que  $n \geq 6$  d'où l'on a :  
 $x = (0; 1; 2; 3; 4; 5; 0; 0; \dots)$   
c'est à dire  $x = \delta_1 + 2\delta_2 + 3\delta_3 + 4\delta_4 + 5\delta_5$ .

2) On remarque que  $\forall n \geq 5, x(n) = n + 2n - 3n = 0$  donc :  $x = \sum_{k=0}^4 x(k)\delta_k = \delta_1 + 6\delta_2 + 9\delta_3 + 12\delta_4$ .

### Exercice 4

1) On a par la finitude des deux suites  $x$  et  $y$  :

$$x(k)y(n-k) \neq 0 \Rightarrow (x(k) \neq 0 \text{ et } y(n-k) \neq 0) \Rightarrow (k < N \text{ et } n-k < M)$$

d'où l'implication :

$$x(k)y(n-k) \neq 0 \Rightarrow n-M < k < N$$

2) Si  $0 \leq k \leq n$  et  $n \geq N+M$ , on a nécessairement l'assertion  $(k < N \text{ et } n-k < M)$  fautive, sinon on aurait  $n = k + n-k < N+M$ . On en déduit par contraposition de l'assertion établie au 1) que  $x(k)y(n-k) = 0$ .

3) On a pour  $n \geq N+M$ ,  $(x * y)(n) = \sum_{k=0}^n x(k)y(n-k) = 0$  car d'après le 2), tous les termes de la somme sont nuls. La suite  $x * y$  est donc de longueur finie.

### Exercice 5

a)  $(2^n U(n-3))_{n \in \mathbb{N}} = (0; 0; 0; 8; 16; 32; \dots)$

b)  $(2^{n-3} U(n-3))_{n \in \mathbb{N}} = (0; 0; 0; 1; 2; 4; \dots)$

c)  $(2^{n-3} U(n))_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 4; \dots\right)$

### Exercice 6

1) La sortie correspondant à l'entrée  $x = \delta$  est la suite  $y(n) = \delta(n) + \delta(n+1)$  qui n'est pas causale car  $y(-1) = 1$ .

2) Le système n'est pas linéaire : on a  $S(\delta) = \frac{1}{2}\delta$  alors que  $S(2\delta) = 2\delta \neq 2S(\delta)$ .

3) Le système ne vérifie pas la propriété d'invariance dans le temps. On considère les entrées  $x_1 = (U(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $x_2 = (U(n-1))_{n \in \mathbb{Z}}$  et soient  $y_1$  et  $y_2$  les sorties correspondantes.

On a alors :

$(y_1(n))_{n \geq 0} = (1; 2; 4; 8; \dots)$  et  $(y_2(n))_{n \geq 0} = (0; 2; 4; 8; \dots)$  donc l'assertion

$\forall n \in \mathbb{Z}, y_2(n) = y_1(n-1)$  est fautive.

### Exercice 7

On a, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} (x * y)(n) &= \sum_{k=0}^n x(k) y(n-k) = \sum_{k=0}^n 3^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^n 3^k \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n 6^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{6^{n+1} - 1}{5} = \frac{6}{5} 3^n - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{Z} (x * y)(n) = \frac{1}{5} \left( 6 \cdot 3^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) U(n)$ .

### Exercice 8

1) Par le Théorème 2, on a la convergence de la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)|$  d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(n) = 0$ .

2) a) On a  $\forall n \geq 0, y_{ind}(n) = \sum_{k=0}^n h(k)$ , ce qui est une conséquence directe du (2) de la propriété 1.

b) Puisque la série  $\sum_{k=0}^{+\infty} h(k)$  est absolument convergente, elle est convergente, et l'existence et la

finitude de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{ind}(n)$  résulte de la relation  $\forall n \geq 0, y_{ind}(n) = \sum_{k=0}^n h(k)$ .

c) On a, par ce qui précède,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{ind}(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)$ .

Le système étant stable, si l'on pose  $R$  le plus grand module de ses pôles, on a  $R < 1$  (Théorème 6) et  $H(z)$  est la transformée en  $z$  de  $h$  pour tout nombre complexe  $z$  de module strictement plus grand que  $R$  (propriété 11), c'est à dire  $H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h(k)}{z^k}$ .

On peut alors poser  $z = 1$  ce qui donne  $H(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)$  d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{ind}(n) = H(1)$ .

### Exercice 9

Supposons le système RIF. Alors, il existe un entier  $N$  tel que  $h = \sum_{n=0}^N h(n) \delta_n$  d'où

$$H(z) = \sum_{n=0}^N \frac{h(n)}{z^n} = \frac{\sum_{n=0}^N h(n) z^{N-n}}{z^N} = \frac{P(z)}{z^N} \quad \text{où} \quad P(z) = \sum_{n=0}^N h(N-n) z^n.$$

Réciproquement, si la fonction de transfert est de la forme  $H(z) = \frac{P(z)}{z^k}$  où  $P(z) = \sum_{i=0}^k a_i z^i$ , alors

$$H(z) = \sum_{i=0}^k \frac{a_i}{z^{k-i}} \quad \text{d'où} \quad h = \sum_{i=0}^k a_i \delta_{k-i} \quad \text{ce qui prouve que } h \text{ est bien une suite finie, avec}$$

$$(h(n))_{n \in \mathbb{N}} = (a_k; a_{k-1}; \dots; a_0; 0; 0; \dots).$$

### Exercice 10

1) Par la propriété 5 et la linéarité de la transformation en Z, on a :

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-\frac{3}{4}} = \frac{2z^2 - \frac{7}{4}z}{(z-1)\left(z-\frac{3}{4}\right)}, \quad |z| > 1.$$

2) L'application de la propriété 9 montre que  $X(z)$  existe pour tout nombre complexe de module strictement plus grand que 1 et que l'on a :

$$\forall z \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[, \quad X(z) = -z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Par la propriété 11,  $F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$  possède un original  $y$  tel que  $\text{TZ}(y)(z) = F(z)$  pour tout nombre complexe  $z$  de module strictement plus grand que 1. On a donc

$$\forall z \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[, \quad X(z) = \text{TZ}(y)(z).$$

L'application du Théorème 5 donne que  $x=y$  donc  $X(z) = F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ , pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $|z| > 1$ .

Remarque : remarquer la nécessité d'utiliser le Théorème 5 et la propriété 11 pour obtenir l'égalité

$X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$  pour des  $z$  non réels, la propriété 9 ne donnant une expression de la transformée en Z que pour des valeurs réelles de  $z$ .

3) Par le corollaire de la propriété 5,  $\text{TZ}(x)(z)$  est définie sur  $\{z \in \mathbb{C} / |z| > 1 \text{ et}$

$$\text{TZ}(x)(z) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)z}{z^2 - 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)z + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{z}{z^2 - z + 1}.$$

4) On peut remarquer que  $\forall n \in \mathbb{Z}, x(n) = \frac{3}{2}U(n) - \frac{1}{2}(-1)^n U(n)$  d'où l'existence de  $X(z)$

pour tout nombre complexe de module strictement plus grand que 1 et  $X(z) = \frac{z^2 + 2z}{z^2 - 1}$

5) On peut remarquer que  $x(n) = \left(2, 2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right)$  c'est à dire que

$$x(n) = 2U(n) - \frac{3}{2}U(n-3) \quad \text{d'où} \quad X(z) = \frac{4z^3 - 3}{2z^2(z-1)}$$

6) On utilise la propriété 9 montre que  $X(z)$  existe pour tout nombre complexe de module strictement plus grand que  $\frac{1}{2}$  et l'on a :

$$\forall z \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[ \cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[, \quad X(z) = -z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Par la propriété 11,  $F(z) = \frac{z}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}$  possède un original  $y$  tel que  $\text{TZ}(y)(z) = F(z)$  pour tout

nombre complexe  $z$  de module strictement plus grand que  $\frac{1}{2}$ . On a donc

$$\forall z \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[ \cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[, \quad X(z) = \text{TZ}(y)(z).$$

L'application du Théorème 5 donne que  $x=y$  donc  $X(z) = F(z) = \frac{z}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}$  pour tout nombre

complexe  $z$  tel que  $|z| > \frac{1}{2}$ .

7) Par le corollaire de la propriété 5,  $\text{TZ}(x)(z)$  est définie sur  $\{z \in \mathbb{C} / |z| > \frac{1}{5}\}$  et

$$\text{TZ}(x)(z) = \frac{25z^2 - 5\cos(\theta)z}{25z^2 - 10\cos(\theta)z + 1} \quad \text{pour tout nombre complexe } z \text{ de module strictement supérieur à } \frac{1}{5}.$$

### Exercice 11

1) On notera tout d'abord que la fonction  $z \rightarrow X(z)$  est indéfiniment dérivable sur  $\left] -\infty; -R \right[ \cup \left] R; +\infty \right[$  par la remarque qui suit la propriété 9.

En appliquant deux fois le point (ii) de la propriété 9, on montre que  $Y$  a pour rayon de convergence  $R$  et par le point (iii) appliqué lui aussi deux fois :

$$\forall z \in \left] -\infty; -R \right[ \cup \left] R; +\infty \right[, \quad \text{TZ}((nx(n))_{n \in \mathbb{Z}})(z) = -z \frac{dX}{dz}(z).$$

$$\begin{aligned} \forall z \in \left] -\infty; -R \right[ \cup \left] R; +\infty \right[, \quad Y(z) &= -z \frac{d}{dz} \left( \text{TZ}((nx(n))_{n \in \mathbb{Z}})(z) \right) = -z \frac{d}{dz} \left( -z \frac{dX}{dz} \right) (z) \\ &= z \frac{d}{dz} \left( z \frac{dX}{dz} \right) (z) = z \left( \frac{dX}{dz}(z) + z \frac{d^2 X}{dz^2}(z) \right) = z \frac{dX}{dz}(z) + z^2 \frac{d^2 X}{dz^2}(z). \end{aligned}$$

2) On applique ce qui précède à  $x=U$ .

$$\begin{aligned} \text{On a alors } R=1 \text{ et } \forall z \in \left] -\infty; -1 \right[ \cup \left] 1; +\infty \right[, \quad Y(z) &= z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) (z) + z^2 \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{z}{z-1} \right) (z) \\ &= -\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2z^2}{(z-1)^3} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}. \end{aligned}$$

3) En reprenant les notations de la question 2 on obtient  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = Y(2) = 6$ .

### Exercice 12

1)  $x(n) = (-1)^{n-1} U(n-1)$ ,  $R=1$ .

2) Par la propriété 11, cette fonction possède un original et le rayon de convergence est égal à 1. On a



$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)\left(z+\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{5} \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+\frac{2}{3}} \right) \quad \text{d'où} \quad F(z) = \frac{3}{5} \left( \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+\frac{2}{3}} \right) \quad \text{ce qui donne}$$

$$x(n) = \frac{3}{5} \left( 1 - \left( \frac{-2}{3} \right)^n \right) U(n).$$

Remarque : une autre méthode consiste à décomposer directement  $F(z)$  en éléments simples :

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)\left(z+\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{3}{5}}{z-1} + \frac{\frac{2}{5}}{z+\frac{2}{3}} \quad \text{pour en déduire par la propriété du retard (propriété 7) que}$$

$$x(n) = \frac{1}{5} \left( 3 + 2 \left( \frac{-2}{3} \right)^{n-1} \right) U(n-1). \quad \text{Ce résultat est bien égal au précédent car les deux donnent } 0$$

pour  $n \leq 0$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $\frac{1}{5} \left( 3 + 2 \left( \frac{-2}{3} \right)^{n-1} \right) = \frac{1}{5} \left( 3 + 2 \cdot \left( \frac{-3}{2} \right) \left( \frac{-2}{3} \right)^n \right) = \frac{3}{5} \left( 1 - \left( \frac{-2}{3} \right)^n \right)$ .

3) On a  $F(z) = \frac{z}{z^{p+1}(z-2)}$  ce qui donne par la propriété 7,  $R=2$  et

$$x(n) = 2^{n-p-1} U(n-p-1).$$

4) On reconnaît directement l'écriture de la transformée en Z de

$$(x(n))_{n \geq 0} = (1; 0; 1; 0; 1; 0; \dots) \quad \text{c'est à dire } R=1 \quad \text{et} \quad x(n) = \frac{1}{2} (1 + (-1)^n) U(n).$$

5) On a  $F(z) = \frac{z+3}{(z-1)(z-3)}$ . Par la propriété 11, cette fonction possède un original et le rayon de convergence est égal à 3. On a  $\frac{F(z)}{z} = \frac{z+3}{z(z-1)(z-3)} = \frac{1}{z} - \frac{2}{z-1} + \frac{1}{z-3}$  ce qui donne

$$F(z) = 1 - \frac{2z}{z-1} + \frac{z}{z-3}, \quad \text{d'où} \quad x(n) = \delta(n) - (2-3^n) U(n).$$

6)  $F(z) = \frac{2z+1}{z^2+1}$  On a  $F(z) = \frac{2z+1}{(z-j)(z+j)}$ . Par la propriété 11, cette fonction possède un original et le rayon de convergence est égal à 1.

On remarque, en utilisant le développement en série entière de  $Z \rightarrow \frac{1}{1+Z}$  que

$$F(z) = \frac{2z+1}{z^2+1} = \left( \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} \right) \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = \left( \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} \right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n}}.$$

La fonction  $z \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n}}$  est, par définition, la transformée en Z de la suite

$$(x_0(n))_{n \geq 0} = (1; 0; -1; 0; \dots)$$

donc par la propriété 7,  $F(z)$  est la transformée en Z de la suite  $x(n) = 2x_0(n-1) + x_0(n-2)$ , d'où  $(x(n))_{n \geq 0} = (0; 2; 0; -2; 0; 2; 0; -2; \dots) + (0; 0; 1; 0; -1; 0; \dots)$

$(x(n))_{n \geq 0} = (0; 2; 1; -2; -1; 2; 1; -2; -1; \dots)$  avec répétition des termes sur une période de 4 à partir du rang  $n=1$ .

Autre méthode : utiliser directement le corollaire de la propriété 5. On a alors

$$F(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{2z^2 + z}{z^2 + 1} = \frac{1}{z} \left( 2 \cdot \frac{z^2}{z^2 + 1} + \frac{z}{z^2 + 1} \right)$$

d'où l'on déduit l'original de  $F(z)$  sous la forme

$$x(n) = \left( 2 \cos\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right) \right) U(n-1) .$$

On obtient alors une suite 4-périodique retardée de 1. On calcule

$x(1)=2, x(2)=1, x(3)=-2, x(4)=-1$  et ainsi de suite, ce qui confirme le résultat trouvé par la méthode précédente, bien que la suite soit exprimée de façon très différente.

7) On a  $F(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2(r \cos(\theta))z + r^2}$  avec  $r=1$  et  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

En écrivant que  $F(z) = \frac{z^2 - \frac{z}{2}}{z^2 - 2(r \cos(\theta))z + r^2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}z}{z^2 - 2(r \cos(\theta))z + r^2}$ , on reconnaît l'écriture

$$F(z) = \frac{z^2 - r \cos(\theta)z}{z^2 - 2(r \cos(\theta))z + r^2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{r \sin(\theta)z}{z^2 - 2(r \cos(\theta))z + r^2}$$

et le corollaire de la propriété 5 nous dit que  $R=1$  et que l'original de  $F(z)$  est

$$x(n) = \left( \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \right) U(n) .$$

On remarque que cette suite est 6-périodique, et on a tout simplement :

$$(x(n))_{n \geq 0} = (1; 1; 0; -1; -1; 0; \dots)$$

8) Par la propriété 11,  $F(z)$  possède un original et le rayon de convergence est égal à 1 car les pôles de  $F(z)$  sont  $-1, j$  et  $-j$ , tous de module 1. On peut procéder comme pour les exemples précédents, mais le plus rapide est de remarquer que (en utilisant le développement en série entière de  $Z \rightarrow \frac{1}{1+Z}$ ):

$$F(z) = \frac{2z}{z^3 + 1} = \frac{2}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z^3}} = \frac{2}{z^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^{3n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot (-1)^n}{z^{3n+2}}$$

ce qui permet de reconnaître directement la transformée en  $Z$  de la suite 6-périodique :

$$(x(n))_{n \geq 0} = (0; 0; 2; 0; 0; -2; 0; 0; 2; 0; 0; -2; \dots)$$

9) On a  $F(z) = \frac{z^4 + 1}{z^3(z-4)} = \frac{z}{z-4} + \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{z-4}$  ce qui, par la propriété 5 et la propriété 7 donne  $R=4$  et l'original de  $F(z)$  vaut  $x(n) = 4^n U(n) + 4^{n-3} U(n-3)$ .

10) On a  $F(z) = z \left( \frac{\frac{1}{2}}{z-1} - \frac{4}{z-2} + \frac{\frac{9}{2}}{z-3} \right) = \frac{\frac{1}{2}z}{z-1} - \frac{4z}{z-2} + \frac{\frac{9}{2}z}{z-3}$ . Par la propriété 11,  $F(z)$

possède un original et le rayon de convergence est égal à 3, et la propriété 5 donne

$$x(n) = \left( \frac{1}{2} - 2^{n+2} + \frac{1}{2} \cdot 3^{n+2} \right) U(n) .$$

### Exercice 13

1) On a par le Théorème 3  $\forall z \in ]R; +\infty[$ ,  $Y(z) = X(z)^2 = \frac{1}{z}$ . On en déduit alors du Théorème 5 que  $y = \delta_1$ .

2) On a par définition du produit de convolution :  $\forall n \geq 0$ ,  $y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)x(n-k)$  d'où :

$y(0) = x(0)^2$  et  $y(1) = 2x(0)x(1)$ . Par le 1, on déduit que  $x(0)^2 = 0$  et  $2x(0)x(1) = 1$ , c'est à dire  $x(0) = 0$  et  $0 = 1$ : c'est absurde !

On en déduit que la fonction  $F(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$  n'a pas d'original par la transformation en Z.

3) On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une suite causale  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  et un réel  $R > 0$  tels que  $X(z)$ , la transformée en Z de  $x$ , vérifie  $\forall z \in ]R; +\infty[$ ,  $X(z) = \frac{1}{z\sqrt{z}}$ .

On pose  $y = x * x$ . On a alors par le Théorème 3  $\forall z \in ]R; +\infty[$ ,  $Y(z) = X(z)^2 = \frac{1}{z^3}$ . On en déduit

par le Théorème 5 que  $y = \delta_{-3}$ . On a par la définition du produit de convolution,  $y(0) = x(0)^2$  donc  $x(0) = 0$ , et  $y(2) = 2x(0)x(2) + x(1)^2 = x(1)^2$  donc  $x(1) = 0$ .

On a alors  $1 = y(3) = 2(x(0)x(3) + x(1)x(2)) = 0$  ce qui est encore absurde....

### Exercice 14

1)  $u_2 = 3$ ,  $u_3 = \frac{10}{3}$  et  $u_4 = \frac{29}{9}$ .

2) Montrons par récurrence sur  $n$  la propriété :  $(P_n) : \forall k \in \{0; \dots; n\}$ ,  $1 \leq u_n \leq 4$ .

La propriété  $(P_1)$  est vraie car  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 4$ .

Si l'on a pour un certain entier  $n$  :  $\forall k \in \{0; \dots; n\}$ ,  $1 \leq u_n \leq 4$ , alors  $0 \leq \frac{2}{3}u_n \leq \frac{8}{3}$  et

$0 \leq \frac{1}{3}u_{n-1} \leq \frac{4}{3}$  d'où  $0 \leq u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}u_{n-1} \leq \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4$  ce qui prouve la propriété au rang  $n+1$ .

3) Pour tout nombre complexe de module strictement plus grand que 1, la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(n)}{z^n}$  est absolument convergente car  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|x(n)| \leq 4$  donc  $X(z)$  est définie pour tout nombre complexe de module strictement plus grand que 1.

4) Pour tout entier strictement négatif  $n$  on a  $x(n) - \frac{2}{3}x(n-1) - \frac{1}{3}x(n-2) = 0$  car la suite  $x$  est causale et pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on a aussi  $x(n) - \frac{2}{3}x(n-1) - \frac{1}{3}x(n-2) = 0$  à cause de la relation sur la suite  $u$ . On en déduit que  $y$  admet une expression de la forme  $y = \alpha \delta_0 + \beta \delta_1$ .

On a  $y(0) = x(0) = u_0 = 1$  et  $y(1) = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$ . Cela donne  $y = \delta_0 + \frac{10}{3}\delta_1$ .

5) Par la propriété 7, on a  $Y(z) = \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z^2}\right) X(z) = \frac{3z^2 - 2z - 1}{3z^2} X(z)$

6) On déduit du 4) que  $Y(z) = 1 + \frac{10}{3z}$  donc, par le 5) :

$$X(z) = \frac{3z+10}{3z} \cdot \frac{3z^2}{3z^2-2z^2-1} = \frac{z(3z+10)}{(3z^2-2z^2-1)} = \frac{z(3z+10)}{3(z-1)\left(z+\frac{1}{3}\right)} .$$

$$\text{On a alors } X(z) = z \left( \frac{\frac{13}{4}}{z-1} - \frac{\frac{9}{4}}{z+\frac{1}{3}} \right) = \frac{13}{4} \frac{z}{z-1} - \frac{9}{4} \frac{z}{z+\frac{1}{3}} \quad \text{d'où } x(n) = \left( \frac{13}{4} - \frac{9}{4} \cdot \left( \frac{-1}{3} \right)^n \right) U(n) .$$

On remarque aussi que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = \frac{13}{4}$ .

### Exercice 15

1) Le système  $(S)$  étant stable et puisque  $x \in l^\infty(\mathbb{N})$ , la définition 8 implique que  $y \in l^\infty(\mathbb{N})$ . Le signal  $h_p$  étant à durée finie, le système  $(S_p)$  est RIF donc stable et le même argument s'applique pour montrer que  $y_p \in l^\infty(\mathbb{N})$ .

2) On remarque d'abord que  $h_p(n) = (1 - U(n-p))h(n) = \begin{cases} h(n) & \text{si } n < p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Ainsi :

si  $n < p$ , on a  $y_p(n) = \sum_{k=0}^n h_p(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k) = y(n)$  et dans ce cas

$$|y(n) - y_p(n)| = 0$$

si  $n \geq p$ ,  $y_p(n) = \sum_{k=0}^n h_p(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{p-1} h(k)x(n-k)$  et dans ce cas

$$y(n) - y_p(n) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k) - \sum_{k=0}^{p-1} h(k)x(n-k) = \sum_{k=p}^n h(k)x(n-k)$$

donc

$$|y(n) - y_p(n)| \leq \sum_{k=p}^n |h(k)x(n-k)| \leq \|x\|_\infty \cdot \sum_{k=p}^n |h(k)| \leq \left( \sum_{k=p}^{+\infty} |h(k)| \right) \cdot \|x\|_\infty .$$

3) D'après la question précédente, et en gardant les mêmes notations, il suffit de prendre  $(\tilde{S}) = (S_p)$  où  $p$  est un entier tel que  $\sum_{k=p}^{+\infty} |h(k)| < \frac{1}{100}$ .

On a  $\sum_{k=p}^{+\infty} |h(k)| < 3 \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{3}{10^p} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3 \cdot 10^{p-1}}$  donc il suffit de prendre  $p=3$ .

On choisit donc de prendre le système RIF  $(\tilde{S}) : x \rightarrow \tilde{y}$  avec  $\tilde{y}(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2)$ .

### Exercice 16

1) Les pôles de  $X(z)$  sont des (mais pas nécessairement « toutes les ») racines du polynôme

$X^p - 1$  donc sont des nombres complexes de module 1 : la propriété 11 assure l'existence de l'original  $x$  et assure que  $X(z) = F(z)$  pour tout nombre complexe  $z$  de module strictement plus grand que 1.

2) On a  $\left(1 - \frac{1}{z^p}\right)X(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_{p-1}}{z^{p-1}}$  (pour tout nombre complexe de module assez grand)

d'où l'on déduit, par le Théorème 5 et la propriété 7 que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, x(n) - x(n-p) = a_0 \delta(n) + a_1 \delta(n-1) + \dots + a_{p-1} \delta(n-p+1),$$

ce qui montre que la suite  $(x(n) - x(n-p))_{n \in \mathbb{Z}}$  est finie.

3) Par la relation obtenue au 2), on a  $\forall n \geq p, x(n) - x(n-p) = 0$ , ce qui montre que la suite  $x$  est périodique de période  $p$  à partir du rang  $n = 0$ .

D'autre part, toujours par la relation obtenue au 2) et la causalité de la suite  $x$ :

$\forall n \in \{0, 1, \dots, p-1\}, x(n) - 0 = a_0 \delta(n) + a_1 \delta(n-1) + \dots + a_{p-1} \delta(n-p+1) = a_n$ . On en déduit que  $(x(n))_{n \in \mathbb{N}} = (a_0; a_1; \dots; a_p; a_0; a_1; \dots; a_p; a_0; a_1; \dots; a_p; \dots)$ .

$$4) \text{ On a } F(z) = \frac{z^4 + 3z}{1 + z + z^2 + z^3 + z^4} = \frac{(z^4 + 3z)(z-1)}{(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)(z-1)} = \frac{z^5 - z^4 + 3z^2 - 3z}{z^5 - 1}.$$

On reconnaît une expression de la forme  $\frac{a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_{p-1} z}{z^p - 1}$  avec  $p=5$  et

$$(a_0; a_1; a_2; a_3; a_4) = (1; -1; 0; 3; -3) \text{ donc par le résultat du 3) :}$$

$$(x(n))_{n \in \mathbb{N}} = (1; -1; 0; 3; -3; 1; -1; 0; 3; -3; 1; -1; 0; 3; -3; \dots)$$

### Exercice 17

1)

a) D'après le (ii) de la propriété 8, on a

$$\text{TZ}((x(n+p)U(n))_{n \in \mathbb{Z}})(z) = z^p \text{TZ}(x)(z) - x(0)z^{p-1} - x(1)z^{p-2} - \dots - x(p-1) = z^p \text{TZ}(x)(z)$$

ce qui donne tout simplement dans notre cas  $Y(z) = z^p X(z)$ .

b) On a, par ce qui précède,  $\deg(X(z)) = \deg(Y(z)) - p$ . Or, par le Théorème 4)(i), si  $|z| \rightarrow +\infty$ ,  $Y(z)$  tend vers  $y(0) = x(p) \neq 0$  ce qui ne peut arriver que si  $\deg(Y(z)) = 0$ . En effet, en considérant  $t > 0$  et  $t \rightarrow +\infty$ ,  $Y(t)$  est équivalent au quotient des termes de plus haut degré de son écriture en fraction rationnelle et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = x(p) \neq 0$  implique que ces termes de plus haut degré sont de même degré, c'est à dire que  $\deg(Y(z)) = 0$ . On en déduit que  $\deg(X(z)) = -p$ .

2)

a) La fraction rationnelle  $Y(z) = z^p X(z)$  étant de degré nul, la propriété 11 implique l'existence d'un original  $y$ .

b) Par le Théorème 4)(i), si  $|z| \rightarrow +\infty$ ,  $Y(z)$  tend vers  $y(0)$ . En considérant  $t > 0$  et  $t \rightarrow +\infty$ ,  $Y(t)$  est équivalent au quotient des termes de plus haut degré de son écriture en fraction rationnelle : puisque  $\deg(Y(z)) = 0$ , ce quotient est une constante non nulle vers laquelle tend  $Y(t)$ . On en déduit que  $y(0) \neq 0$ .

c) Par la propriété 7, on a  $\forall n \in \mathbb{Z}, x(n) = y(n-p)$ , donc par causalité de  $y$ , on a  $x(0) = x(1) = \dots = x(p-1) = 0$  et, par le b),  $x(p) = y(0) \neq 0$ .

### Exercice 18

1) Par le 4) de la propriété 2, on a d'une part :

$$y_2 * x * y_1 = y_2 * (x * y_1) = y_2 * \delta = y_2$$

et d'autre part,

$$y_2 * x * y_1 = (y_2 * x) * y_1 = \delta * y_1 = y_1 \text{ (noter que l'on a utilisé le 3) de la propriété 2)}$$

d'où  $y_1 = y_2$ .

2) a) On a  $U^*(\delta - \delta_1) = U - U^* \delta_1$  donc  $(U^*(\delta - \delta_1))(n) = U(n) - U(n-1) = \delta(n)$  donc  $U$  est inversible et que  $U^{-1} = \delta - \delta_1$ .

b) (i) On a  $(\delta_1 * y)(0) = \delta(-1)Y(0) = 0$ .

(ii) Si  $\delta_1$  était inversible d'inverse  $y$ , on aurait  $(\delta_1 * y)(0) = \delta(0) = 1$  ce qui contredit le (i).

3) On a  $(x * x^{-1})(0) = \delta(0) = 1$  donc  $x(0) \cdot x^{-1}(0) = 1$  : nécessairement,  $x(0) \neq 0$ .

4) On a  $(x * y)(0) = x(0)y(0) = 1$  et pour  $n$  positif :

$$(x * y)(n) = \sum_{k=0}^n x(k)y(n-k) = x(0)x(n) + \sum_{k=1}^n x(k)y(n-k) = 0 \quad \text{par la relation de récurrence qui définit } y.$$

On en déduit que  $x * y = \delta$  donc  $x$  est inversible et  $x^{-1} = y$ .

5)

a) L'hypothèse  $x^{-1} = x$  signifie que  $x * x = \delta$ . En développant le produit de convolution  $(x - \delta) * (x + \delta)$  (propriété 2.1) on obtient  $(x - \delta) * (x + \delta) = \delta - x + x - \delta * \delta = 0$ .

b) On a nécessairement  $x(0) \neq 1$  ou  $x(0) \neq -1$  donc, par la question 4), une des deux suites  $x - \delta$  ou  $x + \delta$  est inversible.

c) Si  $x - \delta$  est inversible, alors

$$(x - \delta) * (x + \delta) = 0 \Rightarrow 0 = (x - \delta)^{-1} * (x - \delta) * (x + \delta) = x + \delta \quad \text{d'où } x = -\delta.$$

Si  $x + \delta$  est inversible, alors  $(x - \delta) * (x + \delta) = 0 \Rightarrow 0 = (x - \delta) * (x + \delta) * (x + \delta)^{-1} = x - \delta$  d'où  $x = \delta$ .

On a donc  $x = \delta$  ou  $x = -\delta$ .

6)

a) Par les questions 3) et 4), on a  $x$  inversible si et seulement si  $x(0) \neq 0$ , c'est à dire par le Théorème de la valeur initiale (Th. 4),  $\lim_{z \in \mathbb{R}, z \rightarrow +\infty} X(z) \neq 0$ . Puisque  $X(z) \in \mathbb{R}(z)$ , cette dernière condition équivaut à ce que  $\deg(X(z)) = 0$ .

b) D'après la question précédente,  $\deg(X(z)) = 0$ . La fraction rationnelle  $\frac{1}{X(z)}$  est donc aussi de degré nul, et par la propriété 11, elle admet un original  $y$ . Par le Théorème 3, la transformée en  $Z$  de  $x * y$  vaut 1 donc  $x * y = \delta$ . On en déduit que  $x^{-1} = y$  admet une transformée en  $Z$  égale à  $\frac{1}{X(z)}$ .

$$7) \text{ On a } X(z) = \frac{2z}{z-1} + \frac{z}{z-\frac{1}{3}} = \frac{z(3z-\frac{5}{3})}{(z-1)(z-\frac{1}{3})} \quad \text{donc } \deg(X(z)) = 0: \text{ la suite } x \text{ est}$$

$$\text{inversible d'inverse l'original de } \frac{1}{X(z)} = \frac{(z-1)(z-\frac{1}{3})}{z(3z-\frac{5}{3})} = \frac{3z^2-4z+1}{9z(z-\frac{5}{9})}.$$

$$\text{On a } \frac{1}{zX(z)} = \frac{3z^2-4z+1}{9z^2(z-\frac{5}{9})} = \frac{11}{25z} - \frac{1}{5z^2} - \frac{8}{75} \cdot \frac{1}{z-\frac{5}{9}} \quad \text{donc } \frac{1}{X(z)} = \frac{11}{25} - \frac{1}{5z} - \frac{8}{75} \cdot \frac{z}{z-\frac{5}{9}} \quad \text{ce qui nous}$$

donne  $x^{-1}(n) = \frac{11}{25} \delta(n) - \frac{1}{5} \delta(n-1) - \frac{8}{75} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^n U(n)$  .

**Exercice 19**

1) On a  $x_{\omega+2\pi}(n) = e^{jn\omega+2jn\pi} U(n) = e^{jn\omega} e^{2jn\pi} U(n) = e^{jn\omega} U(n) = x_{\omega}(n)$ .

On considérera donc par la suite que  $\omega \in [0 ; 2\pi[$  .

2) a) L'écriture  $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  étant supposée irréductible, les pôles de  $H(z)$  sont les racines de Q. Puisque le système est stable, les pôles de  $H(z)$  sont de module strictement plus petit que 1 donc  $Q(e^{j\omega}) \neq 0$  car  $|e^{j\omega}| = 1$ .

b) Si  $z = e^{j\omega}$ , on a :  $z(P(z) - H(e^{j\omega})Q(z)) = 0$  : le complexe  $e^{j\omega}$  étant une racine du polynôme  $z(P(z) - H(e^{j\omega})Q(z))$ , ce dernier est divisible par  $z - e^{j\omega}$  dans  $\mathbb{C}[z]$ .

c) On a  $Y_{\omega}(z) = H(z) X_{\omega}(z) = \frac{zH(z)}{z - e^{j\omega}} = \frac{zP(z)}{Q(z)(z - e^{j\omega})}$  .

D'après la question précédente, il existe  $A(z) \in \mathbb{C}[z]$  tel que

$$z(P(z) - H(e^{j\omega})Q(z)) = (z - e^{j\omega})A(z)$$

ce qui donne  $Y_{\omega}(z) = \frac{zH(e^{j\omega})Q(z) + (z - e^{j\omega})A(z)}{Q(z)(z - e^{j\omega})} = \frac{A(z)}{Q(z)} + H(e^{j\omega}) \frac{z}{z - e^{j\omega}}$ .

Enfin, de la relation  $z(P(z) - H(e^{j\omega})Q(z)) = (z - e^{j\omega})A(z)$  on tire que

$$\deg(A(z)) = \deg(P(z) - H(e^{j\omega})Q(z)) \leq \deg(P(z)) \text{ car } \deg(Q(z)) \leq \deg(P(z)).$$

3) La fraction rationnelle  $\frac{A(z)}{Q(z)}$  a tous ses pôles de module strictement inférieur à 1. Par la remarque qui suit le Théorème 6 son original  $\varepsilon_{\omega}$  vérifie  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_{\omega}(n) = 0$ . L'original de

$$z \rightarrow H(e^{j\omega}) \frac{z}{z - e^{j\omega}} \text{ est } H(e^{j\omega}) e^{jn\omega} U(n) \text{ donc la question précédente montre bien que}$$

$$\forall n \geq 0, y_{\omega}(n) = \varepsilon_{\omega}(n) + H(e^{j\omega}) e^{jn\omega} \text{ où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_{\omega}(n) = 0.$$

4) a) On a

$$G(\omega) = |H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|e^{j\omega} - a|} = \frac{1}{|(\cos(\omega) - 1) + j \sin(\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{(\cos(\omega) - 1)^2 + \sin^2(\omega)}} \\ = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2a \cos(\omega) + 1}}$$

b) On a  $G(\omega) = |H(e^{j\omega})| = \frac{|e^{j\omega} - 2|}{|2e^{j\omega} - 1|} = \frac{\sqrt{(\cos(\omega) - 2)^2 + \sin^2(\omega)}}{\sqrt{(2\cos(\omega) - 1)^2 + 4\sin^2(\omega)}} = \frac{\sqrt{5 - 4\cos(\omega)}}{\sqrt{5 - 4\cos(\omega)}} = 1$  .

C'est la même fonction de gain que l'on obtiendrait si l'on avait  $H(z) = 1$  . La connaissance de la fonction de gain ne suffit pas pour caractériser un système.

**Exercice 20**

1) Les pôles sont  $\frac{1}{2}$  et  $-1$  . Par le Théorème 6, le système est instable.

2) Si  $y$  est la sortie correspondant à une entrée  $x$ , on obtient en appliquant la méthode du IV) 3) :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) - \frac{1}{2}y(n-2) = x(n) + 4x(n-1).$$

$$3) \quad H(z) = z \cdot \frac{z+4}{z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}} = z \left( \frac{-2}{z+1} + \frac{3}{z-\frac{1}{2}} \right) \text{ donc}$$

$$h(n) = \mathcal{TZ}^{-1}(H(z)) = \left( \frac{3}{2^n} - 2 \cdot (-1)^n \right) U(n).$$

On a aussi  $Y_{\text{ind}}(z) = \frac{zH(z)}{z-1} = z \cdot \frac{z^2+4z}{(z+1)(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)} = z \left( \frac{-1}{z+1} + \frac{5}{z-1} - \frac{3}{z-\frac{1}{2}} \right)$  d'où

$$y_{\text{ind}}(n) = \left( 5 - (-1)^n - \frac{3}{2^n} \right) U(n)$$

$$4) \text{ On a } X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{(z+1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}{(z-1)(z+4)} = z \cdot \frac{(z+1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}{z(z-1)(z+4)} = \frac{1}{8} \frac{z}{z} + \frac{1}{5} \frac{z}{z-1} + \frac{27}{40} \frac{z}{z+4}$$
 ce qui donne
$$x(n) = \left( \frac{1}{5} + \frac{27}{40} \cdot (-4)^n \right) U(n) + \frac{1}{8} \delta(n).$$

### Exercice 21

1) La fonction constante 1 est une solution particulière de l'équation  $\tau g'(t) + g(t) = 1$  et la solution de l'équation homogène associée est  $t \rightarrow C e^{-\frac{t}{\tau}}$ . Le Théorème de structure des solutions montre que  $g$  a une expression de la forme  $g(t) = 1 + C e^{-\frac{t}{\tau}}$  et la condition initiale  $g(0) = 0$  aboutit à  $C = -1$  d'où  $g(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

$$2) \text{ On reconnaît un système du premier ordre et } H_h(z) = \frac{\frac{h}{\tau+h} z}{z - \frac{\tau}{\tau+h}} = \frac{1}{\tau+h} \cdot \frac{hz}{z - \frac{\tau}{\tau+h}}.$$

$$3) \text{ On a } Y_h(z) = \frac{z}{z-1} H_h(z) = \frac{1}{\tau+h} \cdot \frac{hz^2}{(z-1)\left(z - \frac{\tau}{\tau+h}\right)}.$$

On a par une décomposition en éléments simples :

$$Y_h(z) = \frac{z}{\tau+h} \cdot \frac{hz}{(z-1)\left(z - \frac{\tau}{\tau+h}\right)} = \frac{z}{z-1} - \frac{\tau}{\tau+h} \cdot \frac{z}{z - \frac{\tau}{\tau+h}}$$
 en remarquant que les pôles sont simples vu

que  $\frac{\tau}{\tau+h} \neq 1$  car  $h > 0$ .

On en déduit l'expression de l'original  $y_h(n) = \left( 1 - \left( \frac{\tau}{\tau+h} \right)^{n+1} \right) U(n).$

4) On a, en utilisant la relation  $h = \frac{1}{N}$  :

$$y_h(N) = 1 - \left( \frac{\tau}{\tau+h} \right)^{N+1} = 1 - \frac{\tau}{\tau+h} \cdot \left( \frac{\tau}{\tau+h} \right)^N = 1 - \frac{\tau}{\tau+h} \cdot \left( 1 - \frac{h}{\tau+h} \right)^N = 1 - \frac{N\tau}{N\tau+1} \cdot \left( 1 - \frac{1}{N\tau+1} \right)^N$$



5) a) Si  $N \rightarrow +\infty$ , on a  $\frac{1}{N\tau+1} \rightarrow 0$  donc  $\ln\left(1 - \frac{1}{N\tau+1}\right) \sim -\frac{1}{N\tau+1} \sim -\frac{1}{N\tau}$  d'où

$$N \ln\left(1 - \frac{1}{N\tau+1}\right) \rightarrow -\frac{1}{\tau} .$$

b) On a  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{N\tau+1}\right)^N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \exp\left(N \ln\left(1 - \frac{1}{N\tau+1}\right)\right) = e^{-\frac{1}{\tau}}$  d'où

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} y_h(N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{N\tau}{N\tau+1} \left(1 - \frac{1}{N\tau+1}\right)^N\right) = 1 - e^{-\frac{1}{\tau}} \quad (\text{attention, } h \text{ dépend de } N).$$

On retrouve comme pressenti le fait que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} y_h(N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} y_{\frac{1}{N}}(N) = g(1)$ .

### Exercice 22

1) On a par la propriété 8, pour tout nombre complexe de module assez grand :

$$z^2 X(z) - z = \frac{1}{3} z X(z) + \alpha X(z)$$

d'où

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - \frac{1}{3}z + \alpha} .$$

2) Si  $\alpha = 0$ , on a  $X(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{3}}$  d'où  $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} U(n-1)$  et  $\lim u_n = 0$ .

Supposons maintenant  $\alpha \neq 0$ . L'écriture de la fraction rationnelle  $\frac{z}{z^2 - \frac{1}{3}z + \alpha}$  est alors irréductible, et

les pôles sont les racines de  $z^2 - \frac{1}{3}z + \alpha$ .

Si  $\alpha = \frac{1}{36}$ ,  $\Delta = 0$  et  $X(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{6}\right)^2}$  d'où, par la propriété 9,  $x(n) = \left(\frac{n}{6^n}\right) U(n-1)$  et

$\lim u_n = 0$ .

Si  $\alpha > \frac{1}{36}$ ,  $\Delta < 0$  et les deux pôles de  $X(z)$  sont deux nombres complexes de module égal à

$r = \sqrt{\alpha}$ . et d'argument  $\pm\theta$  avec  $\cos(\theta) = \frac{1}{6r}$  et  $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{36r^2 - 1}}{6}$ . On a

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - \frac{1}{3}z + \alpha} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \cdot \frac{r \sin(\theta) z}{z^2 - 2(r \cos(\theta))z + r^2} \quad \text{d'où } x = (r^n \sin(n\theta) U(n))_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{et}$$

$\lim u_n = 0 \Leftrightarrow r < 1 \Leftrightarrow \alpha < 1$ .

Si  $\alpha < \frac{1}{36}$ ,  $\Delta > 0$  et les deux pôles de  $X(z)$  sont deux nombres  $a = \frac{1}{6}(1 - \sqrt{1 - 36\alpha})$  et

$$b = \frac{1}{6}(1 + \sqrt{1 - 36\alpha}) . \text{ On a } X(z) = \frac{z}{z^2 - \frac{1}{3}z + \alpha} = \frac{3}{\sqrt{1 - 36\alpha}} \left( \frac{z}{z-b} - \frac{z}{z-a} \right) \quad \text{d'où}$$

$$x = \left( \frac{3}{\sqrt{1 - 36\alpha}} (b^n - a^n) U(n) \right)_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{et } \lim u_n = 0 \Leftrightarrow |a| < 1 \text{ et } |b| < 1 . \text{ Vu que } a < b \text{ cela signifie}$$

que  $a > -1$  et  $b < 1$ , c'est à dire respectivement  $\alpha > \frac{-4}{3}$  et  $\alpha > \frac{-2}{3}$ , c'est à dire  $\alpha > \frac{-2}{3}$ .

Conclusion :  $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \alpha \in ]-\frac{2}{3}; 1[$ .

### Exercice 23

1) a) Le plus rigoureux est de revenir à la définition de continuité d'une fonction sur  $\mathbb{C}$  donnée à la propriété 6 du chapitre sur les séries entières.

La série entière  $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^n$  a pour rayon de convergence  $\frac{1}{R}$ . On a pour tout nombre complexe

$z$  tel que  $|z| > R$ ,  $X(z) = S\left(\frac{1}{z}\right)$ . La fonction  $X$  est alors continue comme composée de fonctions

continues sur  $\mathbb{C}$ . Démontrons le.

Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  avec  $|z_0| > R$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors, par continuité de la fonction  $S$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout nombre complexe  $\xi$  de module strictement inférieur à  $\frac{1}{R}$ ,

$$\left| \xi - \frac{1}{z_0} \right| < \delta \Rightarrow \left| S(\xi) - S\left(\frac{1}{z_0}\right) \right| < \varepsilon.$$

Soit  $z \in \mathbb{C}$  avec  $|z| > R$ . Alors,  $\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z| \cdot |z_0|} \leq \frac{|z - z_0|}{R^2}$  donc si  $|z - z_0| < R^2 \delta$ , on a

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} \right| \leq \delta \text{ d'où } \left| S\left(\frac{1}{z}\right) - S\left(\frac{1}{z_0}\right) \right| < \varepsilon \text{ c'est à dire } |X(z) - X(z_0)| < \varepsilon : \text{ cela prouve la continuité}$$

de la fonction  $X$  en  $z_0$ .

b) Puisque  $R < 1$ , la fonction  $\varphi$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . On a

$$\varphi(\theta + 2\pi) = X(e^{-j(\theta + 2\pi)}) = X(e^{-j\theta}) = \varphi(\theta) \text{ donc la fonction } \varphi \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}$$

Si  $(\theta_n)_n$  est une suite convergente vers  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors  $(e^{-j\theta_n})_n = (\cos(\theta_n) - j \sin(\theta_n))_n$  converge vers  $e^{-j\theta}$  et, par la question précédente,  $\varphi(e^{-j\theta_n}) = X(e^{-j\theta_n})$  tend vers  $X(e^{-j\theta}) = \varphi(e^{-j\theta})$ . Par la propriété 14 du chapitre sur les fonctions élémentaires, la fonction  $\varphi$  est continue.

c) On a  $\frac{R+1}{2} > R$  donc la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) \left(\frac{2}{R+1}\right)^n$  converge (vers  $X\left(\frac{R+1}{2}\right)$ ) : la suite

$\left(x(n) \left(\frac{2}{R+1}\right)^n\right)_n$  est donc bornée, c'est à dire qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x(n)| \leq C \left(\frac{R+1}{2}\right)^n.$$

Puisque  $0 < \frac{R+1}{2} < 1$ , la série  $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{R+1}{2}\right)^n$  converge donc la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)$  converge absolument.

2)

a) Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^p x(k) e^{kj\theta} e^{-nj\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^p x(k) \int_0^{2\pi} e^{(k-n)j\theta} d\theta.$$

Si  $n$  est strictement négatif, on a  $\forall k \in \{0; 1; \dots; p\}, k - n > 0$  donc

$$\int_0^{2\pi} e^{(k-n)j\theta} d\theta = \frac{1}{(k-n)j} [e^{(k-n)j\theta}]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{donc par causalité de la suite } x, \text{ on a}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^p x(k) e^{kj\theta} e^{-nj\theta} d\theta = 0 = x(n).$$

Si  $0 \leq n \leq p$ , alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^p x(k) e^{kj\theta} e^{-nj\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} x(n) \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{0 \leq k \leq p \\ k \neq n}} x(k) \int_0^{2\pi} e^{(k-n)j\theta} d\theta = x(n)$$

car pour  $k \neq n$ , on montre comme précédemment que  $\int_0^{2\pi} e^{(k-n)j\theta} d\theta = 0$ .

b) On considère toujours que  $n \leq p$ . On a alors par la question précédente

$$\begin{aligned} c_n - x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) e^{-nj\theta} d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^p x(k) e^{kj\theta} e^{-nj\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \varphi(\theta) - \sum_{k=0}^p x(k) e^{kj\theta} \right) e^{-nj\theta} d\theta. \end{aligned}$$

$$\text{On a alors } \left| \varphi(\theta) - \sum_{k=0}^p x(k) e^{kj\theta} \right| = \left| \sum_{k=p+1}^{+\infty} x(k) e^{kj\theta} \right| \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} |x(k)|$$

d'où

$$\begin{aligned} |c_n - x(n)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \varphi(\theta) - \sum_{k=0}^p x(k) e^{kj\theta} \right) e^{-nj\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \varphi(\theta) - \sum_{k=0}^p x(k) e^{kj\theta} \right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=p+1}^{+\infty} |x(k)| \right) d\theta = \sum_{k=p+1}^{+\infty} |x(k)|. \end{aligned}$$

On a alors pour tout entier naturel  $p$  supérieur à  $n$  la relation :  $|c_n - x(n)| \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} |x(k)|$ . Puisque la

série  $\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)$  converge absolument, on a  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} |x(k)| = 0$  donc en faisant  $p \rightarrow +\infty$ , on obtient  $|c_n - x(n)| \leq 0$  d'où  $c_n = x(n)$ .

3)

a) Soit  $h$  l'original de  $H(z)$  (on a  $h(n) = 3\delta(n) - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n U(n)$  mais nous n'avons pas besoin de cette expression ici). Le rayon de convergence de  $H(z)$  vaut  $\frac{1}{3}$ . On a alors  $y = h * x$  et par le Théorème 3, la transformée en  $Z$  de  $y$  existe et vaut  $H(z)X(z)$  pour tout nombre complexe de module strictement plus grand que  $R$  et  $\frac{1}{3}$ . Cela implique que la rayon de convergence de la transformée en  $Z$  de  $y$  est strictement plus petit que 1.

b) On a pour tout nombre complexe de module 1 :

$$|H(z)|^2 = \frac{z-3}{3z-1} \cdot \frac{\bar{z}-3}{3\bar{z}-1} = \frac{|z|^2 - 6\operatorname{Re}(z) + 9}{9|z|^2 - 6\operatorname{Re}(z) + 1} = \frac{10 - 6\operatorname{Re}(z)}{10 - 6\operatorname{Re}(z)} = 1$$

c) Par le Théorème de Parseval, on déduit de la question 3) que les deux séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |y(n)|^2 \quad \text{convergent et}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |X(e^{-j\theta})|^2 d\theta, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |y(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Y(e^{-j\theta})|^2 d\theta. \quad \text{Puisque pour tout}$$

nombre complexe  $z$  de module strictement plus grand que  $R$  et  $\frac{1}{3}$ , on a  $Y(z) = H(z)X(z)$ ,  
il vient que  $|Y(e^{-j\theta})|^2 = |X(e^{-j\theta})|^2 |H(e^{-j\theta})|^2 = |X(e^{-j\theta})|^2$  par le b), donc  

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |y(n)|^2.$$

- 4) On reprend le même raisonnement qu'au 3) pour montrer que la transformée en  $Z$  de  $y$  existe et vaut  $Y(z) = H(z)X(z)$  pour tout nombre complexe de module strictement plus grand que  $R$  et  $|a|$ . On remarque aussi que pour tout nombre complexe  $z$  de module 1 on a par inégalité triangulaire :  $1 = |z| \leq |z-a| + |a|$  d'où  $|z-a| \geq 1 - |a|$  et  $|H(z)|^2 = \frac{|z|^2}{|z-a|^2} \leq \frac{1}{(1-|a|)^2}$ . Il vient que  $|Y(e^{-j\theta})|^2 = |X(e^{-j\theta})|^2 |H(e^{-j\theta})|^2 \leq \frac{1}{(1-|a|)^2} |X(e^{-j\theta})|^2$ , donc  

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |y(n)|^2 \leq \frac{1}{(1-|a|)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|^2.$$

## Exercice 24

### Partie A

- 1) Par le Théorème 4 1), si la fonction  $z \rightarrow X(z)$  possédait un original  $x$ , on aurait  

$$\lim_{\substack{z \rightarrow +\infty \\ z \in \mathbb{R}}} X(z) = x(0),$$
 ce qui est impossible si  $\deg(X(z)) > 0$ .

- 2) a) Si  $|z| > 1$ , la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x(n)}{z^n} \right|$  converge car le terme général est majoré par  $\frac{M}{|z|^n}$  dont la série converge. Cela signifie que  $X(z)$  existe et que son rayon de convergence  $R$  vérifie  $R \leq 1$ .

b) La propriété 11 implique que le rayon de convergence de  $X(z)$  est le plus grand module de ses pôles. On déduit du a) que tous les pôles de  $X(z)$  ont un module inférieur ou égal à 1.

- 3) a) On a par inégalité triangulaire :

$$|y(n)| \leq |a_p| |x(n)| + |a_{p-1}| |x(n-1)| + \dots + |a_0| |x(n-p)| \leq \|x\|_{\infty} (|a_p| + |a_{p-1}| + \dots + |a_0|)$$

d'où  $y \in \ell^{\infty}(\mathbb{N})$  et que  $\|y\|_{\infty} \leq M \sum_{k=0}^p |a_k| = \|x\|_{\infty} \sum_{k=0}^p |a_k|$ .

b) La suite  $y$  étant bornée,  $Y(z)$  possède un rayon de convergence inférieur ou égal à 1 et par la propriété 7, pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $|z| > 1$  :

$$\begin{aligned} Y(z) &= a_p X(z) + a_{p-1} \frac{X(z)}{z} + \dots + a_0 \frac{X(z)}{z^p} = \frac{X(z)}{z^p} (a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \dots + a_0) \\ &= \frac{A(z) X(z)}{z^p}. \end{aligned}$$

- 4) a) Cela découle de la définition du fait que  $z_0$  est une racine multiple de  $Q(z)$ .

b) On applique le résultat de la question 3) avec  $A(z) = Q_1(z)$ . En définissant la suite causale  $y$  de terme général  $y(n) = a_p x(n) + a_{p-1} x(n-1) + \dots + a_0 x(n-p)$ , on obtient une suite bornée

( voir 3)a ) de transformée en Z égale à  $Y(z) = \frac{Q_1(z)X(z)}{z^p} = \frac{P(z)}{z^p(z-z_0)^2}$  pour tout nombre

complexe  $z$  tel que  $|z| > 1$ .

c) Puisque  $z_0 \neq 0$  l'écriture demandée découle directement de la décomposition en éléments

simples de  $Y(z) = \frac{P(z)}{z^p(z-z_0)^2}$  dans  $\mathbb{C}(z)$ . Il reste à vérifier que  $C = \frac{P(z_0)}{z_0^p} \neq 0$  car

l'écriture  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  étant supposée irréductible, les polynômes  $P(z)$  et  $Q(z)$  n'ont pas de racine en commun.

d) Par l'expression trouvée ci-dessus, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{Z}, y(n) = \sum_{k=0}^p A_k \delta(n-k) + B z_0^n + C n z_0^n. \text{ On a donc } \forall n > p, y(n) = z_0^n (B + C n)$$

d'où  $\forall n > p, |y(n)| = |B + C n|$  car  $z_0$  est de module 1. Puisque  $C \neq 0$  on en déduit que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} |y(n)| = +\infty$  donc la suite  $y$  n'est pas bornée, ce qui contredit le résultat du 4)b). On en

déduit que l'hypothèse que  $z_0$  est un pôle multiple est absurde.

5) a) La fraction  $F_1(z)$  est égale à la somme de la partie entière (qui est une constante éventuellement égale à 0 car  $\deg(F) \leq 0$ ) et de tous les éléments simples associés aux pôles de module strictement plus petits que 1. Le reste de la décomposition en éléments simples est constitué par les éléments simples associés aux éventuels pôles de module égal à 1. Ces derniers étant

simples, les éléments simples associés sont d'ordre 1, donc de la forme  $\frac{A_k}{z-z_k}$ . Enfin, le fait que

$\deg(F_1) \leq 0$  découle du fait que  $F_1(z) = F(z) - \sum_{k=0}^p \frac{A_k}{z-z_k}$  est une somme de fractions rationnelles de degrés négatifs ou nuls.

b) Par la propriété 11, la transformée en Z de  $f_1$  a un rayon de convergence égal au plus grand des modules des pôles de  $F_1(z)$ . Ce rayon de convergence est donc strictement inférieur à 1, ce qui implique par le (i) de la définition-propriété 9, en considérant le cas  $z=1$ , que  $f_1 \in l^1(\mathbb{N})$ . L'inclusion

$l^1(\mathbb{N}) \subset l^\infty(\mathbb{N})$  découle du fait que le terme général d'une série absolument convergente tend vers 0, donc forme une suite bornée.

c) L'original de  $F(z)$  est égal à  $f_1(n) + \sum_{k=0}^p A_k z_k^n U(n)$ , qui est une somme de suites bornées, donc est une suite bornée.

## Partie B

1) Si  $x \in E$ , alors  $y = S(x)$  est une suite bornée par hypothèse sur  $(S)$ . On a d'autre part pour tout nombre complexe  $z$  de module assez grand  $Y(z) = H(z)X(z) \in \mathbb{C}(z)$  comme produit de fractions rationnelles. On en déduit que  $y \in E$ .

On peut donc considérer que  $(S)$  définit une transformation de  $E$  dans  $E$ .

2) a) On a  $\delta \in E$  donc  $h \in E$ . Par les résultats de la partie A (questions 1) à 4)), on a  $\deg(H(z)) \leq 0$  et les pôles de  $H(z)$  sont soit de module strictement inférieur à 1, soit de module égal à 1 et simple.

b) Montrons par l'absurde que  $H(z)$  n'a pas de pôle de module égal à 1. Si  $z_0$  est un pôle de

$H(z)$  de module égal à 1, alors la sortie associée à l'entrée  $x = (z_0^n U(n))$  a pour transformée en  $Z$  la fraction rationnelle  $Y(z) = H(z) \cdot \frac{z}{z - z_0}$ . Cette dernière admet alors  $z_0$  comme pôle

double, et les résultats de la partie A montrent alors que  $y \notin E$ . Cela rentre en contradiction avec le fait que  $x \in l^\infty(\mathbb{N})$  et que pour toute entrée bornée on a une sortie bornée.

On en déduit que tous les pôles de  $H(z)$  sont de module strictement inférieurs à 1, donc par le Théorème 6,  $(S)$  est stable.

On peut alors dire que si la fonction de transfert d'un système est une fraction rationnelle, la stabilité est équivalente à ce que la sortie associée à une entrée bornée soit bornée. Il n'est alors plus question de faire intervenir de constante de stabilité.

3) a) Soit  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  une écriture irréductible de  $H(z)$ . Les solutions de l'équation  $H(z) = 0$ , étant les racines de  $P(z)$ , sont en nombre fini car  $H \neq 0 \Rightarrow P \neq 0$ . Vu qu'il n'y a qu'un nombre fini de solutions à cette équation, on déduit l'existence d'un nombre  $M$  tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| > M \Rightarrow H(z) \neq 0.$$

b) Puisque  $S(x_1) = S(x_2)$ , on a pour tout nombre complexe  $z$  de module assez grand

$$H(z)X_1(z) = H(z)X_2(z). \text{ Si de plus } |z| > M \text{ on déduit de la question précédente que}$$

$$X_1(z) = X_2(z) \text{ d'où } x_1 = x_2.$$

4) Par inversibilité de  $(S)$ , la suite  $x$  existe, et sa transformée en  $Z$  vaut  $X(z) = \frac{1}{H(z)}$  pour

tout nombre complexe  $z$  de module assez grand. On déduit du 1) de la partie A que

$$\deg(X(z)) \leq 0 \text{ donc } \deg(H(z)) \geq 0. \text{ Par le 2)a) de cette partie B, on sait que}$$

$\deg(H(z)) \leq 0$  d'où l'on déduit que  $\deg(H(z)) = 0$ . Puisque la suite  $x$  est bornée, les résultats de la partie A montrent que les pôles de  $X(z)$ , donc les racines de  $H(z)$ , sont de module strictement inférieur à 1 ou de module égal à 1 mais simples.

5) On raisonne par l'absurde et on suppose que  $z_0 \in \mathbb{C}$ , avec  $|z_0| = 1$ , est une racine de  $H(z)$ .

Alors la suite  $y = (z_0^n U(n))$  appartient à  $E$  (elle est bornée et sa transformée en  $Z$  vaut

$$Y(z) = \frac{z}{z - z_0} \in \mathbb{C}(z)). \text{ Il existe donc } x \in E \text{ telle que } S(x) = y \text{ et l'on a pour tout nombre}$$

complexe  $z$  de module assez grand,  $X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{z}{(z - z_0)H(z)}$ . Si  $z_0$  est une racine de

$$H(z), \text{ alors l'écriture ci-dessus montre que c'est un pôle multiple de } X(z) \text{ (car } z_0 \neq 0)$$

ce qui contredit le résultat du 4) de la partie A) et le fait que  $x$  soit bornée.

On déduit alors que toutes les racines complexes éventuelles de  $H(z)$  sont de module strictement inférieur à 1.

6) Considérons  $x$  l'original de la fraction rationnelle  $\frac{Y(z)}{H(z)}$ . Puisque  $y \in E$ , on a

$$Y(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \text{ (écriture irréductible) et les racines de } B(z) \text{ sont de module strictement}$$

inférieur à 1 ou de module 1 mais simples. En écrivant  $H(z) = \frac{C(z)}{D(z)}$  (écriture irréductible), on

peut dire que les racines de  $C(z)$  sont de module strictement inférieur à 1. On a ainsi

$\frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{A(z)D(z)}{B(z)C(z)}$  donc les pôles de la fraction rationnelle font partie des racines de  $B(z)C(z)$ . Par ce qui précède, les racines de  $B(z)C(z)$  sont de module strictement inférieur à 1 ou de module 1 mais simples : cela induit que les pôles de  $\frac{Y(z)}{H(z)}$  sont de module strictement inférieur à 1 ou de module 1 mais simples. On en déduit que l'original de  $\frac{Y(z)}{H(z)}$  est une suite  $x \in E$  par les résultats de la partie A.

On vérifie par la transformation en Z que  $y = S(x)$  donc que le système (S) est inversible.

7) Le système de fonction de transfert  $H(z) - \lambda$  est inversible si et seulement si ses pôles et ses racines sont de module strictement plus petit que 1. Donc, le système de fonction de transfert

$H(z) - \lambda = \frac{(1-\lambda)z + a\lambda}{z-a}$  est inversible si et seulement si ses pôles et ses racines éventuelles sont de module strictement inférieur à 1.

Puisque  $a \neq 0$ , le nombre  $a$  n'est pas racine du polynôme  $(1-\lambda)z + a\lambda$  donc la fraction  $\frac{(1-\lambda)z + a\lambda}{z-a}$  est écrite sous forme irréductible. La fraction rationnelle  $H(z) - \lambda$  admet  $a$  comme unique pôle.

Si  $\lambda = 1$ ,  $\deg(H(z) - 1) = -1$  donc le système de fonction de transfert  $H(z) - 1$  n'est pas inversible par le 4) de la partie B.

Si  $\lambda \neq 1$ , on a  $\deg(H(z) - \lambda) = -0$  et l'équation  $H(z) - \lambda = 0$  admet comme unique solution

$z = \frac{a\lambda}{\lambda - 1}$  donc, par le 6), le système de fonction de transfert  $H(z) - \lambda$  est inversible si et seulement

si  $\left| \frac{a\lambda}{\lambda - 1} \right| < 1$ . On en déduit que  $\lambda$  appartient au spectre de (S) si et seulement si

$\left| \frac{a\lambda}{\lambda - 1} \right| \geq 1$  ou  $\lambda = 1$ .

On a  $\left| \frac{a\lambda}{\lambda - 1} \right| \geq 1$  ou  $\lambda = 1 \Leftrightarrow |a|^2(x^2 + y^2) \geq (x-1)^2 + y^2$  où  $x + jy$  est la forme algébrique de  $\lambda$ .

On a donc  $\left| \frac{a\lambda}{\lambda - 1} \right| \geq 1$  ou  $\lambda = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{2}{1-|a|^2}x + \frac{1}{1-|a|^2} \leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{1-|a|^2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{|a|^2}{(1-|a|^2)^2}$ .

Nous reconnaissons là l'équation du disque complexe fermé de centre  $\frac{1}{1-|a|^2}$  et de rayon  $\frac{|a|}{1-|a|^2}$ . Un

de ses diamètres est le segment formé par les points d'affixes  $\frac{1}{1+|a|}$  et  $\frac{1}{1-|a|}$ .

### Exercice 25

1) On a  $H_2(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$ . La réponse impulsionnelle vaut  $h_2(n) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n U(n)$  et la réponse

impulsionnelle vaut  $y_{\text{ind},2}(n) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) U(n)$ . Le système est stable et RII.

$$2) \text{ a) On a } H_p(z) = \frac{p z^p}{p z^p + (p-1) z^{p-1} + \dots + z} = \frac{p z^{p-1}}{p z^{p-1} + (p-1) z^{p-2} + \dots + 1}.$$

b) On a pour tout réel  $z$  différent de 1 :

$$(z-1) \left( \sum_{k=1}^p k z^{k-1} \right) = (z-1) \frac{d}{dz} \left( \sum_{k=0}^p z^k \right) = (z-1) \frac{d}{dz} \left( \frac{z^{p+1}-1}{z-1} \right) = \frac{p z^{p+1} - (p+1) z^p + 1}{z-1},$$

et

$$p z^p - (1 + z + \dots + z^{p-1}) = p z^p - \frac{z^p - 1}{z-1} = \frac{p z^{p+1} - (p+1) z^p + 1}{z-1}$$

ce qui prouve que  $(z-1) \left( \sum_{k=1}^p k z^{k-1} \right) = p z^p - (1 + z + \dots + z^{p-1})$  pour tout réel  $z$  différent de 1.

Le polynôme  $(z-1) \left( \sum_{k=1}^p k z^{k-1} \right) - p z^p + (1 + z + \dots + z^{p-1})$  ne peut donc pas avoir qu'un nombre fini de racines, il est identiquement nul sur  $\mathbb{C}$  par le Théorème de D'Allembert.

c) On a

$$H_p(z) = \frac{p z^{p-1}}{p z^{p-1} + (p-1) z^{p-2} + \dots + 1} = \frac{p (z-1)^2 z^{p-1}}{(p z^{p-1} + (p-1) z^{p-2} + \dots + 1)(z-1)^2}$$

$$= \frac{p (z-1)^2 z^{p-1}}{(p z^p - (1 + z + \dots + z^{p-1}))(z-1)} = \frac{p (z-1)^2 z^{p-1}}{p z^p (z-1) - (z^p - 1)} = \frac{p z^{p-1} (z-1)^2}{p z^{p+1} - (p+1) z^p + 1}.$$

Cette écriture n'est pas irréductible car 1 est une racine commune entre le numérateur et le dénominateur.

3) a) L'écriture  $H_p(z) = \frac{p z^{p-1}}{p z^{p-1} + (p-1) z^{p-2} + \dots + 1}$  est irréductible car 0 n'est pas une racine du

dénominateur, donc on a  $p z_0^{p-1} + (p-1) z_0^{p-2} + \dots + 1 = 0$ . On a alors par le 2)b) :

$$0 = (z_0 - 1) (p z_0^{p-1} + (p-1) z_0^{p-2} + \dots + 1) = p z_0^p - (1 + z_0 + z_0^2 + \dots + z_0^{p-1}) \text{ d'où}$$

$$z_0^p = \frac{1}{p} (1 + z_0 + z_0^2 + \dots + z_0^{p-1}).$$

b) Supposons que  $|z_0| > 1$ . On a alors  $\forall k \leq p-1, |z_0|^k < |z_0|^p$  donc par inégalité triangulaire

et le 3) a) :  $p \cdot |z_0|^p = \left| \sum_{k=0}^{p-1} z_0^k \right| \leq \sum_{k=0}^{p-1} |z_0|^k = \sum_{k=0}^{p-1} |z_0|^k < \sum_{k=0}^{p-1} |z_0|^p = p \cdot |z_0|^p$  ce qui est absurde.

Cela signifie que  $|z_0| \leq 1$ .

4) a) On a  $z_0^p = \frac{1}{p} (1 + z_0 + z_0^2 + \dots + z_0^{p-1})$  d'où

$$p = \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0^2} + \dots + \frac{1}{z_0^{p-1}} = e^{-j\theta} + e^{-2j\theta} + \dots + e^{-j(p-1)\theta}. \text{ En prenant la partie réelle de cette relation}$$

, on obtient l'égalité demandée.

b) Le résultat précédent peut se réécrire  $(1 - \cos(\theta)) + (1 - \cos(2\theta)) + \dots + (1 - \cos(p\theta)) = 0$ .

Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chacun de ces termes est nul : on a donc en

particulier  $\cos(\theta) = 1$  donc  $z_0 = 1$ . L'écriture  $H_p(z) = \frac{p z^{p-1}}{p z^{p-1} + (p-1) z^{p-2} + \dots + 1}$  est

irréductible donc  $z_0 = 1$  doit être une racine de  $p z^{p-1} + (p-1) z^{p-2} + \dots + 1$  ce qui est

impossible car  $p + (p-1) + \dots + 1 > 0$ .

La fraction rationnelle  $H_p(z)$  n'a pas de pôle de module 1.



5) Par les deux questions précédentes, tous les pôles de  $H_p(z)$  sont de module strictement inférieur à 1 : le système  $(S_p)$  est stable.

- 6) a) Soit  $z$  une racine différente de 1 du polynôme  $P(X) = pX^{p+1} - (p+1)X^p + 1$ . On a  $P'(z) = p(p+1)(z^p - z^{p-1}) = p(p+1)z^{p-1}(z-1)$ . Si  $z$  était une racine multiple de  $P(X)$ , on aurait  $P'(z) = 0$ , donc  $z=0$  (car  $z \neq 1$ ) ce qui rend impossible l'égalité  $P(z) = 0$ .
- b) Les pôles de  $H_p(X)$  sont les racines de  $pX^{p-1} + (p-1)X^{p-2} + \dots + 1$ . Puisque par le 2),  $pX^{p+1} - (p+1)X^p + 1 = (X-1)^2(pX^{p-1} + (p-1)X^{p-2} + \dots + 1)$ , et que les racines différentes de 1 du polynôme  $pX^{p+1} - (p+1)X^p + 1$  sont toutes simples, on en déduit que les racines du polynôme  $pX^{p-1} + (p-1)X^{p-2} + \dots + 1$  sont toutes simples car le nombre 1 n'est pas racine de ce dernier. Les pôles de  $H_p(z)$  sont donc tous simples.

7) a) On a 
$$Y_{\text{ind}}(z) = \frac{pz^p}{(z-1)(pz^{p-1} + (p-1)z^{p-2} + \dots + 1)}.$$

Puisque les pôles de  $H_p(z)$  sont tous simples et de module strictement plus petit que 1, il en est de même des racines du polynôme  $pz^{p-1} + (p-1)z^{p-2} + \dots + 1$ . On en déduit que les pôles de la fraction rationnelle  $\frac{pz^p}{(z-1)(pz^{p-1} + (p-1)z^{p-2} + \dots + 1)}$ , qui est clairement écrite sous forme irréductible, sont 1, simple, et des nombres complexes de module strictement inférieurs à 1, simples également. En considérant la décomposition en éléments simples de cette fraction, on obtient que  $Y_{\text{ind}}(z)$  admet une expression de la forme  $Y_{\text{ind}}(z) = \frac{A}{z-1} + F_0(z)$  où  $F_0(z)$  est une fraction rationnelle dont tous les pôles sont simples et de module strictement inférieur à 1.

b) Avec les notations de la question précédente, on a 
$$A = \frac{p}{p + (p-1) + \dots + 1} = \frac{2}{p+1}.$$

On a donc  $y_{\text{ind}}(n) = \frac{2}{p+1}U(n) + y_0(n)$  où  $y_0$  est l'original de  $F_0(z)$ . Les pôles de cette dernière fraction sont tous de module strictement inférieur à 1 donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_0(n) = 0$  par la remarque qui suit le

Théorème 6. On en déduit que 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\text{ind}}(n) = \frac{2}{p+1}.$$

8) a) On a  $\forall n \geq 0, u_{n+3} = \frac{1}{3}(u_{n+2} + u_{n+1} + u_n)$ . Il vient alors que  $u_3 = \frac{1}{3}(-2 + 3 + 1) = \frac{2}{3}$ ,  
 $u_4 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} - 2 + 3\right) = \frac{5}{9}$ ,  $u_5 = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9} + \frac{2}{3} - 2\right) = \frac{-7}{27}$ .

b) On a  $\forall n \geq 0, u_{n+3} = \frac{1}{3}(u_{n+2} + u_{n+1} + u_n)$  donc

$$y(n+3)U(n) = \frac{1}{3}(y(n+2) + y(n+1) + y(n))U(n).$$

Par la propriété 8, et les conditions initiales données, cela aboutit à :

$$z^3 Y(z) - z^3 - 3z^2 + 2z = \frac{1}{3}(z^2 Y(z) - z^2 - 3z + zY(z) - z + Y(z))$$

d'où

$$Y(z) = \frac{z^3 + \frac{8}{3}z^2 - \frac{10}{3}z}{z^3 - \frac{1}{3}(z^2 + z + 1)} = \frac{3z^3 + 8z^2 - 10z}{3z^3 - z^2 - z - 1} = \frac{z(3z^2 + 8z - 10)}{(z-1)(3z^2 + 2z + 1)}$$

c) Une décomposition en éléments simples donne 
$$Y(z) = \frac{1}{6} \frac{z}{z-1} + \frac{1}{18} \left( \frac{15z^2 + 61z}{z^2 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}} \right)$$
.

Le degré de la fraction rationnelle  $\frac{1}{18} \left( \frac{15z^2 + 61z}{z^2 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}} \right)$  est nul et ses pôles sont  $\frac{-1 \pm j\sqrt{2}}{3}$  de module

égal à  $\frac{\sqrt{3}}{3} < 1$ . Par la remarque suivant le Théorème 6, son original est une suite  $y_0$  vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_0(n) = 0 \text{ et la relation } Y(z) = \frac{1}{6} \frac{z}{z-1} + \frac{1}{18} \left( \frac{15z^2 + 61z}{z^2 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}} \right) \text{ entraîne que}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, y(n) = \frac{1}{6} U(n) + y_0(n) \text{ d'où l'on déduit que } \lim_{n \rightarrow +\infty} y(n) = \frac{1}{6} \text{ c'est à dire } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{6}.$$

9) a) On a  $\forall n \geq p, x(n) = u_n - \frac{1}{p}(u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_{n-p}) = 0$  de par la définition par récurrence de la suite  $(u_n)$ . La suite  $x$  est donc finie de longueur au plus égale à  $p$ .

b) La suite  $x$  étant finie de longueur au plus égale à  $p$ , on a  $\forall n \in \mathbb{Z}, x(n) = \sum_{k=0}^{p-1} x(k) \delta_k(n)$

$$\text{donc } X(z) = x(0) + \frac{x(1)}{z} + \dots + \frac{x(p-1)}{z^{p-1}} \text{ pour tout nombre complexe non nul.}$$

Par définition de la suite  $x$  on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \{0; 1; \dots; p-1\}, x(n) &= y(n) - \frac{1}{p}(y(n-1) + y(n-2) + \dots + y(n-p)) \\ &= u_n - \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} y(k) = u_n - \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n-1} y(k), \end{aligned}$$

car  $n-p < 0$  et la suite  $y$  est causale, d'où, par définition de  $y(k)$ :

$$\forall n \in \{0; 1; \dots; p-1\}, x(n) = u_n - \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \alpha_n.$$

En reportant dans l'expression de  $X(z)$  trouvée ci-dessus, on obtient  $X(z) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \dots + \frac{\alpha_{p-1}}{z^{p-1}}$ .

10) a) On montre par récurrence sur  $n$  la propriété :  $(P_n) : \forall k \in \mathbb{N}, k \leq n \Rightarrow |u_k| \leq M$ .

Par définition de  $M$ , la propriété est  $(P_n)$  automatiquement vraie si  $n \leq p-1$ .

Soit  $n \geq p$  tel que  $(P_n)$  soit vraie. On a alors  $u_{n+1} = \frac{1}{p}(u_n + u_{n-1} + \dots + u_{n-(p-1)})$  d'où par l'hypothèse de récurrence et l'inégalité triangulaire :

$$|u_{n+1}| = \frac{1}{p} |u_n + u_{n-1} + \dots + u_{n-(p-1)}| \leq \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} |u_{n-k}| \leq \frac{1}{p} \cdot Mp = M.$$

On a donc  $\forall k \in \mathbb{N}, k \leq n \Rightarrow |u_k| \leq M$  et  $|u_{n+1}| \leq M$  donc  $\forall k \in \mathbb{N}, k \leq n+1 \Rightarrow |u_k| \leq M$  ce qui prouve  $(P_{n+1})$

b) La suite  $(u_n)$  étant bornée, il en est de même de la suite  $y$  donc sa transformée en  $Z$  est définie pour tout nombre complexe de module strictement plus grand que 1.

D'autre part, par la propriété 7 et la relation  $x(n) = y(n) - \frac{1}{p}(y(n-1) + y(n-2) + \dots + y(n-p))$ , on a pour tout nombre complexe de module strictement plus grand que 1 :

$$X(z) = \left(1 - \frac{1}{p} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^p}\right)\right) Y(z) = \frac{pz^p - z^{p-1} - z^{p-2} - \dots - 1}{pz^p} Y(z).$$

Par la question 2)b), on a  $\forall z \in \mathbb{C}, (z-1) \left(\sum_{k=1}^p k z^{k-1}\right) = pz^p - (1 + z + \dots + z^{p-1})$ , d'où

$$X(z) = \frac{(z-1) \left(\sum_{k=1}^p k z^{k-1}\right)}{pz^p} Y(z), \text{ ce qu'il fallait démontrer.}$$

11) En utilisant le résultat du 9)b), on déduit que pour tout nombre complexe de module strictement plus grand que 1 :

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \dots + \frac{\alpha_{p-1}}{z^{p-1}} = \frac{(z-1) \left(\sum_{k=1}^p k z^{k-1}\right)}{pz^p} Y(z),$$

d'où l'on tire :

$$Y(z) = \frac{pz^p}{(z-1) \left(\sum_{k=1}^p k z^{k-1}\right)} \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \dots + \frac{\alpha_{p-1}}{z^{p-1}}\right).$$

On a alors par l'expression de  $Y_{\text{ind}}(z)$  trouvée au 7) :

$$Y(z) = Y_{\text{ind}}(z) \cdot \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \dots + \frac{\alpha_{p-1}}{z^{p-1}}\right)$$

et la propriété 7 permet de conclure que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, y(n) = \alpha_0 y_{\text{ind}}(n) + \alpha_1 y_{\text{ind}}(n-1) + \dots + \alpha_{p-1} y_{\text{ind}}(n-(p-1)).$$

12) On a prouvé au 7) b) que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\text{ind}}(n) = \frac{2}{p+1}$ , donc pour tout entier naturel  $k$  fixé on

$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\text{ind}}(n-k) = \frac{2}{p+1}$ , et un passage à la limite dans le résultat du 11) permet de conclure que la suite

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et  $\lim u_n = \lim y(n) = \frac{2}{p+1} (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{p-1})$ . Il nous reste à simplifier cette

dernière expression.

$$\text{On a } \begin{cases} p \alpha_0 & = p u_0 \\ p \alpha_1 & = p u_1 - u_0 \\ p \alpha_2 & = p u_2 - u_0 - u_1 \\ p \alpha_3 & = p u_3 - u_0 - u_1 - u_2 \\ \dots & = \dots \\ p \alpha_{p-1} & = p u_{p-1} - u_0 - u_1 - \dots - u_{p-2} \end{cases}.$$

En additionnant toutes les lignes, et en regroupant correctement les termes, il vient :

$$p \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k = pu_0 - (p-1)u_0 + pu_1 - (p-2)u_1 + pu_2 - (p-3)u_2 + \dots + pu_{p-1} - 0 \cdot u_{p-1}$$

c'est à dire

$$p \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k = u_0 + 2u_1 + 3u_2 + \dots + pu_{p-1}.$$

On déduit de la relation  $\lim u_n = \frac{2}{p+1} (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{p-1})$  que

$$\lim u_n = \frac{2}{p(p+1)} (u_0 + 2u_1 + \dots + pu_{p-1}).$$

13) Pour  $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  on définit l'événement  $A_k$ : le premier lancer donne  $k$ . Pour  $n \geq k$ , la probabilité que le pion s'arrête à un moment donné sur le point d'abscisse  $n$  sachant que  $A_k$  est vraie est égale à  $u_{n-k}$ . Puisque les événements  $A_k$  pour  $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  forment un système complet d'événements de probabilité égale à  $\frac{1}{6}$  on en déduit que

$$u_n = \frac{1}{6} (u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_{n-6}).$$

Par le même raisonnement, on calcule :  $u_1 = \frac{1}{6}$ ,  $u_2 = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{36}$ ,  $u_3 = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{7}{36}\right) = \frac{49}{216}$ ,

$$u_4 = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{7}{36} + \frac{49}{216}\right) = \frac{343}{6^4} \text{ et } u_5 = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{7}{36} + \frac{49}{216} + \frac{343}{6^4}\right) = \frac{2401}{6^5}.$$

D'après les résultats de la question 12, on a

$$\lim u_n = \frac{2}{p(p+1)} (u_0 + 2u_1 + \dots + pu_{p-1}) = \frac{1}{21} \left(1 + \frac{2}{6} + \frac{21}{6^2} + \frac{196}{6^3} + \frac{1715}{6^4} + \frac{2401}{6^5}\right) = \frac{2}{7}.$$

