HAL open science

Bases mathématiques pour l'étude des signaux

Emmanuel Jalade

To cite this version:

Emmanuel Jalade. Bases mathématiques pour l'étude des signaux : Tome 2 : les fondamentaux d'analyse. Licence. France. 2022. hal-03765638

HAL Id: hal-03765638

https://hal.science/hal-03765638

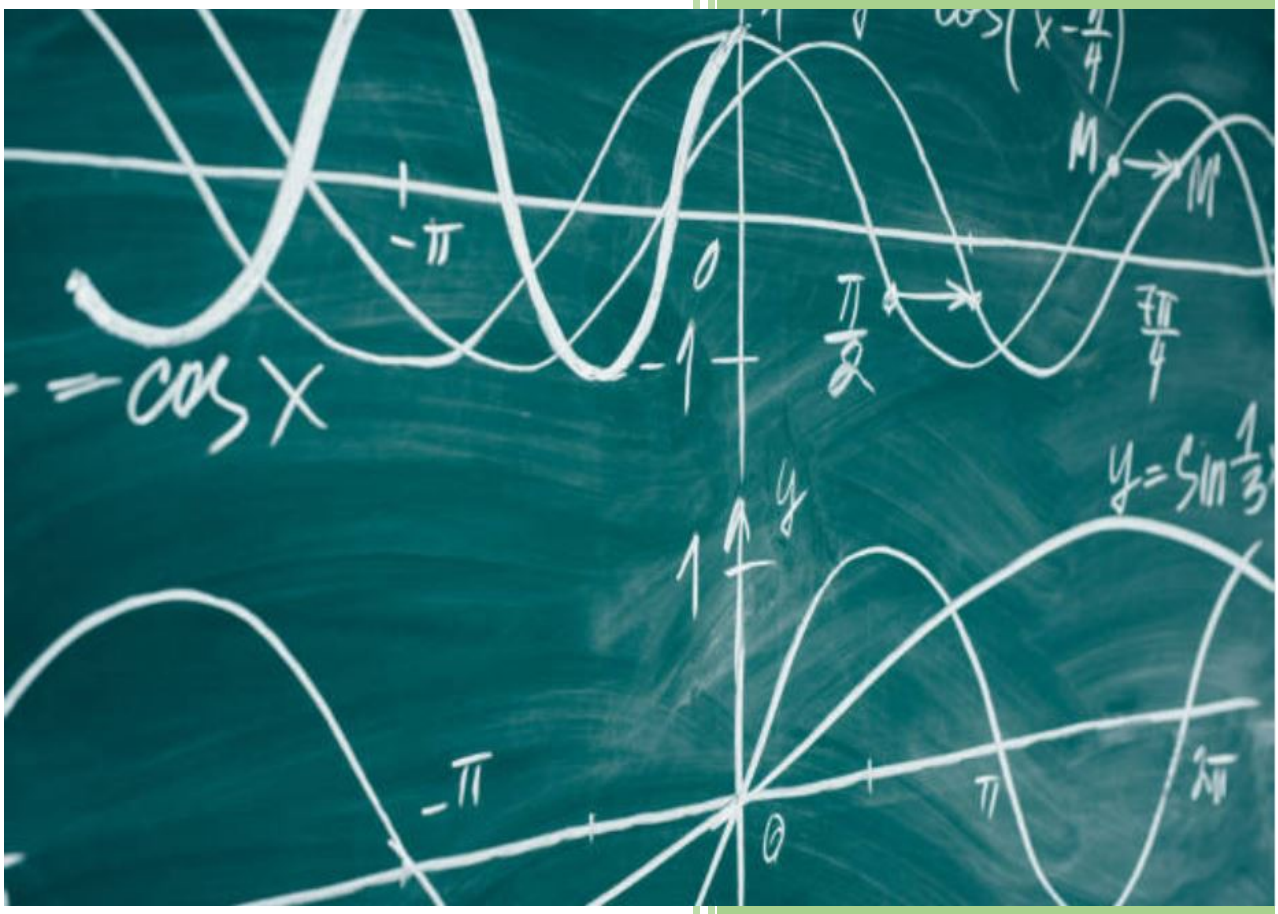
Submitted on 15 Sep 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Bases mathématiques pour l'étude des signaux

T2 : Les fondamentaux d'Analyse



Emmanuel JALADE

Table des matières

A - GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES....6
I) Continuité....6
I.1) Définition....6
I.2) Fonction continue par morceaux....7
I.3) Théorème des valeurs intermédiaires....8
II) Fonctions logarithme, exponentielles et de type exponentiel....9
II.1) Fonction logarithme népérien....9
II.2) Fonction exponentielle....11
II.3) Fonction de type exponentielle....12
III) Limites de fonctions : compléments....13
III.1) Rappels : formes indéterminées....13
III.2) Fonctions équivalentes....13
III.3) Techniques de calcul de limite pour des formes indéterminées....14
III.3.a) Fonction rationnelles....14
III.3.b) Croissances comparées....15
IV) Quelques notions et fonctions utiles pour la théorie du signal....16
IV.1) Signal retardé, signal avancé....16
IV.2) Fonction porte, fonction échelon....16
IV.3) Fonctions à valeurs complexes....17
IV.4) Signal à durée finie, signal borné....18
V) Fonctions réciproques....19
VI) (*) Introduction à la topologie de....21
VI.1) Définition de limite....21
VI.1.a) Limite de fonction à valeurs réelles....21
VI.1.b) Limite d'une suite....22
VI.1.c) Limite d'une fonction à valeurs dans....23
VI.2) Caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction....23
VI.3) Intervalles de Limite d'une fonction monotone (ou d'une suite numérique monotone).. 24
VII) Exercices....26
VIII) Corrigés....31
B - DERIVATION....41
I) Fonction dérivable....41
I.1) Généralités....41
I.2) Formules de base....44
II) Composées de fonctions dérivables....46
II.1) Dérivée d'une composée de deux fonctions....46
II.2) (*)Dérivée d'une fonction réciproque....48
III) Dérivée de fonctions définies par intervalles....49
IV) Exercices....52
V) Corrigés....60
C - FONCTION TANGENTE ET ARCTANGENTE....78
I) Fonction tangente....78
II) Fonction arctangente....80
III) Applications aux calculs d'angle....82
IV) Exercices....84
V) Corrigés....88
D - ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES....97

I) Position du problème 97
I.1) Exemple.....97
I.2) Terminologie.....97
II) Équations différentielles homogènes 98
II.1) Ordre 1.....98
II.2) Ordre 2.....99
II.2.a) Exemple et structure générale des solutions.....99
II.2.b) Solutions fondamentales.....99
III) Équations différentielles avec second membre.....101
III.1) Théorème de structure.....101
III.2) Existence d'une solution particulière.....102
IV) Équations différentielles avec condition initiale.....104
V) Quelques compléments.....105
V.1) Second membre continu par morceaux.....105
V.2) Principe de superposition des solutions 106
V.3) Coefficients non constants (EDO1).....107
VI) Exercices.....109
VII) Corrigés.....115
E - INTÉGRATION 124
I) Primitives d'une fonction continue 124
I.1) Généralités.....124
I.2) (*) Existence d'une primitive pour une fonction continue.....125
I.3) Calcul pratique d'une primitive.....127
II) Approche de l'intégrale par les valeurs moyennes 128
II.1) Position du problème.....128
II.2) Notion d'échantillonnage d'une fonction.....129
II.3) Calcul de la valeur moyenne d'une fonction 129
II.4) Intégrale d'une fonction continue par morceaux.....131
III) Propriétés de l'intégrale.....132
III.1) Propriétés générales.....132
III.2) Cas de l'intégrale d'une fonction positive.....133
III.3) Applications de l'intégrale en théorie du signal.....135
IV) Techniques avancées de calcul intégral.....136
IV.1) Intégration par parties.....136
IV.2) Changement de variable 137
V) Quelques compléments 139
V.1) Intégrale d'une fonction paire ou impaire.....139
V.2) Intégrale d'une fonction rationnelle.....141
V.3) Intégrale d'une fonction à valeurs complexe.....142
VI) Exercices 144
VII) Corrigés 153
F - INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES.....170
I) Position du problème.....170
II) Intégrales de référence.....171
II.1) Intégrale de Riemann.....171
II.2) Intégrale d'une exponentielle.....172
III) Quelques remarques.....172
IV) Critères de convergence dans le cas de fonctions positives.....174
IV.1) Critère de comparaison.....174
IV.2) Critère de l'équivalent.....177

V) Cas des fonctions non positives....178
V.1) Intégrale d'une fonction à valeurs dans qui n'est pas de signe constant en 178
V.2) Fonction à valeurs dans 180
VI) Exercices 183
VII) Corrigés....193
G - SUITES ET SÉRIES NUMÉRIQUES....212
I) Suites numériques....212
I.1) Notion de suite numérique. 212
I.2) Mode de définition d'une suite....212
I.3) Quelques notions générales sur les suites....213
I.4) Convergence monotone....215
I.5) (*) Applications : démonstration de deux théorèmes importants sur les fonctions continues....216
I.6) Quelques suites importantes....218
I.7) Remarques sur les liens entre suites et fonctions de la variable réelle....219
II) Séries numériques....219
II.1) Somme partielle et notion de série....219
II.2) Deux types de série importantes....222
II.2.a) Séries géométriques....222
II.2.b) Séries de Riemann. 223
II.3) Convergence d'une série à termes positifs....223
II.4) Séries à termes de signe non constant....228
II.4.a) Séries alternées....228
II.4.b) Séries absolument convergentes. 230
III) Exercices 233
IV) Corrigés....239
H - FONCTIONS À DEUX VARIABLES....249
I) Courbes planes paramétrées 249
I.1) Notion de courbe paramétrée....249
I.2) Lien avec les fonctions d'un intervalle I dans 249
I.3) Vecteur tangent à une courbe paramétrée....250
II) Fonctions à deux variables 251
II.1) Généralités....251
II.2) Continuité....252
II.3) Dérivation....253
II.4) Dérivées d'ordre 2 et plus....255
III) Comportement local d'une fonction à deux variables. 256
III.1) Différentielle....256
III.2) Approximation affine d'une fonction à deux variables....257
IV) Extrema d'une fonction à deux variables. 258
IV.1) Dérivation de fonctions composées. 258
IV.2) Dérivée directionnelle....261
IV.3) Points critiques....262
IV.4) Condition suffisante pour un extremum local....263
V) Équations aux dérivées partielles 266
VI) Champ de vecteurs. 269
VI.1) Généralités....269
VI.2) Champ de gradient....271
VII) Annexes 274
VII.1) Rappels sur le produit scalaire....274

VII.2) Preuve du Théorème 2 275
VIII) Exercices 277
IX) Corrigés.....289
I - SÉRIES ENTIÈRES 315
I) Notion de série entière.....315
II) Disque de convergence.....316
III) Opérations sur les séries entières.....320
IV) Régularité d'une fonction définie par une série entière.....324
V) Développement d'une fonction en série entière.....329
V.1) Interprétation des coefficients d'une série entière.....329
V.2) Fonction exponentielle.....331
V.3) Fonctions sin et cos.....332
V.4) Autres fonctions.....334
VI) Exercices 338
VII) Corrigés.....345

A - GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES

La plupart des fonctions que l'on rencontre dans la pratique sont construites à partir de quelques fonctions (dites « élémentaires »),par somme, produit, quotient et composée. Il est pour cela important de bien connaître les propriétés de ces fonctions élémentaires. Nous verrons également des notions générales importantes liées à la notion de limite et de continuité.

I) Continuité

I.1) Définition

L'idée de continuité est intuitivement simple à comprendre. Elle correspond au fait qu'une fonction est continue sur un intervalle si l'on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon. L'objet de ce paragraphe est de préciser cette idée. On suppose connue la notion de limite (que l'on ne définit pas pour le moment, une notion intuitive étant suffisante pour le début de ce chapitre)
Soit *f* une fonction définie sur un intervalle $]a\,;b[$ (avec *a* ou *b* réels ou infinis). Soit $x_0 \in]a\,;b[$.

Définition 1 : On dit que *f* est <u>continue en</u> x_0 si les limites à gauche et à droite de x_0 existent et que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$. On $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Remarque : on utilisera aussi les notations $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ ou même $f\left(x_0^-\right)$ $f\left(x_0^-\right)$ au lieu de $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$.

Il faut faire attention que l'on ne peut parler de continuité en x_0 que si *f* est définie pour la valeur x_0 .
Par exemple, il n'y a pas de sens à dire que la fonction $x \to \frac{1}{x}$ n'est pas continue en 0 (ce qu'on pourrait être tenté de faire car il faut « lever le crayon » pour tracer une hyperbole) car elle n'y est pas définie.

Exemple : la fonction « échelon » *U* définie par les expressions $U(t) = 0$ si $t < 0$, et $U(t) = 1$ si $t \geq 0$ n'est pas continue en 0 car $\lim\limits_{t \to 0^+} U(t) = 1$ alors que $\lim\limits_{t \to 0^-} U(t) = 0$

Définition 2 :On dit que *f* est <u>continue sur l'intervalle</u> $]a\,;b[$ si *f* est continue en chaque point de $]a\,;b[$

Remarque : cette définition s'étend aux intervalles non ouverts (par exemple $]a\,;b]$: on ne considérera que la limite à gauche de *b)*

Exemple : la fonction $t \to \sqrt{t}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ car elle est continue sur $]0\,;+\infty[$ et continue à droite en 0.

On admettra (mais çela se prouve pourvu que l'on connaisse la définition mathématique d'une limite) que les fonctions $x \to x^n \ (n \in \mathbb{Z})$, $x \to \sqrt{x}$, $x \to \sin(x)$, $x \to \cos(x)$ sont continues sur chaque intervalle inclus dans leur domaine de définition, ainsi que toute fonction obtenue par somme, produit, quotient et composée de fonctions continues.

I.2) Fonction continue par morceaux

Dans les modélisations utilisées en physique, en particulier en électricité, on rencontre de nombreuses fonctions $t \to f(t)$ qui ne sont pas continues en une ou un nombre fini de valeurs de *t*.
Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a\,;b[$ (avec *a* ou *b* réels ou infinis). Soit $x_0 \in]a\,;b[$ telle que f <u>ne soit pas</u> continue en x_0 .

Définition 3: On dit que f admet une <u>discontinuité de première espèce</u> en x_0 si les limites à gauche et à droite de x_0 existent et sont finies mais que la propriété $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ est fausse.

Exemple : si l'on reprend la fonction U donnée en exemple de la définition 1, on a une discontinuité de première espèce en t=0

Définition 4 : On dit que f est <u>continue par morceaux sur l'intervalle</u> $]a\,;b[$ si les seules discontinuités éventuelles de f sont des discontinuité de première espèce et qu'il n'y en a qu'un nombre fini dans chaque intervalle de longueur finie inclus dans $]a\,;b[$ (on dit alors que les discontinuités forment <u>un ensemble localement fini</u>).

Exemple : si l'on reprend la fonction U donnée en exemple de la définition 1, c'est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Par contre la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, mais la discontinuité en 0 n'est pas de première espèce car $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = +\infty$

Remarques:
1) une fonction continue est continue par morceaux. En effet, dans la définition 4, on permet qu'il n'y ait aucune discontinuité pour f (on y parle de « discontinuité éventuelle »).
2) On montre aussi que toute fonction obtenue par somme et produit de fonctions continues par morceaux est continue par morceaux.
Attention, ce n'est plus vrai pour le quotient et la composée de deux fonctions continues par morceaux .
Par exemple les fonctions $f : t \to 1$ et $g : t \to \begin{cases} t & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ mais la fonction quotient $\frac{f}{g} : t \to \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ ne l'est plus. De même, la fonction échelon U (voir exemple donné après la définition 1) est continue par morceaux et la fonction $f : t \to \begin{cases} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est continue, mais $U \circ f$ n'est pas continue par morceaux.
En effet, f est continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues, et la relation $\forall t \neq 0,\ |f(t)| \leq |t|$ que l'on peut déduire du fait que $\forall t \neq 0,\ \left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq 1$, montre que $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0 = f(0)$. Cependant, $U \circ f$ n'est pas continue par morceaux en 0 : en effet, si n est un

entier naturel strictement positif, calculons

$$(U\circ f)\left(\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)=U\left(\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)=U\left(\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\cos(n\pi)\right)=U\left(\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}(-1)^n\right).$$

$=\begin{cases}0 & \text{si n est impair}\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$ ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty}(U\circ f)\left(\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)$ n'existe pas. On en déduit que $\lim\limits_{t\to 0^+}(U\circ f)(t)$ n'existe pas (donc $U\circ f$ n'est pas continue par morceaux) car si $l=\lim\limits_{t\to 0^+}(U\circ f)(t)$ existait, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)=0^+$, on devrait avoir par composition de limites (voir la partie VI)2 de ce cours pour plus de précisions) $l=\lim\limits_{n\to+\infty}(U\circ f)\left(\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)$ ce qui est absurde.

I.3) Théorème des valeurs intermédiaires

On utilise souvent le théorème suivant sans le savoir ! En effet il correspond à l'idée simple qu'une fonction continue qui change de signe s'annule. En effet, pour tracer sa courbe représentative on ne peut pas lever le crayon ; donc si on doit passer de part et d'autre de l'axe des abscisses, il est nécessaire de le croiser car on ne peut sauter au dessus.

Théorème 1 (valeurs intermédiaires) : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $]a\,;b[$ (avec a ou b réels ou infinis). Alors, si f change de signe sur cet intervalle, l'équation $f(x)=0$ y admet au moins une solution. De plus, si f est strictement monotone sur cet intervalle, alors cette solution est unique.

Preuve:on admet pour le moment ce théorème . Il sera démontré dans le chapitre sur les suites et séries.

Remarque : si l'on remplace l'hypothèse « continue » par « continue par morceaux », le théorème devient faux.

Exemple : une équation polynomiale du troisième degré admet toujours au moins une solution réelle. Ça, on le sait depuis qu'on a étudié les polynômes dans un chapitre précédent (voir exemple de la propriété 13 du chapitre sur les polynômes). Mais il est remarquable de voir que l'on peut retrouver ce résultat d'un manière totalement différente.
Soit l'équation $x^3+px^2+qx+r=0$. Si on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par l'expression $f(x)=x^3+px^2+qx+r$, alors la fonction f est continue. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ce qui veut dire que f change de signe sur $\mathbb{R}$, donc d'après le TVI, elle s'annule.

Remarque : le TVI est un outil très puissant pour démontrer qu'une équation possède au moins une solution réelle.

(*) Corollaire du Théorème 1 : l'image d'un intervalle par une fonction continue est intervalle. Autrement dit, si I est un intervalle sur lequel f est continue, alors l'ensemble $f(I)\overset{\text{def}}{=}\{f(x)/x\in I\}$ est un intervalle.

Preuve :
Rappel : un intervalle de $\mathbb{R}$ *est un sous-ensemble* $I \subset \mathbb{R}$ *qui vérifie la propriété suivante :*
$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R},\ (x \in I \text{ et } y \in I \text{ et } x \leqslant z \leqslant y) \Rightarrow z \in I$. *(voir VI)3 pour plus de précisions).*

Soient y_1 et $y_2 \in f(I)$ avec $y_1 < y_2$. Cela signifie qu'il existe x_1 et x_2 appartenant à I et tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
Soit y_0 tel que $y_1 < y_0 < y_2$. D'après le Théorème 1 appliqué à $x \to f(x) - y_0$, il existe x_0 compris entre x_1 et x_2 tel que $y_0 = f(x_0)$ ce qui signifie que $f(x_0) \in f(I)$, puisque $x_0 \in I$ (tous les réels compris entre x_1 et x_2 sont dans I car I est un intervalle).
Ainsi, cela étant vrai quel que soit le choix de y_0, si y_1 et $y_2 \in f(I)$ avec $y_1 < y_2$, alors $[y_1 ; y_2] \subset f(I)$. Cela signifie que $f(I)$ est un intervalle.

II) Fonctions logarithme, exponentielles et de type exponentiel

Les fonctions que l'on va étudier dans ce paragraphe sont très souvent utilisées en physique et doivent donc être maîtrisées.

II.1) Fonction logarithme népérien

Pour bien comprendre la définition ci-dessous, on rappelle (programme de Terminale) qu'une fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur ce dernier, et que si l'on dispose d'une condition initiale, cette primitive est unique. Ce point sera revu dans un chapitre ultérieur.
Ainsi, il existe une unique primitive de la fonction inverse sur $]0 ; +\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$. Cette fonction ne pouvant pas s'exprimer à l'aide de fonctions usuelles, cela nous conduit à la définir de façon spécifique :

Définition 5 : la fonction logarithme népérien (notée ln) est la seule fonction définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ vérifiant $\forall x > 0,\ \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.

La fonction ln devient donc à partir de maintenant une fonction élémentaire (au sens de fonction « fondamentale »).

Attention : ne pas oublier que la fonction ln est définie sur $]0 ; +\infty[$.

Propriété 1 : la fonction ln est strictement croissante, $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$. De plus, on a les formules :

$(i)\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$,
$(ii)\ \ln(a^n) = n \ln(a)\ \ (n \in \mathbb{Z})$,
$(iii)\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$,
$(iv)\ \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$.

Preuve : la dérivée de la fonction ln est la fonction inverse, strictement positive sur $]0;+\infty[$ elle est donc strictement croissante.

On prouve maintenant le (i).
On définit sur $]0;+\infty[$ la fonction $g(x)=\ln(ax)-\ln(a)$ pour un paramètre $a>0$.
On rappelle que si u est une fonction dérivable, alors la fonction composée $x \to u(ax)$ est dérivable de dérivée $x \to a\,u'(ax)$. En appliquant cela à u=ln et en remarquant que la dérivée d'une fonction constante est nulle, il vient que g est dérivable et $\forall x>0,\ g'(x)=a.\frac{1}{ax}-0=\frac{1}{x}$ et $g(1)=\ln(a\times 1)-\ln(a)=0$. On déduit de l'unicité de la définition 5 que $g(x)=\ln(x)$ c'est à dire que $\forall x>0, \forall a>0,\ \ln(ax)-\ln(a)=\ln(x)$ ce qui prouve que $\forall a>0, \forall x>0,\ \ln(ax)=\ln(a)+\ln(x)$.

On a ainsi, avec a=b : $\forall a>0,\ \ln(a^2)=\ln(a)+\ln(a)=2\ln(a)$. De même $\forall a>0,\ \ln(a^3)=\ln(a^2)+\ln(a)=2\ln(a)+\ln(a)=3\ln(a)$. Un raisonnement par récurrence permettrait de prouver rigoureusement la formule (ii).

Ensuite, la formule $\forall a>0, \forall b>0,\ \ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$ permet de dire que $\forall a>0, \forall b>0,\ \ln(b)+\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(b.\frac{a}{b}\right)=\ln(a)$ d'où l'on déduit le point (iii).

De la même façon, la formule $\forall a>0, \forall b>0,\ \ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$ permet de dire que $\ln(\sqrt{a})+\ln(\sqrt{a})=\ln(\sqrt{a}.\sqrt{a})=\ln(a)$ d'où $2\ln(\sqrt{a})=\ln(a)$ donc $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a)$.
Ensuite, la fonction ln est strictement croissante, donc on a l'alternative :
soit $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)$ est finie, soit elle est égale à $+\infty$ (voir VI)3) pour des précisions à ce sujet).

Supposons par l'absurde que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=l\in\mathbb{R}$. A partir de la formule $\forall a>0, \forall b>0,\ \ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$,
en faisant $a\to+\infty$ et $b\to+\infty$ on obtient $l=2l$ d'où $l=0$. Or ceci est absurde car $\ln(1)=0$ et la fonction ln est <u>strictement</u> croissante sur $[0;+\infty[$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.

Enfin, $\forall x>0,\ \ln(x)+\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\ln(1)=0$ donc $\forall x>0,\ \ln(x)=-\ln\left(\frac{1}{x}\right)$. Si l'on fait tendre x vers 0^+ , $\frac{1}{x}\to+\infty$ d'où $\ln\left(\frac{1}{x}\right)\to+\infty$ c'est à dire $-\ln\left(\frac{1}{x}\right)\to-\infty$. Cela signifie que $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$.

Exemple : $\ln\left(\frac{27}{169}\right)=\ln\left(\frac{3^3}{13^2}\right)=3\ln(3)-2\ln(13)$.

II.2) Fonction exponentielle

Grâce au TVI, on prouve que pour tout réel a, l'équation d'inconnue x : $\ln(x)=a$ admet une unique solution. En effet, on rappelle que la fonction ln est continue (car dérivable), strictement croissante et $\lim_{x\to 0^+} \ln(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$. Cela permet donc de poser la définition suivante :

Définition 6: On note $\exp(a)$ l'unique solution sur $]0;+\infty[$ de l'équation d'inconnue $x>0$: $\ln(x)=a$. On crée ainsi une fonction $a\to\exp(a)$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et à valeurs dans $]0;+\infty[$ appelée <u>fonction exponentielle</u>.

<u>Notations :</u> on pose $e=\exp(1)$ (appelé nombre d'Euler). Remarquons que d'après la propriété 1, $\forall n\in\mathbb{Z},\ \ln(e^n)=n\ln(e)=n$. Cela signifie que $\forall n\in\mathbb{Z}, \exp(n)=e^n$. Cette dernière relation n'a *a priori* de sens que si n est entier, mais par extension, on notera $\exp(x):=e^x$ même si x n'est pas entier.

Propriété 2 (lien entre exp et ln) :
$\forall x\in\mathbb{R},\ \ln(e^x)=x,\qquad \forall x>0,\ e^{\ln(x)}=x$

<u>Preuve :</u> par définition, e^a est l'unique solution sur $]0;+\infty[$ de l'équation $\ln(x)=a$, cela signifie que $\ln(e^a)=a$. En remplaçant a par $\ln(a)$ (avec $a>0$) dans cette dernière égalité, on obtient $\ln(e^{\ln(a)})=\ln(a)$. Or puisque la fonction ln est strictement croissante, $\ln(e^{\ln(a)})=\ln(a)\Rightarrow e^{\ln(a)}=a.$

Remarque : on dit que les fonctions exp et ln sont des fonctions réciproques car elles se « neutralisent » mutuellement, tout comme la fonction carré et racine carré. On va préciser cette notion dans un prochain paragraphe de ce chapitre.

Propriété 3 : la fonction exp est strictement croissante, $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$, $e^0=1$, $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$. Elle est aussi dérivable et $(e^x)'=e^x$. De plus, on a les formules :
$e^{a+b}=e^a e^b,\quad e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b},\quad (e^x)^n=e^{nx}\ \ (\forall n\in\mathbb{Z})$

<u>Preuve :</u>

(i)Si $a<b$, cela peut s'écrire $\ln(e^a)<\ln(e^b)$. La fonction ln étant strictement croissante cela implique $e^a<e^b$. On a prouvé l'implication $a<b\Rightarrow e^a<e^b$ ce qui prouve la stricte croissance de la fonction exp.

(ii) La stricte croissance de la fonction exponentielle montre l'existence de $\lim_{x\to-\infty} e^x\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et de $\lim_{x\to+\infty} e^x\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. On a $\lim_{a\to 0} e^{\ln(a)}=\lim_{a\to 0} a=0$. Si on pose $x=\ln(a)$, si $a\to 0,\ x\to-\infty$ donc $\lim_{a\to 0} e^{\ln(a)}=0\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} e^x=0$. On prouve de même que $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$. Enfin $\ln(1)=0$ signifie que $e^0=1$.

(iii) On admet pour le moment la continuité de la fonction exponentielle (c'est une conséquence de la propriété 13 démontrée plus loin). Soit $a\in\mathbb{R}$ fixé. Pour $x\neq a$, considérons la quantité $\frac{e^x-e^a}{x-a}$. En posant $y=e^x$ on obtient $\frac{e^x-e^a}{x-a}=\frac{y-e^a}{\ln(y)-a}=\frac{y-e^a}{\ln(y)-\ln(e^a)}$. Si x tend vers a, y tend vers

e^a par continuité de la fonction exponentielle, et par définition du nombre dérivé, $\frac{\ln(y)-\ln(e^a)}{y-e^a}$ tend vers la dérivée de la fonction ln (la fonction inverse) calculée pour $y=e^a$ donc $\frac{\ln(y)-\ln(e^a)}{y-e^a} \to \frac{1}{e^a}$

On en déduit que $\frac{e^x-e^a}{x-a}=\frac{y-e^a}{\ln(y)-\ln(e^a)} \to e^a$ si x tend vers a. Cela prouve que la fonction exp est dérivable et que sa dérivée calculée au point a vaut e^a . On a donc $(e^x)'=e^x$.

(iv) Grâce à la formule $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$, on a $\ln(e^a e^b)=\ln(e^a)+\ln(e^b)=a+b$ donc $e^a e^b=e^{a+b}$

Grâce à la formule $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$, on a $\ln\left(\frac{e^a}{e^b}\right)=\ln(e^a)-\ln(e^b)=a-b$ donc $\frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$

Grâce à la formule $\ln(a^n)=n\ln(a)$, on a $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\ln\left((e^x)^n\right)=n\ln(e^x)=nx$ donc on déduit $(e^x)^n=e^{nx}$ $(\forall n\in\mathbb{Z})$

II.3) Fonction de type exponentielle.

L'idée de ce paragraphe est de définir la notion d'exposant non entier, c'est à dire de donner sens à une expression telle que $2^{1,3}$. Une partie du travail a déjà été fait pour définir e^x pour tout réel *x,* entier ou pas, par l'égalité $e^x \overset{\text{def}}{=} \exp(x)$. On va maintenant définir a^x pour tout réel *x,* pourvu que a soit positif.

Définition 7: Soient deux réels x et y, avec $x>0$. Alors on définit x^y par $x^y \overset{\text{def}}{=} e^{y\ln(x)}$.

Remarque 1: Il faut vérifier que cette définition généralise bien la notion d'exposant entier, c'est à dire qu'elle ne contredit pas le définition déjà connue, et c'est le cas.
Par exemple, avec la définition 7, on a $2^5=e^{5\ln(2)}=e^{\ln(2^5)}=e^{\ln(32)}=32.$

Remarque 2 : une faiblesse de cette définition est qu'elle n'englobe pas le cas de certaines puissances qui pourraient être définies pour $x<0$. Par exemple, elle ne permet pas de retrouver la valeur de $(-2)^3=-8$ ou $(-27)^{\frac{2}{3}}=9.$

Propriété 4 : Etant données deux fonction u et v, avec $u(x)>0$, on définit la fonction u^v par l'expression : $u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln(u(x))}$

Exemple : la fonction $x \to 2^x$ sera définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $x \to e^{x\ln(2)}$.

III) Limites de fonctions : compléments

III.1) Rappels : formes indéterminées.

Les formes indéterminées vues en Terminales sont de la forme :

$(1)\ +\infty-\infty$
$(2)\ 0\times\infty$
$(3)\ \frac{\infty}{\infty}$
$(4)\ \frac{0}{0}$

Avec les fonctions de type exponentiel, on rencontre aussi les formes indéterminées suivantes :

$(5)\ 0^0$
$(6)\ 1^{+\infty}$
$(7)\ +\infty^0$

qui se ramènent à la forme indéterminée (2) ci-dessus grâce à l'écriture exponentielle.

Exemple : supposons que l'on veuille étudier la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$ (forme indéterminée du type (6)).Il suffit d'écrire que $\forall x>0,\ x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln(x)}{x}}$. On verra que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ (paragraphe 3)b) ce qui permettra de conclure par composition de limites que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=e^0=1$.

III.2) Fonctions équivalentes.

L'idée est la suivante : remplacer dans certains calculs de limites une fonction compliquée par une plus simple mais qui a le même comportement .

Définition 8 : Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a (un nombre réel ou $\pm\infty$). On dit que f et g sont équivalentes en a si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ (ce qui équivaut aussi à $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=1$). On note $f\underset{a}{\sim}g$.

Exemple : En $+\infty$, $2x+\sqrt{x}+3\underset{+\infty}{\sim}2x$. En effet ,
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x}+3}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2x}+\frac{3}{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{3}{2x}\right)=1.$$

Propriété 6 : Soient f et g deux fonctions équivalentes en a . Alors, si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe aussi, et ces limites sont égales.

Attention: la réciproque est fausse. Par exemple, $\lim_{x\to+\infty} x = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ mais x n'est pas équivalent à x^2 en $+\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \neq 1$.

Preuve : on écrit que $g(x) = \frac{f(x)}{g(x)} . g(x)$ donc en faisant tendre x vers a, on obtient par produits de limites $\lim_{x\to a} g(x) = 1 \times \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$.

Propriété 7: Les équivalents peuvent se multiplier et se diviser, ou s'élever à une puissance quelconque, mais pas s'additionner ou se soustraire.

Preuve : Supposons que si x tend vers a, on ait $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$. Alors $\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 1$ .On en déduit que $\lim_{x\to a} \frac{f_1(x) f_2(x)}{g_1(x) g_2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} . \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 1$ par produit de limites donc $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$. Preuve similaire pour l'équivalent d'un quotient ou d'une puissance.

Exemple : En $+\infty$ $x^2 + x \sim x^2$ et $2x + 5 \sim 2x$ donc $\frac{x^2 + x}{2x + 5} \sim \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$.

Quelques équivalents en 0 sont bien utiles à connaître :

Propriété 8: Si $x \to 0$, $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$, $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$, $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$.

Preuve : Si $x \neq 0$, $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0}$ représente le taux d'accroissement de la fonction exponentielle entre 0 et x. Par définition du nombre dérivé d'une fonction, si $x \to 0$ cette quantité tend vers la dérivée de la fonction exponentielle calculée en 0, soit $e^0 = 1$. Il vient que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ d'où $e^x - 1 \sim x$. Les autres équivalents se prouvent de la même façon en faisant intervenir les dérivées en 0 des fonctions $\ln(x + 1)$ et $\sin(x)$.

III.3) Techniques de calcul de limite pour des formes indéterminées.

III.3.a) Fonction rationnelles

Vu l'usage très fréquent qui sera fait des fractions rationnelles dans la suite de ce cours, il est important de connaître la propriété suivante :

Propriété 9: Une fonction polynôme est équivalente en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré. Par division d'équivalents, on déduit qu'une fraction rationnelle est équivalente en $\pm\infty$ au quotient des termes de plus haut degré.

Preuve : soit un polynôme $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... a_1 X + a_0$, avec $a_n \neq 0$.
Alors $\frac{P(x)}{a_n x_n} = 1 + a_{n-1} \frac{1}{x} + ... a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n}$ d'où $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{a_n x_n} = 1$ c'est à dire que en $\pm\infty$ $P(x) \sim a_n x^n$. En utilisant le quotient d'équivalents mentionné dans la propriété 7, on prouve aussi la règle du quotient des termes de plus haut degré pour les fractions rationnelles.

Exemple : cette propriété permet de dire que la limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle de degré strictement négatif est nulle. En effet, une telle fraction rationnelle s'écrit sous la forme $\frac{P(X)}{Q(X)}$ avec

$P(X)=a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots a_1 X + a_0$, avec $a_n \neq 0$ et

$Q(X)=b_p X^p + b_{p-1} X^{p-1} + \dots b_1 X + b_0$ avec $b_p \neq 0$ et $n < p$.

Alors, en $\pm\infty$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \sim \frac{a_n x^n}{b_p x^p} = \frac{a_n}{b_p x^{p-n}}$. Cette dernière quantité tend vers 0 car $p > n$ donc en utilisant la propriété 6, on obtient $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.

III.3.b) Croissances comparées.

De nombreuses formes indéterminées font intervenir les fonctions exponentielles, ln et puissances.
En général, il est alors commode d'utiliser le principe suivant :

Principe général : en cas de forme indéterminée faisant intervenir deux des trois fonctions $\ln(x)$, x^a, e^x avec $a > 0$, on applique la règle suivante : e^x l'emporte sur x^a lui-même l'emporte sur $\ln(x)$.
Plus précisément :

Propriété 10: Soient a et α deux réels strictement positifs. Alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ax}}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} x e^{ax} = 0$$

<u>Preuve</u> : il est un peu long de faire la preuve générale pour tous les cas de figure. On va se contenter de prouver que $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$, les autres limites pouvant se déduire de celle-ci par changements de variables successifs et fastidieux.
Le type de méthode présentée ici (utilisation d'une fonction auxiliaire) est intéressante pour résoudre certains exercices.
On définit la fonction $\varphi(x) = 2\sqrt{x} - \ln(x)$ pour $x > 0$. C'est une fonction dérivable, et $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$. On voit alors que $\varphi'(x)$ est négative sur $]0,1[$ et positive sur $]1;+\infty[$ donc φ est décroissante sur $]0,1[$ et croissante sur $]1;+\infty[$: φ admet donc un minimum en $x=1$ donc $\forall x > 0,\ \varphi(x) \geq \varphi(1) = 2$. Autrement dit, $\forall x > 0,\ 2\sqrt{x} - \ln(x) \geq 2$ d'où $\forall x > 0,\ \ln(x) \leq 2(\sqrt{x}-1)$. On a ainsi $\forall x > 1,\ \frac{x}{\ln(x)} \geq \frac{x}{2(\sqrt{x}-1)}$. Or, en $+\infty$, $\frac{x}{2(\sqrt{x}-1)} \sim \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2}$. On a $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2(\sqrt{x}+1)} = +\infty$ par équivalence (propriété 6). Donc par comparaison de limites $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$.

Exemple : Étudier $\lim_{x \to +\infty} e^x - x^3$.

On écrit que $e^x - x^3 = x^3\left(\frac{e^x}{x^3} - 1\right)$. Par produit de limites, on trouve alors que $\lim_{x \to +\infty} e^x - x^3 = +\infty$.
Cela peut aussi se traduire par le fait que l'exponentielle « l'emporte » sur x^3.

Attention : le principe des croissances comparées ne doit être utilisé qu'en cas de forme indéterminée ! Par exemple, $\lim_{x \to 0^+} e^x - \ln(x) = +\infty$: il n'y pas de forme indéterminée, l'exponentielle « ne l'emporte pas » !

IV) Quelques notions et fonctions utiles pour la théorie du signal

On appellera ici signal toute fonction continue par morceaux d'une variable t qui correspondra au temps dans une application physique.

IV.1) Signal retardé, signal avancé.

Soit $a > 0$. On considère les deux signaux $t \to x(t)$ et $t \to x(t-a)$ définis sur $\mathbb{R}$. Alors, le graphe de $t \to x(t-a)$ se déduit de celui de $t \to x(t)$ par une translation horizontale de $+a$. De même, le graphe de $t \to x(t+a)$ se déduit de celui de $t \to x(t)$ par une translation horizontale de $-a$.
Le signal $t \to x(t-a)$ est appelé signal $t \to x(t)$ retardé de a.
Le signal $t \to x(t+a)$ est appelé signal $t \to x(t)$ avancé de a.

IV.2) Fonction porte, fonction échelon.

On définit la fonction échelon $t \to U(t)$ (appelée aussi fonction de Heaviside) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par les expressions $U(t) = 0$ si $t < 0$, et $U(t) = 1$ si $t \geq 0$. Cette fonction modélise un signal constant qui commence à l'instant $t = 0$. En retardant ce signal de a, on obtient l'échelon retardé $t \to U(t-a)$ qui modélise cette fois un signal constant qui commence à l'instant t=a.

Étant donné deux réels $b > a > 0$, on définit la fonction porte de a à b la fonction $\Pi_{a,b}$ définie par les expressions $\Pi_{a,b}(t) = 1$ si $t \in [a, b[$ et $\Pi_{a,b}(t) = 0$ sinon. Cette fonction porte modélise un signal constant qui commence à l'instant $t=a$ et qui se termine à l'instant $t=b$.

Propriété 11: $\Pi_{a,b}(t) = U(t-a) - U(t-b)$

Preuve : pour montrer une égalité faisant intervenir des fonctions échelon ou porte, on procède en général par disjonction des cas, selon la position du réel t par rapport aux réels a et b.

Si $t < a$: alors $t - a < 0$ et $t - b < 0$ donc $U(t-a) - U(t-b) = 0 - 0 = \Pi_{a,b}(t)$.

Si $a \leq t < b$: alors $t - a \geqslant 0$ et $t - b < 0$ donc $U(t-a) - U(t-b) = 1 - 0 = \Pi_{a,b}(t)$.

Si $b \leq t$: alors $t - a \geq 0$ et $t - b \geq 0$ donc $U(t-a) - U(t-b) = 1 - 1 = 0 = \Pi_{a,b}(t)$.

Dans tous les cas, l'égalité est vérifiée.

Remarque : cette propriété nous sera très utile pour calculer la transformée de Laplace d'un signal à durée finie.

IV.3) Fonctions à valeurs complexes.

On est très souvent amené à utiliser des fonctions à valeurs complexes en théorie du signal. On peut alors se ramener à deux fonctions à valeurs réelles :

(i) soit en considérant sa partie réelle et sa partie imaginaire

(ii) soit en considérant son module et son argument à 2π près dans le cas où la fonction ne s 'annule pas (auquel cas son argument n'existe pas). C'est grosso modo ce que l'on fait en travaillant sur les diagrammes d'amplitude et de phase.

C'est la situation (i) qui va nous intéresser le plus souvent. Plus précisément, on remarque que tout fonction *f* définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme $f(t)=f_1(t)+j f_2(t)$ où les fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont respectivement les parties réelles et imaginaires de $f(t)$.

Soit $a\in I$. Alors *f* est continue en *a* si et seulement si $\lim_{t\to a} f(t)=f(a)$ dans $\mathbb{C}$, c'est à dire $\lim_{t\to a}|f(t)-f(a)|=0$.

On en déduit que si *f* est continue en *a,* alors

$$0=\lim_{t\to a}|f(t)-f(a)|^2=\lim_{t\to a}\left((f_1(t)-f_1(a))^2+(f_2(t)-f_2(a))^2\right) \quad \text{donc}$$

$0=\lim_{t\to a}(f_1(t)-f_1(a))=\lim_{t\to a}(f_2(t)-f_2(a))$ ce qui signifie alors que $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont continues en *a.* Et réciproquement, si $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont continues en *a,* alors

$$\lim_{t\to a}|f(t)-f(a)|^2=\lim_{t\to a}\left((f_1(t)-f_1(a))^2+(f_2(t)-f_2(a))^2\right)=0$$

donc

$$\lim_{t\to a}|f(t)-f(a)|=0 \quad .$$

On a donc prouvé la :

Propriété 12

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors *f* est continue sur I si et seulement si les fonctions $t\to \mathrm{Re}(f(t))$ et $t\to \mathrm{Im}(f(t))$ le sont aussi.

Exemples :

a) $f(t)=e^{(-2+3\mathrm{j})t}$ pour $t\in\mathbb{R}$. On peut écrire $f(t)=e^{-2\mathrm{t}}\cos(3\mathrm{t})+j e^{-2\mathrm{t}}\sin(3\mathrm{t})$ et on se ramène ainsi à deux sinusoïdes amorties en considérant la partie réelle et la partie imaginaire de *f.* On peut aussi écrire *f* sous forme exponentielle : $f(t)=e^{-2\mathrm{t}}e^{3\mathrm{jt}}$ et considérer séparément $|f(t)|=e^{-2\mathrm{t}}$ et $\mathrm{Arg}\, f(t)=3\mathrm{t}$ (on aurait pu prendre aussi $\mathrm{Arg}\, f(t)=3\mathrm{t}+2\pi$ par exemple).

b) $g(t)=\dfrac{1+jt}{1-jt}$ pour $t\in\mathbb{R}$. On a $g(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+2\mathrm{j}\dfrac{t}{1+t^2}$, ce qui permet de prouver la continuité de *g* sur $\mathbb{R}$. .

c) $h(t)=\sin((1+j)t)$ pour $t\in\mathbb{R}$. (on généralise la définition de $\sin(z)$ à n'importe quel *z* complexe par la formule d'Euler généralisée en posant $\sin(z)=\dfrac{e^{jz}-e^{-jz}}{2\mathrm{j}}$). Cela donne dans notre cas

$$h(t)=\frac{e^{j(1+j)t}-e^{-j(1+j)t}}{2\mathrm{j}}=\frac{e^{(-1+j)t}-e^{(1-j)t}}{2\mathrm{j}}=\frac{e^{-t}(\cos(t)+j\sin(t))-e^{t}(\cos(t)-j\sin(t))}{2\mathrm{j}}$$

d'où $h(t)=\dfrac{(e^{-t}+e^{t})\sin(t)}{2}+j\dfrac{(e^{t}-e^{-t})\cos(t)}{2}$, ce qui permet de prouver la continuité de *h*.

Attention : on ne peut pas définir directement $\sqrt{z}$ ou $\ln(z)$ pour $z\in\mathbb{C}$ quelconque sans prendre des précautions particulières (notions d'analyse complexe hors programme).

IV.4) Signal à durée finie, signal borné.

Un signal est dit <u>à durée finie</u> si $\exists A\in\mathbb{R}, \exists B> A: \forall t\notin[A;B], x(t)=0$ (on dit aussi qu'il est <u>à support compact</u>).

Exemple : si $a< b$, la fonction porte $\Pi_{a,b}$ définie ci-dessus est un signal à durée finie .

Bien sûr, cette notion n'a d'intérêt que pour des signaux définis sur des intervalles de longueur infinie.

Un signal est dit <u>borné</u> si on peut encadrer les valeurs de $x(t)$ par deux constantes indépendantes du temps : $\exists A\in\mathbb{R}, \exists B\in \forall t\in\mathbb{R}, A\leqslant x(t)\leqslant B$.

Exemple : la fonction $t\rightarrow\cos(t)$ est bornée avec $A=-1$ et $B=1$.
la fonction $t\rightarrow e^{-t}$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

I
l est intéressant de remarquer qu'un signal à durée finie est borné, en vertu du Théorème ci-dessous, mais que la réciproque est fausse (cf la fonction $t\rightarrow\cos(t)$ sur $\mathbb{R}$.)

(*) Théorème 2
Soient deux réels $a< b$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$. Alors f est bornée.

<u>Preuve:</u>on admet pour le moment ce théorème . Il sera démontré dans le chapitre sur les suites et séries.

Le Théorème suivant est une version plus précise du Théorème 2 dans le cas où f est continue :

(*) Théorème 3
Soient deux réels $a< b$ et f une fonction continue $[a;b]$. Alors
$\exists t_m\in[a;b]$ tq $\forall t\in[a;b], f(t_m)\leqslant f(t)$.
$\exists t_M\in[a;b]$ tq $\forall t\in[a;b], f(t)\leqslant f(t_M)$.
Le nombre $f(t_m)$ (resp $f(t_M)$) est appelé minimum (resp. maximum) de f sur $[a;b]$ et est noté $\min\limits_{t\in[a;b]} f(t)$ (resp. $\max\limits_{t\in[a;b]} f(t)$).

<u>Preuve:</u> d'après le corollaire du Théorème 1, l'ensemble $f([a;b])$, c'est à dire $\{f(x) / x\in[a;b]\}$ est un intervalle. Par le Théorème 2, c'est un intervalle borné, et non vide car, par exemple, $f(a)\in f([a;b])$. On en déduit que $f([a;b])$ est d'une des 5 formes suivantes : $[m;M]$, $]m;M[$, $]m;M]$, $[m;M[$, $\{m\}$ avec $m< M$. (voir section VI)3) pour plus de précisions).
Si $f([a;b])=\{m\}$ c'est que f est constante, et le théorème est évident dans ce cas.
Montrons par l'absurde que les cas $f([a;b])=]m;M[$ ou $f([a;b])=]m;M]$ sont impossibles.
En effet, on pourrait alors considérer la fonction g définie sur $[a;b]$ par l'expression $g(t)=\dfrac{1}{f(t)-m}$, cette dernière étant bien définie car si $f([a;b])=]m;M[$ ou $f([a;b])=]m;M]$, alors $\forall t\in[a;b], f(t)> m$. La fonction g est continue par quotient de fonctions continues, donc par le

Théorème 2, elle est majorée. Il existe un réel $A>0$ tel que $\forall t\in[a;b],\ \frac{1}{f(t)-m}\leqslant A$ d'où l'on déduit que $\forall t\in[a;b],\ f(t)\geqslant m+\frac{1}{A}$. On aurait donc $f([a;b])\subseteq[m+\frac{1}{A};+\infty[$, c'est à dire $]m;M[\subseteq[m+\frac{1}{A};+\infty[$ ou $]m;M]\subseteq[m+\frac{1}{A};+\infty[$, donc $m\geqslant m+\frac{1}{A}$ ce qui est absurde car $A>0$.

En considérant cette fois la fonction *h* définie sur $[a;b]$ par l'expression $h(t)=\frac{1}{M-f(t)}>0$ on montre par l'absurde que le cas $f([a;b])=[m;M[$ est impossible en prouvant qu'il existerait un réel $B>0$ tel que $\forall t\in[a;b],\ f(t)\leqslant M-\frac{1}{B}$ .ce qui contredirait aussi le fait que $f([a;b])=[m;M[$.

On en déduit alors que $f([a;b])=[m;M]$ ce qui permet de prouver le Théorème en choisissant pour t_m (respectivement pour t_M) un antécédent par *f* de *m* (respectivement de *M*). □

V) Fonctions réciproques

Soient *a* et *b* deux réels tels que $a<b$. Soit $I=[a,b]$ et *f* une fonction continue et strictement croissante sur I. On pose enfin $J=[f(a),f(b)]$.

Remarque : tout ce qui suit peut très bien s'adapter au cas où *f* est strictement décroissante (dans ce cas $J=[f(b),f(a)]$) ou au cas où $I=]a,b[$ et $J=]f(a^+),f(b^-)[$ avec possiblement $a=-\infty$ ou $b=+\infty$.

On peut tout de suite noter que grâce au TVI, pour tout $y\in J$ on peut trouver un unique antécédent de *y* par la fonction *f*. Cela autorise la

Définition 9 On définit la fonction réciproque de *f*, notée f^{-1}, définie sur J et à valeurs dans I en associant à tout $y\in J$ son unique antécédent $f^{-1}(y)$ appartenant à I. On dit que *f* établit une bijection de I dans J.

Remarques :

1) Il est important pour ce qui précède de bien définir pour l'application *f* son intervalle dit de départ I et son intervalle dit d'arrivée J : on ne peut parler de bijection que d'un intervalle bien défini sur un intervalle bien défini.

2) L'application f^{-1} est bien entendu aussi une bijection, de J sur I cette fois, et son application réciproque est *f*.

La propriété suivante découle directement de la définition d'image et d'antécédent :

Propriété 13 $\forall x\in J,\quad f\left(f^{-1}(x)\right)=x$
$\forall x\in I,\quad f^{-1}\left(f(x)\right)=x$

Remarque : encore une fois, il est important dans la propriété ci-dessus de bien vérifier l'appartenance de *x* à l'intervalle I ou J.

Exemples importants :

$I=J=[0;+\infty[$, $f(x)=x^2$, $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$.
(attention à vérifier les appartenances aux intervalles I et J pour appliquer la propriété 12 ; par exemple, si on prenait $I=\mathbb{R}$, on aurait $f^{-1}(f(-2))=2\neq-2$)
$I=\mathbb{R}$, $J=]0;+\infty[$, $f(x)=e^x$ $f^{-1}(x)=\ln(x)$.
$I=[0;\pi]$, $J=[-1;1[$, $f(x)=\cos(x)$ $f^{-1}(x)=\arccos(x)$.
$I=[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, $J=[-1;1[$, $f(x)=\sin(x)$ $f^{-1}(x)=\arcsin(x)$.

(*) Propriété 14 La continuité de f sur I implique que f^{-1} est automatiquement continue sur J et possède le même sens de variations.

<u>Preuve :</u>
Il faut tout d'abord admettre la propriété suivante que l'on verra dans le paragraphe suivant:

(P) : Soient $c<d$ avec possiblement $c=-\infty$ ou $d=+\infty$, et φ une fonction croissante sur $]c;d[$. Alors, s'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall t\in]c;d[$, $\varphi(t)\leq M$, la limite $\varphi(d^-)$ existe et est finie, et s'il existe $m\in\mathbb{R}$ tel que $\forall t\in]c;d[$, $\varphi(t)\geq m$, la limite $\varphi(c^+)$ existe et est finie.

On revient à la preuve de la propriété 14.
On se place dans le cas où $I=]a,b[$ et f est une fonction continue et strictement croissante sur I.
Soient $x_1\in J$, $x_2\in J$ avec $x_1<x_2$ où $J=f(I)$. Par la propriété 12, cela peut se réécrire sous la forme $f(f^{-1}(x_1))<f(f^{-1}(x_2))$. Puisque f est strictement croissante sur I , on a alors $f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$ ce qui prouve la stricte croissance de f^{-1} . Cela signifie que $\forall x\in]f(a^+),f(b^-)[$ les limites $f^{-1}(x^-)$ et $f^{-1}(x^+)$ existent et sont finies d'après la propriété *(P)* (prendre $]c;d[=]f(a^+),x[$, $M=f(x)$ et prendre $]c;d[=]x;f(b^-)[$ et $m=f(x)$).

On raisonne par l'absurde et on suppose que f^{-1} n'est pas continue sur J. Cela signifie qu'il existe $x_0\in J$ tel que l'égalité $f^{-1}(x_0^-)=f^{-1}(x_0)=f^{-1}(x_0^+)$ est fausse. La stricte croissance de f^{-1} implique alors $f^{-1}(x_0^-)<f^{-1}(x_0^+)$. Prenons alors un réel $\alpha\in]f^{-1}(x_0^-);f^{-1}(x_0^+)[\subset I$ tel que $\alpha\neq f^{-1}(x_0)$ (cette dernière condition est possible car l'intervalle $]f^{-1}(x_0^-);f^{-1}(x_0^+)[$ contient une infinité de réels vu que $f^{-1}(x_0^-)<f^{-1}(x_0^+)$). On en déduit que l'équation $f^{-1}(x)=\alpha$, $x\in J$ n'a pas de solution : en effet, par stricte croissance de f^{-1} , si $x<x_0$, $f^{-1}(x)<f^{-1}(x_0^-)<\alpha$, si $x=x_0$, $f^{-1}(x)=f^{-1}(x_0)\neq\alpha$, et si $x>x_0$, $f^{-1}(x)>f^{-1}(x_0^-)>\alpha$.
Cela est absurde car le réel $x=f(\alpha)$ est solution de l'équation $f^{-1}(x)=\alpha$, $x\in J$.
On déduit donc que f^{-1} est continue sur J.

<u>Exemple</u> : continuité de l'argument.
On peut déduire de cette propriété le résultat suivant : $\lim_{x\to0}\operatorname{Arg}(1+jx)=0$ où l'on désigne par $\operatorname{Arg}(z)$ la mesure principale de l'argument de *z*. Nous avons donc ici
$\forall x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{Arg}(1+jx)\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

En remarquant que $\sin(\operatorname{Arg}(z))=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ on a $\lim_{x\to0}\sin(\operatorname{Arg}(1+jx))=0$.
Puisque la fonction sinus établit une bijection f continue de $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1;1]$ et que $\lim_{x\to0}f(\operatorname{Arg}(1+jx))=0$, on a par la propriété ci-dessus, $\lim_{x\to0}\operatorname{Arg}(1+jx)=f^{-1}(0)=0$.

VI) (*) Introduction à la topologie de $\mathbb{R}$.

VI.1) Définition de limite.

VI.1.a) Limite de fonction à valeurs réelles

On s'est, jusqu'à maintenant, contenté d'une idée intuitive de la notion de limite d'une fonction. On a ainsi considéré comme connues les limites de fonctions élémentaires, puis on a déterminé les limites d'autres fonctions par opérations sur les limites, ou par des propriétés de comparaison, conformes à l'intuition que l'on se faisait de ce qu'est une limite, sans jamais vraiment définir proprement ce que cela signifie.
Par exemple, dire pour une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ que $\lim_{x\to 0} f(x)=1$, c'est dire que l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut pourvu que *x* soit assez proche de 0. Cette phrase, que l'on lit ou entend souvent, mérite qu'on s'y arrête un moment, car elle n'est pas aussi simple qu'il n'y paraît.
En effet, en pratique, dès lors que l'on ne travaille pas sur des nombres entiers, la mesure ou la donnée d'un nombre réel est nécessairement entachée d'erreur (par exemple lorsque on le donne sous la forme d'une approximation décimale). On convient alors d'une marge d'erreur que l'on s'autorise pour approximer de façon satisfaisante un nombre réel (mais qu'est ce qu'un nombre réel d'ailleurs ? C'est une question dont nous reparlerons plus loin mais nous serons incapables de donner une réponse précise dans le cadre de ce cours).
Pour reprendre l'exemple ci-dessus, si l'on prend pour convention que « $f(x)\approx 1$ » dès lors que $|f(x)-1|<0{,}01$ (on parle alors d'approximation à 0,01 près), on peut alors traduire l'assertion $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ par :si *x* est assez petit,on a « $f(x)\approx 1$ ». Si l'on prenait pour convention « $f(x)\approx 1$ » dès lors que $|f(x)-1|<0{,}001$ on aurait « $f(x)\approx 1$ » pour *x* petit, mais certainement encore « plus petit » que tout à l'heure. Si l'on replace l'erreur permise 0,01 ou 0,001 par un paramètre réel $\epsilon>0$ aussi petit soit-il, l'assertion $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ signifie que l'on a $|f(x)-1|<\varepsilon$ dès que *x* est assez petit, c'est à dire dès que $|x|<\delta$ où $\delta>0$ est un nombre qui dépend *a priori* de ϵ et qui permet de quantifier la petitesse de *x*.
On peut alors poser la définition suivante :

Définition 10 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et *f* une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Alors :
1) Si $l\in\mathbb{R}$ et *a* est un réel appartenant à I, on dit que $\lim_{x\to a} f(x)=l$ si
$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ tq $\forall x\in I,\ |x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$. .
2) Si *a* est un réel appartenant à I, on dit que $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ (resp. $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$) si
$\forall Y>0,\ \exists\delta>0$ tq $\forall x\in I,\ |x-a|<\delta\Rightarrow f(x)>Y$ (resp. $f(x)<-Y$).
3) Si $l\in\mathbb{R}$ et si $+\infty\in I$ (resp. $-\infty\in I$) on dit que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$
(resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$) si $\forall\varepsilon>0,\ \exists X\in\mathbb{R}$ tq $\forall x\in I,\ x>X\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$
(resp. $\forall\varepsilon>0,\ \exists X\in\mathbb{R}$ tq $\forall x\in I,\ x<-X\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$).
4) Si $+\infty\in I$ (resp. $-\infty\in I$) on dit que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
(resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$) si $\forall Y>0,\ \exists X\in\mathbb{R}$ tq $\forall x\in I,\ x>X\Rightarrow f(x)>Y$
(resp. $\forall Y>0,\ \exists X\in\mathbb{R}$ tq $\forall x\in I,\ x<-X\Rightarrow f(x)>Y$
5) Si $+\infty\in I$ (resp. $-\infty\in I$) on dit que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
(resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$) si $\forall Y>0,\ \exists X\in\mathbb{R}$ tq $\forall x\in I,\ x>X\Rightarrow f(x)<-Y$
(resp. $\forall Y>0,\ \exists X\in\mathbb{R}$ tq $\forall x\in I,\ x<-X\Rightarrow f(x)<-Y$.

Remarque : la notation $+\infty \in I$, quoique non ambiguë ici, n'est pas vraiment correcte. Précisément, elle signifie que l'intervalle I n'est pas majoré.

Exemple : soient f et u deux fonctions définies sur $[0;+\infty[$. On suppose que
(i) $\forall x \geqslant 0,\ |f(x)| \leqslant u^2(x)$ (ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)=0$.
Alors, on peut affirmer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=0$. On va pouvoir <u>démontrer</u> cette assertion grâce à la définition 10. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)=0$, il existe un réel X tel que pour tout réel $x \in [0;+\infty[$, on ait $|u(x)| < \sqrt{\varepsilon}$ dès que $x > X$.
Donc, par le (i), pour $x > X$, on a $|f(x)| \leqslant u^2(x) < \varepsilon$.
L'existence d'un tel réel X étant vraie pour tout réel $\varepsilon > 0$, le point 3) de la définition 10) permet de conclure que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=0$.

On peut préciser les points 1) et 2) de la définition 10 en parlant de limite à gauche et à droite :

Définition 11: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Alors :
1) Si $l \in \mathbb{R}$ et a est un réel appartenant à I, on dit que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)=l$ (resp. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)=l$) si
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in I,\ a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$
(resp. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in I,\ a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$).
2) Si a est un réel appartenant à I, on dit que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)=+\infty$ (resp. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)=+\infty$) si
$\forall Y > 0,\ \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in I,\ a < x < a+\delta \Rightarrow f(x) > Y$
(resp. $\forall Y > 0,\ \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in I,\ a-\delta < x < a \Rightarrow f(x) > Y$.
3) Définitions similaires pour $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)=-\infty$)

On remarquera que si $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x)=\lim\limits_{x \to a^+} f(x)=l$.

Les définitions ci-dessus seront nécessaires pour la suite de ce cours car la notion intuitive de limite ne nous permettra pas d'établir certains résultats de convergence importants dont nous allons avoir besoin.

VI.1.b) Limite d'une suite.

Une définition similaire peut être établie pour les suites numériques (on rappelle qu'une suite numérique $u=(u)_n$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 12
On considère une suite numérique $u=(u)_n$.
1) Si $l \in \mathbb{R}$ on dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=l$ si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |u_n-l| < \varepsilon$.
2) On dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=+\infty$ (resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=-\infty$) si
$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow u_n > M$
(resp. $\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow u_n < -M$.

Nous étudierons les suites dans un chapitre ultérieur.

VI.1.c) Limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $l\in\mathbb{C}$ et $l=l_1+j\,l_2$ sa forme algébrique, et soit $a\in I$ ou $a=\pm\infty$. Écrivons f sous la forme $f(t)=f_1(t)+j\,f_2(t)$ où les fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont respectivement les parties réelles et imaginaires de $f(t)$.
Alors, on a la :

Définition 13 On dit que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=l_1$ et $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=l_2$.

Remarque : il est important de constater que pour une fonction à valeurs complexes, une limite égale à $\pm\infty$ n'a aucun sens, ce qui signifie que dans la définition ci-dessus, on ne peut pas considérer $l=\pm\infty$.

Notons que pour $z\in\mathbb{C}$, il est facile de voir que z tend vers 0 si et seulement si $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ tendent tous les deux vers 0 ce qui permet d'obtenir une définition équivalente à la définition 13 :

Définition 13 bis On dit que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} |f(x)-l|=0$

Exemple : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{jt+2}{(1+j)t-3\mathrm{j}}=\dfrac{1}{2}(1+j)$.

En effet, $\lim\limits_{t\to+\infty} \left|\dfrac{jt+2}{(1+j)t-3\mathrm{j}}-\dfrac{1}{2}(1+j)\right|=\lim\limits_{t\to+\infty}\left|\dfrac{1+3\mathrm{j}}{2((1+j)t-3\mathrm{j})}\right|=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt{10}}{2\sqrt{2\mathrm{t}^2-6t+9}}=0$

VI.2) Caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction.

On peut remarquer que la définition de la limite d'une suite est souvent plus simple à manipuler que celle de la limite d'une fonction. C'est la raison pour laquelle la propriété suivante est quelquefois très pratique :

Propriété 15 On considère une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$ tel que $a\in I$ et $l\in\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$. Alors, il y a équivalence entre :

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

(ii) Pour toute suite (x_n) à valeurs dans I et convergente vers *a*, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=l$.

<u>Preuve</u> : il y a plusieurs cas à distinguer selon que *a* ou *l* est fini ou pas. Nous faisons la preuve dans le cas où $a,l\in\mathbb{R}$ les autres cas se prouvant exactement sur le même modèle.

$(i)\Rightarrow(ii)$: Soit (x_n) à valeurs dans I et convergente vers *a*.

Soit $\varepsilon>0$. Par le (i), il existe $\delta>0$ tel que $\forall x\in I\cap]a-\delta;a+\delta[$ on ait $|f(x)-l|<\varepsilon$.
Or, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$, il existe un entier N tel que : $\forall n>N,\ |x_n-a|<\delta$, d'où $\forall n>N,\ |f(x_n)-l|<\varepsilon$. Cela étant vrai pour tout $\varepsilon>0$, cela démontre que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=l$.

$(ii)\Rightarrow(i)$: nous allons prouver la contraposée c'est à dire $non(i)\Rightarrow non(ii)$. Supposons que (i) ne soit pas vraie. Puisque (i) signifie : $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ tq $\forall x\in I,\ |x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$
alors non(i) signifie : $\exists\varepsilon>0$, tq $\forall\delta>0,\ \exists x\in I$ tq $|x-a|<\delta$ et $|f(x)-l|\geqslant\varepsilon$ (on pourra à ce sujet revoir le premier chapitre sur les bases de logique)

Ainsi, en prenant $\delta=\frac{1}{n+1}$ pour un entier naturel n quelconque, la dernière assertion implique

$$\exists \varepsilon>0,\ \text{tq}\ \forall n\in\mathbb{N},\ \exists x_n\in I\ \text{tq}\ |x_n-a|<\frac{1}{n+1}\ \text{et}\ |f(x_n)-l|\geqslant\varepsilon\ .$$

L'assertion $\forall n\in\mathbb{N},\ \exists x_n\in I\ \text{tq}\ |x_n-a|<\frac{1}{n+1}$ implique que la suite (x_n) est à valeurs dans I et converge vers *a,* mais l'assertion $\exists \varepsilon>0,\ \text{tq}\ \forall n\in\mathbb{N},\ |f(x_n)-l|\geqslant\varepsilon$ implique que la suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers *l*.
On en déduit qu'il existe une suite (x_n) à valeurs dans I et convergente vers *a* telle que l'assertion $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=l$ soit fausse, ce qui revient à dire que la propriété (ii) est fausse.

Exemple : soit *f* une fonction 1-périodique non constante définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas.
On raisonne par l'absurde et l'on suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$. Puisque f est une fonction 1-périodique non constante, alors : $\exists a\in[0;1[\ \text{tq}\ f(a)\neq f(0)$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n=\lim\limits_{n\to+\infty} n+a=+\infty$ on aurait alors par la propriété 14 :

$$l=\lim_{n\to+\infty} f(n)=\lim_{n\to+\infty} f(n+a).$$

Or, par 1-périodicité de *f*, cela donnerait $l=f(0)=f(a)$ ce qui contredit l'assertion $f(a)\neq f(0)$.

VI.3) Intervalles de $\mathbb{R}$. Limite d'une fonction monotone (ou d'une suite numérique monotone).

Le théorème que nous allons voir dans cette partie, et que nous réutiliserons à plusieurs reprises dans ce cours, nécessiterait une définition de l'ensemble des nombres réels. Ce sujet dépassant le cadre de ce cours, nous nous baserons sur une propriété des intervalles de $\mathbb{R}$ que nous poserons comme un postulat :

Définition 14 On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ tout sous-ensemble *I* vérifiant la propriété suivante :
$\forall x,y,z\in\mathbb{R},\ ((x<y<z)\ \text{et}\ x\in I\ \text{et}\ z\in I)\Rightarrow y\in I$.

Remarque : l'ensemble vide $I=\emptyset$ doit être logiquement considéré comme un intervalle puisque l'assertion $((x<y<z)\ \text{et}\ x\in\emptyset\ \text{et}\ z\in\emptyset)$ étant toujours fausse, l'implication $((x<y<z)\ \text{et}\ x\in\emptyset\ \text{et}\ z\in\emptyset)\Rightarrow y\in\emptyset$ est toujours vraie (voir III) du chapitre 1).

Postulat Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont d'une des 11 formes ci-dessous :
$I=\emptyset,\ I=\mathbb{R}$
$I=\{a\},\ a\in\mathbb{R}$
$I=]a;b[,\ I=]a;b],\ I=[a;b[,\ I=[a;b]$, avec $a<b$
$I=]a;+\infty[,\ I=[a;+\infty[,\ I=]-\infty;a[,\ I=]-\infty;a],\ a\in\mathbb{R}$

Remarques:
(i) Les intervalles $\emptyset,\ \mathbb{R},\ ]a;b[,\ ]a;+\infty[,\ ]-\infty;a[$ sont dits <u>ouverts.</u> Il vérifient la propriété suivante dont on se servira ultérieurement :
I ouvert si et seulement si $\forall x_0\in I,\ \exists\varepsilon>0\ \text{tq}\ ]x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon[\subset I$. On dira que l'intervalle $]x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon[$ est un <u>voisinage</u> de x_0 dans I.

(ii) Ce postulat implique la propriété dite « de la borne supérieure » de $\mathbb{R}$, propriété que nous ne développerons pas ici.

On en vient au théorème principal de cette section : l'existence d'une limite pour toute fonction monotone. Plus précisément :

Théorème 4 (convergence monotone) Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$ et *f* une fonction croissante intervalle $]a\,;b[$.
Alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

<u>Preuve :</u> nous prouvons l'assertion $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, l'autre se démontrant de la même façon.
Soit $J = \{ y \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x\,]a\,;b[,\ f(x) < y \}$.

Remarquons que J est un intervalle de $\mathbb{R}$. En effet, si y_1, y_2 et y_3 sont trois réels tels que $y_1 < y_2 < y_3$ et $y_1 \in J$, $y_3 \in J$ alors, $\forall x \in]a\,;b[,\ f(x) < y_1 < y_2$ donc $y_2 \in J$.
On a deux cas :
Soit $J = \emptyset$. Dans, ce cas, pour tout réel *Y*, on a $Y \notin J$ donc $\exists x_0 \in]a\,;b[$ tq $f(x_0) \geqslant Y$. Dans ce cas, puisque *f* est croissante, on a $\forall x \in [x_0\,;b[,\ f(x) \geqslant Y$. Cela étant vrai pour tout Y, par la définition 10, cela signifie que $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.
Soit $J \neq \emptyset$. Dans ce cas, si $y \in J$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $y + n \in J$ donc J est un intervalle non majoré. On a $]a\,;b[\neq \emptyset$ donc $J \neq \mathbb{R}$. Ainsi, par le postulat précédent, J est de la forme $J =]l\,;+\infty[$ ou $J = [l\,;+\infty[$ pour un certain $l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, $l - \varepsilon \notin J$ donc il existe un réel $x_0 \in]a\,;b[$ tel que $f(x_0) \geqslant l - \varepsilon$. Par croissance de *f*, on en déduit que $\forall x \in [x_0\,;b[,\ f(x) > l - \varepsilon$. D'autre part, on a $l + \varepsilon \in J$ donc $\forall x \in]a\,;b[,\ l + \varepsilon \geqslant f(x)$. Au final, $\forall x \in [x_0\,;b[,\ |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$ ce qui signifie que $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = l$.

Ce Théorème peut se présenter sous d'autres versions qui se démontrent de façon très similaire. On peut ainsi l'adapter facilement à une fonction décroissante, ou encore à une suite monotone : ainsi, toute suite monotone admet une limite (finie ou pas). Ce dernier résultat sera utilisé fréquemment dans le chapitre sur les suites et séries numériques et permettra de donner une démonstration des Théorèmes 1, 2 et 3 de ce chapitre.

VII) Exercices

Exercice 1.

Soit le signal $x(t)=5\cos(10\pi t)+12\sin(10\pi t)$ défini pour tout réel t.

1) Ecrire $x(t)$ sous la forme $x(t)=A\cos(wt+\varphi)$. On donnera les valeurs exactes de A et de w ainsi que celles de $\cos(\varphi)$ et de $\sin(\varphi)$.
2) Quelle est la valeur maximale de $x(t)$? Pour quelles valeurs de t ce maximum est-il atteint ? (donner le résultat en fonction de φ.)

Exercice 2.
Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$. On donne son tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	4	↘	-2	↗	1	↘	0

Pour chacune des fonctions suivantes :

1) $f_1(x)=f(x-1)$
2) $f_2(x)=f(x+2)+1$
3) $f_3(x)=f(-x+2)-2$ (remarquer que $f_3(x)=f_2(-x)-2$).

a) Etablir le tableau de variations
b) Déterminer le nombre de solutions à l'équation $f(x)=0$.

Exercice 3.

Soient a , b, et c trois constantes réelles. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par l'expression $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$.

1) Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $f(x)$.
2) Démontrer que la fonction f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
3) Dans cette question, on suppose que $a=-6$, et $b=9$, c restant inconnu.
   a) Faire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (on calculera les extrema à l'aide du paramètre c).
   b) Pour quelles valeurs de c le polynôme X^3-6X^2+9X+c admet-il trois racines réelles simples ?

Exercice 4.
Résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln(2x-1)\leq 2$
2) $\exp(2x-1)\leq 2$
3) $5\left(\frac{1}{3}\right)^x < 10^{-5}$
4) $3^{\ln(x)} > 10^5$

Exercice 5.

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^5 - 4x^4 + 6x^2 - 100x + 1}{3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 10x - 50}$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^5 + 5x^4 - 7x^2 + 8x + 1}{3x^5 + 8x^2 + 10x - 5}$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3x}{x+1} - \dfrac{x^3 - 2x^2}{x-1}$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 - e^{0,01\,x}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x\sin(x)$

6) $\lim\limits_{x \to 0} e^{3x} x^5 \ln(1+x)$

7) $\lim\limits_{x \to 0} x^x$

8) $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\sin(2t)e^t}{1+e^{2t}}$

(*) Exercice 6

a) Comparez 2016^{2017} et 2017^{2016}. Justifiez (on pourra utiliser astucieusement sa calculatrice).
b) Trouver le nombre de chiffres de l'écriture décimale des deux nombres ci-dessus (on trouvera l'entier n tel que $10^{n-1} < 2016^{2017} < 10^n$. Même chose pour 2017^{2016}.

Exercice 7

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(e^x + 1) - x$.
2) Montrer que la fonction $f : x \to \ln(e^x + 1) - x$ établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;+\infty[$.
3) Donner une expression de l'application réciproque f^{-1} en précisant son domaine de définition.
4) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) + x = 0$.
5) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f^{-1}(x) + \ln(x) = 0$.

Exercice 8

Attention : on a mis volontairement dans cet exercice des données inutiles !
On rappelle que $u \circ v$ désigne la fonction (définie sur un domaine à préciser) telle que $(u \circ v)(x) = u(v(x))$.

Soit u une fonction continue strictement croissante définie sur $]-5\,;+\infty[$ telle que

$u(-1) = -5,\ u(1) = 0,\ u(2) = 3$ et $\lim\limits_{x \to -5} u(x) = -\infty,\quad \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 4$.

Soit v une fonction continue strictement décroissante définie sur $]0\,;+\infty[$ telle que

$v(1) = 2,\ v(2) = 0,\ v(4) = -\dfrac{1}{3}$. et $\lim\limits_{x \to 0} v(x) = +\infty,\quad \lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = -1$.

1) Quel est l'intervalle I le plus grand possible sur lequel la fonction $u \circ v$ peut être défini ?
   Quel est l'intervalle J le plus grand possible sur lequel la fonction $v \circ u$ peut être défini ?

2) Calculez les limites $\lim_{x\to+\infty} u\circ v(x)$, $\lim_{x\to 0^+} u\circ v(x)$.

3) Calculez les limites $\lim_{x\to 1^+} v\circ u(x)$, $\lim_{x\to+\infty} v\circ u(x)$.

4) Calculez les limites $\lim_{x\to 2^+} \frac{u(x)}{v(x)}$, $\lim_{x\to 1^-} \frac{v(x)}{u(x)}$.

<u>Dans les deux exercices qui suivent,</u> U <u>est la fonction échelon définie par</u> $U(x)=1$ <u>si</u> $x\geq 0$ <u>et</u> $U(x)=0$ <u>sinon .</u>

Exercice 9
Pour chacune des fonctions suivantes :
a) tracer le graphe
b) Dire si la fonction est continue sur $\mathbb{R}$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, ou pas.

1) $f(x)=\frac{1}{2}xU(x)+(\frac{3}{2}x-6)U(x-2)-(2x-6)U(x-3)$.

2) $f(x)=\frac{1}{2}xU(x)+(3-\frac{3}{2}x)U(x-2)+(x-3)U(x-3)$.

3) $f(x)=\frac{1}{x}U(x)+(x-\frac{1}{x})U(x-1)$

Exercice 10
Trouver les deux constantes a et k de sorte que la fonction f définie par l'expression :
$f(t)=5+(ke^{-at}-2)U(t)+(1-ke^{-at})U(t-2)$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11
1) Établir le tableau de variations complet de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(t)=te^{-2t}$ (avec valeurs des limites et maximum ou minimum local s'il y en a).
2) En déduire le tableau de variations complet de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $t\rightarrow f(t-1)$.

Exercice 12
Résoudre l'inéquation $\ln(2t-1)\leq 3$ (on prendra soin d'éliminer d'abord les valeurs interdites)

Exercice 13
Établir la représentation graphique de la fonction $g(t)=2tU(t)+(4-t)U(t-2)$ (on rappelle que $U(t)$ est la fonction échelon.

Exercice 14
Pour un circuit série RC, on s'intéresse à la charge d'un condensateur soumis à une tension constante de 1V à partir de l'instant t=0. La tension aux bornes de ce condensateur est donnée à l'instant t par la fonction $u(t)$ définie par $u(t)=\begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ 1-e^{\frac{-t}{RC}} \text{ si } t>0. \end{cases}$ Si la constante de temps RC est assez petite, cette fonction peut être assimilée à la fonction échelon $U(t)$. Pour quelles valeurs de la constante de temps RC peut on affirmer que $|u(t)-U(t)|<0{,}01$ pour tout instant t tel que $t\notin[0;0{,}1]$. ?
Peut on ramener la durée de cet intervalle de temps à 0 ?

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(10x)}{\sin(x)} & \text{si } x \text{ n'est pas de la forme } k\pi, \text{ avec } k\in\mathbb{Z} \\ (-1)^k\times 10 & \text{si } x=k\pi\end{cases}.$$

1) Vérifier que la fonction f est paire et 2π-périodique.

2)
a) En utilisant des équivalents, montrer que f est continue en 0 .
b) En posant $x=k\pi+t$, avec $k\in\mathbb{Z}$ et $t\to 0$, montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) A l'aide des formules d'Euler, vérifier que
$f(x)=2(\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x)+\cos(9x))$.
(On rappelle aussi que $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall z\in\mathbb{C},\ z\neq 1\Rightarrow 1+z+z^2+\ldots+z^n=\dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}$)
Retrouver alors le résultat des questions précédentes.

(*)Exercice 16
Pour $t\in[0;+\infty[$, on définit le polynôme $P_t(X)=X^3+tX-1$.

1) Démontrer , en utilisant le Théorème des valeurs intermédiaires, que le polynôme $P_t(X)$ n'admet qu'une seule racine réelle. Soit $x(t)$ cette unique racine. Montrer que $\forall t\geq 0, x(t)>0$.

2) a) Calculer explicitement $x(0)$.
b) Prouver que $\dfrac{1}{2}<x(1)<\dfrac{3}{4}$.

3) Résoudre l'équation $x(t)=\dfrac{1}{2}$.

4) Soient t et t' deux réels positifs tels que $t'>t$.
a) Vérifier que $(x(t))^3=1-tx(t)$.
b) En déduire que $P_{t'}(x(t))=(t'-t)x(t)$.
c) En déduire alors que $x(t)>x(t')$. Que peut-on en déduire du sens de variations de la fonction $t\to x(t)$?

5) a) Vérifier que pour tout réel positif t on a : $tx(t)-1\leq 0$
b) En déduire $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$.

6) La décroissance de la fonction $t\to x(t)$ implique que pour tout réel positif t, les limites $x(t^-)$ et $x(t^+)$ (voir Théorème4, sinon l'admettre).
Démontrer que la fonction $t\to x(t)$ est continue.

7) Retrouver les résultats des questions 4)c, 5) b et 6) à l'aide de la propriété 14.

(*)Exercice 17

1) Trouver un équivalent de $1-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ de la forme $\frac{a}{x}$ quand $x \to +\infty$.

2) En déduire un équivalent de $\ln\left(3-2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)$ de la forme $\frac{a}{x}$ quand $x \to +\infty$.

3) Déduire des questions précédentes la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(3.2^{\frac{1}{x}}-2.3^{\frac{1}{x}}\right)^{x}$.

4) S'inspirer des questions précédentes pour déterminer la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(5.4^{\frac{1}{x}}-4.5^{\frac{1}{x}}\right)^{x}$.

(*) Exercice 18 (fonction implicite)

On considère l'équation $xy(x+y)^3=1$ d'inconnues $x>0$ et $y>0$.

1) Montrer en utilisant le Théorème des valeurs intermédiaires que pour tout réel $x>0$ il existe un unique réel $y>0$ tel que $xy(x+y)^3=1$. On note $f(x)$ ce réel *y*.

Considérons la fonction $x \to f(x)$ définie de $]0;+\infty[$ à valeurs dans $]0;+\infty[$

2) Montrer que *f* est strictement décroissante (revenir à la définition d'une fonction strictement décroissante et ne pas oublier que l'on ne sait pas si *f* est dérivable). On pourra remarquer que *x* et *y* jouent des rôles symétriques.

3) Montrer que *f* est continue (utiliser d'abord le Théorème 4).

4) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Soigner la justification.

5) Montrer que *f* établit une bijection. Trouver une relation entre f^{-1} et *f*.

(*)Exercice 19

On considère une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que $f(z)$ tend vers $+\infty$ en l'infini, ce que l'on note $\lim\limits_{|z| \to +\infty} f(z)=+\infty$, si l'assertion ci dessous est vraie :

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists R>0$ tq $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geqslant R \Rightarrow f(z)>M$.

Pour les fonctions définies ci-dessous, déterminer si $\lim\limits_{|z| \to +\infty} f(z)=+\infty$:

1) $f(z)=xy$ avec $z=x+jy$.

2) $f(z)=x^4+y^4$ avec $z=x+jy$.

VIII) Corrigés

Exercice 1.

1) Par le calcul de l'amplitude complexe, on obtient que $x(t)=13\cos(10\pi t+\varphi)$ où $\varphi=\mathrm{Arg}(5-12j)$. On obtient alors $\cos(\varphi)=\frac{5}{13}$ et $\sin(\varphi)=-\frac{12}{13}$.

2) $\mathrm{Max}(x(t))=13$. Il est atteint pour toutes les valeurs de t telles que $t=\frac{2k\pi-\varphi}{10\pi}$ où k est un entier relatif.

Exercice 2.

1)

a)

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f(x)$	4	↘	-2	↗	1	↘	0

b) 2 solutions

2)

a)

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$f_2(x)$	5	↘	-1	↗	2	↘	1

b) 2 solutions

3)

a)

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f(x)$	-2	↗	-1	↘	-4	↗	2

b) 1 solution

Exercice 3.

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) On applique le Théorème des valeurs intermédiaires.

3)

a)

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	4+c	↘	c	↗	$+\infty$

b) Par le Théorème des valeurs intermédiaires, la fonction change trois fois de signes donc $c \in]-4\,;0[$.

Exercice 4.

1) $x \in \left]\frac{1}{2}\,;\frac{1+e^2}{2}\right]$.

2) $x \in \left]-\infty\,;\frac{1+\ln(2)}{2}\right]$.

3) $x \in \left]\frac{\ln(5)+5\ln(10)}{\ln(3)}\,;+\infty\right[$.

4) $x \in \left]e^{\frac{5\ln(10)}{\ln(3)}}\,;+\infty\right[$.

Exercice 5.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^5-4x^4+6x^2-100x+1}{3x^4+5x^3-2x^2+10x-50}=+\infty$ par la propriété 9.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^5+5x^4-7x^2+8x+1}{3x^5+8x^2+10x-5}=\frac{2}{3}$ par la propriété 9.

3) Après avoir mis au même dénominateur, on trouve $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x}{x+1}-\frac{x^3-2x^2}{x-1}=-1$ par la propriété 9.

4) On factorise par x^5 puis on utilise la propriété 10 . On trouve $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5-e^{0,01x}=-\infty$. .

5) On a $\forall x>0,\ x^2-x\sin(x)\geqslant x^2-x$ d'où l'on déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x\sin(x)=+\infty$. .

6) On trouve $\lim\limits_{x\to 0} e^{3x}x^5\ln(1+x)=0$ par produit de limites.

7) On a $x^x=e^{x\ln(x)}$ donc par la propriété 10 on trouve $\lim\limits_{x\to 0} x^x=1$.

8) On a $\forall t\in\mathbb{R},\ \left|\frac{\sin(2t)e^t}{1+e^{2t}}\right|\leqslant\frac{e^t}{1+e^{2t}}\leqslant\frac{e^t}{e^{2t}}=e^{-t}$ donc par comparaison de limites il vient que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\sin(2t)e^t}{1+e^{2t}}=0$.

Exercice 6

a) Une calculatrice montre que $\ln\left(2016^{2017}\right)=2017\ln(2016)>2016\ln(2017)=\ln\left(2017^{2016}\right)$ donc, par la stricte croissance de la fonction ln, on a $2016^{2017}>2017^{2016}$.

b) Le nombre de chiffres de l'écriture décimale de 2016^{2017} est exactement l'entier n tel que $10^{n-1}<2016^{2017}<10^n$. En passant à la fonction ln, on obtient $(n-1)\ln(10)<2017\ln(2016)<n\ln(10)$ d'où $\frac{2017\ln(2016)}{\ln(10)}<n\leqslant\frac{2017\ln(2016)}{\ln(10)}+1$. On

obtient n= 6666.
Le nombre de chiffres de l'écriture décimale de 2017^{2016} est exactement l'entier n tel que $10^{n-1} < 2017^{2016} < 10^{n}$. De la même façon, on obtient n= 6663.

Exercice 7

1) A l'état brut, on a une forme indéterminée $+\infty-\infty$.

On écrit alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^{x}+1\right)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)=0$

2) On a par le calcul fait au 1) : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$ donc f est strictement décroissante par composée des fonctions $x\to 1+e^{-x}$ (strictement décroissante) et ln (strictement croissante) .

La fonction f est continue, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e^{x}+1\right)-x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^{x}+1\right)-x=0$ par le 1). La fonction $f:\ x\to\ln\left(e^{x}+1\right)-x$ établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$.

3) On trouve en résolvant l'équation $\ln\left(e^{y}+1\right)-y=x$ que $\dfrac{1+e^{f^{-1}(x)}}{e^{f^{-1}(x)}}=e^{x}$ d'où la relation $f^{-1}(x)=-\ln\left(e^{x}-1\right)$, définie pour $x\in]0;+\infty[$.

4) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f^{-1}(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^{x}\right)-\ln\left(e^{x}-1\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\dfrac{1}{1-e^{-x}}\right)\right)=\ln(1)=0.$

5) On a $\lim\limits_{x\to0^{+}}\left(f^{-1}(x)+\ln(x)\right)=\lim\limits_{x\to0^{+}}\left(\ln(x)-\ln\left(e^{x}-1\right)\right)=\lim\limits_{x\to0^{+}}\left(\ln\left(\dfrac{x}{e^{x}-1}\right)\right)=\ln(1)=0$ car $e^{x}-1\sim x$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 8

1) a) On a $I=]0;+\infty[$.
   b) On a $J=]1;+\infty[$.

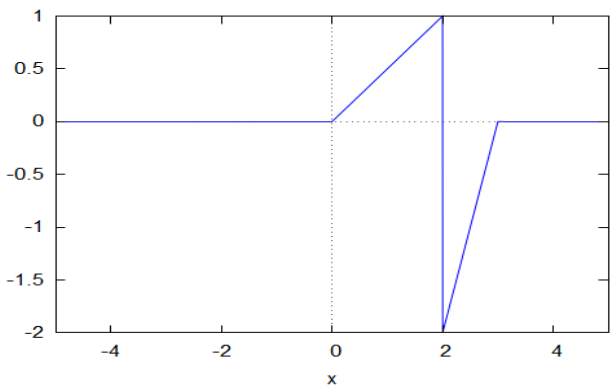
2) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}u\circ v(x)=-5,\quad \lim\limits_{x\to0^{+}}u\circ v(x)=4.$

3) On a $\lim\limits_{x\to1^{+}}v\circ u(x)=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}v\circ u(x)=-\dfrac{1}{3}.$

4) On a $\lim\limits_{x\to2^{+}}\dfrac{u(x)}{v(x)}=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to1^{-}}\dfrac{v(x)}{u(x)}=-\infty.$

Exercice 9

1)



Les fonctions intervenant dans l'expression de la fonction n'admettent que des discontinuités en 0, 2 et 3 ; c'est uniquement en ces valeurs là qu'il faut étudier la continuité de *f*.

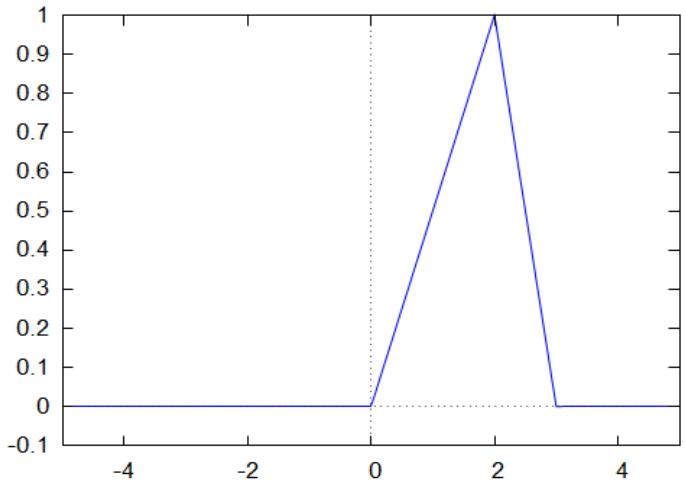
On a $f(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{2}x=1$ et $f(2)=f(2^+)=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{2}x+\left(\frac{3}{2}x-6\right)=-2\neq f(2^-)$ donc *f* n'est pas continue en $x=2$. C'est une discontinuité de première espèce car $f(2^-)$ et $f(2^+)$ existent et sont finis.

On a a $f(0^-)=0$ et $f(0)=f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}x=0$ donc *f* est continue en 0.

On a a $f(3^-)=0$ et $f(3)=f(3^+)=0$ donc *f* est continue en 3.

La fonction *f* est discontinue mais continue par morceaux car la seule discontinuité est une discontinuité de première espèce.

2)

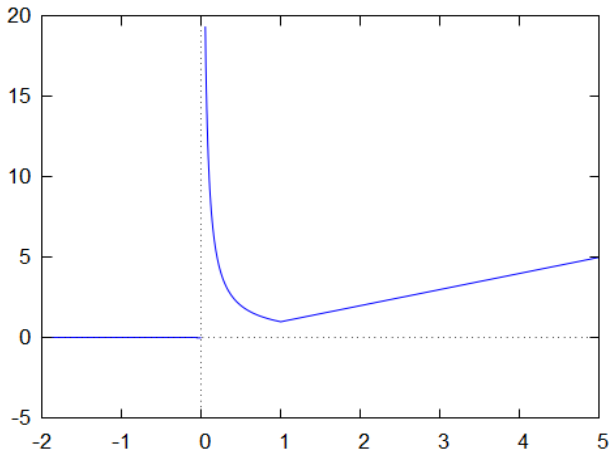


On établit par le calcul comme précédemment (et on vérifie graphiquement) que

$$f(0^-)=0=f(0)=f(0^+)\ ,\ f(2^-)=1=f(2)=f(2^+)\ ,\ f(3^-)=0=f(3)=f(3^+)\ .$$

La fonction *f* est alors continue.

3)



On a $f(1^-)=1=f(1)=f(1^+)$ d'où la continuité en 0 mais $f(0^+)=+\infty$ donc on a une discontinuité en 0 qui n'est même pas de première espèce. La fonction f n'est pas continue par morceaux.

Exercice 10

La fonction f est automatiquement continue en toute valeur de t différente de 0 et de 2.

On calcule $f(0^-)=5$ et $f(0)=f(0^+)=k+3$ donc f est continue en 0 si et seulement si $k=2$.

On calcule $f(2^-)=ke^{-2a}+3=2e^{-2a}+3$ et $f(2)=f(2^+)=4$ donc f est continue en 0 si et seulement si $2e^{-2a}+3=4$ c'est à dire $a=\frac{\ln(2)}{2}$.

On a donc $f(t)=5+(\frac{2}{(\sqrt{2})^t}-2)U(t)+(1-\frac{2}{(\sqrt{2})^t})U(t-2)$

Exercice 11

1)

On a $f'(t)=(1-2t)e^{-2t}$ d'où le tableau de variations

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

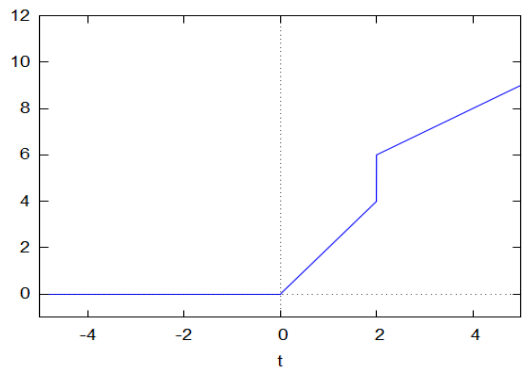
2)

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

Exercice 12

$t\in\left]\frac{1}{2};\frac{1+e^3}{2}\right]$

Exercice 13



Exercice 14

On a $\left|\left(1-e^{\frac{-t}{RC}}\right)-1\right|<0{,}01$ si et seulement si $t>2RC\ln(10)$ donc il faut que $2RC\ln(10)\leqslant 0{,}1$ c' est à dire $RC<\dfrac{0{,}1}{2\ln(10)}\sim 0{,}02$. On ne peut pas ramener la durée à 0 de l'intervalle de temps en dehors duquel $|u(t)-U(t)|<0{,}01$, sinon on aurait $\forall t\in\mathbb{R},\ |u(t)-U(t)|<0{,}01$ donc, en faisant tendre t vers 0^+, on obtiendrait $|0-1|<0{,}01$ ce qui est absurde.
En conclusion, l'inégalité $|u(t)-U(t)|<0{,}01$ ne peut avoir lieu qu'en dehors d'un intervalle de temps de durée non nulle.

Exercice 15

1) Si x n'est pas de la forme $k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$, on a
$$f(x+2\pi)=\frac{\sin(10x+20\pi)}{\sin(x+2\pi)}=\frac{\sin(10x)}{\sin(x)}=f(x).$$
Si x est de la forme $k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$, on a
$$f(x+2\pi)=f((k+2)\pi)=(-1)^{k+2}\times 10=(-1)^k\times 10=f(x).$$
Si x n'est pas de la forme $k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$, on a $f(-x)=\dfrac{\sin(-10x)}{\sin(-x)}=\dfrac{\sin(10x)}{\sin(x)}=f(x)$ et si x est de la forme $k\pi$, on a
2)
a) Si $x\to 0$, on a $f(x)=\dfrac{\sin(10x)}{\sin(x)}\sim\dfrac{10x}{x}=10$ donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=10=f(0)$: la fonction f est continue en 0.

b) Il suffit de montrer que f est continue en tout point de la forme $k\pi$. Posons $x=k\pi+t$, avec $k\in\mathbb{Z}$ et $t\to 0$. On a $\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(10t+10k\pi)}{\sin(t+k\pi)}=\lim\limits_{t\to 0}(-1)^{-k}\dfrac{\sin(10t)}{\sin(t)}=(-1)^k\times 10$ car si $t\to 0$, on a $\dfrac{\sin(10t)}{\sin(t)}\sim\dfrac{10t}{t}=10$ On a donc $\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=f(k\pi)$ donc f est continue en tout point de la forme $k\pi$.

3) On a pour tout réel x qui n'est pas de la forme $k\pi$:
$$\begin{aligned}&2(\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x)+\cos(9x))\\&=e^{jx}+e^{-jx}+e^{3jx}+e^{-3jx}+e^{5jx}+e^{-5jx}+e^{7jx}+e^{-7jx}+e^{9jx}+e^{-9jx}\\&=e^{-9jx}\left(1+e^{2jx}+e^{4jx}+e^{6jx}+e^{8jx}+e^{10jx}+e^{12jx}+e^{14jx}+e^{16jx}+e^{18jx}\right)\\&=e^{-9jx}\frac{e^{20jx}-1}{e^{2jx}-1}\ (\text{car } e^{2jx}\neq 0)\\&=e^{-9jx}\frac{e^{10jx}\left(e^{10jx}-e^{-10jx}\right)}{e^{jx}\left(e^{jx}-e^{-jx}\right)}=\frac{e^{10jx}-e^{-10jx}}{e^{jx}-e^{-jx}}=\frac{2j\sin(10x)}{2j\sin(x)}=f(x)\end{aligned}$$
et si $x=k\pi$, alors
$$2(\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x)+\cos(9x))=2\left(5.(-1)^k\right)=10.(-1)^k=f(x).$$
On a donc pour tout réel x la relation $f(x)=2(\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x)+\cos(9x))$ qui montre que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16

1) Pour $t \geqslant 0$ la fonction $x \to x^3 + tx - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $P'_t(x) = 3x^2 + t > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^*$, continue sur $\mathbb{R}$, et $P_t(0) = -1$ alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} P_t(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$. Le Théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une seule racine réelle, qui appartient à $]0;+\infty[$.

2) a) $P_0(X) = X^3 - 1$, donc son unique racine est $x(0) = 1$.

b) On calcule $P_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{8} < 0$ et $P_1\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{64} > 0$: c'est encore le Théorème des valeurs intermédiaires qui permet de dire que $x(1)$, la racine réelle de P_1, vérifie l'encadrement $\frac{1}{2} < x(1) < \frac{3}{4}$.

3)Cela revient à dire que $\frac{1}{2}$ est racine de P_t, donc $\frac{1}{8} + \frac{1}{2}t - 1 = 0$ ce qui donne $t = \frac{7}{4}$.

4)

a) Puisque $P_t(x(t)) = 0$, $(x(t))^3 + t\,x(t) - 1 = 0$ d'où $(x(t))^3 = 1 - t\,x(t)$.

b) On a par la question précédente :

$P_{t'}(x(t)) = x^3(t) + t'x(t) - 1 = (1 - t\,x(t)) + t'x(t) - 1 = (t' - t)x(t)$.

c) On a établi que $x(t) > 0$ donc puisque $t' > t$, alors $P_{t'}(x(t)) = (t' - t)x(t) > 0$. Puisque la fonction $x \to P_{t'}(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $x(t)$ est nécessairement strictement supérieure à l'unique racine réelle de $P_{t'}(X)$ donc $x(t) > x(t')$.

Cela étant vrai pour tous réels t et t' positifs tels que $t' > t$, on en déduit que la fonction $t \to x(t)$ est strictement décroissante.

5) a) Par le 4)a), on a $t\,x(t) - 1 = -(x(t))^3 < 0$. .

b) On a alors l'encadrement $\forall t > 0,\ 0 < x(t) < \frac{1}{t}$ donc par le Théorème des Gendarmes, $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

6) Soit $t_0 \geqslant 0$. Si $t_0 > 0$, en faisant tendre t vers t_0 avec $t < t_0$ dans la relation $\forall t \geqslant 0,\ (x(t))^3 + t\,x(t) - 1 = 0$, on a $(x(t_0^-))^3 + t_0 x(t_0^-) - 1 = 0$ c'est à dire que $P_{t_0}(x(t_0^-)) = 0$ donc $x(t_0^-) = x(t_0)$.

Le même raisonnement montre que $x(t_0^+) = x(t_0)$ ce qui achève de prouver la continuité de la fonction $t \to x(t)$.

7) Soit $t \geqslant 0$ et $x > 0$. Alors $x^3 + t\,x - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{x} - x^2$ ce qui signifie que x est une racine positive de $P_t(X)$ si et seulement si t est l'image de x par la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par l'expression $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$.

La fonction f est continue, strictement décroissante et vérifie $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $f(1) = 0$. On en déduit que f établit une bijection de $]0;1]$ sur $[0;+\infty[$ et $\forall t \geqslant 0,\ f^{-1}(t) = x(t)$.

On en déduit :

que la fonction $t \to x(t)$ est continue et strictement décroissante (propriété 14)

que $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$ puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Exercice 17

1) On a $1-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=1-e^{\frac{1}{x}.\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$. Si $x \to +\infty$, alors $\frac{1}{x}.\ln\left(\frac{3}{2}\right) \to 0$ donc $e^{\frac{1}{x}.\ln\left(\frac{3}{2}\right)}-1 \sim \frac{1}{x}.\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ d'après la propriété 8 donc $1-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \sim -\ln\left(\frac{3}{2}\right).\frac{1}{x}$

2) On a $\ln\left(3-2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln\left(1+2\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)\right)$. Si $x \to +\infty$, on a $1-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \to 0$ donc $\ln\left(3-2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln\left(1+2\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)\right) \sim 2\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)$ d'après la propriété 8 donc on déduit de la question précédente que $\ln\left(3-2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right) \sim -2\ln\left(\frac{3}{2}\right).\frac{1}{x}$

3) On a

$$\ln\left(\left(3.2^{\frac{1}{x}}-2.3^{\frac{1}{x}}\right)^{x}\right)=x\ln\left(3.2^{\frac{1}{x}}-2.3^{\frac{1}{x}}\right)=x\left(\frac{1}{x}\ln(2)+\ln\left(3-2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)\right)$$

$$=\ln(2)+x\ln\left(3-2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right).$$

On a si $x \to +\infty$, $\ln\left(3-2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right) \sim -2\ln\left(\frac{3}{2}\right).\frac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln\left(3-2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)=-2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

Par somme de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\left(3.2^{\frac{1}{x}}-2.3^{\frac{1}{x}}\right)^{x}\right)=\ln(2)-2\ln\left(\frac{3}{2}\right)=3\ln(2)-2\ln(3)$.

Il vient alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3.2^{\frac{1}{x}}-2.3^{\frac{1}{x}}\right)^{x}=e^{3\ln(2)-2\ln(3)}=\frac{2^3}{3^2}$.

4) On a

$$\ln\left(\left(5.4^{\frac{1}{x}}-4.5^{\frac{1}{x}}\right)^{x}\right)=x\ln\left(5.4^{\frac{1}{x}}-4.5^{\frac{1}{x}}\right)=x\ln\left(4^{\frac{1}{x}}\left(5-4\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x}}\right)\right)=\ln(4)+x\ln\left(5-4\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\ln(4)+x\ln\left(1+4\left(1-\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x}}\right)\right) .$$

On a $1-\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x}}=1-e^{\frac{1}{x}.\ln\left(\frac{5}{4}\right)} \sim -\frac{1}{x}.\ln\left(\frac{5}{4}\right)$ si $x \to +\infty$ donc $\ln\left(1+4\left(1-\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x}}\right)\right) \sim -\frac{4}{x}.\ln\left(\frac{5}{4}\right)$ si $x \to +\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln\left(1+4\left(1-\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x}}\right)\right)=-4\ln\left(\frac{5}{4}\right)$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\left(5.4^{\frac{1}{x}}-4.5^{\frac{1}{x}}\right)^{x}\right)=\ln(4)-4\ln\left(\frac{5}{4}\right)=5\ln(4)-4\ln(5)$$

d'où

$$\lim_{x \to +\infty} \left(5.4^{\frac{1}{x}}-4.5^{\frac{1}{x}}\right)^{x}=e^{5\ln(4)-4\ln(5)}=\frac{4^5}{5^4}.$$

Exercice 18

1) On fixe $x>0$. Considérons la fonction $t \to \varphi_x(t) \overset{\text{def}}{=} xt(x+t)^3$ définie pour $t \in [0;+\infty[$. Si $t_2 > t_1 \geqslant 0$, alors $(x+t_2)^3 > (x+t_1)^3 \geqslant 0$ donc par produit d'inégalités entre nombres positifs, on a $t \to \varphi_x(t_2) > \varphi_x(t_1)$: la fonction φ_x est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Elle est continue (produit de fonctions continue) et vérifie $\varphi_x(0)=0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi_x(t)=+\infty$.

Par le Théorème des valeurs intermédiaires, 1 admet un unique antécédent par la fonction φ_x , c'est à dire qu'il existe un unique réel $y>0$ tel que $xy(x+y)^3=1$.

2) Considérons $0 \leqslant x_1 < x_2$. On a $x_1 f(x_1)(x_1+f(x_1))^3 = x_2 f(x_2)(x_2+f(x_2))^3 = 1$

En remarquant que $\forall t \geqslant 0,\ \forall x \geqslant 0,\ \varphi_x(t)=\varphi_t(x)$ cette égalité peut s'écrire :
$\varphi_{x_1}(f(x_1)) = \varphi_{x_2}(f(x_2)) = \varphi_{f(x_2)}(x_2)$. Or, puisque la fonction $\varphi_{f(x_2)}$ est strictement croissante, on a :
$\varphi_{f(x_2)}(x_2) > \varphi_{f(x_2)}(x_1) = \varphi_{x_1}(f(x_2))$
d'où l'on déduit
$\varphi_{x_1}(f(x_1)) > \varphi_{x_1}(f(x_2))$
d'où
$f(x_1) > f(x_2)$ par la stricte croissance de la fonction φ_{x_1} .
La fonction *f* est donc strictement décroissante.

3) Par le Théorème 4, les limites $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existent pour tout réel $a>0$. Elles sont finies car, *f* étant strictement décroissante, $f(a) \geqslant \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \geqslant f(2a)$ et $f\left(\frac{a}{2}\right) \geqslant \lim\limits_{x \to a^-} f(x) \geqslant f(a)$.
Fixons $a>0$ et posons $\alpha = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ et $\beta = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
Puisque $\forall x>0,\ x f(x)(x+f(x))^3=1$, en faisant $x \to a^-$ et $x \to a^+$, on obtient respectivement :
$a\alpha(a+\alpha)^3 = a\beta(a+\beta)^3 = 1$, c'est à dire $\alpha=\beta=f(a)$ car φ_a est strictement croissante.Cela prouve la continuité de *f* (par définition de la continuité).

4) Toujours par le Théorème 4, on a l'existence de $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Montrons que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=+\infty$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=l \in \mathbb{R}$.
De la relation $\forall x>0,\ x f(x)(x+f(x))^3=1$ on obtiendrait par produit et somme de limites $0 \times l^4 = 1$ ce qui est notoirement faux. On a donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=+\infty$.
Par le Théorème 4, on a l'existence de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \in [0;+\infty[$ car $\forall x \geqslant 1,\ f(1) \geqslant f(x) > 0$. Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=0$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=l \in]0;+\infty[$.
De la relation $\forall x>0,\ x f(x)(x+f(x))^3=1$ on obtiendrait par produit et somme de limites $+\infty=1$ ce qui est absurde. On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=0$.

5) La fonction f étant continue, strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ avec $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, on en déduit que f établit une bijection de $]0;+\infty[$ sur lui-même.

Par symétrie de x et de y dans l'expression $xy(x+y)^3$, on a l'équivalence $\forall x>0, \forall y>0:\ y=f(x)\Leftrightarrow x=f(y)$ ce qui montre que $f=f^{-1}$.

Exercice 19

1) $f(z)=xy$ avec $z=x+jy$.

L'assertion $\lim_{|z|\to+\infty} f(z)=+\infty$ est fausse.

En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $\forall M\in\mathbb{R}, \exists R>0$ tq $\forall z\in\mathbb{C},\ |z|\geqslant R\Rightarrow f(z)>M$.

En particulier, en prenant $M=1$, $\exists R_0>0$ tq $\forall z\in\mathbb{C},\ |z|\geqslant R_0\Rightarrow f(z)>1$.

Or, si l'on prend $z_0=R_0+\frac{j}{2R_0}$, on a $|z_0|=\sqrt{R_0^2+\frac{1}{4R_0^2}}\geqslant R_0$ mais $f(z_0)=\frac{1}{2}<1$ ce qui contredit l'assertion $\forall z\in\mathbb{C},\ |z|\geqslant R_0\Rightarrow f(z)>1$.

2) $f(z)=x^4+y^4$ avec $z=x+jy$.

On a $f(z)=x^4+y^4=(x^2-1)^2+(y^2-1)^2+2(x^2+y^2)-2\geqslant 2(|z|^2-1)$.

Soit $M>0$. Posons $R=\sqrt{1+\frac{M}{2}}$. Si $|z|\geqslant R$, alors $2(|z|^2-1)\geqslant M$ donc $f(z)\geqslant M$. Ainsi, l'assertion $\lim_{|z|\to+\infty} f(z)=+\infty$ est vraie.

B - DERIVATION

La notion de dérivée d'une fonction (et de dérivée seconde ou plus) est incontournable en mathématiques et dans ses applications. La dérivée d'une fonction peut exprimer en physique aussi bien une vitesse instantanée qu'un débit (par exemple une intensité de courant électrique qui n'est rien d'autre qu'un débit de charges électriques). La notion de dérivée seconde permet de définir l'accélération en cinématique.Et bien sûr, beaucoup de lois physiques s'écrivent comme des équations différentielles qui, de par leur nature, fait intervenir la dérivation d'une fonction inconnue.
En mathématiques, la dérivée d'une fonction est bien sûr très utile pour déterminer ses variations, mais elle est aussi utilisée à d'autres fins : par exemple, le calcul d'un rayon de courbure, l'approximation d'une fonction compliquée, entre autres très nombreuses applications.

I) Fonction dérivable

I.1) Généralités

Définition 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction (possiblement à valeurs complexes) définie au voisinage de a (c'est à dire au moins sur un intervalle ouvert contenant a). On dit que f est <u>dérivable</u> en a si la limite $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe (égalité des limites à droite et à gauche) et est finie.
Dans ce cas, cette limite, appelée <u>nombre dérivé de f au point a</u>, se note $f'(a)$: la fonction $a \to f'(a)$ est appelée fonction dérivée de f.
Une fonction dérivable en tout point d'un intervalle ouvert I est dite <u>dérivable sur I.</u>

Remarque : en posant dans la définition ci-dessus $x = a + h$ avec $h \to 0$ on peut aussi dire que f est dérivable en a si la limite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.

Exemple $a=1$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Alors, $\forall h \neq 0$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{\frac{1}{1+h}-1}{h} = \dfrac{-h}{h(1+h)} = -\dfrac{1}{1+h}$. On en déduit que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = -1$. On a donc $f'(1) = -1$.

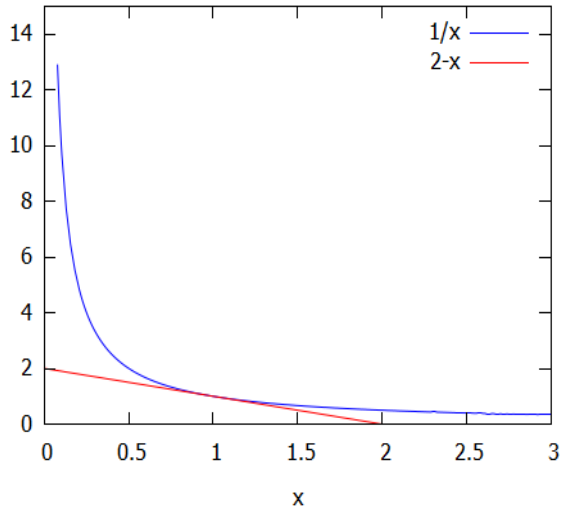
Conséquence graphique : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a à la courbe représentative de f.

Exemple : la tangente à la courbe représentative de la fonction $f(x)=\dfrac{1}{x}$ au point d'abscisse $a=1$ a pour coefficient directeur -1.

Remarque : on peut aussi définir la dérivée d'une fonction à valeurs complexes en considérant séparément les fonction parties réelles et imaginaires de f, c'est à dire $t \to \mathrm{Re}(f(t))$ et $t \to \mathrm{Im}(f(t))$. Si $f(t) = u(t) + j\,v(t)$ avec u et v deux fonctions <u>à valeurs réelles</u> définies au voisinage de a et dérivables en a, alors f est dérivable en a de dérivée $f'(a) = u'(a) + j\,v'(a)$. Voir exemple concret à la fin du II)1.

Définition 2 : Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable en a. On appelle <u>approximation affine de f au point a</u> la fonction $x \to f(a) + f'(a)(x-a)$. C'est une fonction affine dont le graphe est la tangente au point d'abscisse a à la courbe représentative de f.

Exemple : la tangente à la courbe représentative de la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$ au point d'abscisse $a=1$ a pour équation $y=1-(x-1)=2-x$. Concrètement, si x est proche de 1, $\frac{1}{x}$ est proche de $2-x$.
Application numérique : $x=1{,}05$. On a $1/1{,}05=0{,}\underline{952380}$..... et $2-1{,}05=095$.
L'approximation $1/1{,}05 \sim 2-1{,}05$ est vrai à environ 0,002 près.



Propriété 1 : Une fonction dérivable en un point a est continue en a.

<u>Preuve :</u> Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable en a. Alors pour h assez petit :
$f(a+h)-f(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times h$. Alors, si h tend vers 0, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ qui est fini, donc le membre de droite tend vers 0 par produit de limites. Cela signifie que $\lim_{h \to 0} f(a+h)-f(a)=0$, c'est à dire $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$. Donc f est continue en a.

On rappelle la propriété ci-dessous qui lie le signe de la dérivée d'une fonction avec son sens de variations.

Propriété 2 Soit une fonction f dérivable sur un intervalle <u>ouvert</u> I et à valeurs réelles. Alors :
(i) Si f est croissante sur I (resp. décroissante sur I), alors $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$)
(ii) Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$ (resp. si $\forall x \in I, f'(x) < 0$) alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.
(iii) Si $\forall x \in I, f'(x)=0$ alors f est constante sur I.
(iv) Si f admet un maximum ou un minimum local en $x_0 \in I$, alors $f'(x_0)=0$.

<u>Preuve</u> :
(i) Si $x \in I$, on a par croissance de f : $\forall x \in I, \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$ (a et x sont dans le même ordre que $f(a)$ et $f(x)$) donc en faisant tendre x vers a on obtient par passage à la limite $f'(x) \geqslant 0$.
(iv) Supposons par exemple que f admette un maximum local en $x_0 \in I$. Alors :

pour $h>0$ assez petit de sorte que $x_0+h\in I$, on a $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leqslant 0$ de sorte qu'en faisant $h\to 0^+$, on déduit que $f'(x_0)\leqslant 0$.

Pour $h<0$ assez petit de sorte que $x_0+h\in I$, on a $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geqslant 0$ de sorte qu'en faisant $h\to 0^-$, on déduit que $f'(x_0)\geqslant 0$.

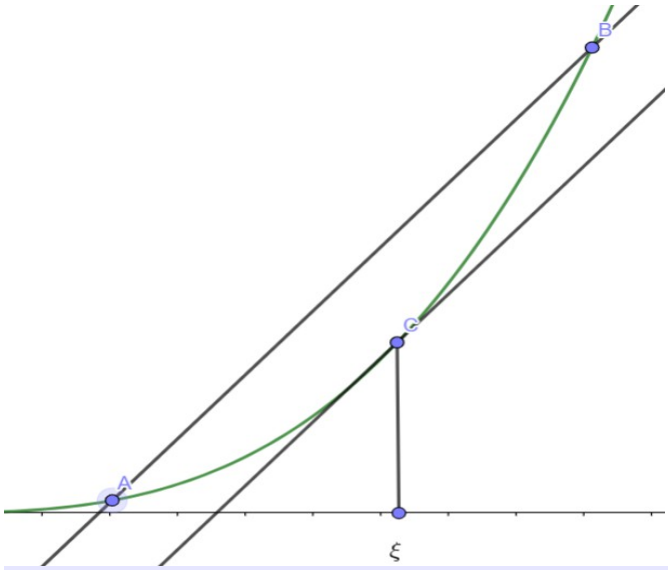
On obtient alors que $f'(x_0)=0$.

Pour les deux autres points, nous avons besoin du lemme suivant :

(*)Lemme de la corde : Soit $f: I\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable . Alors

$\forall a\in I, \forall b\in I$ tq $a<b, \exists \xi\in]a;b[$ tq $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$.

Remarque sur la dénomination: Ce lemme signifie que si dans un repère on considère les deux points $A(a;f(a)), B(b;f(b))$, alors on peut translater la corde (AB) pour la rendre tangente à la courbe représentative de f. Ce lemme est très connu dans la littérature mathématique sous le nom de Théorème des accroissements finis.



<u>(*)Preuve du lemme de la corde</u>: On considère la fonction $\varphi:[a;b]\to\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t)=f(t)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)$$

(c'est à dire l'écart entre *f* et la corde (AB)).

La fonction φ est dérivable sur $]a;b[$ de dérivée $\varphi'(t)=f'(t)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. On applique le Théorème 3 du chapitre sur les fonctions élémentaires :

$\exists t_m\in[a;b]$ tq $\forall t\in[a;b]$, $\varphi(t_m)\leqslant\varphi(t)$.

$\exists t_M\in[a;b]$ tq $\forall t\in[a;b]$, $\varphi(t)\leqslant\varphi(t_M)$.

Puisque $\varphi(a)=\varphi(b)$, au moins un des deux réels t_m ou t_M peut être pris dans $]a;b[$. Pour un tel réel, le point (iv) de la propriété 2 implique que $\varphi'(t_m)=0$ ou $\varphi'(t_M)=0$, $\varphi'(t_m)=0$ par exemple : on a alors $0=f'(t_m)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ce qui prouve le lemme de la corde avec $\xi=t_m$.

(*)Suite de la preuve de la propriété 2 :

(iii) Soient a et b dans I tels que $a<b$. En appliquant le lemme de la corde à f sur $[a;b]$ on en déduit : $\exists \xi \in]a;b[$ tq $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)=0$ d'où $f(a)=f(b)$. Cela étant valable quel que soit le choix de a et de b, on en déduit que f est constante sur I.

(ii) On suppose par exemple que $\forall x \in I, f'(x)>0$. Soient a et b dans I tels que $a<b$. En appliquant le lemme de la corde à f sur $[a;b]$ on en déduit :

$\exists \xi \in]a;b[$ tq $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)>0$ d'où $f(b)>f(a)$. Cela étant valable quel que soit le choix de a et de b, on en déduit que f est strictement croissante sur I.

Attention : les points (i) et (ii) ne sont pas des réciproques l'une de l'autre (dans le second cas l'inégalité sur $f'(x)$ est stricte). Une fonction dérivable peut très bien être strictement croissante sans que sa dérivée soit strictement positive : par exemple la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée $x \rightarrow 3x^2$ n'est pas toujours <u>strictement</u> positive (prendre x=0).

I.2) Formules de base.

$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}, \ \alpha \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arctan(x)$ (voir chapitre suivant)	$\frac{1}{1+x^2}$ (voir chapitre suivant)
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$\lambda u(x), \ \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'(x)$
$u(x).v(x)$	$u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{v^2(x)}$
$\frac{1}{v(x)}=v^{-1}(x)$	$\frac{-v'(x)}{v^2(x)}$

Il faut bien noter que toutes les formules de ce tableau peuvent se démontrer à l'aide de la définition 1. On démontre par exemple celle du produit :

Preuve de $(uv)'=u'v+v'u$.
Soient u et v deux fonctions dérivables au voisinage d'un nombre a. Alors, si h est assez petit et non nul :
$$\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}=\frac{u(a+h)\big(v(a+h)-v(a)\big)+v(a)\big(u(a+h)-u(a)\big)}{h}$$
(remarquer qu'en développant le numérateur du membre de droite les termes en $u(a+h)v(a)$ se simplifient)
$$=u(a+h)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}+v(a)\frac{u(a+h)-u(a)}{h} .$$
Si on fait tendre h vers 0, $u(a+h)$ tend vers $u(a)$ car u étant dérivable en a, elle est continue en a (propriété 1) . D'autre part $\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$ et $\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$ tendent vers $v'(a)$ et $u'(a)$ respectivement.On a donc : $\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}=u(a)v'(a)+v(a)u'(a)$ ce qui montre que $u\,v$ est dérivable en a de dérivée $u(a)v'(a)+v(a)u'(a)$.

Remarque : la formule $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ permet de retrouver les formules suivantes :
$\left(\frac{1}{x^n}\right)'=\frac{-n}{x^{n+1}}$ (avec $\alpha=-n$, $n\in\mathbb{N}$), $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (avec $\alpha=\frac{1}{2}$)

Remarques :

(i) la dérivée d'une fonction u peut être à son tour une fonction dérivable. Ainsi on peut être amené à considérer la dérivée de u' qui sera notée u'' et appelée dérivée seconde de u . De même, on peut éventuellement définir sa dérivée d'ordre 3 , notée $u^{(3)}$, etc....
Nous ne nous étendrons pas plus la-dessus, mais on devra travailler plus tard avec des dérivées secondes de fonctions lors de l'étude des équations différentielles d'ordre 2 dans un chapitre ultérieur.

(ii) En Physique, on préfère souvent utiliser la notation $\frac{df}{dx}(x)$ à $f'(x)$. En effet, les expressions des fonctions utilisées font souvent intervenir plusieurs paramètres ; la notation $\frac{df}{dx}(x)$ permet alors de préciser par rapport à quelle variable la dérivation est effectuée.

Exemple : $A=xe^{2y}$, alors si on considère que la variable est x, la dérivée de A va donner $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}(x)=e^{2y}$. Inversement, si l'on prend y comme variable, on va avoir $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}y}(y)=2\mathrm{x}\,e^{2y}$

3) Dérivée de fonctions à valeurs complexes.

En théorie du signal, les fonctions à valeurs complexes sont incontournables. On remarque que tout fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme $f(t)=f_1(t)+j\,f_2(t)$ où les fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont respectivement les parties réelles et imaginaires de $f(t)$.
On démontre, tout comme pour la propriété 12 du chapitre sur les fonctions élémentaires, la propriété suivante :

Propriété 3
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $a \in I$. Alors f est dérivable en a si et seulement si les deux fonctions $f_1 : t \to \mathrm{Re}(f(t))$ et $f_2 : t \to \mathrm{Im}(f(t))$ le sont aussi. D'autre part, $f'(a) = f'_1(a) + j f'_2(a)$.

II) Composées de fonctions dérivables

Outre les opérations arithmétiques entre fonctions, il est souvent nécessaire de considérer des composées de fonctions élémentaires.

II.1) Dérivée d'une composée de deux fonctions.

Définition 3 : Étant données deux fonctions u et v, on appelle <u>composée de u suivie de v</u>, et on note $v \circ u$, la fonction définie par $x \to v(u(x))$ (le domaine de définition devant être bien sûr précisé selon les cas).

Remarque : on a en général $u \circ v \neq v \circ u$: l'ordre dans la composition est important !

Exemple : $u(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $x \neq -1$ et $v(x) = 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Alors, la fonction $v \circ u$ est définie sur $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$ par l'expression $(v \circ u)(x) = \dfrac{2}{x+1} - 1 = \dfrac{1-x}{1+x}$. La fonction $u \circ v$ est définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par l'expression $(u \circ v)(x) = \dfrac{1}{(2x-1)+1} = \dfrac{1}{2x}$.

Théorème 1 : Si u et v sont deux fonctions dérivables, alors $u \circ v$ l'est aussi et on a : $(u \circ v)' = v'(x).u'(v(x))$.

<u>(*) Preuve</u> : Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que v soit définie au voisinage de a et dérivable en a, et u définie au voisinage de $v(a)$ et dérivable en $v(a)$. En posant, si h est assez petit pour que $u(v(a)+h)$ soit défini ,

$$\varepsilon(h) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{u(v(a)+h) - u(v(a))}{h} - u'(v(a)) \text{ si } h \neq 0 \\ 0 \text{ si } h = 0 \end{cases},$$

la dérivabilité de la fonction u en $v(a)$ signifie que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.
On a donc
$$(1) : u(v(a)+h) = u(v(a)) + h u'(v(a)) + h\varepsilon(h).$$
Puisque v est dérivable, elle est continue donc $\lim\limits_{t \to 0} v(a+t) - v(a) = 0$: on peut alors remplacer h par $v(a+t) - v(a)$ pour t assez petit dans la relation (1), ce qui donne pour tout réel t assez petit :

$$u(v(a+t)) = u(v(a)) + (v(a+t) - v(a))u'(v(a)) + (v(a+t) - v(a))\varepsilon(v(a+t) - v(a)).$$
Si, de plus, t est non nul, on obtient
$$(2) : \frac{u(v(a+t)) - u(v(a))}{t} = \left(\frac{v(a+t) - v(a)}{t}\right) u'(v(a)) + \left(\frac{v(a+t) - v(a)}{t}\right) \varepsilon(v(a+t) - v(a)).$$

On a $\lim_{t\to 0}\left(\frac{v(a+t)-v(a)}{t}\right)=v'(a)$ et $\lim_{t\to 0}\varepsilon(v(a+t)-v(a))=\lim_{s\to 0}\varepsilon(s)=0$ donc par produit de limites , $\lim_{t\to 0}\left(\frac{v(a+t)-v(a)}{t}\right)u'(v(a))=v'(a).u'(v(a))$ et

$\lim_{t\to 0}\left(\frac{v(a+t)-v(a)}{t}\right)\varepsilon(v(a+t)-v(a))=0$.

La relation (2) donne alors $\lim_{t\to 0}\left(\frac{(u\circ v)(a+t)-(u\circ v)(a)}{t}\right)=v'(a).u'(v(a))$ ce qui prouve le Théorème 1.

On déduit de ce théorème les nouvelles formules suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$
$u^{\alpha}(x)$	$\alpha u'(x)u^{\alpha-1}(x)$
$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\arctan(u(x))$ (voir chapitre suivant)	$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$ (voir chapitre suivant)
$u(ax+b)$	$a\,u'(ax+b)$

<u>Preuve :</u> toutes les formules ci dessus se prouvent de la même façon. Prouvons par exemple celle donnant la dérivée de $u^{\alpha}(x)$.
On pose $v(X)=X^{\alpha}, X\in\mathbb{R}$. La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $v'(X)=\alpha X^{\alpha-1}$. Donc si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $v\circ u$ est dérivable de dérivée $u'(x).v'(u(x))$.
D'une part, $(v\circ u)'=(u^{\alpha})'$. D'autre part, $u'(x).v'(u(x))=u'(x).\alpha(u(x))^{\alpha-1}$. On en déduit que $u^{\alpha}(x)$ est dérivable et $(u^{\alpha})'(x)=\alpha u'(x)u^{\alpha-1}(x)$.

Remarques:

(i) De la dernière formule, on en déduit les suivantes, particulièrement utiles en électronique :

$$(\cos(\omega x+\varphi))'=-\omega\sin(\omega x+\varphi)$$
$$(\sin(\omega x+\varphi))'=+\omega\cos(\omega x+\varphi)$$

Il suffit en effet de considérer $u=\sin$ ou $u=\cos$, $a=\omega$ et $b=\varphi$.

(ii) Certaines des formules ci-dessus s'étendent à des fonctions u et v à valeurs complexes . Par exemple, si u et v sont deux fonctions dérivables à valeurs complexes, alors les fonctions ci-dessous le sont aussi et leur dérivée est donnée par les formules suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$\lambda u(x),\ \lambda\in\mathbb{R}$	$\lambda u'(x)$
$u(x).v(x)$	$u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{v^2(x)}$
$\dfrac{1}{v(x)}=v^{-1}(x)$	$\dfrac{-v'(x)}{v^2(x)}$
$u^{\alpha}(x)$	$\alpha u'(x)u^{\alpha-1}(x),\alpha\in\mathbb{Z}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$u(ax+b)$	$a\,u'(ax+b),a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}$

Exemple : soit f définie par l'expression $f(t)=e^{(-2+3j)t}$ pour $t\in\mathbb{R}$. En utilisant la formule de dérivation de $e^{u(t)}$ avec la fonction affine complexe $u(t)=(-2+3j)t$, on obtient la dérivabilité de la fonction à valeurs complexes f et $f'(t)=(-2+3j)e^{(-2+3j)t}$ en remarquant que $u'(t)=-2+3j$.
Vérifions le directement! On travaille sur la forme algébrique de $f(t)$ avec
$f(t)=e^{-2t}\cos(3t)+je^{-2t}\sin(3t)$. En considérant séparément les parties réelles et imaginaires de f et en les dérivant séparément, on obtient que f est dérivable de dérivée :
$f'(t)=e^{-2t}(-2\cos(3t)-3\sin(3t))+je^{-2t}(-2\sin(3t)+3\cos(3t))$
$f'(t)=e^{-2t}((-2+3j)\cos(3t)+(-3-2j)\sin(3t))$
$f'(t)=e^{-2t}((-2+3j)\cos(3t)+j(-2+3j)\sin(3t))$
$f'(t)=e^{-2t}(-2+3j)(\cos(3t)+j\sin(3t))$
$f'(t)=e^{-2t}(-2+3j)e^{3jt}=(-2+3j)e^{(-2+3j)t}$, ce qui est exactement l'égalité obtenue directement ci-dessus (et de façon plus rapide!) par l'application de la formule de dérivation de $e^{u(t)}$.

II.2) (*)Dérivée d'une fonction réciproque.

Théorème 2 : On considère une fonction continue f qui établit une bijection strictement croissante ou strictement décroissante d'un intervalle I sur un intervalle J.On suppose que f est dérivable en tout point de I et que $\forall x\in I,\ f'(x)\neq 0$. Alors l'application réciproque f^{-1} est dérivable sur J et
$$\left(f^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\ .$$

Remarque : la condition $\forall x\in I,\ f'(x)\neq 0$ est nécessaire pour l'application de ce théorème. Par exemple, en prenant $I=J=\mathbb{R}$ et $f(x)=x^3$, alors f est bien une application dérivable sur I, mais $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ n'est pas dérivable en 0, car $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x)-f^{-1}(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ n'existe pas.

<u>Preuve :</u> Soit $a\in I$ et $h\in\mathbb{R}^*$ tel que $a+h\in I$. Alors :
$$\frac{f^{-1}(a+h)-f^{-1}(a)}{h}=\frac{f^{-1}(a+h)-f^{-1}(a)}{f\circ f^{-1}(a+h)-f\circ f^{-1}(a)}\ .$$
Puisque f est dérivable sur I, alors f est continue sur I donc f^{-1} est continue sur J (voir propriété 13 du

chapitre sur les fonctions élémentaires), d'où $\lim_{h\to 0} f^{-1}(a+h)=f^{-1}(a)$. Donc la limite quand h tend vers 0 de $\dfrac{f\circ f^{-1}(a+h)-f\circ f^{-1}(a)}{f^{-1}(a+h)-f^{-1}(a)}$, qui est le taux d'accroissement de f entre $f^{-1}(a)$ et $f^{-1}(a+h)$ est égale à $f'(f^{-1}(a))$ qui est non nul par hypothèse.

On en déduit que $\lim_{h\to 0}\dfrac{f^{-1}(a+h)-f^{-1}(a)}{h}=\dfrac{1}{(f'\circ f^{-1})(a)}$.

Exemple : considérons la fonction $f\ :\ ]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\to]-1;1[$ définie par $f(x)=\sin(x)$. On vérifie que f satisfait à toutes les conditions du Théorème 2. Il vient alors que son application réciproque (appelée fonction arcsin) $f^{-1}\ :\ ]-1;1[\to]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ est dérivable et que :

$$\forall x\in]-1;1[,\ \left(f^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{\cos\left(f^{-1}(x)\right)}\ .$$

Il reste à remarquer que $\forall x\in]-1;1[,\ f^{-1}(x)\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ donc $\forall x\in]-1;1[,\ \cos\left(f^{-1}(x)\right)>0$ ce qui implique que $\forall x\in]-1;1[,\ \cos\left(f^{-1}(x)\right)=+\sqrt{1-\sin^2\left(f^{-1}(x)\right)}=+\sqrt{1-\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)^2}=\sqrt{1-x^2}$

d'où l'on déduit la relation $\forall x\in]-1;1[,\ \left(f^{-1}(x)\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

III) Dérivée de fonctions définies par intervalles

Lorsqu'on étudie une situation physique qui change de nature à un instant donné, on est amené à considérer des fonctions définies par intervalles.

Considérons par exemple la fonction f définie par $f(x)=e^{2x}$ si $x<0$ et $f(x)=3-2e^{-x}$ si $x\geq 0$. On peut alors se poser la question de la dérivabilité de f en 0. La réponse est apportée par le :

Théorème 3 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et dérivable sur $I\setminus\{a\}$. On suppose que $l=\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x)$ existe et est finie.

Alors, f est dérivable en a, et $f'(a)=l$.

(*)Preuve : Soit $x\in I\setminus\{a\}$. Par le lemme de la corde, il existe un réel ξ_x entre a et x tel que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi_x)$. On peut alors créer une fonction $x\to\xi_x$ définie sur $I\setminus\{a\}$ telle que $\forall x\in I\setminus\{a\},\ \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi_x)$ (c'est une conséquence de l'axiome du choix).

Puisque $|\xi_x-a|\leq|a-x|$ on en déduit que $\lim_{x\to a}\xi_x=a$ donc par composée de limites, $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}f'(\xi_x)=\lim_{X\to a}f'(X)=l$. Cela signifie que f est dérivable en a, et $f'(a)=l$.

Ce théorème permet de prouver que la fonction donnée en exemple ci-dessus est bien dérivable

En effet $f(0^-)=f(0^+)=f(0)=1$ donc f est continue en 0. Les formules données pour $x<0$ et $x>0$ montrent que f est continue sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$. La fonction f est donc continue

sur $\mathbb{R}$. De même, les formules données pour $x<0$ et $x>0$ montrent que f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$. On a $f'(0^-)=[2e^{2x}]_{x=0}=2$ et $f'(0^+)=[2e^{-x}]_{x=0}=2$ donc $f'(0^-)=f'(0^+)=2$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=2$. Le théorème affirme donc que f est dérivable en 2.

(*) Remarque : il faut faire attention au fait que la réciproque de ce théorème est fausse : ce n'est pas parce que f est dérivable en a que $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ existe.

Par exemple, la fonction $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ est dérivable en 0 car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$ puisque $\forall x\neq 0,\ \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq|x|$ et que $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$. Cette fonction est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. Mais $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas car si $x\to 0$, alors $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\to 0$ mais $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

En revanche, on a le :

Théorème 4 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I ouvert et dérivable sur $I-\{a\}$ avec $a\in I$. On suppose que $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ existent et sont finies. Alors, si $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)\neq\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$, la fonction f n'est pas dérivable en a.

(*) Preuve : Soit $x\in I\setminus\{a\}$. Par le lemme de la corde, il existe un réel ξ_x entre a et x tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi_x)$. On peut alors créer une fonction $x\to\xi_x$ définie sur $I\setminus\{a\}$ telle que $\forall x\in I\setminus\{a\},\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi_x)$ (c'est une conséquence de l'axiome du choix).

Puisque ξ_x est compris entre a et x, on en déduit que $\lim\limits_{x\to a^+}\xi_x=a^+$ et $\lim\limits_{x\to a^-}\xi_x=a^-$ donc par composée de limites,

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+} f'(\xi_x)=\lim_{X\to a^+} f'(X)$$

et

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-} f'(\xi_x)=\lim_{X\to a^-} f'(X)$$

donc $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\neq\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$: la fonction f n'est pas dérivable en a.

Nous allons finir ce chapitre par l'étude de fonctions continues mais qui ne sont pas dérivables sur un ensemble localement fini de valeurs (c'est à dire un ensemble X tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ X\cap[-n;n]$ soit fini).

Définition 3 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et dérivable sur I sauf éventuellement pour un ensemble localement fini de points. On suppose aussi que les limites $\lim_{x \to a^+} f'(x)$ et $\lim_{x \to a^-} f'(x)$ existent et sont finies (elles sont alors différentes en tout point a où f n'est pas dérivable).
On dit alors que <u>f est continue et dérivable par morceaux</u>. Par extension, on dira aussi que la fonction définie sur I privé de l'ensemble des points où f n'est pas dérivable par $x \to f'(x)$ est la (pseudo-)dérivée de f.

Plus généralement, on parle de fonction <u>dérivable par morceaux</u> sur un intervalle I pour une fonction dérivable sur I sauf éventuellement pour un ensemble localement fini de points telle que les limites $\lim_{x \to a^+} f'(x)$ et $\lim_{x \to a^-} f'(x)$ existent et sont finies pour tout réel $a \in I$ tel que f ne soit pas dérivable en a.
Dans ce cas, on ne peut pas définir de pseudo-dérivée pour f si cette dernière n'est pas continue.

Exemple : la fonction 2 périodique définie sur $[-1;1[$ par $f(t)=\begin{cases} -t \text{ si } -1 \leq t < 0 \\ +t \text{ si } 0 \leq t < 1 \end{cases}$. Il s'agit d'une fonction continue dite « fonction triangle ». Elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (remarquer que $\mathbb{Z}$ est un ensemble localement fini) de dérivée 2 périodique , définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, par les expressions :
$f'(t)=\begin{cases} +1 \text{ si } t \in]n;n+1[,\ n \in \mathbb{Z}, n \text{ pair} \\ -1 \text{ si } t \in]n;n+1[,\ n \in \mathbb{Z}, n \text{ impair} \end{cases}$.
La pseudo-dérivée est une « fonction carrée » . Cette dernière n'admet pas de pseudo-dérivée car elle n'est pas continue.

IV) Exercices

Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes :
a) Calculer la fonction dérivée et factoriser le résultat obtenu
b) Établir le tableau de variations complet de la fonction *f* sur son domaine de définition

1) $f(t)=t^3-4t^2+5t-2, t\in\mathbb{R}$
2) $f(x)=(2x^2-4x)\ln(x)-3x^2+8x, x>0$
3) $f(x)=x^2e^{-2x}, x\in\mathbb{R}$
4) $f(t)=\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(t)+\sin(t), t\in[0,2\pi]$

Exercice 2
Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(t)=e^{3t}-e^{2t}-e^t+1$.
Établir le tableau de variations complet de *f*. En déduire que $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t)\geq 0$. Pour quelle(s) valeur(s) de *t* a-t-on $f(t)=0$?

Exercice 3

On considère le circuit électrique composé d'un générateur E et de deux résistances R_0 et R en série.

1 ◦) Calculer la puissance P dissipée dans R.

2 ◦) Calculer la résistance R qui rend P maximale. Que remarque-t-on ?

Exercice 4

Calculer les dérivées des fonctions suivantes et préciser leur domaine de dérivabilité. Simplifier le résultat autant que possible.

1) $f(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

2) $a(t)=(2t+1)e^{-t^2}$

3) $u(s)=\frac{e^s-1}{e^s+1}+\ln\left(e^{2s}-1\right)$

Exercice 5

Soit $a\in\mathbb{R}$. On considère (E) l'équation d'inconnue *x* : $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=a$.

1) Montrer que (E) admet une solution unique, que l'on notera $x(a)$ et exprimer $x(a)$ en fonction de *a*
2) Calculer la dérivée $x'(a)$ de la fonction $x(a)$. Simplifier le résultat au maximum
3) Retrouver les résultats des questions précédentes en prouvant que la fonction $x\rightarrow\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

On considère la fonction $f(t)=ae^{t}+be^{-2t}$ où a et b sont deux paramètres inconnus. On suppose que f admet un minimum égal à 2, et atteint en $t=1$. Trouver les valeurs de a et de b.

Exercice 7

Soient a, b, c et d quatre constantes réelles. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f(t)$ par :

(i) $f(t)=t+1$ si $t<0$

(ii) $f(t)=at^3+bt^2+ct+d$ si $t\in[0,2]$

(iii) $f(t)=2-t$ si $t>2$

1) a) Trouver a,b,c et d de sorte que la fonction $f(t)$ soit dérivable (au sens classique) sur $\mathbb{R}$ tout entier
   b) Etablir le tableau de variations de la fonction trouvée au a).
2) a) Trouver a,b,c et d de sorte que la fonction $f(t)$ soit continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en 2, et admette un extremum pour $t=1$.

Exercice 8 *Une dérivée pas si compliquée que ça ....*

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{(x+2)^2(x^2+1)^3}{(x+1)^4\sqrt{x^2+4}}$ définie sur $[-1;+\infty[$.

1) Calculer $\ln(f(x))$.
2) En déduire une expression de $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ sous la forme d'une somme de 4 fractions rationnelles simples.
3) En déduire l'approximation affine de $f(x)$ au voisinage de 1.

Exercice 9

1) Montrer à l'aide d'une étude de fonction que $\forall x\neq 0,\ x+1<e^{x}$.
   On définit la fonction f par $f(t)=\dfrac{e^{t}-1}{t}$ si $t\neq 0$, et $f(0)=1$.
2)
   a) Montrer que f est continue en 0.
   b) Calculer les limites de f en $\pm\infty$.
3) a) Calculer $f'(t)$ pour $t\neq 0$ (on ne demande par d'étudier la dérivabilité de f en 0).
   b) Prouver que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser la valeur $x=-t$ dans l'inégalité obtenue à la première question).

Exercice 10

Soit $\alpha>0$. On considère la fonction f définie par $f(t)=t^{\alpha}\ln(t)$ si $t>0$ et $f(0)=0$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0;+\infty[$.
2) Etablir le tableau de variations complet de f sur $[0;+\infty[$.
3) Pour quelles valeur de $\alpha>0$ a-t-on : $\forall t>0,\ t^{\alpha}\ln(t)>-1$?

(*)Exercice 11

Soit u une fonction dérivable à valeurs complexes, définie sur un intervalle I.
a) Montrer que la fonction $t \to \overline{u(t)}$ est dérivable de dérivée $t \to \overline{u'(t)}$.

b) Montrer que la fonction $t \to |u(t)|^2$ est dérivable de dérivée $t \to 2\,\mathrm{Re}\left(u'(t).\overline{u(t)}\right)$.

c) Démontrer la formule du cours qui affirme que la fonction $t \to e^{u(t)}$ est dérivable de dérivée $t \to u'(t)e^{u(t)}$ en partant de l'hypothèse que cette formule est vraie si u est à valeurs réelles.

Exercice 12 Pour chacune des fonctions suivantes, trouver un équivalent de la forme $A\,t^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}$.

1. $f(t)=\dfrac{2t+1}{3t^2-4}$ pour $t \to +\infty$.
2. $f(t)=\sqrt{t^3+2t+1}$ pour $t \to +\infty$.
3. $f(t)=\ln\left(\dfrac{t^2+1}{t^2+t+5}\right)$ pour $t \to +\infty$.
4. $f(t)=\sin\left(\dfrac{t}{3t^2+5t+7}\right)$ pour $t \to +\infty$.
5. $f(t)=\dfrac{e^{2t}-1}{e^t+4}$ pour $t \to 0$.

(*)Exercice 13 Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(1\,;2)$ et (d) une droite de coefficient directeur $-m$ avec $m>0$. Soient P et Q les intersections de (d) avec les axes des abscisses et des ordonnées respectivement.
Quelle est la valeur minimale de l'aire du triangle OPQ ? Pour quelle valeur de m l'aire du triangle OPQ est-elle minimale ?

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=0$ si $t \leq 0$ et $f(t)=t(\ln(t))^2$ si $t>0$.

1) La fonction f est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ? Justifier.
2) Montrer que $\forall t>0,\quad f'(t)=\ln(t)(\ln(t)+2)$.
3) Résoudre l'équation $f'(t)=0$.
4) Etablir le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 15
On considère la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^2e^{-2x}$. Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé de centre O.

1) Etablir le tableau de variations complet de f sur $[0\,;+\infty[$.

Pour $x \in]0\,;+\infty[$ on considère $M(x)$ le point de C d'abscisse x. Soit $m(x)$ le coefficient directeur de la droite $(OM(x))$.

2) Calculer l'expression de $m(x)$ et montrer que cette quantité est maximale pour $x=\dfrac{1}{2}$.

3) Vérifier que la droite $\left(OM\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ est tangente à C et est toujours située au dessus de la courbe.

Exercice 16

Prouver que la fonction définie par $f(t)=tU(t)-(t-1)U(t-1)$ n'est pas dérivable en 0 et 1 par deux méthodes différentes.

Exercice 17

1) Soit une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f' soit aussi continue sur $\mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que $a<b$ et $f(a)=f(b)=0$.

a) Montrer que les assertions $\forall x\in]a;b[,\ f'(x)>0$ et $\forall x\in]a;b[,\ f'(x)<0$ sont toutes les deux fausses.

b) En déduire, à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f' qu'il existe $c\in]a;b[$ tel que $f'(c)=0$. (Remarque : il s'agit d'un cas particulier du lemme de la corde)

2) Application. Soit $P(X)\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n\geq 2$. On suppose que toutes les racines de $P(X)$ sont réelles et simples. Montrer qu'il en est de même de $P'(X)$.

(*)Exercice 18

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

1) Démontrer que f établit une bijection de $[0;+\infty[$ sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

2) Soit $f^{-1}:[1;+\infty[\rightarrow[0;+\infty[$ l'application réciproque de $f:[0;+\infty[\rightarrow[1;+\infty[$. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1;+\infty[$ et continue sur $[1;+\infty[$.

3) a) Vérifier que $\forall x\in\mathbb{R},\ (f(x))^2-(f'(x))^2=1$.

b) En déduire que $\forall x>1,\ (f^{-1})'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(*)Exercice 19

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par l'expression $f(x)=xe^x$.

1) Démontrer que f établit une bijection de $[0;+\infty[$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2) Soit $f^{-1}:[0;+\infty[\rightarrow[0;+\infty[$ l'application réciproque de $f:[0;+\infty[\rightarrow[0;+\infty[$. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0;+\infty[$.

3) a) Montrer que pour $x\in[0;+\infty[$ assez grand, on a $e^x\leq f(x)\leq e^{2x}$.

b) En déduire que pour $x\in[0;+\infty[$ assez grand, on a $\frac{1}{2}\ln(x)\leq f^{-1}(x)\leq\ln(x)$.

4) a) Prouver que $\forall x>0,\ e^{f^{-1}(x)+\ln(f^{-1}(x))}=x$.

b) Déduire de la question 3)b et 4)a que pour x assez grand, on a $f^{-1}(x)\geqslant\ln(x)-\ln(\ln(x))$.

5) Déduire des questions précédentes que $f^{-1}(x)\sim\ln(x)$ quand $x\rightarrow+\infty$.

(*)Exercice 20 ***(fonctions convexes)***
On considère une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)>0$.

1) Donner un exemple de fonction polynomiale de degré 2, puis un de degré 4, qui vérifie cette condition. Pour quels entiers n peut-on trouver un exemple de fonction polynomiale de degré n qui vérifie cette condition ?
2) Soit $a\in\mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g(t)=f(t)-f(a)-f'(a)(t-a)$.
   a) Étudier les variations des fonctions f' et g et montrer que $\forall t\in\mathbb{R},\ g(t)\geq 0$.
   b) Démontrer qu'on a $f'(a)\neq 0$ sauf pour éventuellement une seule valeur de a.
   c) En déduire que l'on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (ce qui montre que f n'est pas bornée).
3) Donner des exemples de fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Même question pour la condition $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction φ par l'expression $\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{f(t)-f(0)}{t} & \text{si } t\neq 0\\ f'(0) & \text{si } t=0\end{cases}$.

4) a) Prouver que φ est continue.
   b) Prouver à l'aide de la question 2)a) que φ est croissante.

On en déduit donc que $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)$ existe et appartient à $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

5) A l'aide de la question 2)a), montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)$.

(*)Exercice 21
Dans cet exercice, on cherche les fonctions f continues sur $[0;+\infty[$ vérifiant la propriété :
(P) : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(2x)=2f(x)-1$.
Dans cet exercice, on dira qu'une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ est 1-périodique si
$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x+1)=h(x)$.
On admettra les deux propriétés suivantes que l'on pourra utiliser librement :
(i) Pour toute fonction continue h 1-périodique, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)$ n'existe pas, à moins que h ne soit une fonction constante.
(ii) Toute fonction continue h 1-périodique est bornée, c'est à dire qu'il existe deux constantes A et B telles que $A\leq h(x)\leq B$.

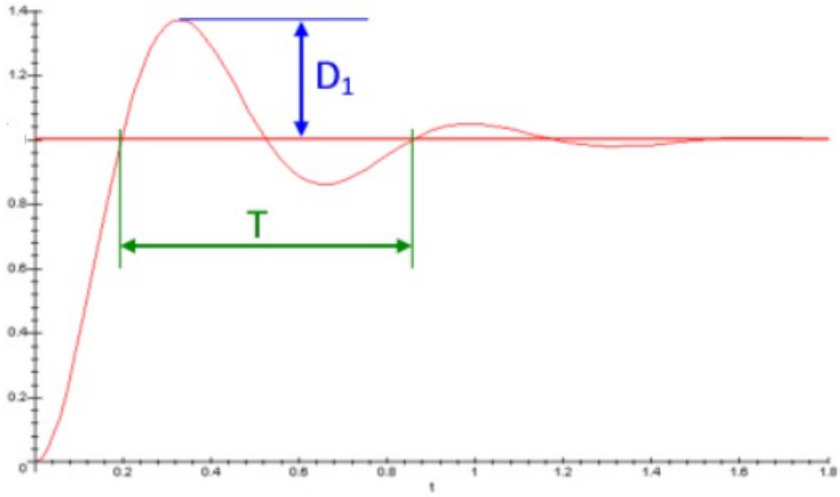
1) Que vaut nécessairement $f(0)$?
2) Quelles sont les fonctions constantes sur $[0;+\infty[$ et vérifiant la propriété (P) ?
3) a) Soit f une fonction vérifiant la propriété (P). Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $h(x)=\dfrac{f(2^x)-1}{2^x}$ est 1-périodique.
   b) En déduire que f est nécessairement de la forme $f(x)=\begin{cases}x.h\left(\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)+1 & \text{si } x>0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ où h est une fonction continue et 1-périodique.
4) Réciproquement, soit f une fonction admettant une expression de la forme
$f(x)=\begin{cases}x.h\left(\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)+1 & \text{si } x>0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ où h est une fonction continue 1-périodique.

a) Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$ (pour la continuité en 0, on utilisera la propriété (ii)) .
b) Montrer que f vérifie la propriété (P) .

5) On suppose dans cette question que f est une fonction dérivable sur $[0;+\infty[$ qui vérifie la propriété (P) .

a) Montrer que f est nécessairement de la forme $f(x)=\begin{cases} x.h\left(\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)+1 & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$ où h est une fonction dérivable et 1-périodique.
b) En considérant la dérivabilité de f en 0, montrer que f admet une expression de la forme $f(x)=ax+1$ où $a\in\mathbb{R}$.

Exercice 22
Lorsqu'on étudie la réponse de certains types de système à un signal constant (on prend cette constante égale à 1 pour simplifier), on se retrouve face à des réponses du type :
$f(t)=1+(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t))e^{-\alpha t}$ dont le graphe à l'allure suivante :



La fonction f tend vers1 avec des oscillations amorties. Le paramètre $\omega>0$ correspond à la pseudo-oscillation ($T=\dfrac{2\pi}{\omega}$, voir dessin), le paramètre $\alpha>0$ mesure l'amortissement des oscillations (plus α est grand, plus les oscillations sont amorties).
Si l'on part d'un système initialement au repos, la fonction f vérifie les conditions initiales :
$f(0)=f'(0)=0.$

1) Montrer que $A=-1$ et $B=\dfrac{-\alpha}{\omega}$.
2) Prouver que $f'(t)=\dfrac{e^{-\alpha t}}{\omega}(\alpha^2+\omega^2)\sin(\omega t)$. Décrire alors les variations de la fonction f et précisez les valeurs de t où ont lieu les minima et les maxima.
3) Montrer que la valeur du $n^{\text{ème}}$ maximum local est égal à $1+e^{-\frac{(2n-1)\alpha\pi}{\omega}}$, et celui du $n^{\text{ème}}$ minimum local vaut $1-e^{-\frac{2\alpha n\pi}{\omega}}$.
4) Prouver alors que :
a) $\forall t\geq 0, f(t)\geq 0$.
b) Le premier maximum local est un maximum global.

On pose $\text{Max}_{t\geq 0} f(t)=1+D_1$ (voir dessin). Le nombre D_1 correspond à ce qui est appelé le premier dépassement.

5) Établir pour quelles valeurs du rapport $\frac{\alpha}{\omega}$ le premier dépassement est inférieur à 1% (c'est à dire, ici, $D_1<0{,}01$)

Exercice 23

1) Faire le tableau de variations complet de la fonction *f* définie par l'expression $\frac{\sin(x)}{2-\cos(x)}$ sur l'intervalle $]-\pi;+\pi]$.
2) Montrer que pour tout réel *a* strictement positif, on a
$$\forall x\in\mathbb{R},\ -\frac{1}{\sqrt{a(a+2)}}\leq\frac{\sin(x)}{1+a-\cos(x)}\leq\frac{1}{\sqrt{a(a+2)}}\ .$$

(*)Exercice 24

Soit *f* une fonction définie sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $z\in\mathbb{C}$. On dit que *f* est $\mathbb{C}$-dérivable en *z* si $\lim\limits_{h\in\mathbb{C},|h|\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ existe dans $\mathbb{C}$. Le nombre $f'(z)\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{h\in\mathbb{C},|h|\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ est appelé nombre dérivé de *f* en *z*.

1) Dans cette question, on considère le cas où $f(z)=z^3$.
   a) Montrer que si $z\in\mathbb{C}$ et si $h\in\mathbb{C}$ avec $h\neq 0$, alors
   $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=3z^2+3hz+h^2$.
   b) En déduire que *f* est $\mathbb{C}$-dérivable en tout $z\in\mathbb{C}$.
2) Dans cette question, on considère le cas où $f(z)=|z|^2$.
   a) Montrer que $\lim\limits_{h\in\mathbb{C},\,h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}$ n'existe pas (on travaillera sur la forme exponentielle de *h*).
   b) En déduire que si $z\neq 0$, alors *f* n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable en *z*.
3) Dans cette question, on considère le cas où la fonction *f* est un polynôme, c'est à dire qu'il existe un entier naturel *d* et des nombres complexes $a_0, a_1, \ldots, a_d$ tels que : $\forall z\in\mathbb{C},\ f(z)=\sum_{k=0}^{d} a_k z^k$.
   a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul *k*, il existe un polynôme $Q_k\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall z\in\mathbb{C},\ (1+z)^k=1+kz+z^2Q_k(z)$. Déterminer $Q_1(X)$ et trouver une relation entre $Q_{k+1}(X)$ et $Q_k(X)$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel non nul *k*, la fonction $f:z\to z^k$ est $\mathbb{C}$-dérivable en *1*.
   c) Déduire de la question précédente que pour tout entier naturel non nul *k*, la fonction $f:z\to z^k$ est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point $z\in\mathbb{C}$.
   d) Montrer alors que la fonction *f* définie par l'expression $f(z)=\sum_{k=0}^{d} a_k z^k$ est $\mathbb{C}$-dérivable en tout $z\in\mathbb{C}$. Déterminer la fonction $f'(z)$. Remarque ?

Remarque : beaucoup de fonctions « simples » ne sont pas $\mathbb{C}$-dérivables. Les fonctions $\mathbb{C}$-dérivables possèdent énormément de propriétés intéressantes. Cette notion est à la base d'une branche très importante des mathématiques, appelée « analyse complexe », qui a de nombreuses applications.

(*)Exercice 25

1) Soient $a\in\mathbb{C}$, $\theta\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On définit la fonction $f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ par l'expression $f_n(t)=\left(a+t\,e^{j\theta}\right)^n$.

a) Expliquer pourquoi $f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est dérivable et calculer une expression de $f'_n(t)$.

b) Montrer que la fonction $f_n(t)$ est polynomiale de degré n .

2)

a) En déduire que si $P\in\mathbb{C}[X]$, alors la fonction $t\to P\left(a+t\,e^{j\theta}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de sa dérivée à l'aide de la dérivée formelle de $P(X)$ (si $P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_0$, la dérivée formelle de $P(X)$ est le polynôme $P'(X)=na_nX^{n-1}+(n-1)a_{n-1}X^{n-2}+...+a_{1.}$)

b) Montrer qu'il existe $Q\in\mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P)=\deg(Q)$ et $\forall t\in\mathbb{R},\ P\left(a+t\,e^{j\theta}\right)=Q(t)$.

c) Montrer que la fonction $t\to P\left(a+t\,e^{j\theta}\right)$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de sa dérivée d'ordre k à l'aide des dérivées formelle de $P(X)$.

3) Soit $Q\in\mathbb{C}[X]$.

a) A l'aide du (iii) de la propriété 2, démontrer par récurrence sur $d=\deg(Q)$ la formule suivante (dite de « Mac-Laurin ») :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ Q(t)=\sum_{k=0}^{d}Q^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}=Q(0)+Q'(0)t+\frac{Q''(0)}{2}t^2+\ldots+\frac{Q^{(d)}(0)}{d!}t^d$$

(on rappelle que $0!=1$, $k!=1\times2\times\ldots\times k$ et $Q^{(d)}$ représente la dérivée $d^{\text{ème}}$ de Q.)

b) En déduire la formule dite de Taylor :

$$\forall P\in\mathbb{C}[X],\ \forall a\in\mathbb{C},\ \forall z\in\mathbb{C},\quad P(z)=\sum_{k=0}^{d}P^{(k)}(a)\frac{(z-a)^k}{k!}.$$

c) Application. Si $p\in\mathbb{N}^*$, $a,b\in\mathbb{C}$, montrer que $(a+b)^p=\sum_{k=0}^{p}\frac{p!}{k!(p-k)!}a^kb^{p-k}$ (formule de Newton).

Exercice 26

Pour quelles valeurs du réel $a>0$ l'équation d 'inconnue $x>0$: $a^x=x$ admet-elle au moins une solution ?

V) Corrigés

Exercice 1

1) $f'(t)=(t-1)(3t-5)$

t	$-\infty$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f(t)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-4/27$	↗	$+\infty$

2) $f'(x)=4(x-1)(\ln(x)-1)$

x	0		1		e		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	5	↘	$4e-e^2$	↗	$+\infty$

3) $f'(x)=2x(1-x)e^{-2x}$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	e^{-2}	↘	0

4) $f'(t)=\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin(t)$.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		2π
$f(t)$	$\frac{\pi}{2}$	↘	1	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	$\frac{-3\pi}{2}$

Exercice 2

On a $f'(t)=3e^{3t}-2e^{2t}-e^t=e^t\left(3e^{2t}-2e^t-1\right)$. Par la factorisation $3X^2-2X-1=(X-1)(3X+1)$ on trouve $\forall t\in\mathbb{R}$, $f'(t)=e^t\left(3e^t+1\right)\left(e^t-1\right)$ qui est du signe de e^t-1. On a $f(t)=e^{3t}\left(1-e^{-t}-e^{-2t}+e^{-3t}\right)$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=+\infty$, et on a de façon directe $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)=1$. On en déduit le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(t)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Le tableau de variations montre que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$. D'autre part, $f(t)=0 \Leftrightarrow t=0$.

Exercice 3

1 ◦) L'intensité du courant est la même en tout point du circuit en série et vaut $\frac{E}{R+R_0}$. La puissance dissipée dans R vaut donc $P(R)=\frac{E^2 R}{(R+R_0)^2}$.

2 ◦) On a après calcul $\frac{dP}{dR}(R)=\frac{E^2(R_0-R)}{(R+R_0)^3}$ qui est du signe de R_0-R. On a donc

R	0		R_0		$+\infty$
$f(t)$	0	$\nearrow$	$P(R_0)$	$\searrow$	0

La résistance R qui rend P maximale vaut R_0 : les deux résistances doivent être égales.

Exercice 4

1) Précisons le domaine de dérivabilité : $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$. On a alors
$$f'(x)=\frac{x^2+x-1}{(x+1)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}=\frac{x^2+x-1}{|x+1|\sqrt{x^2-1}}.$$

2) Le domaine de dérivabilité est $\mathbb{R}$ et $a'(t)=-2(2t^2+t-1)e^{-t^2}$

3) Le domaine de dérivabilité est $]0;+\infty[$ et $u'(s)=\frac{2e^s(e^{2s}+2e^s-1)}{(e^s-1)(e^s+1)^2}$.

Exercice 5

1) On pose $X=e^x$. L'équation $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=a$ équivaut à $X^2-2aX-1=0$, qui a deux solutions réelles $(\Delta=4+4a^2>0)$ et de signes différents (car de produit égal à – 1). Puisque $X>0$ on en déduit que $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=a \Leftrightarrow e^x=a+\sqrt{1+a^2}$ (c'est toujours la plus grande des deux racines, donc c'est celle qui est positive) donc (E) admet une solution unique :
$x(a)=\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)$.

2) On a $x'(a)=\dfrac{\sqrt{a^2+1}+a}{a\sqrt{a^2+1}+a^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$.

3) La fonction $f:x\to\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f':x\to\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>0$: elle est donc strictement croissante. De plus, on a l'existence des limites $f(-\infty)=-\infty$ et $f(+\infty)=+\infty$ ce qui prouve que *f* est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et, par le Théorème 2, l'application réciproque f^{-1} est dérivable de dérivée $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Or on peut remarquer que $\forall x\in\mathbb{R},\ (f'(x))^2-(f(x))^2=1$ donc
$\forall y\in\mathbb{R},\ 1=(f'(f^{-1}(y)))^2-(f(f^{-1}(y)))^2=(f'(f^{-1}(y)))^2-y^2$
d'où $\forall y\in\mathbb{R},\ (f'(f^{-1}(y)))^2=1+y^2$ et $\forall y\in\mathbb{R},\ f'(f^{-1}(y))=+\sqrt{1+y^2}$ car f' est strictement positive. On a donc $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$. Il ne reste plus qu'à remarquer que la fonction $a\to x(a)$ n'est rien d'autre que la fonction f^{-1} .

Exercice 6

On a donc $f(1)=2$ et $f'(1)=0$. On obtient le système $\begin{cases} ae^1+be^{-2}=2 \\ ae^1-2be^{-2}=0 \end{cases}$, ce qui donne $a=\dfrac{4e^{-1}}{3}$ et $b=\dfrac{2e^2}{3}$ ..

Exercice 7

1) a) Il faut déjà que *f* soit continue. Elle l'est déjà en tout point différent de 0 et 2 de par les expressions données .

On a :
$f(0^-)=1,\ f(0)=f(0^+)=d$
$f(2)=f(2^-)=8a+4b+2c+d,\ f(2^+)=0$
ce qui donne les relations $\begin{cases} d=1 & (1) \\ 8a+4b+2c=-1 & (2) \end{cases}$
La fonction *f* est dérivable en tout point différent de 0 et 2 de par les expressions données .Elle sera dérivable sur $\mathbb{R}$ si $f'(0^-)=f'(0^+)$ et $f'(2^-)=f'(2^+)$ ce qui donne les relations
$\begin{cases} c=1 & (3) \\ 12a+4b+c=-1 & (4) \end{cases}$.
On obtient le système $\begin{cases} 8a+4b=-3 \\ 12a+4b=-2 \end{cases}$.
La résolution de ce système donne $a=\dfrac{1}{4}$ et $b=-\dfrac{5}{4}$.

b) On a
$f'(t)=1$ si $t<0$
$f'(t)=\dfrac{3}{4}t^2-\dfrac{5}{2}t+1$ si $t\in[0,2]$ qui change de signe en $\dfrac{5-\sqrt{13}}{3}$ sur $[0,2]$
$f'(t)=-1$ si $t>2$
On a donc le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{13}}{3}$		$+\infty$
$f(t)$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{5-\sqrt{13}}{3}\right)$	$\searrow$	0

2) a) On garde les équations (1), (2) et (4) de la question 1) et on rajoute l'équation $3a+2b+c=0$ qui découle de la nouvelle relation $f'(1)=0$. On obtient le système :

$$\begin{cases} d=1 \\ 8a+4b+2c=-1 \\ 12a+4b+c=-1 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=1 \\ 8a+4b+2c=-1 \\ 4a-c=0 \\ -2a=1 \end{cases} \text{ d'où } a=\frac{-1}{2}, b=\frac{7}{4}, \ c=-2 \text{ et } d=1.$$

Exercice 8

1) On a $\forall x>-1$, $\ln(f(x))=2\ln(x+2)+3\ln(x^2+1)-4\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)$.

2) On reconnaît la dérivée de $\ln(f(x))$. L'expression précédente donne donc

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x+2}+\frac{6x}{x^2+1}-\frac{4}{x+1}-\frac{x}{x^2+4}.$$

3) On a $f(1)=\frac{9\sqrt{5}}{10}$ et $\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{22}{15}$ d'où $f'(1)=\frac{22}{15}f(1)=\frac{99\sqrt{5}}{75}$.

L'approximation de $f(x)$ au voisinage de 1 est donnée par

$$f(x)\sim f(1)+(x-1)f'(1)=\frac{9\sqrt{5}}{10}+(x-1)\frac{99\sqrt{5}}{75}=\frac{99\sqrt{5}}{75}x-\frac{21\sqrt{5}}{50}$$

Exercice 9

1) Définissant sur $\mathbb{R}$ la fonction $\varphi(x)=e^x-x-1$ de dérivée $\varphi'(x)=e^x-1$, il vient que φ admet un minimum strict en $x=0$ égal à $\varphi(0)=0$ ce qui prouve que φ est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ donc $\forall x\neq 0,\ x+1<e^x$.

2)

a) L'équivalent en 0 $e^t-1\sim t$ montre que $f(0^-)=f(0^+)=1=f(0)$ donc f est continue en 0, et l'expression $f(t)=\frac{e^t-1}{t}$ si $t\neq 0$ montre que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

b) $f(+\infty)=+\infty$ par les croissances comparées, et $f(-\infty)=0$ par quotient de limites.

3) a) On a $\forall t\neq 0,\ f'(t)=\frac{te^t-e^t+1}{t^2}$.

b) On a $\forall x\neq 0,\ x+1<e^x$ donc $\forall t\neq 0,\ -t+1<e^{-t}$, d'où, en multipliant par $e^t>0$: $\forall t\neq 0,\ (1-t)e^t<1$ donc $\forall t\neq 0,\ te^t-e^t+1>0$ c'est à dire que $\forall t\neq 0,\ f'(t)>0$. La fonction f est strictement croissante sur $[-\infty;0[$ et sur $[0;+\infty[$ et continue en 0 : elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10

1) La fonction f est dérivable, donc continue, sur $]0;+\infty[$ de par son expression.
Par les croissances comparées, $f(0^+)=0=f(0)$ donc f est toujours continue en 0.
On a $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0^+}t^{\alpha-1}\ln(t)$ qui existe et est finie uniquement si $\alpha>1$ (croissances comparées) donc f est dérivable sur tout l'intervalle $[0;+\infty[$ si et seulement si . $\alpha>1$

2) On a $\forall t>0,\ f'(t)=t^{\alpha-1}(\alpha\ln(t)+1)$ qui change de signe pour $t=e^{-\frac{1}{\alpha}}$. On en déduit :

t	0		$e^{-\frac{1}{\alpha}}$		$+\infty$
$f(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\alpha e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) D'après le tableau de variations, cela équivaut à ce que $-\frac{1}{\alpha e}>-1$ donc $\alpha>\frac{1}{e}$.

Exercice 11
La fonction u s'écrit $t\to u_1(t)+ju_2(t)$ où u_1 et u_2 sont deux fonctions à valeurs réelles et dérivables sur I.

a) On a $t\to\overline{u(t)}=u_1(t)-ju_2(t)$ donc, puisque les fonctions u_1 et $-u_2$ sont dérivables sur I, la fonction $t\to\overline{u(t)}$ l'est aussi de dérivée $t\to u'_1(t)-ju'_2(t)=\overline{u'_1(t)+ju'_2(t)}=\overline{u'(t)}$.

b) On a $t\to|u(t)|^2=u_1^2(t)+u_2^2(t)$ dérivable comme somme de deux fonctions à valeurs réelles dérivables et sa dérivée vaut donc $t\to 2u'_1(t)u_1(t)+2u'_2(t)u_2(t)$ de par la formule de dérivation de u^n pour une fonction u à valeurs réelles.

D'autre part, on a
$$2\operatorname{Re}\left(u'(t).\overline{u(t)}\right)=2\operatorname{Re}\left((u'_1(t)+ju'_2(t)).(u_1(t)-ju_2(t))\right)=2u'_1(t)u_1(t)+2u'_2(t)u_2(t)\ ,$$
ce qui prouve l'égalité $\forall t\in I,\ \frac{d}{dt}\left(|u(t)|^2\right)(t)=2\operatorname{Re}\left(u'(t).\overline{u(t)}\right)$

c) On a $\forall t\in I,\ e^{u(t)}=e^{u_1(t)}\cos(u_2(t))+je^{u_1(t)}\sin(u_2(t)),$

donc
$$\forall t\in I,\ \left(e^u\right)'(t)=u'_1(t)e^{u_1(t)}\cos(u_2(t))-u'_2(t)\sin(u_2(t))e^{u_1(t)}$$
$$+j\left(u'_1(t)e^{u_1(t)}\sin(u_2(t))+u'_2(t)\cos(u_2(t))e^{u_1(t)}\right)$$
$$=e^{u_1(t)}\left(u'_1(t)\cos(u_2(t))-u'_2(t)\sin(u_2(t))+j\left(u'_1(t)\sin(u_2(t))+u'_2(t)\cos(u_2(t))\right)\right).$$

D'autre part,
$$\forall t\in I,\ u'(t)e^{u(t)}=(u'_1(t)+ju'_2(t))(\cos(u_2(t))+j\sin(u_2(t)))e^{u_1(t)}$$
$$=e^{u_1(t)}\left(u'_1(t)\cos(u_2(t))-u'_2(t)\sin(u_2(t))+j\left(u'_1(t)\sin(u_2(t))+u'_2(t)\cos(u_2(t))\right)\right).$$

Par comparaison des deux résultats trouvés, on a bien $\forall t\in I,\ \frac{d}{dt}\left(e^u\right)(t)=u'(t)e^{u(t)}$.

Exercice 12

1) On a $f(t) \sim \frac{2}{3} t^{-1}$ en $+\infty$.

2) On a $f(t) = t^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^3}} \sim t^{\frac{3}{2}}$ en $+\infty$.

3) On a $f(t) = \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2+t+5}\right) = f(t) = \ln\left(1 - \frac{t+4}{t^2+t+5}\right) \sim -\frac{t+4}{t^2+t+5} \sim -\frac{1}{t}$ en $+\infty$.

4) On a $f(t) = \sin\left(\frac{t}{3t^2+5t+7}\right) \sim \frac{t}{3t^2+5t+7} \sim \frac{1}{3} t^{-1}$ en $+\infty$.

5) On a $f(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^t+4} \sim \frac{2t}{5}$ en 0.

Exercice 13

La droite *(d)* a pour équation $y = -mx + 2 + m$. On en déduit que P a pour abscisse $\frac{m+2}{m}$ et Q a pour ordonnée $(m+2)$. L'aire du triangle OPQ vaut donc $A(m) = \frac{(m+2)^2}{2m}$. On a $A(0^+) = +\infty$ et $A(m) \sim \frac{m}{2}$ si $m \to +\infty$ donc $A(+\infty) = +\infty$. D'autre part, on a $A'(m) = \frac{(m+2)(m-2)}{2m^2}$ d'où le tableau de variations :

m	0		2		$+\infty$
$A(m)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

D'où l'on déduit que la valeur minimale de l'aire du triangle OPQ vaut 4 et est atteinte pour $m = 2$.

Exercice 14

1) On a $f(0^+) = 0$ par les croissances comparées d'où la continuité de *f* en 0.
D'autre part, $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0^+} (\ln(t))^2 = +\infty$ donc *f* n'est pas dérivable en 0.

2) On a pour tout réel *t* strictement positif :
$f'(t) = (\ln(t))^2 + t.\frac{2}{t}\ln(t) = (\ln(t))^2 + 2\ln(t) = \ln(t)(\ln(t) + 2)$.

3) On trouve $t = 1$ et $t = e^{-2}$.

4)

t	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f(t)$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 15

1) On a $f'(x)=2x(1-x)e^{-2x}$, d'où :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	0

Pour $x\in]0;+\infty[$ on considère $M(x)$ le point de C d'abscisse x. Soit $m(x)$ le coefficient directeur de la droite $(OM(x))$.

2) On a $m(x)=\dfrac{f(x)}{x}=x\,e^{-2x}$ et $m'(x)=(1-2x)e^{-2x}$, d'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$m(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

3) On prend le problème à l'envers et on va montrer que la tangente à C au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ passe par l'origine du repère. L'équation de cette tangente est

$$y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2e}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4e}=\frac{1}{2e}x \quad ,$$

ce qui montre que cette droite passe par O.

Pour montrer que cette tangente est toujours située au dessus de la courbe, le plus simple est de se rappeler que la fonction m admet un maximum en $x=\frac{1}{2}$ ce qui signifie que $\forall x>0,\ \dfrac{f(x)}{x}\leqslant m\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2e}$ d'où $\forall x>0,\ f(x)\leqslant\dfrac{x}{2e}$ c'est à dire que C est toujours située sous la tangente à C au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Exercice 16

On a déjà $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t)=\begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ t \text{ si } t\in[0;1[\\ 1 \text{ si } t\geqslant 1 \end{cases}$.

<u>Méthode 1 :</u>

On a $\forall t\neq 0,\ \dfrac{f(t)-f(0)}{t}=\begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ 1 \text{ si } t>0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{t\to 0,\, t\neq 0} \dfrac{f(t)-f(0)}{t}$ n'existe pas.

On a aussi $\forall t\neq 1,\ \dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}=\begin{cases} 1 \text{ si } t<1 \\ 0 \text{ si } t>1 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{t\to 1,\, t\neq 1} \dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}$ n'existe pas.

<u>Méthode 2 :</u>

La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$ (elle est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ de par son expression, et $f(0^-)=f(0)=f(0^+)=0$ et $f(1^-)=f(1)=f(1^+)=1$ donc elle est aussi continue en 0 et 1).

On a $f'(0^-)=0$ et $f'(0^+)=1$ donc $f'(0^-)$ et $f'(0^+)$ existent, sont finies et différentes donc par le Théorème 4, *f* n'est pas dérivable en 0.

On a aussi $f'(1^-)=1$ et $f'(1^+)=0$ donc $f'(1^-)$ et $f'(1^+)$ existent, sont finies et différentes donc par le Théorème 4, *f* n'est pas dérivable en 1.

Exercice 17

1)

a) Si l'on avait $\forall x\in]a;b[,\ f'(x)>0$, alors *f*, étant continue en *a* et *b*, serait strictement croissante sur $[a;b]$ ce qui est contredit par la relation $f(a)=f(b)=0$.

Si l'on avait $\forall x\in]a;b[,\ f'(x)<0$, alors *f*, étant continue en *a* et *b*, serait strictement décroissante sur $[a;b]$ ce qui est contredit par la relation $f(a)=f(b)=0$.

b) On déduit qu'il existe $c_1\in]a;b[$ tel que $f'(c_1)\leqslant 0$ et qu'il existe $c_2\in]a;b[$ tel que $f'(c_1)\geqslant 0$.

Alors si $f'(c_1)=0$ ou $f'(c_2)=0$ la question est résolue, sinon c'est que $f'(c_1)<0$ et $f'(c_2)>0$.

La fonction f' étant continue et changeant de signe sur $]a;b[$ on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle s'annule entre c_1 et c_2 , qui sont alors forcément différents (car $f'(c_1)<0<f'(c_2)$) et dans l'intervalle $]a;b[$: elle s'annule donc sur $]a;b[$.

2) Le polynôme $P(X)$ admet alors n racines réelles différentes $x_1<x_2<...<x_n$. La fonction $t\to P(t)$ étant dérivable de dérivée continue sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le 1) sur tous les intervalles $]x_k;x_{k+1}[$ pour en déduire l'existence d'une racine de $P'(X)$ $c_k\in]x_k;x_{k+1}[$, et ce, pour tout entier *k* compris entre 1 et n-1. Cela implique alors l'existence de $n-1$ racines distinctes pour le polynôme $P'(X)$ qui est de degré $n-1$: les racines de $P'(X)$ sont donc toutes réelles et simples.

Exercice 18

1) On a f dérivable et $f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)$ qui est du signe de $e^{2x}-1$ d'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Le tableau de variations montre alors que f établit une bijection de $[0;+\infty[$ sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

2) La fonction f étant continue, la fonction $f^{-1}:[1;+\infty[\rightarrow[0;+\infty[$ est continue (propriété 14 du chapitre 6), et puisque $\forall x>0, f'(x)>0$ alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $]1;+\infty[$ en utilisant le Théorème 2 du chapitre 7.

3) a) On calcule $\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right).\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=e^{-x}e^x=1$.

b) D'après la formule du Théorème 2, on a $\forall x>1,\ (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\left((f^{-1})'(x)\right)}$.

En remplaçant x par $(f^{-1})(x)$ dans la formule établie au 3)a), il vient
$\forall x>1,\ (f((f^{-1})(x)))^2-(f'((f^{-1})(x)))^2=1=x^2-(f'((f^{-1})(x)))^2$ donc
$(f'(f^{-1})(x))^2=x^2-1$. Puisque l'on a $\forall x>1,\ (f^{-1})(x)>0$ et puisque la fonction f' est strictement positive sur $]1;+\infty[$ on en déduit que $\forall x>1,\ f'((f^{-1})(x))=+\sqrt{x^2-1}$ donc
$\forall x>1,\ (f^{-1})'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Exercice 19

1) On a $\forall x\geqslant 0,\ f'(x)=(x+1)e^x>0$ donc f est une fonction continue strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Puisque $f(0)=0$ et $f(+\infty)=+\infty$ alors f établit une bijection de $[0;+\infty[$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2) Puisque $\forall x\geqslant 0,\ f'(x)=(x+1)e^x>0$ alors le Théorème 2 assure que f^{-1} est dérivable sur $[0;+\infty[$.

3) a) On a $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty}\frac{f(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\rightarrow+\infty}x=+\infty$ donc pour x assez grand, on a $\frac{f(x)}{e^x}>1$ c'est à dire $f(x)>e^x$ pour x assez grand.

D'autre part, on a $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty}\frac{f(x)}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\rightarrow+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ donc pour x assez grand, on a $\frac{f(x)}{e^{2x}}<1$ c'est à dire $f(x)<e^{2x}$ pour x assez grand.

b) On a $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty}f^{-1}(x)=+\infty$ donc, pour x assez grand, on peut remplacer x par $f^{-1}(x)$ dans l'inégalité obtenue à la question précédente : pour x assez grand, on a alors :

$e^{f^{-1}(x)} \leq f(f^{-1}(x)) = x \leq e^{2f^{-1}(x)}$. De l'inégalité $e^{f^{-1}(x)} \leqslant x$ on déduit $f^{-1}(x) \leq \ln(x)$ et de l'inégalité $x \leqslant e^{2f^{-1}(x)}$ on déduit $\frac{1}{2}\ln(x) \leqslant f^{-1}(x)$.

4) a) On a $\forall x \geqslant 0,\ f(f^{-1}(x)) = x$ donc $\forall x > 0,\ f^{-1}(x).e^{f^{-1}(x)} = x = e^{\ln(f^{-1}(x))} e^{f^{-1}(x)}$
car $\forall x > 0,\ f^{-1}(x) > 0$,
ce qui donne $\forall x > 0,\ x = e^{\ln(f^{-1}(x)) + f^{-1}(x)}$.

b) Du 4)a), on déduit déjà que $\forall x > 0,\ \ln(f^{-1}(x)) + f^{-1}(x) = \ln(x)$
Par le 3)b) , pour $x \in [0;+\infty[$ assez grand, on a $f^{-1}(x) \leqslant \ln(x)$ donc $\ln(f^{-1}(x)) \leqslant \ln(\ln(x))$.
On a donc, pour $x \in [0;+\infty[$ assez grand, $f^{-1}(x) = \ln(x) - \ln(f^{-1}(x)) \geqslant \ln(x) - \ln(\ln(x))$.

5) Au final, pour x assez grand, on a l'encadrement $\ln(x) - \ln(\ln(x)) \leqslant f^{-1}(x) \leqslant \ln(x)$ donc
$1 - \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \leqslant \frac{f^{-1}(x)}{\ln(x)} \leqslant 1$ ($\ln(x) > 0$ si x assez grand).
Il reste à remarquer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{\ln(x)} = 1$ ce qui signifie que $f^{-1}(x) \sim \ln(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 20 ***(fonctions convexes)***

1) On peut prendre $f(x) = x^2$ et $f(x) = x^4 + x^2$. Si f est polynomiale de degré n, alors f'' est polynomiale de degré n-2, sans racine réelle ce qui implique que n-2 est pair, donc n est pair et non nul.

Réciproquement, si n est pair et différent de 0 et si $f(x) = x^n + x^2$, alors
$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = n(n-1)x^{n-2} + 2 > 0$.

2)
a) La fonction f' est strictement croissante . On a g dérivable et
$\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = f'(t) - f'(a)$ qui est du signe de $t - a$ car f' est strictement croissante
.On en déduit que la fonction g admet un minimum en $t = a$ ce qui signifie que
$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) \geqslant g(a) = 0$.
b) Puisque la fonction f' est strictement croissante, l'équation $f'(x) = 0$ admet au maximum une seule solution.
c) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$. D'après le 2)a, on a
$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geqslant f(a) + f'(a)(t-a)$.
Alors, si $f'(a) > 0$, on déduit $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$ et si $f'(a) < 0$, on déduit $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = +\infty$.

3) Si $f(x) = e^{-x}$, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = e^{-x} > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Si $f(x) = e^{-x} - x$, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = e^{-x} > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

.

4) a) De par son expression, f est continue sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues.

Puisque f est dérivable en 0, par définition de la dérivabilité, $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'(0)$ ce qui se réécrit $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = \varphi(0)$: la fonction φ est aussi continue en 0.

b) On remarque aussi que de par son expression, f est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables, et $\forall t\neq 0,\ \varphi'(t)=\dfrac{f(0)+t\,f'(t)-f(t)}{t^2}$. D'après le 2)a) avec b à la place de t, on a $\forall a\in\mathbb{R},\forall b\in\mathbb{R},\ f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)\geqslant 0$.
En posant $a=t$ et $b=0$, il vient que $\forall t\in\mathbb{R},\ f(0)-f(t)+t\,f'(t)\geqslant 0$, d'où $\forall t\neq 0,\ \varphi'(t)\geqslant 0$.
La fonction φ est donc croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. Puisque la fonction φ est continue en 0, cela implique la croissance de φ sur $\mathbb{R}$ tout entier.
On en déduit donc que $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)$ existe et appartient à $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

5) Remarquons déjà que $\forall t>0,\ \dfrac{f(t)}{t}=\varphi(t)+\dfrac{f(0)}{t}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f(t)}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)$.
Ensuite, remarquons que puisque la fonction f' est strictement croissante, on a aussi $\lim\limits_{t\to+\infty}f'(t)$ qui existe et appartient à $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ (Théorème 4 chapitre fonctions élémentaires).
On a deux cas :

(i) $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)\in\mathbb{R}$.

De la relation $\forall a\in\mathbb{R},\forall b\in\mathbb{R},\ f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)\geqslant 0$, on déduit en fixant le réel a en en posant $b=t>0$: :
$\forall t>0,\ f(t)-f(a)\geqslant f'(a)(t-a)$
d'où
$\forall t>0,\ \dfrac{f(t)}{t}-\dfrac{f(a)}{t}\geqslant f'(a)\left(1-\dfrac{a}{t}\right)$, d'où en faisant tendre t vers l'infini
$\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f(t)}{t}\geqslant f'(a)$.
Si l'on fait tendre maintenant a vers $+\infty$, on obtient que $\lim\limits_{t\to+\infty}f'(t)$ est finie et
$\lim\limits_{t\to+\infty}f'(t)\leqslant\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)$.
Si maintenant, on repart de la relation $\forall a\in\mathbb{R},\forall b\in\mathbb{R},\ f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)\geqslant 0$, on déduit en fixant le réel b en en posant $a=t>0$: :
$\forall t>0,\ f(b)-f(t)\geqslant f'(t)(b-t)$ d'où
$\forall t>0,\ \dfrac{f(b)}{t}-\dfrac{f(t)}{t}\geqslant f'(t)\left(\dfrac{b}{t}-1\right)$.
En faisant tendre t vers l'infini, on obtient :
$-\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)\geqslant-\lim\limits_{t\to+\infty}f'(t)$ d'où $\lim\limits_{t\to+\infty}f'(t)\geqslant\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)$.
Conclusion : $\lim\limits_{t\to+\infty}f'(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)$

(ii) $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty$.

On considère la relation établie ci-dessus : $\forall t>0,\ \dfrac{f(b)}{t}-\dfrac{f(t)}{t}\geqslant f'(t)\left(\dfrac{b}{t}-1\right)$. On a donc

$$\forall t>|b|,\ f'(t)\geqslant\frac{\dfrac{f(b)}{t}-\dfrac{f(t)}{t}}{\dfrac{b}{t}-1}=\frac{\dfrac{f(t)}{t}-\dfrac{f(b)}{t}}{1-\dfrac{b}{t}}.$$

Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f(t)}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty$ on a $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\dfrac{f(t)}{t}-\dfrac{f(b)}{t}}{1-\dfrac{b}{t}}=+\infty$ d'où par comparaison
$\lim\limits_{t\to+\infty}f'(t)=+\infty$.

Exercice 21

1) En posant $x = 0$ dans la relation $f(2x)=2f(x)-1$, on obtient $f(0)=2f(0)-1$, donc $f(0)=1$.
2) Si f est constante égale à $k\in\mathbb{R}$, on a $k=2k-1$ donc $k=1$.

3) a) La fonction h est bien définie, car $2^x>0$ et f est définie sur $[0;+\infty[$. On a, pour tout réel x :

$$h(x+1)=\frac{f(2^{x+1})-1}{2^{x+1}}=\frac{f(2.2^x)-1}{2^{x+1}}=\frac{2f(2^x)-2}{2^{x+1}}$$ par la propriété *(P)*,

$$=2.\frac{f(2^x)-1}{2^{x+1}}=\frac{f(2^x)-1}{2^x}=h(x).$$

b) En remplaçant x par $\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$, $x>0$ dans la relation $h(x)=\frac{f(2^x)-1}{2^x}$, on obtient :

$$\forall x>0,\ h\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)=\frac{f(2^{\frac{\ln(x)}{\ln(2)}})-1}{2^{\frac{\ln(x)}{\ln(2)}}}=\frac{f\left(e^{\ln(2).\frac{\ln(x)}{\ln(2)}}\right)-1}{e^{\ln(2).\frac{\ln(x)}{\ln(2)}}}=\frac{f(x)-1}{x}$$ d'où l'on déduit

$f(x)=x.h\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)+1$. Si $x = 0$, on a $f(0)=1$ par la question 1).

La fonction h étant définie par l'expression $h(x)=\frac{f(2^x)-1}{2^x}$ est bien continue comme quotient et composée de fonctions continues.

4)
a) De par son expression, la fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que produit et composée de fonctions continues.

On a par la propriété (ii) l'existence d'une constante A telle que $|h(x)|\leqslant A$ pour tout réel x. On a alors

$\forall x>1,\quad |f(x)-f(0)|=|f(x)-1|=\left|x.h\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)\right|\leqslant A.|x|$ ce qui implique que $f(0^+)$ existe et $f(0^+)=f(0)$. La fonction f est continue sur $[0;+\infty[$.

b) Puisque $f(0)=1$ la propriété (P) est vérifiée pour x =0.

Si $x>0$,

$$f(2x)=2x.h\left(\frac{\ln(2x)}{\ln(2)}\right)+1=2x.h\left(\frac{\ln(x)+\ln(2)}{\ln(2)}\right)+1=2x.h\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}+1\right)+1=2x.h\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)+1$$

car h est 1-périodique, donc

$$f(2x)=2x.h\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)+1=2\left(x.h\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)+1\right)-1=2f(x)-1.$$

5)
a) La fonction f étant en particulier continue, par le 4), elle s'écrit sous la forme

$$f(x)=\begin{cases} x.h\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)+1 \text{ si } x>0 \\ 1 \text{ si } x=0 \end{cases}$$ où h est une fonction continue 1-périodique.

La fonction h ayant pour expression $h(x)=\frac{f(2^x)-1}{2^x}$, elle est aussi dérivable comme quotient et composée de fonctions dérivables.

b) La fonction f étant dérivable en 0, on a l'existence et la finitude de la limite

$f'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}h\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)$. En posant $x=e^{y\ln(2)}$ on a par composée de limites :

$f'(0)=\lim_{y\to -\infty}h\left(\frac{\ln(e^{\ln(2)y})}{\ln(2)}\right)=\lim_{y\to -\infty}h(y)$

ce qui, par la propriété 1 admise en début d'exercice, ne peut arriver que si h est constante.Soit a cette constante. Alors $f(x)=\begin{cases} ax+1 & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$ c'est à dire $\forall x\geqslant 0,\ f(x)=ax+1$.

Exercice 22

1) On a $0=f(0)=1+A$ d'où $A=-1$. On a par dérivation d'un produit

$f'(t)=(-\omega A\sin(\omega t)+B\omega\cos(\omega t))e^{-\alpha t}-\alpha(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t))e^{-\alpha t}$

$=((-\alpha A+\omega B)\cos(\omega t)-(\omega A+\alpha B)\sin(\omega t))e^{-\alpha t}$

d'où $0=f'(0)=-\alpha A+\omega B=\alpha+\omega B$ d'où $B=\frac{-\alpha}{\omega}$.

2) En remplaçant dans l'expression de $f'(t)$ les constantes A et B trouvées ci-dessus, il vient :

$f'(t)=((-\alpha A+\omega B)\cos(\omega t)-(\omega A+\alpha B)\sin(\omega t))e^{-\alpha t}=\left(\omega+\frac{\alpha^2}{\omega}\right)e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$

$=\frac{e^{-\alpha t}}{\omega}(\alpha^2+\omega^2)\sin(\omega t)$.

Le signe de $f'(t)$ se révèle tout bonnement être celui de $\sin(\omega t)$: la fonction f est donc strictement croissante sur tous les intervalles $[\frac{k\pi}{\omega};\frac{(k+1)\pi}{\omega}]$ avec k pair et strictement décroissante sur tous les intervalles $[\frac{k\pi}{\omega};\frac{(k+1)\pi}{\omega}]$ avec k impair. Les maxima locaux ont lieu pour $t=\frac{k\pi}{\omega}$ avec k impair et les minima locaux ont lieu pour $t=\frac{k\pi}{\omega}$ avec k pair .

3) Avec les valeurs trouvées au 1), on a $f(t)=1-(\cos(\omega t)+\frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t))e^{-\alpha t}$.

Par ce qui précède, la valeur du $n^{\text{ème}}$ maximum local à lieu pour $t=\frac{(2n-1)\pi}{\omega}$, et vaut donc

$f\left(\frac{(2n-1)\pi}{\omega}\right)=1-(\cos(\omega\left(\frac{(2n-1)\pi}{\omega}\right))+\frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega\left(\frac{(2n-1)\pi}{\omega}\right)))e^{-\alpha\left(\frac{(2n-1)\pi}{\omega}\right)}$

$=1-(\cos((2n-1)\pi)+\frac{\alpha}{\omega}\sin((2n-1)\pi))e^{-\alpha\left(\frac{(2n-1)\pi}{\omega}\right)}=1-(-1)e^{-\alpha\left(\frac{(2n-1)\pi}{\omega}\right)}=1+e^{-\frac{(2n-1)\alpha\pi}{\omega}}$.

De même, la valeur du $n^{\text{ème}}$ minimum local à lieu pour $t=\frac{2n\pi}{\omega}$, et vaut donc

$f\left(\frac{2n\pi}{\omega}\right)=1-(\cos(\omega\left(\frac{2n\pi}{\omega}\right))+\frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega\left(\frac{2n\pi}{\omega}\right)))e^{-\alpha\left(\frac{2n\pi}{\omega}\right)}$

$=1-e^{-\frac{2\alpha n\pi}{\omega}}$.

4)

a) Supposons qu'il existe $t_0\geqslant 0$ tel que $f(t_0)<0$. Soit n l'entier naturel tel que $t_0\in[\frac{(2n-1)\pi}{\omega};\frac{(2n+1)\pi}{\omega}]$ Alors, d'après le 2), la fonction f admet un minimum global sur cet intervalle atteint en $t=\frac{2n\pi}{\omega}$ égal à $1-e^{-\frac{2n\alpha\pi}{\omega}}$ d'où $1-e^{-\frac{2n\alpha\pi}{\omega}}\leqslant f(t_0)<0$ ce qui est absurde car $e^{-\frac{2n\alpha\pi}{\omega}}<1$. On a donc $\forall t\geq 0, f(t)\geq 0$.

b) Soit $t\geqslant 0$ et soit n l'entier naturel tel que $t\in[\frac{2n\pi}{\omega};\frac{(2n+2)\pi}{\omega}]$ Alors, d'après le 2), la

fonction f admet un maximum global sur cet intervalle atteint en $t=\frac{(2n+1)\pi}{\omega}$ égal à $1+e^{\frac{-(2n+1)\alpha\pi}{\omega}}$ d'où $f(t)\leqslant 1+e^{\frac{-(2n+1)\alpha\pi}{\omega}}$. Il reste à remarquer que puisque $\frac{(2n+1)\alpha\pi}{\omega}\geqslant\frac{\alpha\pi}{\omega}$ on a $f(t)\leqslant 1+e^{\frac{-(2n+1)\alpha\pi}{\omega}}\leqslant 1+e^{\frac{-\alpha\pi}{\omega}}$ et l'on retrouve dans le membre de droite la valeur du premier maximum local. On en déduit que le premier maximum local est un maximum global.

5) Il s'agit d'avoir $D=e^{\frac{-\alpha\pi}{\omega}}<0{,}01$ soit $\frac{\alpha}{\omega}>\frac{2}{\pi}\ln(10)$.

Exercice 23

1) On a $f'(x)=\frac{\cos(x)(2-\cos(x))-\sin^2(x)}{(2-\cos(x))^2}=\frac{2\cos(x)-1}{(2-\cos(x))^2}$ qui est donc du signe de $2\cos(x)-1$. On a donc :

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$f(x)$	0	↘	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘	0

2) On considère la fonction f_a définie par l'expression $f_a(x)=\frac{\sin(x)}{1+a-\cos(x)}$ sur l'intervalle $]-\pi;+\pi]$: elle est bien définie car pour tout réel x on a $1+a>1\geqslant\cos(x)$.

On a $f_a'(x)=\frac{\cos(x)(1+a-\cos(x))-\sin^2(x)}{(1+a-\cos(x))^2}=\frac{(1+a)\cos(x)-1}{(1+a-\cos(x))^2}$ qui est donc du signe de $(1+a)\cos(x)-1$. Considérant $-\varphi_a$ et φ_a les deux seules solutions de l'équation $(1+a)\cos(x)-1=0$ sur l'intervalle $]-\pi;+\pi]$, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\pi$		$-\varphi_a$		φ_a		π
$f_a(x)$	0	↘		↗		↘	0

Le maximum de f_a est atteint en φ_a. On a par définition de φ_a la relation $\cos(\varphi_a)=\frac{1}{1+a}$ donc $\sin^2(\varphi_a)=1-\frac{1}{(1+a)^2}=\frac{a(a+2)}{(1+a)^2}$. Puisque $\varphi_a\in[0;+\pi]$, on a $\sin(\varphi_a)=\frac{+\sqrt{a(a+2)}}{1+a}$ d'où

$$f(\varphi_a)=\frac{\frac{\sqrt{a(a+2)}}{1+a}}{1+a-\frac{1}{1+a}}=\frac{1}{\sqrt{a(a+2)}}.$$

On montre de même que $f(-\varphi_a)=\frac{-1}{\sqrt{a(a+2)}}$ ce qui conduit à l'encadrement demandé.

Exercice 24

1)

a) $\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}=\dfrac{z^3+3z^2h+3zh^2+h^3-z^3}{h}=3z^2+3hz+h^2$.

b) Si h tend vers 0 dans $\mathbb{C}$, $3z^2+3hz+h^2$ tend vers $3z^2$ car $|3hz+h^2|=|h||3z+h|\leqslant|h|(3|z|+1)$ si h tend vers 0 dans $\mathbb{C}$, donc $\lim\limits_{h\in\mathbb{C},\,h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}=3z^2$. La fonction f est dérivable en z de dérivée $3z^2$.

2)

a) En posant $h=re^{j\theta}$, alors $\dfrac{\overline{h}}{h}=e^{2j\theta}$ qui n'a pas de limite si h tend vers 0 dans $\mathbb{C}$, c'est à dire si r tend vers 0.

b) Pour tous nombres complexes z et h, on a $\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}=\dfrac{(z+h)(\overline{z}+\overline{h})-z\overline{z}}{h}=\overline{z}+z\dfrac{\overline{h}}{h}+\overline{h}$. On a clairement $\lim\limits_{h\in\mathbb{C},\,h\to 0}\overline{z}+\overline{h}=\overline{z}$ (considérer les parties réelles et imaginaires) mais par la question précédente $\lim\limits_{h\in\mathbb{C},\,h\to 0}z\dfrac{\overline{h}}{h}$ n'existe pas, donc au final, $\lim\limits_{h\in\mathbb{C},\,h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$ n'existe pas : la fonction f n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable en z.

3) a) Pour $k=1$, la relation $\forall z\in\mathbb{C},\ (1+z)^k=1+kz+z^2Q_k(z)$ est clairement vraie avec $Q_k=Q_1=0$.

Soit k un entier naturel non nul tel qu'il existe un polynôme $Q_k\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall z\in\mathbb{C},\ (1+z)^k=1+kz+z^2Q_k(z)$.

Alors, $\forall z\in\mathbb{C},\ (1+z)^{k+1}=\left(1+kz+z^2Q_k(z)\right)(1+z)=1+(k+1)z+z^2\left(k+(z+1)Q_k(z)\right)$ (développer et réduire). Cela prouve que la relation $\forall z\in\mathbb{C},\ (1+z)^{k+1}=1+(k+1)z+z^2Q_{k+1}(z)$ est vraie avec le polynôme $Q_{k+1}(X)=k+(X+1)Q_k(X)$.

Le principe de récurrence montre alors que la propriété visée est vrai pour tout entier naturel k non nul.

b) On a $\lim\limits_{h\in\mathbb{C},\,h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\in\mathbb{C},\,h\to 0}\dfrac{(1+h)^k-1}{h}=\lim\limits_{h\in\mathbb{C},\,h\to 0}k+hQ_k(h)=k$ par somme et produit de limites.

c) Soit $z\in\mathbb{C}$, $z\neq 0$. Alors

$$\lim_{h\in\mathbb{C},\,h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\in\mathbb{C},\,h\to 0}\frac{(z+h)^k-z^k}{h}=\lim_{h\in\mathbb{C},\,h\to 0}z^k\frac{\left(1+\frac{h}{z}\right)^k-1}{h}=\lim_{h\in\mathbb{C},\,h\to 0}z^{k-1}\frac{\left(1+\frac{h}{z}\right)^k-1}{\frac{h}{z}}.$$

Si $h\to 0$, alors $\dfrac{h}{z}\to 0$ donc par la question précédente, $\lim\limits_{h\in\mathbb{C},\,h\to 0}z^{k-1}\dfrac{\left(1+\frac{h}{z}\right)^k-1}{\frac{h}{z}}=kz^{k-1}$. On en déduit que la fonction $f:z\to z^k$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z et que $f'(z)=kz^{k-1}$.

Si $z = 0$, on a $\lim_{h\in\mathbb{C},\, h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\in\mathbb{C},\, h\to 0} h^{k-1}$ qui vaut 1 si $k=0$ et 0 sinon : la relation $f'(z)=k\,z^{k-1}$ reste donc valable si $z = 0$.

d) On a pour tout nombre complexe z la relation :

$$\lim_{h\in\mathbb{C},\, h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\in\mathbb{C},\, h\to 0} \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{(z+h)^k - z^k}{h} = \sum_{k=0}^{d} k\, a_k\, z^{z-1}$$ d'après la question précédente.

On en déduit que f est $\mathbb{C}$-dérivable est que sa dérivée est égale à son polynôme dérivé (ce qui est cohérent!).

Exercice 25

1) a) On applique la formule $(u^{\alpha})'(t)=\alpha\, u'(t)\, u^{\alpha-1}(t),\ \alpha\in\mathbb{Z}$ avec $\alpha=n$ et la fonction affine à valeurs complexes $t\to a+t\,e^{j\theta}$. On obtient alors que $f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est dérivable et $\forall t\in\mathbb{C},\ f'_n(t)=n\,e^{j\theta}\left(a+t\,e^{j\theta}\right)^{n-1}$.

b) En développant $\left(a+t\,e^{j\theta}\right)^n=\left(a+t\,e^{j\theta}\right).\left(a+t\,e^{j\theta}\right).....\left(a+t\,e^{j\theta}\right)$, on trouve une expression polynomiale de terme de plus haut degré $e^{jn\theta}t^n\neq 0$.

2)a) En écrivant $P(X)=a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1}+...+a_0$, alors la fonction $t\to P\left(a+t\,e^{j\theta}\right)$ a pour expression $t\to a_n f_n(t)+a_{n-1}f_{n-1}(t)+...+a_0$ qui est dérivable comme combinaison linéaire de fonctions dérivables. Sa dérivée est donc l'application $t\to a_n f'_n(t)+a_{n-1}f'_{n-1}(t)+...+a_1 f'_1(t)$. .

On déduit de la question 1)a) que

$$\frac{d}{dt}\left(P\left(a+t\,e^{j\theta}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n} k\,a_k\,e^{j\theta}\left(a+t\,e^{j\theta}\right)^{k-1}=e^{j\theta}\sum_{k=1}^{n} k\,a_k\left(a+t\,e^{j\theta}\right)^{k-1}=e^{j\theta}P'\left(a+t\,e^{j\theta}\right).$$

b) On a $\forall t\in\mathbb{R},\ P\left(a+t\,e^{j\theta}\right)=a_n f_n(t)+a_{n-1}f_{n-1}(t)+...+a_{0.}$

On a vu au 1)b) que chaque fonction f_k est polynomiale de degré k. Puisque $\deg(P)=n$, on a $a_n\neq 0$, alors la fonction $t\to P\left(a+t\,e^{j\theta}\right)$ est un polynôme de degré égal à $\deg(P)$.

c) Cette fonction étant polynomiale, elle est indéfiniment dérivable, et puisque

$$\frac{d}{dt}\left(P\left(a+t\,e^{j\theta}\right)\right)=e^{j\theta}P'\left(a+t\,e^{j\theta}\right),$$

on en déduit que

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \frac{d^k}{dt^k}\left(P\left(a+t\,e^{j\theta}\right)\right)=e^{kj\theta}P^{(k)}\left(a+t\,e^{j\theta}\right).$$

Cela s'écrit aussi : $Q^{(k)}(t)=e^{kj\theta}P^{(k)}\left(a+t\,e^{j\theta}\right)$.

3) a) Si $d=0$, la fonction $t\to Q(t)$ est constante sur $\mathbb{R}$ donc la relation $\forall t\in\mathbb{R},\ Q(t)=Q(0)$ est toujours vraie.

Soit d un entier naturel tel que la propriété soit vraie pour tout polynôme de degré d. Soit $Q\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré d+1 .

Alors, en appliquant la propriété à Q', on a

$$\forall t\in\mathbb{R},\ Q'(t)=\sum_{k=0}^{d} Q^{(k+1)}(0)\frac{t^k}{k!}=Q'(0)+Q''(0)t+\frac{Q'''(0)}{2}t^2+\ldots+\frac{Q^{(d+1)}(0)}{d!}t^d \qquad (1)$$

Considérons le polynôme $D(X)=Q(X)-\sum_{k=1}^{d+1} Q^{(k)}(0)\frac{X^k}{k!}$. Alors la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $t\to D(t)$ est polynomiale de dérivée

$$D'(t)=Q'(t)-\sum_{k=1}^{d+1} kQ^{(k)}(0)\frac{t^{k-1}}{k!}=Q'(t)-\sum_{k=1}^{d+1} Q^{(k)}(0)\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{car} \quad \frac{k}{k!}=\frac{1}{(k-1)!},$$

$$D'(t)=Q'(t)-\sum_{k=0}^{d} Q^{(k+1)}(0)\frac{t^k}{k!}.$$

Par la relation (1) , on a $\forall t\in\mathbb{R},\ D'(t)=0$ donc $\forall t\in\mathbb{R},\ D(t)=D(0)=Q(0)$.

On a donc $\forall t\in\mathbb{R},\ D(t)=Q(t)-\sum_{k=1}^{d+1} Q^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}=Q(0)$ donc

$\forall t\in\mathbb{R},\ Q(t)=Q(0)+\sum_{k=1}^{d+1} Q^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}=\sum_{k=0}^{d+1} Q^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}$ ce qui prouve la propriété au rand $d+1$.

b) On applique le résultat de la question précédente au polynôme Q de la question 2)b), qui est de même degré que P. On a par le 2)c) : $Q^{(k)}(0)=e^{kj\theta}P^{(k)}(a)$ donc la question précédente donne :

si $a\in\mathbb{C}$, et $\theta\in\mathbb{C}$ alors $\forall t\in\mathbb{R},\ P\left(a+te^{j\theta}\right)=\sum_{k=0}^{d} e^{kj\theta}P^{(k)}(a)\frac{t^k}{k!}=\sum_{k=0}^{d} P^{(k)}(a)e^{kj\theta}\frac{t^k}{k!}$.

Soit $z\in\mathbb{C}$. On considère la forme exponentielle de $z-a$ c'est à dire $z-a=te^{j\theta}$. Alors la relation ci-dessus donne :

$$P(z)=\sum_{k=0}^{d} P^{(k)}(a)\frac{\left(te^{j\theta}\right)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{d} P^{(k)}(a)\frac{(z-a)^k}{k!}.$$

c) On considère le polynôme $P(X)=X^p$. On a pour tout entier naturel k inférieur ou égal à p :

$$P^{(k)}(X)=p(p-1)....(p-k+1)X^{p-k}=\frac{p!}{(p-k)!}X^{p-k}.$$

En appliquant le résultat de la question précédente à $z=a+b$ on obtient :

$$P(z)=\sum_{k=0}^{p} P^{(k)}(a)\frac{(z-a)^k}{k!}$$

c'est à dire :

$$(a+b)^p=\sum_{k=0}^{p}\frac{p!}{(p-k)!}a^{p-k}\frac{b^k}{k!}=\sum_{k=0}^{p}\frac{p!}{k!(p-k)!}a^{p-k}b^k .$$

Exercice 26

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par l'expression $f(x)=a^x-x$. Cette fonction est continue et même dérivable : l'expression $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=e^{x\ln(a)}-x$ montre que f s'écrit comme différence et composée de fonctions dérivables.

On a 3 cas :

(i) Si $a \in]0;1[$, on a $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$: le TVI suffit à assurer l'existence d'(au moins) une solution.

(ii) Si $a = 1$, le réel $x = 1$ est clairement une solution.

(iii) Si $a \in]1;+\infty[$, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \ln(a) a^x - 1$. On a $f'(x) = 0$ si et seulement si $a^x = \frac{1}{\ln(a)}$ c'est à dire $x = \frac{1}{\ln(a)} \ln\left(\frac{1}{\ln(a)}\right)$ (noter que la condition $a \in]1;+\infty[$ implique $\frac{1}{\ln(a)} > 0$ ce qui donne un sens à cette expression).

Puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \ln^2(a) a^x > 0$, la fonction f' est strictement croissante donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{1}{\ln(a)} \ln\left(\frac{1}{\ln(a)}\right)[$ et strictement croissante sur $]\frac{1}{\ln(a)} \ln\left(\frac{1}{\ln(a)}\right); 0[$. Elle admet un minimum global en $x = \frac{1}{\ln(a)} \ln\left(\frac{1}{\ln(a)}\right)$

Pour cette dernière valeur de x, $0 = f'(x) = \ln(a) a^x - 1$ donc $a^x = \frac{1}{\ln(a)}$ et

$$f(x) = a^x - x = \frac{1}{\ln(a)}\left(1 - \ln\left(\frac{1}{\ln(a)}\right)\right) .$$

Puisque $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, la fonction f s'annule si et seulement si son minimum est négatif, c'est à dire $1 - \ln\left(\frac{1}{\ln(a)}\right) < 0$ car $\frac{1}{\ln(a)} > 0$.

Cela équivaut à $\frac{1}{\ln(a)} > e$ c'est à dire $a \leqslant e^{\frac{1}{e}}$.

Conclusion : l'équation d 'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $a^x = x$ admet au moins une solution si et seulement si $a \in]0; e^{\frac{1}{e}}[$.

C - FONCTION TANGENTE ET ARCTANGENTE

I) Fonction tangente

Il est souvent plus facile de faire des calculs d'angle ou d'argument d'un nombre complexe à l'aide de la fonction tangente qui présente quelques propriétés calculatoires bien pratiques.

Définition 1 : La fonction tangente, notée $\tan$, est la fonction définie par l'expression $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sur l'ensemble des réels x qui ne sont pas de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

La première chose à noter est la présence d'une infinité de valeurs interdites qui sont toutes égales à $\frac{\pi}{2}$ à π près.

Propriété 1: La fonction tan est $\pi-$périodique et impaire (i.e $\tan(-x)=-\tan(x)$.)
Sur l'intervalle de référence $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, elle est strictement croissante, et

$$\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}^+}\tan(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)=+\infty\ .$$

Preuve :

(i) Pour tout réel x qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$, on a :

$\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\tan(x)$. La fonction tan est donc $\pi-$périodique .

(ii) Pour tout réel x qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$, on a :

$\tan(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin(x)}{+\cos(x)}=-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=-\tan(x)$. La fonction tan est donc impaire.

(iii) Prenons deux réels $a<b$ dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. On calcule $\tan(b)-\tan(a)$:

$\tan(b)-\tan(a)=\frac{\sin(b)}{\cos(b)}-\frac{\sin(a)}{\cos(a)}=\frac{\sin(b)\cos(a)-\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)}$. On utilise alors la formule $\sin(b-a)=\sin(b)\cos(a)-\sin(a)\cos(b)$ pour obtenir : $\tan(b)-\tan(a)=\frac{\sin(b-a)}{\cos(a)\cos(b)}$. Puisque a et b sont dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ $\cos(a)>0$ et $\cos(b)>0$. Si l'on tient compte en plus de la relation $a<b$ il vient que $0<b-a<\pi$ donc $\sin(b-a)>0$. On en déduit que $\tan(b)-\tan(a)=\frac{\sin(b-a)}{\cos(a)\cos(b)}>0$ d'où $\tan(a)<\tan(b)$: la fonction tangente est strictement croissante.

(iv) $\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}^+}\tan(x)$ s'obtient par un quotient de limites de la forme $\frac{-1}{0^+}$ ce qui donne $-\infty$.

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)$ s'obtient par un quotient de limites de la forme $\frac{1}{0^+}$ ce qui donne $+\infty$.

Remarque : la fonction tan est continue sur son domaine de définition comme quotient de deux fonctions continues. Une conséquence de la propriété 1 et du Théorème des valeurs intermédiaires est que la fonction tangente est une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$, ce qui sera utilisé dans le II) de ce cours.

Propriété 2: La fonction tan est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, et $(\tan(x))'=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$

<u>Preuve :</u> La fonction tan est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de deux fonctions dérivables. On utilise la formule de dérivation d'un quotient $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ avec $u=\sin$, $u'=\cos$, $v=\cos$ et $v'=-\sin$ pour obtenir :

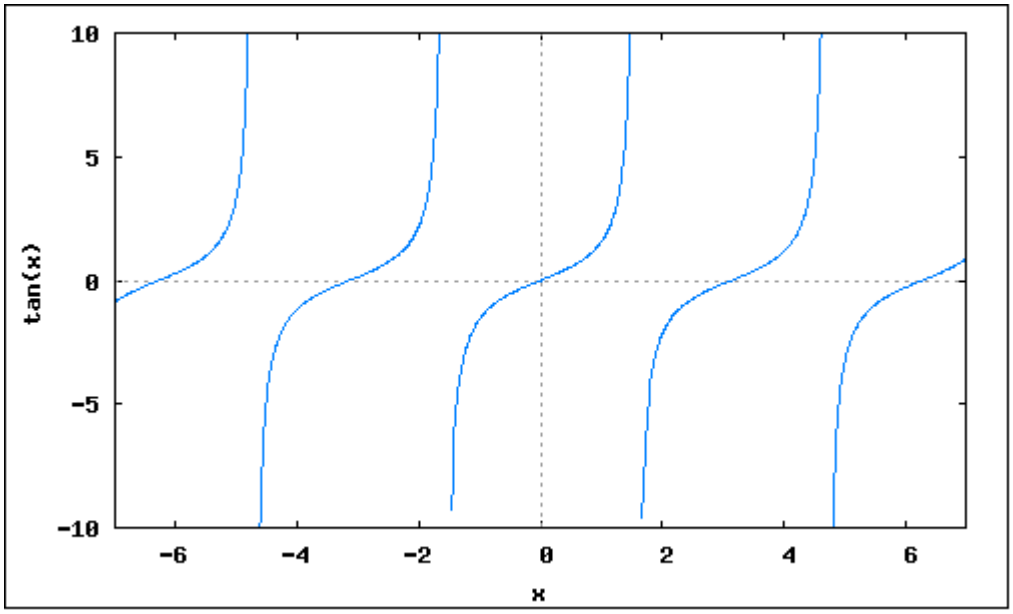
$(\tan(x))'=\frac{\cos(x).\cos(x)-(-\sin(x)).\sin(x)}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}$. Une autre façon de terminer le calcul est d'écrire : $(\tan(x))'=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$ ce qui donne les deux formules possibles.

En utilisant les valeurs remarquables du sinus et du cosinus on obtient :

Propriété 3 : **valeurs remarquables**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
tan(x)	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Graphe de la fonction tangente :



II) Fonction arctangente

S'il est plus facile de calculer des tangentes d'angle plutôt que directement leur mesure, il faut néanmoins être capable de retrouver la mesure d'un angle à partir de la valeur de sa tangente : c'est le rôle de la fonction arctangente.

Définition-propriété 2: Soit $a>0$. Alors, l'équation $\tan(x)=a$ possède une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$, mais elle possède une et une seule solution sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. Cette unique solution est notée $\arctan(a)$. On appelle fonction <u>arctangente</u> la fonction $x \rightarrow \arctan(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ .Autrement dit, la fonction tangente est une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ et sa fonction réciproque est la fonction arctan

Concernant les propriétés algébriques de la fonction arctangente, nous avons la :

Propriété 4 : $\forall x\in\mathbb{R}, \tan(\arctan(x))=x$
$\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \arctan(\tan(x))=x$

Plus généralement, pour tout réel x qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2}+l\pi$, avec $l\in\mathbb{Z}$,
$\arctan(\tan(x))=x-k\pi$ où k est l'unique entier relatif tel que $-\frac{\pi}{2}<x-k\pi<\frac{\pi}{2}$.

Pour la preuve, on aura besoin du :

Lemme : *Soit un réel x qui n'est pas de la forme* $\frac{\pi}{2}+l\pi$, avec $l\in\mathbb{Z}$. *Alors, il existe un unique entier relatif k tel que* $-\frac{\pi}{2}<x-k\pi<\frac{\pi}{2}$.

<u>(*)Preuve du Lemme :</u>
Par division avec reste de $x+\frac{\pi}{2}$ *par* π *, il existe un unique entier relatif k (le quotient) et un nombre réel* $r\in[0;\pi[$ *(le reste) tel que* $x+\frac{\pi}{2}=k\pi+r$ *. Nécessairement,* $r\neq 0$ *car sinon, on aurait* $x=k\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+(k-1)\pi$ *ce qui est impossible, car x n'est pas de la forme* $\frac{\pi}{2}+l\pi$, avec $l\in\mathbb{Z}$.
On a donc, pour l' unique entier k ci-dessus, $0<r<1$ *donc* $0<x+\frac{\pi}{2}-k\pi<\pi$ *, c'est à dire* $-\frac{\pi}{2}<x+k\pi<\frac{\pi}{2}$.

<u>Preuve de la propriété 4</u> : les deux premières égalités découlent des propriétés générales des fonctions réciproques.

Soit un réel x qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2}+l\pi$, avec $l\in\mathbb{Z}$. Alors on peut trouver un unique entier relatif k tel que $-\frac{\pi}{2}<x-k\pi<\frac{\pi}{2}$ (lemme).
On a alors $\tan(x)=\tan(x-k\pi)$ (par $\pi-$périodicité de la fonction tan) donc
$\arctan(\tan(x))=\arctan(\tan(x-k\pi))$. En utilisant la propriété
$\forall y\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \arctan(\tan(y))=y$
avec $y=x-k\pi$ on obtient que $\arctan(\tan(x))=\arctan(\tan(x-k\pi))=x-k\pi$.

Exemple : Calculons $\arctan(\tan(2018))$. 2018 n'est pas de la forme $k\pi+\frac{\pi}{2}$, avec $k\in\mathbb{Z}$ sinon on aurait $\pi=\frac{4036}{2k+1}$ ce qui est absurde car π est irrationnel. On a $\frac{2018}{\pi}\sim 642{,}349$ donc $642<\frac{2018}{\pi}\sim 642+\frac{1}{2}$ d'où $0<2018-642\pi<\frac{\pi}{2}$. Il vient donc que $\arctan(\tan(2018))=2018-642\pi$.

Concernant les variations et les propriétés graphiques de la fonction arctangente, nous avons la :

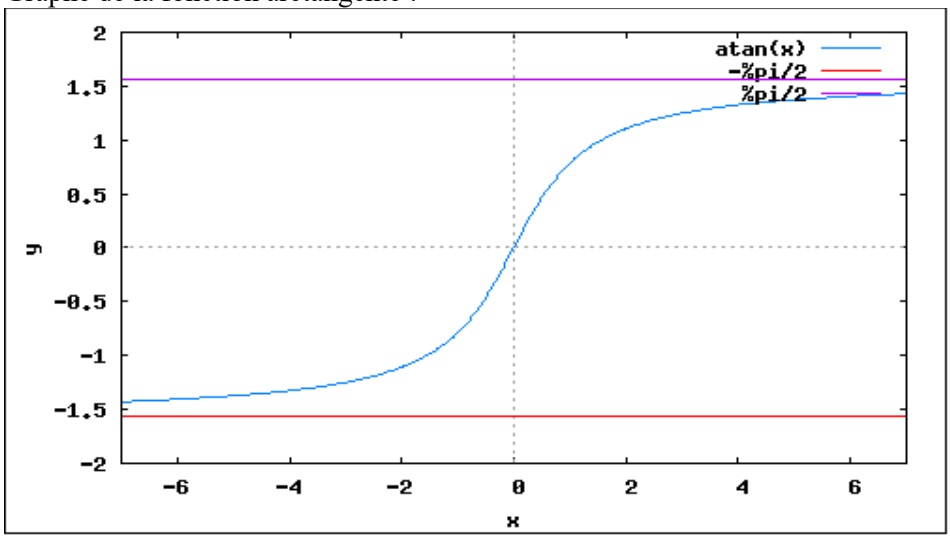
Propriété 5 : La fonction arctan est strictement croissante, impaire, et $\lim_{x\to-\infty}\arctan(x)=-\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to+\infty}\arctan(x)=+\frac{\pi}{2}$. De plus , elle est dérivable de dérivée $(\arctan(x))'=\frac{1}{1+x^2}$.

<u>Preuve :</u> La fonction arctan est strictement croissante car c'est la fonction réciproque d'une fonction strictement croissante.(propriété 14 du chapitre 6) . D'autre part, par la propriété 4 :
$\forall x\in\mathbb{R}, \arctan(-x)=\arctan(-\tan(\arctan(x)))$ d'où, en utilisant le fait que tan est impaire :
$\forall x\in\mathbb{R}, \arctan(-x)=\arctan(\tan(-\arctan(x)))=-\arctan(x)$ donc la fonction arctan est impaire.

Les limites $\lim_{x\to-\infty}\arctan(x)=-\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to+\infty}\arctan(x)=+\frac{\pi}{2}$ découlent directement du fait que $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\tan(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\frac{\pi}{2}}\tan(x)=+\infty$.

La fonction $f:x\to\tan(x)$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ et elle est dérivable de dérivée $x\to 1+\tan^2(x)$. On a donc $f'(x)\geq 1>0$. Le Théorème 2 du chapitre 7 assure donc que la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(f^{-1}(x))'=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}=\frac{1}{1+x^2}$

Graphe de la fonction arctangente :



Remarque importante :

La formule de dérivation $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ sera d'une grande utilité pour les calculs d'intégrales : elle nous permettra en effet d'intégrer, par exemple, les éléments simples de seconde espèce d'ordre 1.Cela sera étudié plus tard dans le chapitre correspondant.

III) Applications aux calculs d'angle.

La fonction arctangente permet d'exprimer efficacement l'argument d'un nombre complexe non nul :

Propriété 6: Soit $z = a + bj \in \mathbb{C}$. Alors si $a > 0$, $\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2k\pi$, et si $a < 0$, $\arg(z) = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2k\pi$.

Remarque : dans le cas où $a = 0$, z est un imaginaire pur, donc son argument se détermine facilement.....

<u>Preuve</u> : Soit $z = a + bj \in \mathbb{C}$, avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors $\cos(\arg(z)) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\arg(z)) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ donc $\tan(\arg(z)) = \frac{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{b}{a}$. Puisque $a > 0$, la mesure principale de $\arg(z)$ est dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ donc par la propriété 4, nous avons :

$\arg(z) \equiv \arctan(\tan(\arg(z))) \equiv \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \ [2\pi]$.

Si $a < 0$ on se ramène au cas précédent avec $-z$ au lieu de *z*, donc

$\arg(z) \equiv \pi + \arg(-z) \equiv \pi + \arctan\left(\frac{-b}{-a}\right) \equiv \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \ [2\pi]$.

Exemple : $z = 2 - 3j$ n'a pas pour argument principal un angle remarquable mais on peut l'exprimer de la façon suivante : $\arg(z) = \arctan\left(\frac{-3}{2}\right) = -\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$. Une calculatrice permet alors d'avoir une bonne valeur approchée de $\arg(z)$.

Une conséquence directe de cette propriété est la suivante, très utile pour les calculs sur la fonction arctangente :

Propriété 7 :

$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \arctan(a) = \text{m.p}(arg(1+ja))$,
où, on le rappelle, la mesure principale d'un angle, $\text{m.p}(\theta)$, désigne son unique mesure dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Exemple : supposons que l'on veuille calculer $\sin(\arctan(3))$. On a :
$\sin(\arctan(3)) = \sin(\arg(1+3j)) = \frac{3}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0{,}3\sqrt{10}$.

IV) Exercices

Exercice 1

Exprimer à l'aide du paramètre réel a les arguments des nombres complexes suivants à l'aide de la fonction arctan (on distinguera les cas particuliers éventuels).

1) $z=2a+(1+a)j$ 2) $z=\dfrac{2+aj}{3a+j}$

Exercice 2

Montrer que $\arctan(2)+\arctan(3)=\dfrac{3\pi}{4}$

Exercice 3

Montrer que $\forall a>0,\quad \arctan(a)+\arctan\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 4

Calculer

a) $\tan(\arctan(5))$ b) $\arctan(\tan(5))$ c) $\sin(\arctan(3))$ d) $\cos(\arctan(3))$

Exercice 5

Montrer que si $a\in[0;1[$, on a $2\arctan(a)=\arctan\left(\dfrac{2a}{1-a^2}\right)$

Exercice 6

Soient α et β deux réels avec $\beta\neq 0$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction F par $F(x)=\dfrac{1}{\beta}\arctan\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)$.

1) Calculer l'expression de $F'(x)$.
2) En déduire une primitive des fonctions suivantes (c'est à dire une fonction dérivable F telle que $F'=f$):
   a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+5}$
   b) $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+6x+5}$
3) Calculer l'expression d'une primitives pour chacune des deux fonctions suivantes :
   a) $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+7}{x^2-2x+5}$
   b) $f(x)=\dfrac{4x}{2x^2+6x+5}$

Exercice 7

1) Rappeler la formule donnant $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ où z_1 et z_2 sont deux nombres complexes non nuls.

2) En déduire que $\arctan(9)-\arctan\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 8

On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f en posant $f(t)=\arctan\left(\frac{1}{t^2}\right)$ si $t\neq 0$, et $f(0)=\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que f est continue en 0.

2) a) Montrer que $\forall t\neq 0,\ f'(t)=\frac{-2t}{t^4+1}$.

b) En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=0$. Justifier soigneusement par un théorème du cours.

Exercice 9 *(les questions de cet exercice sont indépendantes)*

1) Calculer $\tan(\arctan(10))$ et $\arctan(\tan(10))$.
2) Montrer que $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)=\arctan\left(\frac{3}{4}\right)$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par l'expression $f(x)=\arctan(x)+\arctan(1/x)$.

1) Calculez sans justifier les valeurs exactes des limites de f en $-\infty$, $+\infty$, 0^- et 0^+ .
2) a)Montrez que $\forall x\neq 0,\quad f'(x)=0$.
   b) En déduire une expression simple de $f(x)$ pour $x\in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

Exercice 11

1) Montrer, à l'aide d'un calcul de dérivée, que $\arctan(x)\sim x$ quand $x\to 0$.

2) Soit $t\in\mathbb{R}$ On considère, pour tout entier $n\geq 1$, le nombre complexe $z_n=\left(1+j\frac{t}{n}\right)^n$.

a) Calculer une expression de $\operatorname{Arg}(z_n)$ à l'aide de la fonction arctan.

b) A l'aide de la question 1, en déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{Arg}(z_n)$.

3) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(|z_n|)$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n|$.

4) Déduire des questions précédentes la limite de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}$. On demande un raisonnement précis .

Exercice 12

On considère la fonction $f(t)=\arctan(t)$.

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul *n,* il existe un polynôme $P_n(t)$ tel que $f^{(n)}(t)=\frac{P_n(t)}{(1+t^2)^n}$ et vérifier que $P_1(t)=1$ et que pour tout entier naturel non nul *n,*on a $P_{n+1}(t)=(1+t^2)P_n'(t)-2nt\,P_n(t)$.
2) Calculer une expression de $f^{(4)}(t)$.

Exercice 13

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
2) Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. On pose $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Montrer à partir du 1) et des formules :

   $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$ et $\sin(\theta) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

   que :

   $\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$.
3) Application : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3\cos(\theta) + 4\sin(\theta) = 1$ et écrire la(les) solution(s) sous la forme $\theta = 2\arctan(- - -)$.

Exercice 14

Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $A(t)$ comme étant l'unique mesure dans $\left]\frac{-3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ de l'argument du nombre complexe $z(t) = \frac{1+2jt}{t+j}$ et $r(t)$ son module.

1) Exprimer la fonction $t \to A(t)$ à l'aide de la fonction arctan. On distinguera les cas $t < 0$, $t = 0$ et $t > 0$.
2) a) Montrer que la fonction $t \to A(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   b) Établir son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
3) Faire le tableau de variations complet de la fonction $t \to r(t)$.
4) Prouver qu'en fait, l'ensemble des points d'affixe $z(t)$ dans le plan complexe lorsque *t* décrit $\mathbb{R}$ est un cercle privé d'un point.

Exercice 15

Le but de cet exercice est de résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation $2\cos(\theta) + 3\sin(\theta) = 1$ à l'aide de la fonction arctangente.

1) Montrer que $2\cos(\theta) + 3\sin(\theta) = 1$ si et seulement si $e^{j\theta}$ est solution de l'équation du second degré à coefficients complexes :

   $\left(1 - \frac{3}{2}j\right)z^2 - z + \left(1 + \frac{3}{2}j\right) = 0.$
2) En déduire les deux valeurs complexes possibles pour $e^{j\theta}$, puis les deux valeurs possibles pour $\theta \in]-\pi; \pi]$ à l'aide de la fonction arctangente.
3) Autre méthode :
   a) En appelant $\underline{A}$ l'amplitude complexe du signal sinusoïdal $t \to 2\cos(t) + 3\sin(t)$ montrer qu'il existe un nombre complexe γ que l'on déterminera tel que l'équation $2\cos(\theta) + 3\sin(\theta) = 1$ soit équivalente à $\underline{A}e^{j\theta} = \gamma$ ou $\underline{A}e^{j\theta} = \overline{\gamma}$.
   b) Retrouver alors le résultat de la question 2).

Exercice 16

1) Dans cette question, on veut exprimer les solutions de l'équation $\sin(\theta) = \frac{2}{3}$, $\theta \in]-\pi; \pi]$ à l'aide de la fonction arctangente.

   a) Calculer les deux valeurs possibles de $\cos(\theta)$ si $\sin(\theta) = \frac{2}{3}$.

b) En déduire les deux solutions de l'équation $\sin(\theta)=\frac{2}{3}$, $\theta\in]-\pi;\pi]$ sous la forme $\theta=\arctan(...)$.

2) S'inspirer de la question précédente pour exprimer les solutions de l'équation $\cos(\theta)=\frac{-1}{3}$, $\theta\in]-\pi;\pi]$ à l'aide de la fonction arctangente.
3) Soit $x\in[-1;1]$. Résoudre l'équation $\cos(\theta)=x$, $\theta\in]-\pi;\pi]$ à l'aide de la fonction arctangente (discuter selon les valeurs de x).
4) Soit $x\in[-1;1]$. Résoudre l'équation $\sin(\theta)=x$, $\theta\in]-\pi;\pi]$ à l'aide de la fonction arctangente (discuter selon les valeurs de x).

Exercice 17

1) Résoudre l'équation $\cos(\theta)=\tan(\theta)$, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ en exprimant la ou les solution(s) sous la forme $\theta=\arctan(...)$.
2) Même question pour l'équation $\cos(\theta)=\tan(\theta)$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$.

V) Corrigés

Exercice 1

1)

Si $a>0$, on a $\operatorname{Arg}(z)=\arctan\left(\frac{1+a}{2a}\right)$.

Si $a=0$, alors $z=j$ et on a $\operatorname{Arg}(z)=\frac{\pi}{2}$

Si $a<0$, on a $\operatorname{Arg}(z)=\pi+\arctan\left(\frac{1+a}{2a}\right)$.

2)

Si $a>0$, on a $\operatorname{Arg}(z)=\arctan\left(\frac{a}{2}\right)-\arctan\left(\frac{1}{3a}\right)$

Si $a=0$, alors $z=-2j$ et on a $\operatorname{Arg}(z)=\frac{-\pi}{2}$

Si $a<0$, on a $\operatorname{Arg}(z)=\arctan\left(\frac{a}{2}\right)-\arctan\left(\frac{1}{3a}\right)+\pi$

Exercice 2

On a $\forall x\geqslant 0,\ 0\leqslant\arctan(x)<\frac{\pi}{2}$ donc $0\leqslant\arctan(2)+\arctan(3)<\pi$.

Ensuite, $\arctan(2)+\arctan(3)\equiv\operatorname{Arg}(1+2j)+\operatorname{Arg}(1+3j)\ [2\pi]$

$\equiv\operatorname{Arg}((1+2j)(1+3j))\ [2\pi]$

$\equiv\operatorname{Arg}(-5+5j)\ [2\pi]$

$\equiv\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

Puisque $0\leqslant\arctan(2)+\arctan(3)<\pi$ l'équivalence modulo 2π est une égalité car $\frac{3\pi}{4}$ est le seul réel de l'intervalle $]0;\pi[$ égal à $\frac{3\pi}{4}$ à 2π près.

Exercice 3

On a $\forall x\geqslant 0,\ 0\leqslant\arctan(x)<\frac{\pi}{2}$ donc $0\leqslant\arctan(a)+\arctan\left(\frac{1}{a}\right)<\pi$.

Ensuite, $\arctan(a)+\arctan\left(\frac{1}{a}\right)\equiv\operatorname{Arg}(1+aj)+\operatorname{Arg}(a+j)\ [2\pi]$

$\equiv\operatorname{Arg}((1+aj)(a+j))\ [2\pi]$

$\equiv\operatorname{Arg}((1+a^2)j)\ [2\pi]$

$\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Puisque $0\leqslant\arctan(a)+\arctan\left(\frac{1}{a}\right)<\pi$, l'équivalence modulo 2π est une égalité car $\frac{\pi}{2}$ est le seul réel de l'intervalle $]0;\pi[$ égal à à $\frac{\pi}{2}$ à 2π près.

Exercice 4

a) $\tan(\arctan(5))=5$ b) $\arctan(\tan(5))=5-2\pi$

c) $\sin(\arctan(3))=\sin(\mathrm{Arg}(3+j))=\frac{1}{|3+j|}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

d) $\cos(\arctan(3))=\cos(\mathrm{Arg}(3+j))=\frac{3}{|3+j|}=3\frac{\sqrt{10}}{10}$

Exercice 5

On a $2\arctan(a)\equiv\mathrm{Arg}\left((1+ja)^2\right)\equiv\mathrm{Arg}\left((1-a^2)+2aj\right)\equiv\arctan\left(\frac{2a}{1-a^2}\right)\quad[2\pi]$

car $1-a^2>0$ donc $2\arctan(a)\equiv\arctan\left(\frac{2a}{1-a^2}\right)\ [2\pi]$

Les deux nombres $2\arctan(a)$ et $\arctan\left(\frac{2a}{1-a^2}\right)$ appartiennent à $[0\,;\pi]$ donc l'égalité à 2π près est une égalité.

Exercice 6

1) L'application de la formule de dérivation de $\arctan(u(x))$ aboutit à $F'(x)=\frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$.

2)

a) On a $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2+2^2}$ donc $F(x)=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)$

b) $f(x)=\frac{1}{2x^2+6x+5}=\frac{1}{2}.\frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2^2}}$ donc $F(x)=\arctan(2x+3)$.

3)

a) On a $f(x)=2+\frac{x-3}{x^2-2x+5}=2+\frac{x-1}{x^2-2x+5}-\frac{2}{x^2-2x+5}$

d'où $F(x)=2x+\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)-\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)$ d'après le 2)a).

b) On a $f(x)=\frac{4x}{2x^2+6x+5}=\frac{4x+6}{2x^2+6x+5}-\frac{6}{2x^2+6x+5}$

donc, grâce au 2) b) , $F(x)=\ln(2x^2+6x+5)-6\arctan(2x+3)$.

Exercice 7

1) On a $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\equiv\arg(z_1)-\arg(z_2)\quad[2\pi]$.

2) On a

$$\arctan(9)-\arctan\left(\frac{4}{5}\right)\equiv\mathrm{Arg}(1+9j)-\mathrm{Arg}\left(1+\frac{4}{5}j\right)\equiv\mathrm{Arg}\left(\frac{1+9j}{1+\frac{4}{5}j}\right)\equiv\mathrm{Arg}(5+5j)\equiv\frac{\pi}{4}\quad[2\pi]$$

Puisque $-\pi \leqslant \arctan(9) - \arctan\left(\frac{4}{5}\right) < \pi$ et $-\pi \leqslant \frac{\pi}{4} < \pi$ l'équivalence modulo 2π est une égalité.

Exercice 8

1)
$\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = \lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = +\frac{\pi}{2} = f(0)$ et $\lim\limits_{t \to 0^-} f(t) = \lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = +\frac{\pi}{2} = f(0)$ donc f est continue en 0.

2) a) Par la formule de dérivation de $\arctan(u)$, on a $\forall t \neq 0, f'(t) = \dfrac{-\frac{2}{t^3}}{1+\left(\frac{1}{t^2}\right)^2} = \dfrac{-2t}{t^4+1}$.

b) On remarque que $\lim\limits_{t \to 0} f'(t) = 0$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
On déduit du Théorème 3 du chapitre 7 que f est dérivable en 0, et $f'(0) = \lim\limits_{t \to 0} f'(t) = 0$.

Exercice 9 *(les questions de cet exercice sont indépendantes)*

1) $\tan(\arctan(10)) = 10$ mais $\arctan(\tan(10)) = 10 - 3\pi$.
2) Montrer que $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$

On a $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) \equiv 2\,\mathrm{Arg}\left(1+\frac{1}{3}j\right) \equiv \mathrm{Arg}\left(\left(1+\frac{1}{3}j\right)^2\right) \equiv \mathrm{Arg}\left(\frac{8}{9}+\frac{2}{3}j\right) \equiv \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \; [2\pi]$.

Les deux nombres $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\arctan\left(\frac{3}{4}\right)$ appartiennent à $[0\,;\pi]$ donc l'égalité à 2π près est une égalité.

Exercice 10
1) $f(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$, $f(0^-) = -\frac{\pi}{2}$, $f(0^+) = \frac{\pi}{2}$ et $f(+\infty) = \frac{\pi}{2}$.
2) a)Par la formule de dérivation de $\arctan(u)$, on a

$$\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} = 0.$$

b) On en déduit que :
f est constante sur $]-\infty\,;0[$. La valeur de $f(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ montre que $\forall x < 0,\ f(x) = -\frac{\pi}{2}$.
f est constante sur $]0\,;+\infty[$. La valeur de $f(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ montre que $\forall x > 0,\ f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 11

1) On a, par définition du nombre dérivé :
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan(x)}{x} = \left[\dfrac{1}{1+x^2}\right]_{x=0} = 1$ ce qui signifie que $\arctan(x) \sim x$ quand $x \to 0$.

2)
a) On a $\mathrm{Arg}(z_n) \equiv n\,\mathrm{Arg}\left(1+j\frac{t}{n}\right) \equiv n\arctan\left(\frac{t}{n}\right) \quad [2\pi]$

b) On rappelle que t est fixé. On a , si n tend vers l'infini, $n\arctan\left(\frac{t}{n}\right)\sim n\frac{t}{n}=t$ donc $\lim_{n\to+\infty}\operatorname{Arg}(z_n)=t$.

3) On a $\ln(|z_n|)=n\ln\left(\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}\right)=\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{t^2}{n^2}\right)$. Si $n\to+\infty$, $\ln\left(1+\frac{t^2}{n^2}\right)\sim\frac{t^2}{n^2}$ donc $\ln(|z_n|)\sim\frac{t^2}{2n}$, ce qui implique que $\lim_{n\to+\infty}\ln(|z_n|)=0$. On a donc $\lim_{n\to+\infty}|z_n|=1$.

4) On a $\forall n\in\mathbb{N},\ z_n=|z_n|e^{j\operatorname{Arg}(z_n)}=|z_n|(\cos(\operatorname{Arg}(z_n))+j\sin(\operatorname{Arg}(z_n)))$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty}|z_n|=1$ et $\lim_{n\to+\infty}\operatorname{Arg}(z_n)=t$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}(z_n)_{n\in\mathbb{N}}=e^{jt}$.

Exercice 12

1) On montre cette propriété par récurrence sur *n.*

On a $f'(t)=\frac{1}{1+t^2}$ donc la propriété est vraie pour n=1 avec $P_1(t)=1$.

Supposons la propriété vraie au rang *n.*

On a alors $f^{(n)}(t)=\frac{P_n(t)}{(1+t^2)^n}$ donc $f^{(n)}(t)$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables et

$$f^{(n+1)}(t)=\left(\frac{P_n(t)}{(1+t^2)^n}\right)'=\frac{P'_n(t)(1+t^2)^n-P_n(t).2nt(1+t^2)^{n-1}}{(1+t^2)^{2n}}$$

$$=\frac{(1+t^2)^{n-1}}{(1+t^2)^{2n}}\left((1+t^2)P_n'(t)-2ntP_n(t)\right)=\frac{(1+t^2)P_n'(t)-2ntP_n(t)}{(1+t^2)^{n+1}}.$$

On remarque que puisque $P_n(t)$ est un polynôme, il en est de même de $(1+t^2)P_n'(t)-2ntP_n(t)$, donc $f^{(n+1)}(t)$ est bien de la forme $f^{(n+1)}(t)=\frac{P_{n+1}(t)}{(1+t^2)^{n+1}}$ avec

$P_{n+1}(t)=(1+t^2)P_n'(t)-2ntP_n(t)$.

2) On a $P_2(t)=(1+t^2)P_1'(t)-2tP_1(t)=-2t$.

$P_3(t)=(1+t^2)P'_2(t)-4tP_2(t)=6t^2-2$

$P_4(t)=(1+t^2)P'_3(t)-6tP_3(t)=24t(1-t^2)$.

On en déduit alors que $f^{(4)}(t)=\frac{P_4(t)}{(1+t^2)^4}=\frac{24t(1-t^2)}{(1+t^2)^4}$.

Exercice 13

1) On a $\arctan(x)\equiv\operatorname{Arg}(1+jx)\ [2\pi]$ donc

$$\cos(\arctan(x))=\cos(\operatorname{Arg}(1+jx))=\frac{1}{|1+jx|}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

D'autre part, $\sin(\arctan(x))=\sin(\operatorname{Arg}(1+jx))=\frac{x}{|1+jx|}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2) Soit $\theta\in]-\pi,\pi[$. On pose $t=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Montrer à partir du 1) et des formules :

$$\cos(\theta)=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1 \text{ et } \sin(\theta)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

que :

$$\cos(\theta)=\frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } \sin(\theta)=\frac{2t}{1+t^2} \quad .$$

On a $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{1-\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2}{1+\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2}=\dfrac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\left(1-\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$,

(en utilisant la relation $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=1$)

$=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1=\cos(\theta)$.

De même, $\dfrac{2t}{1+t^2}=\dfrac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2}=\dfrac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\sin(\theta)$,

(toujours en utilisant la relation $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=1$) .

3) On a $\theta\neq\pi+k\pi,\ z\in\mathbb{Z}$. En posant $t=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on obtient l'équation $\dfrac{-3t^2+8t+3}{1+t^2}=1$

qui équivaut à $2t^2-4t-1=0$. On trouve $t=1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. Donc

$$3\cos(\theta)+4\sin(\theta)=1\Leftrightarrow\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow\frac{\theta}{2}=\arctan\left(1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+k\pi$$

$$3\cos(\theta)+4\sin(\theta)=1\Leftrightarrow\theta=2\arctan\left(1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+2k\pi \quad .$$

Exercice 14

1)

Si $t<0$: $A(t)=\arctan(2t)-\arctan\left(\frac{1}{t}\right)-\pi$ (ce nombre est dans $\left]\frac{-3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right]$ donc dans $\left]\frac{-3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Si $t=0$: $A(t)=\frac{-\pi}{2}$.

Si $t>0$: $A(t)=\arctan(2t)-\arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ (ce nombre est dans $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ donc dans $\left]\frac{-3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

2) a) Puisque la fonction $t\rightarrow\arctan(t)$ est dérivable, par composée de fonctions dérivables, les expressions trouvées ci-dessus montrent que la fonction $t\rightarrow A(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Il reste à prouver la dérivabilité de la fonction $t\rightarrow A(t)$ en 0.

Déjà, de part les propriétés du cours sur les limites de la fonction arctan, on a $A(0^-)=0+\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}$ et $A(0^+)=0-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$ donc $A(0^-)=A(0^+)=A(0)$. La fonction $t \to A(t)$ est continue en 0, et sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ aussi car elle y est dérivable, donc la fonction $t \to A(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On a $\forall t \neq 0,\ A'(t)=\frac{2}{4t^2+1}+\frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}+1}=\frac{6t^2+3}{(t^2+1)(4t^2+1)}$. On a donc $\lim_{t \to 0} A'(t)=3$. La fonction $t \to A(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. On déduit du Théorème 3 du chapitre 7 que $t \to A(t)$ est dérivable en 0, et $A'(0)=\lim_{t \to 0} A'(t)=3$.

b) La fonction $t \to A(t)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, les limites $A(-\infty)$ et $A(+\infty)$ existent et valent $A(-\infty)=-\frac{3\pi}{2}$ et $A(+\infty)=\frac{\pi}{2}$.

3) On a $r(t)=\sqrt{\frac{1+4t^2}{1+t^2}}=\sqrt{4-\frac{3}{1+t^2}}$. On remarque que cette fonction est paire, dérivable de dérivée $r'(t)=\frac{t}{(1+t^2)^2}\sqrt{\frac{1+t^2}{1+4t^2}}$, qui est du signe de *t*.

On en déduit le tableau de variations :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$r(t)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

4) D'après les questions précédentes, en considérant les deux cas $t \to -\infty$, et $t=0$, on déduit que l'ensemble des points d'affixe $z(t)$ dans le plan complexe lorsque *t* décrit $\mathbb{R}$ passe par les deux points d'affixes $z_1=2j$, et $z_2=-j$. Ces deux points correspondent respectivement aux points les plus loin et les plus proches possibles d'après le tableau de variations de $t \to r(t)$. Donc, intuitivement, si l'ensemble des points d'affixe $z(t)$ lorsque *t* décrit $\mathbb{R}$ est un cercle privé d'un point, ces deux points doivent former un diamètre de ce cercle, c'est à dire que ce cercle devrait être de centre le point d'affixe $\frac{1}{2}(z_1+z_2)=\frac{1}{2}j$.

On va donc étudier la différence $z(t)-\frac{1}{2}j$ et montrer qu'elle décrit dans le plan complexe un cercle privé d'un point.

On a $z(t)-\frac{1}{2}j=\frac{3}{2}\frac{jt+1}{1+jt}$ et $\left|z(t)-\frac{1}{2}j\right|=\frac{3}{2}\left|\frac{1+jt}{t+j}\right|=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2+1}}=\frac{3}{2}$ ce qui prouve que $z(t)$ appartient au cercle de centre d'affixe $\frac{1}{2}j$ et de rayon $\frac{3}{2}$. On doit écarter le point $z_1=2j$ qui n'est pas atteint par $z(t)$, car c'est un point limite pour $t \to \pm\infty$ (d'après le tableau de variations de la fonction $t \to r(t)$, on a $\forall t \in \mathbb{R},\ r(t)<2$ donc $\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) \neq 2j$.)

Réciproquement, soit *z* appartenant au cercle de centre d'affixe $\frac{1}{2}j$ et de rayon $\frac{3}{2}$ privé de $z_1=2j$

. Soit $\theta \in \left]\frac{-3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ une détermination de l'argument de z. D'après la question 2) b) , la fonction $t \to A(t)$ établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\frac{-3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, donc, en particulier, il existe un t_0 tel que $\mathrm{Arg}(z(t_0))=\theta$. Le point O étant situé à l'intérieur du cercle de centre d'affixe $\frac{1}{2}j$ et de rayon $\frac{3}{2}$, il existe un unique point de ce cercle dont l'affixe a pour argument θ. Donc z et $z(t_0)$ étant tous deux sur ce cercle et ayant même argument, ils sont égaux.

On en déduit que lorsque t décrit $\mathbb{R}$, $z(t)$ décrit le cercle de centre d'affixe $\frac{1}{2}j$ et de rayon $\frac{3}{2}$ privé du point d'affixe $z_1=2j$.

Exercice 15

1) On a par les formules d'Euler

$$2\cos(\theta)+3\sin(\theta)=1 \Leftrightarrow e^{j\theta}+e^{-j\theta}+\frac{3}{2\mathrm{j}}\left(e^{j\theta}-e^{-j\theta}\right)=1 \Leftrightarrow \left(1-\frac{3}{2}j\right)e^{j\theta}+\left(1+\frac{3}{2}j\right)e^{-j\theta}=1 \quad .$$

On multiplie tout par $e^{j\theta}\neq 0$ pour obtenir l'équivalence

$$2\cos(\theta)+3\sin(\theta)=1 \Leftrightarrow \left(1-\frac{3}{2}j\right)e^{2\mathrm{j}\theta}+\left(1+\frac{3}{2}j\right)=e^{j\theta}$$

ce qui donne $\left(1-\frac{3}{2}j\right)z^2-z+\left(1+\frac{3}{2}j\right)=0$ avec $z=e^{j\theta}$.

2) On a une équation du second degré avec $\Delta=-12$ et deux solutions :

$$z_1=\frac{1}{13}\left((2-6\sqrt{3})+j(3+4\sqrt{3})\right)$$

$$z_2=\frac{1}{13}\left((2+6\sqrt{3})+j(3-4\sqrt{3})\right)$$

On a $\mathrm{Re}(z_1)<0$ donc $e^{j\theta}=z_1$ signifie que

$$\theta_1 \equiv \arctan\left(\frac{3+4\sqrt{3}}{2-6\sqrt{3}}\right)+\pi \equiv \pi-\arctan\left(\frac{39+13\sqrt{3}}{52}\right) \quad [2\pi]$$

et on a

$$\theta_2 \equiv \arctan\left(\frac{3-4\sqrt{3}}{2+6\sqrt{3}}\right) \equiv \arctan\left(\frac{13\sqrt{3}-39}{52}\right) \quad [2\pi]$$

3) a) En appelant $\underline{A}$ l'amplitude complexe du signal sinusoïdal $t \to 2\cos(t)+3\sin(t)$ montrer qu'il existe un nombre complexe γ que l'on déterminera tel que l'équation $2\cos(\theta)+3\sin(\theta)=1$ soit équivalente à $\underline{A}e^{j\theta}=\gamma$ ou $\underline{A}e^{j\theta}=\overline{\gamma}$.

On a $\underline{A}=2-3j$ et $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\underline{A}e^{j\theta}=(2\cos(\theta)+3\sin(\theta))+j(-3\cos(\theta)+2\sin(\theta))$ donc l'équation $2\cos(\theta)+3\sin(\theta)=1$ équivaut à ce que $\mathrm{Re}((2-3\mathrm{j})e^{j\theta})=1$.

Or, on a $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $|(2-3\mathrm{j})e^{j\theta}|=\sqrt{13}$ donc la condition $\mathrm{Re}((2-3\mathrm{j})e^{j\theta})=1$ est équivalente à ce que $(2-3\mathrm{j})e^{j\theta}=1\pm 2\sqrt{3}j$ car les nombres complexes $1\pm 2\sqrt{3}j$ sont les seuls nombres complexes de module $\sqrt{13}$ et de partie réelle égale à 1.

Le nombre $\gamma=1+2\sqrt{3}j$ répond à la question posée.

b) On a deux cas.

Si $(2-3j)e^{j\theta}=1+2\sqrt{3}\,j$ alors $e^{j\theta}=\dfrac{1+2\sqrt{3}\,j}{2-3j}=\dfrac{(2-6\sqrt{3})+j(3+4\sqrt{3})}{13}$ donc

$\theta_1\equiv\arctan\left(\dfrac{3+4\sqrt{3}}{2-6\sqrt{3}}\right)+\pi\equiv\pi-\arctan\left(\dfrac{39+13\sqrt{3}}{52}\right)\quad[2\pi]$.

Si $(2-3j)e^{j\theta}=1-2\sqrt{3}\,j$ alors $e^{j\theta}=\dfrac{1-2\sqrt{3}\,j}{2-3j}=\dfrac{(2+6\sqrt{3})+j(3-4\sqrt{3})}{13}$ donc

$\theta_1\equiv\arctan\left(\dfrac{3-4\sqrt{3}}{2+6\sqrt{3}}\right)\equiv\arctan\left(\dfrac{-39+13\sqrt{3}}{52}\right)\quad[2\pi]$.

Exercice 16

1)

a) On a $\cos^2(\theta)=1-\sin^2(\theta)=\dfrac{5}{9}$ donc $\cos(\theta)=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

b) On a $\tan(\theta)=\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}=\dfrac{\pm 2}{\sqrt{5}}=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Les deux solutions de l'équation $\sin(\theta)=\dfrac{2}{3}$, $\theta\in]-\pi;\pi]$ sont dans les intervalles $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$, et, d'après la question précédente, sont solutions de l'équation $\tan(\theta)=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ .On en déduit les deux seules possibilités : $\theta_1=\arctan\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ et $\theta_2=\pi-\arctan\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

2) On a $\sin^2(\theta)=1-\cos^2(\theta)=\dfrac{8}{9}$ donc $\sin(\theta)=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Donc $\tan(\theta)=\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}=\pm 2\sqrt{2}$.

Les deux solutions de l'équation $\cos(\theta)=\dfrac{-1}{3}$, $\theta\in]-\pi;\pi]$ sont dans les intervalles $\left]-\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$, et, d'après la question précédente, sont solutions de l'équation $\tan(\theta)=\pm 2\sqrt{2}$ .On en déduit les deux seules possibilités : $\theta_1=\arctan(2\sqrt{2})-\pi$ et $\theta_2=\pi-\arctan(2\sqrt{2})$.

3) Si $x=1$, $\theta=0$, si $x=-1$, $\theta=\pi$ et si $x=0$, $\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$. .

Si $x\in]-1;1[$, $\sin(\theta)=\pm\sqrt{1-x^2}$ donc $\tan(\theta)=\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}=\pm\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Si $x>0$, on a $\theta\in]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}[$ donc $\theta=\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ ou $\theta=-\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

Si $x<0$, on a $\theta\in]-\pi;-\dfrac{\pi}{2}[\cup]\dfrac{\pi}{2};\pi]$ donc $\theta=\pi+\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ ou $\theta=-\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)-\pi$.

4)

Si $x=1$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, si $x=-1$, $\theta=\dfrac{-\pi}{2}$ et si $x=0$, $\theta=0$ ou π. .

Si $x\in]-1;1[$, $\cos(\theta)=\pm\sqrt{1-x^2}$ donc $\tan(\theta)=\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}=\pm\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Si $x > 0$, on a $\theta \in]0\,;\pi[$ donc $\theta = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ ou $\theta = \pi - \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

Si $x < 0$, on a $\theta \in]-\pi\,;0[$ donc $\theta = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ ou $\theta = -\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \pi$.

Exercice 17

1) Soit $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Alors

$$\cos(\theta) = \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \Leftrightarrow \cos^2(\theta) = \sin(\theta) \Leftrightarrow \sin^2(\theta) + \sin(\theta) - 1 = 0.$$

On a l'unique possibilité $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (l'autre racine de $X^2 + X - 1 = 0$ est strictement inférieure à – 1 .) Puisque $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, on a $\cos(\theta) > 0$ donc la relation $\cos^2(\theta) = \sin(\theta)$ donne

$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. On a alors $\cos(\theta) = \tan(\theta) \Leftrightarrow \theta = \arctan\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$ car $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

2) On pose $\varphi = \pi - \theta$, de sorte que $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ et

$$\cos(\theta) = \tan(\theta) \Leftrightarrow -\cos(\varphi) = -\tan(\varphi) \Leftrightarrow \cos(\varphi) = \tan(\varphi) \quad .$$

On est alors ramené à la question 1) . On a une unique valeur de φ qui est solution :

$\varphi = \arctan\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$,

donc une unique solution $\theta = \pi - \arctan\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$.

D - ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I) Position du problème

I.1) Exemple

De nombreux problèmes de physique amènent à rechercher une fonction (du temps par exemple) à partir d'une équation dont l'inconnue n'est pas un nombre mais une fonction.
On considère par exemple un circuit RC en série alimenté par un générateur de tension qui délivre une tension $e(t)$, a priori variable au cours du temps. Soit $y(t)$ la tension obtenue aux bornes du condensateur : il s'agit aussi d'une fonction du temps. Alors, les lois de l'électronique montrent que l'on a la relation $RC\,y'(t)+y(t)=e(t)$.
La fonction $y(t)$ est une fonction inconnue qui peut être retrouvée à partir de la relation ci dessus, relation appelée <u>équation différentielle</u> , où l'inconnue n'est pas un nombre mais une fonction dérivable du temps. Le terme « différentielle » provient du fait que l'équation est une relation faisant à la fois intervenir la fonction et ses dérivées successives (ici, la dérivée d'ordre 1).

I.2) Terminologie

Il existe de nombreux types d'équations différentielles. On va dans ce chapitre considérer deux types d'équations différentielles :

Définition 1 : Une <u>équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants</u> est une équation différentielle de la forme :
$a\,y'(t)+b\,y(t)=f(t)$,
où a, b sont deux réels donnés avec $a\neq 0$, et $f(t)$ une fonction continue donnée.

Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $t\rightarrow t+2$ est solution de l'équation différentielle $2\,y'(t)-y(t)=-t$ car $2(t+2)'-(t+2)=2-t-2=-t$.

Définition 2 : Une <u>équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants</u> est une équation différentielle de la forme :
$a\,y''(t)+b\,y'(t)+c\,y(t)=f(t)$,
où a, b, c sont trois réels donnés avec $a\neq 0$, et $f(t)$ une fonction continue donnée.

Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $t\rightarrow \sin(2t)$ est solution de l'équation différentielle $y''(t)+4\,y(t)=0$ car
$(\sin(2t))''+4\sin(2t)=(2\cos(2t))'+4\sin(2t)=-4\sin(2t)+4\sin(2t)=0$.

Remarque : la fonction $f(t)$ peut être dans certains cas particuliers (quoique très importants en pratique) seulement continue par morceaux. Cela implique qu'il faut renoncer à la dérivabilité de la solution en certains points (voir V. 1))

II) Équations différentielles homogènes

Dans cette section, on s'intéresse à l'équation d'ordre 1 ou 2 dans le cas où $f=0$. Ce type d'équation est encore qualifié d'équation homogène.

II.1) Ordre 1

Théorème 1 : Soient a et b deux nombres réels (resp. complexes) avec $a\neq 0$. On s'intéresse aux fonctions $y(t)$ dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. à valeurs dans $\mathbb{C}$) et solutions de l'équation différentielle $a\,y'(t)+b\,y(t)=0$.

Alors, $y(t)$ est de la forme $y(t)=A\,e^{\frac{-b}{a}t}$ où A est une constante arbitraire. Réciproquement, toutes les fonctions y de la forme $y(t)=A\,e^{\frac{-b}{a}t}$ sont solutions de l'équation différentielle $a\,y'(t)+b\,y(t)=0$.

Remarque importante : il faut remarquer qu'il y a une infinité de fonctions solutions de cette équation différentielle, selon les valeurs de A, et qu'elles sont toutes proportionnelles à la solution fondamentale $t\rightarrow e^{\frac{-b}{a}t}$. On dit qu'il y a un degré de liberté pour les solutions. On parle alors de famille de solutions.

Preuve :

Si $y(t)$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ on pose $z(t)=e^{\frac{b}{a}t}\,y(t)$. Alors $z(t)$ est une fonction dérivable de dérivée :

$$z'(t)=\left(e^{\frac{b}{a}t}\,y(t)\right)'=e^{\frac{b}{a}t}.\left(y(t)\right)'+y(t).\left(e^{\frac{b}{a}t}\right)' \quad \text{(dérivée d'un produit)}$$

$$z'(t)=e^{\frac{b}{a}t}.y'(t)+y(t).\frac{b}{a}e^{\frac{b}{a}t}=e^{\frac{b}{a}t}\left(y'(t)+\frac{b}{a}y(t)\right)$$

$$z'(t)=\frac{1}{a}.e^{\frac{b}{a}t}.\left(a\,y'(t)+b\,y(t)\right) \quad .$$

Cette dernière relation prouve que y est solution de l'équation différentielle $a\,y'(t)+b\,y(t)=0$ **si et seulement si** $\forall t\in\mathbb{R},\ z'(t)=0$ car le terme $\frac{1}{a}.e^{\frac{b}{a}t}$ n'est jamais nul. La condition $\forall t\in\mathbb{R},\ z'(t)=0$ équivaut à ce que la fonction $z(t)$ soit constante sur $\mathbb{R}$. On en déduit :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ a\,y'(t)+b\,y(t)=0\Leftrightarrow\exists A\in\mathbb{C}\text{ tq }z(t)=A\Leftrightarrow\exists A\in\mathbb{C}\text{ tq }e^{\frac{b}{a}t}\,y(t)=A$$

$$\Leftrightarrow\exists A\in\mathbb{C}\text{ tq }y(t)=\frac{A}{e^{\frac{b}{a}t}}=A\,e^{-\frac{b}{a}t}.$$

Exemple : si une fonction $f:t\rightarrow f(t)$ est dérivable et vérifie la relation :

$\forall t\in\mathbb{R},\ 2\,f'(t)+3\,f(t)=0$, alors la fonction f admet une expression de la forme $f(t)=A\,e^{-\frac{3}{2}t}$

II.2) Ordre 2.

On ne s'intéresse ici qu'à des fonctions à valeurs réelles.

II.2.a) Exemple et structure générale des solutions.

Partons de l'équation différentielle très simple : $y''(t)=0$. On trouve que $y'(t)=A\in\mathbb{R}$, donc $y(t)=At+B$, avec $A\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{R}$. On voit sur cet exemple qu'il y a cette fois deux degrés de liberté pour les solutions, qui s'expriment sous la forme $y(t)=A\varphi_1(t)+B\varphi_2(t)$ avec $\varphi_1(t)=t$, $\varphi_2(t)=1$. Ce résultat se généralise de la façon suivante :

Théorème 2 L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène ***:***
$a\,y''(t)+b\,y'(t)+c\,y(t)=0,$
où a, b, c sont trois réels donnés avec $a\neq 0$, s'écrit sous la forme :
$y(t)=A\varphi_1(t)+B\varphi_2(t)$, où A et B sont des constantes arbitraires, et φ_1, φ_2 sont deux fonctions non proportionnelles, appelées solutions fondamentales (ou base de solutions) de l'équation
$a\,y''(t)+b\,y'(t)+c\,y(t)=0.$

Ce résultat sera précisé dans le Théorème 3 (qui sera, lui, démontré), théorème qui explicite les fonctions φ_1, φ_2 en fonction des paramètres *a, b* et *c* .

II.2.b) Solutions fondamentales.

Le problème reste de trouver les expressions des fonctions φ_1 et φ_2 dans le théorème 2. Pour ce faire, il nous faut considérer une équation scalaire : l'équation caractéristique.

Définition 3: On appelle équation caractéristique de l'équation $a\,y''(t)+b\,y'(t)+c\,y(t)=0$ l'équation du second degré d'inconnue *r* : $a\,r^2+b\,r+c=0$.

Exemple : pour l'équation différentielle d'ordre 2 $y''(t)+4\,y(t)=0$, l'équation caractéristique est $r^2+4=0$, qui admet comme racines complexes $r=\pm 2\mathrm{j}$.

On peut alors préciser le théorème 2 : tout d'abord on pose $\Delta=b^2-4\,a\,c$, le discriminant de l'équation caractéristique.

Théorème 3 : Dans le théorème 2 , on peut prendre :

(i) Si $\Delta>0$, $\varphi_1(t)=e^{r_1 t}$ et $\varphi_2(t)=e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les deux solutions de l'équation caractéristique. Autrement dit, l'ensemble des solutions est la famille de fonctions $t\rightarrow A\,e^{r_1 t}+B\,e^{r_2 t}$ avec A et B réels.

(ii) Si $\Delta=0$, $\varphi_1(t)=e^{r_0 t}$ et $\varphi_2(t)=t\,e^{r_0 t}$ où r_0 est la racine double de l'équation caractéristique. Autrement dit, l'ensemble des solutions est la famille de fonctions $t\rightarrow(A+Bt)e^{r_0 t}$ avec A et B réels.

(iii) Si $\Delta<0$, $\varphi_1(t)=e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $\varphi_2(t)=e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ où $\alpha+j\beta$ et $\alpha-j\beta$ sont les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique. Autrement dit, l'ensemble des solutions est la famille de fonctions $t\rightarrow e^{\alpha t}(A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t))$ avec A et B réels.

Exemple : pour l'équation différentielle d'ordre 2 $y''(t)+4y(t)=0$, on est dans le cas *(iii)* avec $\alpha=0$ et $\beta=2$. Les solutions fondamentales sont donc $\varphi_1(t)=e^{0t}\cos(2t)=\cos(2t)$ et $\varphi_2(t)=\sin(2t)$. La famille (à deux degré de liberté) de solutions de l'équation différentielle est donc $y(t)=A\cos(2t)+B\sin(2t)$: c'est la famille constituée par toutes les fonctions sinusoïdales de pulsation $\omega=2$.

(*) Preuve :

On commence par poser $\delta=\sqrt{\Delta}$ si $\Delta\geq 0$ et $\delta=j\sqrt{-\Delta}$ si $\Delta<0$. On pose aussi $r_1=\frac{-b-\delta}{2a}$ et $r_2=\frac{-b+\delta}{2a}$ qui sont donc les racines de l'équation caractéristique. Bien noter que $\Delta=0\Rightarrow r_1=r_2$.

Étape 1 : Montrons qu'une fonction *y* deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle $ay''(t)+by'(t)+cy(t)=0$ si et seulement si $\forall t\in\mathbb{R},\ az''(t)-\delta z'(t)=0$ où l'on a posé $z(t)=e^{-r_1t}y(t)$.

En effet, en remarquant que la relation $z(t)=e^{-r_1t}y(t)$ s'écrit aussi : $y(t)=e^{r_1t}z(t)$, on a par dérivation d'un produit :

$$y'(t)=r_1e^{r_1t}z(t)+e^{r_1t}z'(t)=(r_1z(t)+z'(t))e^{r_1t}$$

et en dérivant à nouveau :

$$y''(t)=(r_1z'(t)+z''(t))e^{r_1t}+r_1(r_1z(t)+z'(t))e^{r_1t}$$

$$y''(t)=(r_1^2z(t)+2r_1z'(t)+z''(t))e^{r_1t}.$$

On obtient à partir des relations ci-dessus que

$$\forall t\in\mathbb{R},\ ay''(t)+by'(t)+cy(t)=a(r_1^2z(t)+2r_1z'(t)+z''(t))e^{r_1t}+b(r_1z(t)+z'(t))e^{r_1t}+cz(t)e^{r_1t}$$

d'où la relation

$$(1):\forall t\in\mathbb{R},\ ay''(t)+by'(t)+cy(t)=\left((ar_1^2+br_1+c)z(t)+(2ar_1+b)z'(t)+az''(t)\right)e^{r_1t}.\ .$$

On a $ar_1^2+br_1+c=0$ et $2ar_1+b=2a\left(\frac{-b-\delta}{2a}\right)+b=-\delta$ donc la relation (1) se simplifie en :

$$(2):\forall t\in\mathbb{R},\ ay''(t)+by'(t)+cy(t)=(-\delta z'(t)+az''(t))e^{r_1t}.$$

En notant que $e^{r_1t}\neq 0$ car l'exponentielle d'un nombre complexe n'est jamais nulle (voir remarque (i) du I)2) Chapitre 1) , on a donc l'équivalence :

$\forall t\in\mathbb{R},\ ay''(t)+by'(t)+cy(t)=0$ si et seulement si $\forall t\in\mathbb{R},\ az''(t)-\delta z'(t)=0$ avec $z(t)=e^{-r_1t}y(t)$.

Étape 2:

On a prouvé dans la partie 1 que $\forall t\in\mathbb{R},\ ay''(t)+by'(t)+cy(t)=0$ si et seulement si la fonction $t\rightarrow z'(t)$ est une solution de l'équation différentielle $aY'(t)-\delta Y(t)=0$, ce qui est équivalent (par le Théorème 1) à l'existence d' une constante complexe C telle que

$$(3)\quad \forall t\in\mathbb{R},\ z'(t)=Ce^{\frac{\delta}{a}t}.$$

On travaille sur la relation (3) selon le signe de Δ.

Si $\Delta>0$: $\delta=\sqrt{\Delta}$ est un réel strictement positif donc toutes les expressions considérées jusqu'à présent sont réelles ; en particulier la constante C est réelle. Donc en primitivant la relation (3) on obtient :

$(2)\quad \forall t\in\mathbb{R},\ z(t)=\frac{Ca}{\delta}e^{\frac{\delta}{a}t}+D$ pour une certaine constante réelle D. En utilisant la relation

$y(t)=e^{r_1 t}z(t)$ il vient que (4) $\forall t\in\mathbb{R},\ y(t)=\left(\frac{Ca}{\delta}e^{\frac{\delta}{a}t}+D\right)e^{r_1 t}=\frac{Ca}{\delta}e^{(\frac{\delta}{a}+r_1)t}+De^{r_1 t}$.

Il faut alors remarquer que $\frac{\delta}{a}+r_1=\frac{\delta}{a}+\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{-b+\delta}{2a}=r_2$ donc la relation (4) s'écrit

$\forall t\in\mathbb{R},\ y(t)=\left(\frac{Ca}{\delta}e^{\frac{\delta}{a}t}+D\right)e^{r_1 t}=\frac{Ca}{\delta}e^{r_2 t}+De^{r_1 t}$

ce qui montre que (3) équivaut à ce que $y(t)$ soit de la forme $y(t)=Ae^{r_1 t}+Be^{r_2 t}$ avec A et B réels.
Si $\Delta=0$ alors $\delta=0$ et encore une fois toutes les expressions considérées jusqu'à présent sont réelles ; en particulier la constante C est réelle.
La relation (3) se réécrit : (2) $\forall t\in\mathbb{R},\ z'(t)=C$. On en déduit qu'il existe une constante réelle D telle que $\forall t\in\mathbb{R},\ z(t)=Ct+D$. De la relation $y(t)=e^{r_1 t}z(t)=e^{r_0 t}z(t)$, on déduit que (3) équivaut à ce que y soit de la forme $y(t)=(Ct+D)e^{r_0 t}$.
Si $\Delta<0$: $\delta=j\sqrt{-\Delta}$. Un raisonnement très similaire à celui fait au (i) permet d'obtenir que (3) équivaut à ce que $y(t)$ soit de la forme $y(t)=Ae^{r_1 t}+Be^{r_2 t}$ pour deux constantes <u>complexes</u> A et B, que l'on écrira sous forme algébrique : $A=A_1+jA_2$ et $B=B_1+jB_2$. En remarquant que

$r_1=\alpha-j\beta$ et $r_2=\alpha+j\beta$ on obtient : $y(t)=(A_1+jA_2)e^{(\alpha-j\beta)t}+(B_1+jB_2)e^{(\alpha+j\beta)t}$,

$y(t)=e^{\alpha t}\left((A_1+jA_2)e^{-j\beta t}+(B_1+jB_2)e^{j\beta t}\right)$ c'est à dire :

$y(t)=e^{\alpha t}\left((A_1+jA_2)(\cos(\beta t)-j\sin(\beta t))+(B_1+jB_2)(\cos(\beta t)+j\sin(\beta t))\right)$.

La fonction $y(t)$ prend des valeurs réelles donc on ne peut garder que la partie réelle de l'expression ci-dessus. Après développement et réduction il vient que la relation (3) équivaut à ce que $y(t)$ soit de la forme :

$y(t)=e^{\alpha t}\left((A_1+B_1)\cos(\beta t)+(A_2-B_2)\sin(\beta t)\right)$,

c'est à dire de la forme

$y(t)=e^{\alpha t}(A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t))$ avec A et B réels.

III) Équations différentielles avec second membre

Nous allons essayer de comprendre ici comment la structure des solutions de l'équation homogène permet d'obtenir la famille des solutions de l'équation avec un second membre non nul.

III.1) Théorème de structure

On considère cette fois les équations différentielles :

$$(\text{EDO1}) \ : \ a\,y'(t)+b\,y(t)=f(t),$$
$$(\text{EDO2}) \ : \ a\,y''(t)+b\,y'(t)+c\,y(t)=f(t),$$

avec toujours $a\neq 0$ et $t\rightarrow f(t)$ une fonction continue sur un intervalle I contenant 0. Par simplicité, on prend $I=\mathbb{R}$ mais tout ce qui suit reste valable dans le cas général.

L'idée du théorème ci-dessous est la suivante : si on arrive à obtenir une solution particulière simple pour l'équation différentielle, on obtient du coup automatiquement l'ensemble de toutes les solutions.

Théorème 4 (« de structure »): On considère l'équation différentielle (EDO1) ou (EDO2). On suppose que l'on est parvenu à trouver une solution $t \to y_p(t)$ particulière de l'équation différentielle.Alors l'ensemble des solutions est constitué par les fonctions de la forme :

$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$,

où $y_h(t)$ est la solution générale de l'équation homogène donnée par le théorème 1 ou 3 selon l'ordre de l'équation considérée.

Exemple : si l'on reprend l'exemple de la définition 1, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $t \to t+2$ est une solution particulière de l'équation différentielle $2y'(t)-y(t)=-t$.

<u>Preuve</u> : On traite le cas de l'équation différentielle d'ordre 1. L'ordre 2 se traite exactement de la même façon.

Soit $t \to y(t)$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $t \to y_p(t)$ une solution de l'équation (EDO1). Alors on a

$a(y(t)-y_p(t))'+b(y(t)-y_p(t))=a(y'(t)-y'_p(t))+b(y(t)-y_p(t))$

$=ay'(t)+by(t)-(ay_p'(t)+by_p(t))=ay'(t)+by(t)-f(t)$ car $t \to y_p(t)$ est une solution de l'équation (EDO1). On en déduit que :

$ay'(t)+by(t)=f(t)$

si et seulement si

$a(y(t)-y_p(t))'+b(y(t)-y_p(t))=0$

ce qui équivaut à ce que $y-y_p$ soit une solution de l'équation homogène associée à (EDO1), c'est à dire

$y(t)-y_p(t)=y_h(t)$, où $y_h(t)$ est une solution de l'équation homogène.

Exemple : supposons que l'on veuille trouver toutes les solutions de l'équation $2y'(t)-y(t)=-t$. On a vu que l'on pouvait prendre $y_p(t)=t+2$. L'ensemble des solutions de cette équation est donné par l'expression $y(t)=t+2+y_h(t)$. L'application du théorème 1 donne alors $y_h(t)=Ae^{\frac{t}{2}}$ pour $A \in \mathbb{R}$ arbitraire, donc l'ensemble des solutions de l' équation est donné par l'expression

$y(t)=t+2+Ae^{\frac{t}{2}}$. On voit qu'il s'agit encore d'une famille de solutions à un degré de liberté.

<u>Remarque :</u> pour trouver une solution particulière, on cherche en général une fonction qui est du même type que $f(t)$.

Plus précisément , voici quelques principes :

(i) si $f(t)=\text{constante}$, on cherche une solution particulière constante

(ii) si $f(t)=P(t) \in \mathbb{R}[t]$, on cherche une solution particulière polynomiale (souvent de même degré que $P(t)$, mais pas toujours !)

(iii) si $f(t)=u(t)e^{mt}$ on cherche une solution particulière de la forme $f(t)=v(t)e^{mt}$

(iv) si $f(t)$ est sinusoïdale de pulsation ω , on cherche une solution particulière sinusoïdale de même pulsation.

III.2) Existence d'une solution particulière.

Tout ce qui précède présuppose que l'on dispose bien d'une solution particulière $t \to y_p(t)$. Dans les cas pratiques, les méthodes données dans le 1) suffisent à pouvoir toujours trouver une solution particulière, mais il faut néanmoins se poser la question de l'existence de $t \to y_p(t)$ dans le cas général : en effet, sans la certitude de l'existence d'une telle fonction, l'ensemble des solutions donné par le Théorème 4 pourrait très bien être vide ! Ce n'est heureusement jamais le cas.

Théorème 5: si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors il existe toujours une solution particulière aux équations (EDO1) ou (EDO2).

(*) Preuve :

Rappel : *toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives* (voir chapitre sur l'intégration).

Etape 1 :
On commence par traiter le cas de l' EDO1.
On utilise ce que l'on appelle la méthode de variation de la constante. C'est à dire que l'on part de l'expression de la solution générale de l'équation homogène $y(t)=Ae^{\frac{-b}{a}t}$ en faisant « varier » la constante A c'est à dire en la remplaçant par une fonction dérivable inconnue $t \to u(t)$. Autrement dit, on cherche une solution particulière de la forme $y_p(t)=u(t)e^{\frac{-b}{a}t}$. Par dérivation d'un produit, on a

$y'_p(t)=u'(t)e^{\frac{-b}{a}t}-\frac{b}{a}.u(t)e^{\frac{-b}{a}t}$. On a les équivalences suivantes :

$$a\,y'_p(t)+b\,y_p(t)=f(t)\Leftrightarrow a\left(u'(t)e^{\frac{-b}{a}t}-\frac{b}{a}.u(t)e^{\frac{-b}{a}t}\right)+b\,u(t)e^{\frac{-b}{a}t}=f(t)$$

$$\Leftrightarrow a\,u'(t)e^{\frac{-b}{a}t}=f(t)$$
$$\Leftrightarrow u'(t)=\frac{1}{a}e^{\frac{b}{a}t}f(t)\quad .$$

Il suffit donc de prendre pour u une primitive de la fonction $t \to \frac{1}{a}e^{\frac{b}{a}t}f(t)$ qui existe bien car cette dernière fonction est continue . Notons que ce raisonnement reste valable si a et b sont plus généralement complexes (on va s'en servir pour le cas de l' EDO2). Nous verrons dans le chapitre dédié que le calcul d'une intégrale à valeurs complexes ne pose aucune difficulté supplémentaire.

Etape 2
On traite maintenant le cas de l'EDO2 (EDO2) : $a\,y''(t)+b\,y'(t)+c\,y(t)=f(t)$, avec a, b et c réels et $a\neq 0$. On considère l'équation caractéristique $a\,r^2+b\,r+c=0$ et on pose $\delta=\sqrt{\Delta}$ si $\Delta\geq 0$ et $\delta=j\sqrt{-\Delta}$ si $\Delta<0$. On pose aussi $r_1=\frac{-b-\delta}{2a}$ et $r_2=\frac{-b+\delta}{2a}$ qui sont donc les racines de l'équation caractéristique.
On cherche une solution particulière de la forme $y(t)=e^{r_1 t}z(t)$ (on n'écrit plus l'indice p pour alléger les notations) où $t \to z(t)$ est une fonction deux fois dérivable à déterminer. On a donc par dérivation d'un produit $y'(t)=r_1 e^{r_1 t}z(t)+e^{r_1 t}z'(t)=(r_1 z(t)+z'(t))e^{r_1 t}$
et en re-dérivant :

$$y''(t)=(r_1 z'(t)+z''(t))e^{r_1 t}+r_1(r_1 z(t)+z'(t))e^{r_1 t}$$
$$y''(t)=(r_1^2 z(t)+2r_1 z'(t)+z''(t))e^{r_1 t}.$$

On obtient à partir des relations ci-dessus que

$$a\,y''(t)+b\,y'(t)+c\,y(t)=a(r_1^2 z(t)+2r_1 z'(t)+z''(t))e^{r_1 t}+b(r_1 z(t)+z'(t))e^{r_1 t}+c\,z(t)e^{r_1 t}$$

et $y(t)$ est une solution de (EDO2) si et seulement si on a la relation :

$$(1)\quad \forall t\in\mathbb{R},\quad \left((a\,r_1^2+b\,r_1+c)z(t)+(2a\,r_1+b)z'(t)+a\,z''(t)\right)e^{r_1 t}=f(t)\quad .$$

On a $a\,r_1^2+b\,r_1+c=0$ et $2a\,r_1+b=2a\left(\frac{-b-\delta}{2a}\right)+b=-\delta$ donc la relation (1) se simplifie en :

$$(1)\quad \forall t\in\mathbb{R},\quad a\,z''(t)-\delta\,z'(t)=f(t)e^{-r_1 t}.$$

La fonction $t \to f(t)e^{-r_1 t}$ est continue, donc par la première étape de la preuve, il existe une solution particulière à l'équation $aY'(t)-\delta Y(t)=f(t)e^{-r_1 t}$. Si $z(t)$ est une primitive d'une telle solution (qui est continue car dérivable) alors la fonction $t \to z'(t)$ est solution de l'équation différentielle $aY'(t)-\delta Y(t)=f(t)e^{-r_1 t}$ c'est à dire de (1) $\forall t \in \mathbb{R}$, $az''(t)-\delta z'(t)=f(t)e^{-r_1 t}$. Ce qui précède montre alors que la fonction $t \to e^{r_1 t} z(t)$ est une solution de l'équation (EDO2).

Remarque : Ceux qui ont eu le courage de se plonger dans la démonstration ci-dessus et ont quelques connaissances sur les calculs de primitives ont sans doute remarqué que cette démonstration fournit aussi l' expression d'une solution particulière, et par conséquent, un moyen de les trouver.

Pour (EDO1), on a $y_p(t)=e^{\frac{-b}{a}t}\int_0^t \left(\frac{1}{a}e^{\frac{b}{a}s}f(s)\right)ds.$ Nous verrons dans le chapitre sur les systèmes et la transformation de Laplace que cette expression est celle d'un produit de convolution.

Pour (EDO2), on a (avec les notations ci-dessus) $y_p(t)=e^{r_1 t}\int_0^t \left(e^{\frac{\delta}{a}s}\int_0^s \left(\frac{1}{a}e^{\frac{-\delta}{a}\xi}f(\xi)\right)d\xi\right)ds.$ Ces formules ont un intérêt plus théorique que pratique.....

IV) Équations différentielles avec condition initiale

Une équation différentielle permet souvent de décrire une expérience physique qui évolue au cours du temps selon des lois physiques dont découle l'équation différentielle : une solution $y(t)$ décrit alors une grandeur physique à l'instant *t*. Si l'on se place d'un point de vue déterministe, en connaissant l'état du système à l'instant $t=0$, on doit être capable de décrire l'état de ce système à un instant *t* quelconque (ce que cherchent à faire avec plus ou moins de réussite les météorologues par exemple!). Or, le théorème 4 implique qu'une équation différentielle de la forme (EDO1) ou (EDO2) admet une infinité de solutions . La question que l'on peut alors se poser est de savoir si l'on peut déterminer <u>la</u> solution recherchée parmi la famille de solutions de l'équation à partir des conditions initiales.
La réponse à cette question est donnée par la :

Propriété 1 :

(i) Supposons que l'on ait une équation du type (EDO1) et que l'on demande à la solution de vérifier une condition du type $y(0)=\alpha$, où α est un réel connu à l'avance.
Alors, l'équation admet une unique solution.

(ii) Supposons que l'on ait une équation du type (EDO2) et que l'on demande à la solution de vérifier deux conditions du type $y(0)=r$ et $y'(0)=s$, où r et s sont des réels connus à l'avance.
Alors, l'équation admet une unique solution.

Remarques :

(i) Les conditions $y(0)=\alpha$ et $y(0)=r$ et $y'(0)=s$ sont appelées <u>conditions initiales</u> d'une équation du type (EDO1) ou (EDO2) respectivement.Bien noter qu'il faut deux égalités pour l'(EDO2).

(ii) La propriété ci dessus est encore valable si l'on remplace les conditions initiales pour $t=0$ par des conditions pour un instant $t=a$ quelconque. Dans le cas de l' équation du type (EDO2), il faut faire attention que les valeurs de *y* et *y '* soient données au même point.

(*)Preuve :
(i) Si $y(t)$ est une solution de l'équation $a\,y'(t)+b\,y(t)=f(t)$, , on peut écrire
$y(t)=A\,e^{\frac{-b}{a}t}+y_p(t)$ où $y_p(t)$ est une solution particulière fixée à l'avance et $A\in\mathbb{R}$ arbitraire.
Alors on a $y(0)=\alpha\Leftrightarrow A+y_p(0)=\alpha\Leftrightarrow A=\alpha-y_p(0)$: il n'y a qu'une seule valeur possible de A pour que $y(0)=\alpha$ donc il n'y a qu'une seule solution vérifiant la condition initiale.

(ii) Si $y(t)$ est une solution de l'équation $a\,y''(t)+b\,y'(t)+c\,y(t)=f(t)$, on peut écrire
$y(t)=A\varphi_1(t)+B\varphi_2(t)+y_p(t)$ où :
$y_p(t)$ est une solution particulière fixée à l'avance
φ_1,φ_2 sont les deux solutions fondamentales de l'équation homogène associée, données par le théorème 3.
On reprend toutes les notations introduites dans le théorème3.

a) Si $\Delta>0$, $\varphi_1(t)=e^{r_1t}$ et $\varphi_2(t)=e^{r_2t}$ donc $y(t)=A\,e^{r_1t}+B\,e^{r_2t}+y_p(t)$. Alors :
$y(0)=r$ et $y'(0)=s\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=r-y_p(0)\\ r_1A+r_2B=s-y'_p(0)\end{cases}$.
Ce système possède une unique solution car les deux équations d'inconnues A et B ne sont pas proportionnelles vu que $r_1\neq r_2$.
b) Si $\Delta=0$, $\varphi_1(t)=e^{r_0t}$ et $\varphi_2(t)=t\,e^{r_0t}$ donc $y(t)=A\,e^{r_0t}+B\,t\,e^{r_0t}+y_p(t)$. Alors :
$y(0)=r$ et $y'(0)=s\Leftrightarrow\begin{cases}A=r-y_p(0)\\ r_0A+B=s-y'_p(0)\end{cases}$ .Ce système possède une unique solution (la première équation donne A, puis la seconde donne B).
c) Si $\Delta<0$, $\varphi_1(t)=e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $\varphi_2(t)=e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ donc
$y(t)=e^{\alpha t}(A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t))+y_p(t)$. Un calcul de dérivée donne
$y(t)=e^{\alpha t}((A\alpha+B\beta)\cos(\beta t)+(-A\beta+B\alpha)\sin(\beta t))+y_p'(t)$ d'où
$y(0)=r$ et $y'(0)=s\Leftrightarrow\begin{cases}A=r-y_p(0)\\ \alpha A+\beta B=s-y'_p(0)\end{cases}$ .Ce système possède une unique solution (la première équation donne A, puis la seconde donne B car β , la partie imaginaire au signe près des racines de l'équation caractéristique est différent de 0 vu que $\Delta<0$.)

V) Quelques compléments

V.1) Second membre continu par morceaux.

On s'intéresse dans un premier temps à l'équation différentielle $a\,y'(t)+b\,y(t)=f(t)$, dans le cas où f est seulement continue par morceaux. Rigoureusement parlant, on ne peut plus affirmer l'existence d'une solution dérivable.
Examinons le problème posé par le cas où $a=1,b=0,f(t)=U(t)$. Dans ce cas, l'équation différentielle devient $y'(t)=U(t)$. Alors, $\forall t<0,y'(t)=0\Rightarrow\exists A\in\mathbb{R}:\forall t<0,y(t)=A$ et de même $\forall t\geq 0,y'(t)=1\Rightarrow\exists B\in\mathbb{R}:\forall t\geq 0,y(t)=t+B$. On en déduit que si y existait, elle admettrait nécessairement une expression de la forme $y(t)=\begin{cases}A \text{ si } t<0\\ t+B \text{ si } t\geq 0\end{cases}$. Le problème est que $y'(0^-)=0$ et $y'(0^+)=1$ donc y n'est pas dérivable en 0. Le mieux que l'on puisse faire est de rendre y continue en 0 en posant A=B. Dans ce cas, la fonction y est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en tout point

différent de 0 et vérifie la relation $y'(t)=U(t)$ pour tout t différent de 0.

Plus généralement :

On dira alors que $y(t)$ est une solution de $a\,y'(t)+b\,y(t)=f(t)$ si :

(i) La fonction $t \rightarrow y(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier et est dérivable en tout point où f est continue.

(ii) l'égalité $a\,y'(t)+b\,y(t)=f(t)$ est vérifiée pour toute valeur de t où f est continue (c'est à dire partout sauf en un nombre fini de points).

Tous les résultats vus précédemment sont encore valables dans ce cas : les Théorèmes 1,4 ,5 et la propriété 1 s'adaptent sans problème .

On s'intéresse dans un second temps à l'équation différentielle $a\,y''(t)+b\,y'(t)+c\,y(t)=f(t)$, dans le cas où f est seulement continue par morceaux. On ne peut non plus affirmer que la fonction $y(t)$ est deux fois dérivable....

On dira alors que $y(t)$ est une solution de $a\,y''(t)+b\,y'(t)+c\,y(t)=f(t)$ si :

(i) Les fonctions $y(t)$ et $y'(t)$ sont respectivement dérivables et continues sur $\mathbb{R}$ tout entier et la fonction $t \rightarrow y'(t)$ est dérivable en tout point où f est continue.

(ii) l'égalité $a\,y''(t)+b\,y'(t)+c\,y(t)=f(t)$ est vérifiée pour toute valeur de t où f est continue (c'est à dire partout sauf en un nombre fini de points).

Tous les résultats vus précédemment sont encore valables dans ce cas. Les Théorèmes 2,3,4 ,5 et la propriété 1 s'adaptent sans problème à cette définition.

Exemple : $y'(t)+y(t)=U(t)$. Sur $]-\infty;0[$, $y(t)$ est solution de $y'(t)+y(t)=0$. Elle est donc de la forme $y(t)=A\,e^{-t}$ pour $t<0$.
Si $t\geq 0$, $y(t)$ est solution de $y'(t)+y(t)=1$. Une solution particulière est la fonction constante $y_p(t)=1$ donc on a $y(t)=1+B\,e^{-t}$ pour $t>0$. La continuité de $y(t)$ en 0 impose que $A=B+1$ donc $B=A-1$. Les solutions $y(t)$ sont donc de la forme :
$y(t)=\begin{cases} Ae^{-t} & \text{si } t<0 \\ 1+(A-1)e^{-t} & \text{si } t\geq 0 \end{cases}$. Remarquons que le théorème 3 de structure est encore valable avec $y_p(t)=(1-e^{-t})U(t)$, et qu'une condition initiale détermine A , donc $y(t)$, de façon unique.

V.2) Principe de superposition des solutions

Certains seconds membres sont assez compliqués : dans ce cas la stratégie est « diviser pour mieux régner » !

Propriété 2. Supposons que y_{p_1} et y_{p_2} soient des solutions particulières de $a\,y'(t)+b\,y(t)=f_1(t)$ et $a\,y'(t)+b\,y(t)=f_2(t)$ respectivement. Alors, la fonction $y_{p_1}+y_{p_2}$ est une solution particulière de $a\,y'(t)+b\,y(t)=f_1(t)+f_2(t)$. Même chose pour le second ordre.

Exemple : $y'(t)+y(t)=1+2\cos(t)$. Alors on cherche une solution particulière $y_{p1}(t)$ de $y'+y=1$ et une solution particulière $y_{p2}(t)$ de $y'+y=2\cos(t)$. On trouve $y_{p1}(t)=1$ et $y_{p2}(t)=\cos(t)+\sin(t)$. On obtient alors une solution particulière de l'équation de départ $y_p(t)=1+\cos(t)+\sin(t)$.

V.3) Coefficients non constants (EDO1)

On considère l'équation différentielle $\alpha(t)y'(t)+\beta(t)y(t)=f(t)$ où $\alpha(t),\beta(t)$ et $f(t)$ sont trois fonctions continues. Si $\alpha(t)\neq 0$ sur un intervalle I, on peut, par division de l'équation par $a(t)$, se ramener à une équation de la forme : $y'(t)+a(t)y(t)=f(t)$ (avec un $f(t)$ différent). On peut démontrer le théorème suivant dans le cas où $f=0$:

Théorème 6 : Soit l'équation différentielle $y'(t)+a(t)y(t)=0,\ t\in I$, avec $a(t)$ une fonction continue sur I. Alors, l'ensemble des solutions est donné par la formule $y(t)=C\,e^{-A(t)}$, où $A(t)$ est une primitive de la fonction $a(t)$ (c'est à dire que $A'(t)=a(t)$.)

Remarques :
(i) le résultat ne dépend pas du choix de la primitive $A(t)$ qui, on le rappelle est définie à une constante près.. En effet, si on prenait par exemple $A(t)+1$ à la place de $A(t)$ (en prenant donc 1 pour constante additive) , on obtiendrait que l'ensemble des solutions est donné par la formule
$y(t)=C\,e^{-A(t)-1}=\left(C\,e^{-1}\right)e^{-A(t)}$: on retrouverait alors le même ensemble de solutions, à savoir toutes les fonctions proportionnelles à $t\rightarrow e^{-A(t)}$.
(ii) il faut bien comprendre que ce théorème est une généralisation du théorème 1. En effet, l'équation différentielle $a\,y'(t)+b\,y(t)=0$ se ramène à $y'(t)+\frac{b}{a}y(t)=0$. Ainsi, on peut appliquer le théorème 6 avec la fonction constante $a(t)=\frac{b}{a}$ et $I=\mathbb{R}$. On choisit $A(t)=\frac{b}{a}t$ et du coup,
$y(t)=C\,e^{-A(t)}=C\,e^{\frac{-b}{a}t}$: on retrouve bien le résultat du théorème 1.
On ne sera donc pas étonné de voir que la preuve du théorème 6 suit de près cette du théorème 1.

<u>Preuve :</u>
Si $y(t)$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ on pose $z(t)=e^{A(t)}y(t)$. Alors $z(t)$ est une fonction dérivable de dérivée :
$z'(t)=\left(e^{A(t)}y(t)\right)'=e^{A(t)}.\left(y(t)\right)'+y(t).\left(e^{A(t)}\right)'$ (dérivée d'un produit)
$z'(t)=e^{A(t)}.y'(t)+y(t).a(t)e^{A(t)}=e^{A(t)}\left(y'(t)+a(t)y(t)\right)$.

Cette dernière relation prouve que y est solution de l'équation différentielle $y'(t)+a(t)y(t)=0$ **si et seulement si** $\forall t\in\mathbb{R},\ z'(t)=0$ car le terme $e^{A(t)}$ n'est jamais nul. La condition
$\forall t\in\mathbb{R},\ z'(t)=0$ équivaut à ce que la fonction $z(t)$ soit constante sur $\mathbb{R}$. On en déduit :
$\forall t\in\mathbb{R},\ y'(t)+a(t)y(t)=0\Leftrightarrow\exists C\in\mathbb{R}:z(t)=C\Leftrightarrow\exists C\in\mathbb{R}:e^{A(t)}y(t)=C$
$\Leftrightarrow\exists C\in\mathbb{R}:y(t)=\frac{C}{e^{A(t)}}=C\,e^{-A(t)}$.

Dans le cas général, on a le :

Théorème 7 : Soit l'équation différentielle $y'(t)+a(t)y(t)=f(t),\ t\in I$, avec $a(t)$ et $f(t)$ deux fonctions continues sur I.
Alors, il existe une solution particulière $y_p(t)$ de cette équation et l'ensemble des solutions est donné par la formule $y(t)=C\,e^{-A(t)}+y_p(t)$, où $A(t)$ est une primitive de la fonction $a(t)$ et C une constante arbitraire. La donnée d'une condition initiale permet de déterminer la constante C (donc la solution $y(t)$) de façon unique.

Remarques :

(i) La preuve, que nous ne développerons pas ici, suit de près celle du Théorème 5 et de la propriété 1.
(ii) Plus que le calcul de la primitive $A(t)$, c'est l'obtention d'une solution particulière qui pose en général problème. On peut utiliser la méthode de variation de la constante, c'est à dire chercher une solution particulière de la forme $y_p(t)=u(t)e^{-A(t)}$ où u est une fonction à déterminer.

Exemple : résoudre $t\,y'(t)+(1+t)y(t)=1,\ \ t>0$ avec la condition initiale $y(1)=2.$

Par division de l'équation par t pour $t\in I=]0;+\infty[$, on obtient l'équation :

$$y'(t)+\left(1+\frac{1}{t}\right)y(t)=\frac{1}{t},\ \ t>0\ .$$

On a donc $a(t)=1+\frac{1}{t},$ et on prend $A(t)=t+\ln(t).$

La famille de solutions de l'équation homogène est donc $y(t)=C\,e^{-t-\ln(t)}=C\,e^{-t}e^{-\ln(t)}=\frac{C}{t}e^{-t}.$

On cherche maintenant une solution particulière de la forme

$$y_p(t)=u(t)e^{-A(t)}=u(t)e^{-t-\ln(t)}=\frac{u(t)}{t}e^{-t}.$$

On a $y'_p(t)=\left(u(t)e^{-A(t)}\right)'=u'(t)e^{-A(t)}-a(t)e^{-A(t)}u(t)=(u'(t)-a(t)u(t))e^{-A(t)}$. Donc

$$y'_p(t)+a(t)y_p(t)=\frac{1}{t}\Leftrightarrow u'(t)e^{-A(t)}-a(t)e^{-A(t)}u(t)+a(t)e^{-A(t)}u(t)=\frac{1}{t}$$

$$\Leftrightarrow u'(t)e^{-A(t)}=\frac{1}{t}$$

$$\Leftrightarrow u'(t)=\frac{e^{A(t)}}{t}=\frac{e^{t+\ln(t)}}{t}=\frac{te^{t}}{t}=e^{t}.$$

On prend pour $u(t)$ une primitive de e^t donc on choisit $u(t)=e^t$ ce qui donne

$y_p(t)=\frac{u(t)}{t}e^{-t}=\frac{e^t}{t}e^{-t}=\frac{1}{t}.$ L'ensemble des solutions est donc donné par

$y(t)=\frac{1}{t}+\frac{C}{t}e^{-t}=\frac{1+C\,e^{-t}}{t}.$ La condition initiale donne $y(1)=1+C\,e^{-1}=2$ ce qui donne

$C=e^1$. On en déduit que $y(t)=\frac{1+e^{1-t}}{t}.$

Remarque : le cas des équations linéaires d'ordre 2 à coefficients variables est beaucoup plus complexe que celui des équations linéaires d'ordre 1. En particulier, si le Théorème 2 peut se généraliser facilement par le Théorème 6, il n'en n'est pas de même pour le Théorème 3.

VI) Exercices

Exercice 1 Résoudre les équations différentielles :

1) $2y'(t)+3y(t)=0$
2) $y'(t)+3y(t)=4e^{-3t}$ (on cherchera une solution particulière sous la forme $y_p(t)=u(t)e^{-3t}$ avec $u(t)$ polynomiale).
3) $y'(t)-4y(t)=2\sin(2t)$, $y(0)=1$ (on cherchera une solution particulière sous la forme $y_p(t)=A\cos(2t)+B\sin(2t)$ avec $A\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{R}$).

Exercice 2

On considère l'équation différentielle (E) : $y'(t)+4y(t)=f(t)$ pour $t\in[0;+\infty[$, avec la condition initiale $y(0)=-2$, et le second membre $f(t)$ défini par $f(t)=\sin(2t)\Pi_{0,\pi}(t)$ où $\Pi_{0,\pi}$ est la fonction porte de hauteur 1 et basée sur l'intervalle $[0;\pi]$.
Résoudre (E) (on cherchera une solution particulière sur $[0;\pi]$ de la forme $y_p(t)=A\cos(2t)+B\sin(2t)$ avec $A\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{R}$).

Exercice 3

Soit l'équation différentielle $y'(t)+y(t)=\frac{t}{(t+1)^2}$ pour $t\in[0;+\infty[$.

1) Montrer que la fonction $u(t)=\frac{1}{t+1}$ est une solution particulière de l'équation.
2) En déduire la solution qui vérifie la condition initiale $y(0)=0$.

Exercice 4

Soit l'équation différentielle (E) : $y'(t)+4y(t)=e^{-2t}\sin(t)$ pour $t\in[0;+\infty[$. Le but de cet exercice est d'en trouver une solution particulière.

On pose $y(t)=u(t)e^{-2t}$.

1) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.
2) Trouver une solution à l'équation différentielle trouvée au 1) sous la forme $u(t)=A\cos(t)+B\sin(t)$. En déduire une solution particulière de (E).

Exercice 5

Trouver une solution particulière sous la forme $y(t)=u(t)e^{-t}$ à l'équation différentielle $y'(t)+y(t)=\frac{e^{-t}}{t}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Exercice 6

Résoudre l' équation différentielle :

$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=te^{-3t}$ avec la condition initiale $y(0)=1,\ y'(0)=0$. On cherchera une solution particulière de la forme $y_p(t)=u(t)e^{-3t}$, où $u(t)$ est une fonction polynomiale.

Exercice 7

Soit l'équation différentielle $(E)\quad y''(t)-5y'(t)=0$.

1) Etablir l'expression de la solution générale de *(E)* .
2) Etablir l'expression de la solution $f(t)$ de *(E)* vérifiant les conditions initiales $f(0)=1,\ f'(0)=3$. Calculez $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)$
3) Soit $g(t)$ une solution de *(E)* vérifiant $g(0)=1$. On pose $\alpha=g'(0)$.
   a) Exprimez $g(t)$ à l'aide du paramètre α.
   b) Comment choisir α pour que l'on ait $\lim\limits_{t\to-\infty} g(t)=9$?

Exercice 8

Soit l'équation différentielle $(E)\ :\ y''(t)+6y'(t)+9y(t)=5\cos(3t)$.

1) Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2) Trouver une solution particulière de la forme $y_p(t)=A\cos(3t)+B\sin(3t)$.
3) Trouver la solution de (E) qui vérifie les conditions initiales $y(0)=0,\ y'(0)=3$.
4) Soit $y_0(t)$ la solution trouvée à la question précédente. Montrer que $y_0(t)$ peut être considérée comme sinusoïdale lorsque t tend vers l'infini.

Exercice 9

Résoudre $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=e^{-3t}$ avec les conditions initiales $y(0)=y'(0)=0$. (on cherchera une solution particulière de la forme $y_p(t)=ke^{-3t},\quad k\in\mathbb{R}$.)

Exercice 10 *(Comportement à l'infini des solutions d'une EDO2)*

Soit $a>0$.

1) Soit $z\in\mathbb{C}$ une solution de l'équation $X^2+aX+1=0$. Montrer que z est soit une réel strictement négatif, soit un nombre complexe non réel de partie réelle strictement négative.

2) Prouver que toutes les solutions de l'équation différentielle $y''(t)+ay'(t)+y(t)=0$ tendent vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

NB : le résultat s'étend à toutes les edo2 à coefficients strictement positifs, ce qui explique pourquoi en électronique, vous ne rencontrerez quasiment que des solutions qui tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 11

On considère l'équation différentielle d'inconnue $y(t)$ définie sur $]0;+\infty[$

$(E)\ :\ ty''(t)+2(1+t)y'(t)+2y(t)=0.$

1) Montrer que la fonction $\frac{1}{t}$ est solution de (E).
2) On pose $z(t)=t\,y(t)$.
   a) Montrer que $y(t)$ est solution de (E) si et seulement si $z''(t)+2z'(t)=0$.
   b) En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]0;+\infty[$.
3) Trouver la solution de (E) qui vérifie les conditions $y(1)=1$ et $y'(1)=0$.

Exercice 12

On considère l'équation différentielle $y''(t)+y'(t)-2y(t)=2t+1$.
Trouver la ou les solutions vérifiant $y(0)=0$ et $\lim_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{t^2}=0$. On cherchera la solution particulière sous la forme d'une fonction affine.

Exercice 13 *(Problème inverse)*

Trouver une équation différentielle homogène d'ordre 2, à coefficients constants ($ay''+by'+cy=0$) telle que :

1) e^{2x} et e^{-3x} soient solutions.
2) $e^{-4x}\sin(3x)$ soit solution
3) 2 et e^{-x} soient solutions
4) xe^{x} soit solution

(*)Exercice 14 *(équation différentielle non linéaire)*

Trouver toutes les fonctions u dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier et telles que
$\forall t\in\mathbb{R},\ u'(t)+2=e^{-u(t)}$ (On remarquera que les techniques du cours ne s'appliquent pas sur cette équation différentielle : travailler d'abord sur la fonction v définie par $v(t)=e^{u(t)}$).
Pour quelles valeurs du paramètre réel a existe-t-il une solution de condition initiale $u(0)=a$?

Exercice 15

Soit (E) l'équation différentielle : $y''(t)-4y'(t)+4y(t)=\frac{e^{2t}}{t^3}$, avec $t>0$.

1) Résoudre l'équation homogène associée à (E) .
2) Trouver une solution particulière sous la forme $y(t)=u(t)e^{2t}$.

Exercice 16

On considère deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système différentiel:
$2x'(t)+3x(t)=y(t)$ (1)
$2y'(t)+3y(t)=x(t)$ (2)

1) Résoudre ce système.
2) Trouver les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ sachant que $x(0)=-1$ et $y(0)=2$.

(*)Exercice 17

Soit l'équation différentielle (E) : $t\,y'(t)+(2t-1)y(t)=t^2$ pour $t\in\mathbb{R}$. On pose $z(t)=\dfrac{y(t)}{t}$ pour $t\neq 0$. .

1) Montrer que si $y(t)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, , alors, $z(t)$ est solution sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$ d'une équation différentielle d'ordre 1 que l'on précisera.
2) En déduire l'expression générale de $y(t)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18

On considère deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système différentiel:

$x'(t)+x(t)-2(y'(t)+y(t))=1$ (1)

$y'(t)+2y(t)+2(x'(t)+2x(t))=0$ (2)

avec les conditions initiales $x(0)=y(0)=0$.
On pose $X(t)=x(t)-2y(t)$.

1) a) A l'aide de l'équation (1) , trouver une edo1 vérifiée par $X(t)$.
   b) En déduire l'expression de $X(t)$ (on cherchera une solution particulière constante).
2) a) A l'aide de l'équation (2), trouver une edo1 vérifiée par $y(t)$.
   b) Trouver une solution particulière de l'équation différentielle trouvée à la question précédente sous la forme $y_p(t)=a+b\,e^{-t}$.
   c) En déduire l'expression de $y(t)$ puis celle de $x(t)$.

Exercice 19 *(problème de théorie du contrôle)*

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (E) : $y'(t)+y(t)=f(t)$ pour $t\in[0;+\infty[$, avec la condition initiale $y(0)=1$, et le second membre $f(t)$ défini par $f(t)=\alpha\Pi_{0,1}(t)$ où $\Pi_{0,1}$ est la fonction porte de hauteur 1 et basée sur l'intervalle $[0;1]$. On cherche une solution $y(t)$ continue sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$ (la non-continuité de $f(t)$ en 1 implique la non-dérivabilité de $y(t)$ en 1).

1) Résoudre (E) sur $[0;1]$ à l'aide du paramètre α (on cherchera une solution particulière constante).
2) En utilisant la continuité de $y(t)$ sur $[0;+\infty[$, trouvez l'expression de $y(t)$ sur $[1;+\infty[$.
3) Comment choisir le paramètre α pour amener la solution $y(t)$ à être nulle sur $[1;+\infty[$?

Remarque : on parle ici d'un problème de « contrôle » car, en agissant sur la valeur de α (la « commande »), on peut contrôler le comportement de la solution $y(t)$ sur $[1;+\infty[$ (ici, l'amener à être identiquement nulle sur cet intervalle).

(*)Exercice 20 (*analyse-synthèse pour une équation de Ricatti)*

On cherche à résoudre l'équation différentielle non linéaire (E) : $v'(t)-v(t)=-\dfrac{1}{2}v(t)^2$ avec la condition initiale $v(0)=\alpha>0$ donnée. Le but de l'exercice est de prouver qu'il existe (au moins) une fonction $v(t)$ solution au problème sur $[0;+\infty[$ et que cette solution est strictement positive.

Supposons qu'il existe une fonction $v(t)$ solution au problème sur $[0;+\infty[$ avec

$v(t)>0$. On pose $y(t)=\frac{1}{v(t)}$: la fonction $y(t)$ est donc bien définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.

a) Montrer que $y(t)$ est solution de l'équation différentielle :

(E') : $y'(t)+y(t)=\frac{1}{2}$.

b) En déduire l'expression de $y(t)$ sur $[0;+\infty[$ à l'aide du paramètre α .

c) Montrer que la solution $y(t)$ trouvée à la question précédente est toujours monotone (on discutera selon les valeurs de α)

d) Montrer que, pour la solution $y(t)$ trouvée à la question b), $\forall\alpha>0,\ \forall t\geq 0,\ y(t)>0$.

e) En déduire l'existence d'une fonction $v(t)$ strictement positive, solution au problème sur $[0;+\infty[$.

Exercice 21

Soit l'équation différentielle $y'(t)+4y(t)=2$.

1) Trouver une solution particulière constante de (E).
2) Résoudre l'équation différentielle en donnant l'expression de la solution générale.

Exercice 22 *(problème inverse)*

1) Trouver une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 qui admette comme solution la fonction $y(t)=3e^{-2t}$.
2) Trouver une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 qui admette comme solution la fonction $y(t)=3t\,e^{-2t}$.

Exercice 23

Soit l'équation différentielle $y''(t)-4y'(t)-5y(t)=3e^{-t}$.

1) Résoudre l'équation homogène associée.
2) Trouver une solution particulière de la forme $y_p(t)=at\,e^{-t}$, où a est un réel que l'on déterminera.
3) Trouver la solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales $y(0)=0,\quad y'(0)=-1$.

(*)Exercice 24 *(équation différentielle non linéaire)*

Soit y une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle $y'(t)=1-y(t)^2$. On suppose que $y(0)=2$ et que $y(t)>1$.

1) Montrer que $y'(t)\left(\frac{1}{y(t)+1}-\frac{1}{y(t)-1}\right)=2$.
2) En déduire, à l'aide de primitives, que $\ln\left(\frac{y(t)+1}{y(t)-1}\right)=2t+\ln(3)$.
3) Déduire du 2) l'expression de la fonction y sur $]0;+\infty[$.

Exercice 25

Résoudre les équations différentielles :

1) $2y'(t)+5y(t)=10e^{-t}$ avec la condition initiale $y(1)=0$.
2) $y''(t)+4y'(t)+5y(t)=0$ (pas de conditions initiales : on donnera la solution générale)
3) $y'(t)=\frac{t}{t^2+1}y(t)$ avec la condition initiale $y(1)=1$.
4) $(t+1)(t+2)y'(t)+t\,y(t)=1$ sur $]-1;+\infty[$

Exercice 26
Soit l'équation différentielle (E) : $y'(t)+4y(t)=2$.

1) a) Trouver la famille de solutions de l'équation différentielle (E).
   b) Déterminer $\lim\limits_{y\to+\infty} y(t)$ où $y(t)$ est une solution de (E).

   Soit $a\in\mathbb{R}$ et soit y_a l'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale $y_a(0)=a$.
2) a) Montrer que $y_a(t)=\frac{1}{2}+(a-\frac{1}{2})e^{-4t}$.
   b) Trouver a sachant que $y_a(1)=0$.

(*)Exercice 27
Soit y une solution d'une équation du second ordre $ay''(t)+by'(t)+cy(t)=0$ avec $a\neq 0$.
On suppose que

(i) $\exists t_0\in\mathbb{R}$ tel que y soit strictement décroissante sur $]-\infty;t_0]$ et strictement croissante sur $[t_0;+\infty]$
(ii) $y(t_0)<0$
(iii) $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t)=+\infty$.

Que vaut $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$?

VII) Corrigés

Exercice 1

1) $y(t)=A\,e^{\frac{-3}{2}t}$, $A\in\mathbb{R}$.
2) La fonction $y_p(t)=u(t)\,e^{-3t}$ est solution particulière si $u(t)=4t(+\text{ cste})$ d'où $y(t)=(4t+A)\,e^{-3t}$, $A\in\mathbb{R}$.
3) On obtient le système $\begin{cases}-4A+2B=0\\-2A-4B=2\end{cases}$ qui donne $A=\frac{-1}{5}$ et $B=\frac{-2}{5}$. On déduit $y(t)=\frac{-1}{5}\cos(2t)-\frac{2}{5}\sin(2t)+\frac{6}{5}e^{4t}$

Exercice 2

Sur $]-\infty;0]$, $y(t)=-2\,e^{-4t}$

Sur $[0;\pi]$, $y'(t)+4\,y(t)=\sin(2t)$, on trouve $\begin{cases}4A+2B=0\\-2A+4B=1\end{cases}$ qui donne $A=\frac{-1}{10}$ et $B=\frac{1}{5}$.

On déduit $y(t)=\frac{-1}{10}\cos(2t)+\frac{1}{5}\sin(2t)-\frac{19}{10}e^{-4t}$ avec la condition initiale $y(0)=-2$.

Sur $[\pi;+\infty[$, $y(t)=C\,e^{-4t}$ pour une certaine constante C. Le cas précédent donne

$y(\pi)=\frac{-1}{10}-\frac{19}{10}e^{-4\pi}$ d'où $\forall t\in[\pi;+\infty[$, $y(t)=\left(\frac{-e^{4\pi}}{10}-\frac{19}{10}\right)e^{-4t}$.

On a donc $y(t)=\begin{cases}-2\,e^{-4t} & \text{si } t\leqslant 0\\ \frac{-1}{10}\cos(2t)+\frac{1}{5}\sin(2t)-\frac{19}{10}e^{-4t} & \text{si } t\in[0;\pi]\\ \left(\frac{-e^{4\pi}}{10}-\frac{19}{10}\right)e^{-4t} & \text{si } t\geqslant\pi\end{cases}$.

Exercice 3

1) La fonction u est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $u'(t)+u(t)=\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}=\frac{t}{(t+1)^2}$.
2) On a $y(t)=\frac{1}{t+1}-e^{-t}$;

Exercice 4

1) $u'(t)+2\,u(t)=\sin(t)$.
2) On a $u(t)=\frac{-1}{5}\cos(t)+\frac{2}{5}\sin(t)$.

   D'où l'on déduit la solution particulière $y(t)=\frac{e^{-2t}}{5}\left(-\cos(t)+2\sin(t)\right)$.

Exercice 5

On obtient $y(t)=\ln(t)\,e^{-t}$, ou plus généralement $y(t)=(\ln(t)+C)\,e^{-t}$, $C\in\mathbb{R}$.

Exercice 6

Pour la solution particulière, on tombe sur la relation $u''(t)-2u'(t)=t$ qui nous permet de choisir $u(t)=\frac{-1}{4}(t^2+t)$ d'où $y_p(t)=\frac{-1}{4}(t^2+t)e^{-3t}$. La solution générale est de la forme $y(t)=\frac{-1}{4}(t^2+t)e^{-3t}+Ae^{-t}+Be^{-3t}$. Les conditions initiales donnent les relations $\begin{cases} A+B=1 \\ A+3B=\frac{-1}{4} \end{cases}$

qui donnent $B=\frac{-5}{8}$ et $A=\frac{13}{8}$.

On a donc $y(t)=\frac{1}{8}\left(13e^{-t}-(2t^2+2t+5)e^{-3t}\right)$.

Exercice 7

1) On obtient $y(t)=A+Be^{5t}$.
2) On a $f(t)=\frac{1}{5}\left(2+3e^{5t}\right)$ et $\lim_{t\to-\infty} f(t)=\frac{2}{5}$.
3)
   a) On a $g(t)=\frac{1}{5}\left((5-\alpha)+\alpha e^{5t}\right)$.
   b) On doit avoir $\alpha=-40$.

Exercice 8

1) On a $y_h(t)=(At+B)e^{-3t}$.
2) On obtient $\begin{cases} 18B=5 \\ -18A=0 \end{cases}$ donc $y_p(t)=\frac{5}{18}\sin(3t)$.
3) On a $y(t)=(At+B)e^{-3t}+\frac{5}{18}\sin(3t)$. Les conditions initiales donnent $B=0$ et $A=\frac{13}{6}$
4) On a $\lim_{t\to+\infty}(At+B)e^{-3t}=0$ donc $y_0(t)$ se rapproche de $y_p(t)=\frac{5}{18}\sin(3t)$ lorsque t tend vers l'infini.

Exercice 9

On trouve $y_p(t)=\frac{1}{2}e^{-3t}$ et $y(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}$. Les conditions initiales donnent

$\begin{cases} A+B=\frac{-1}{2} \\ A+2B=\frac{-3}{2} \end{cases}$ d'où $y(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}$.

Exercice 10

1) Si $a>2$, alors $\Delta>0$ et les deux racines réelles ont un produit égal à 1, donc elles sont non nulles de même signe, et de somme égale à – *a*, donc elles sont toute les deux négatives.

Si $a=2$, l'unique racine est $z=\frac{-a}{2}<0$.

Si $a<2$, les deux racines sont des nombres complexes conjugués de partie réelle égale à $\frac{-a}{2}<0$.

2) L'équation caractéristique est $X^2+aX+1=0$.
Si $a>2$, les deux racines α et β sont toute les deux négatives et $y(t)$ est de la forme $y(t)=Ae^{\alpha t}+Be^{\beta t}$ donc $\lim_{t\to+\infty} y(t)=0$ car $\alpha<0$ et $\beta<0$.

Si $a=2$, $y(t)$ est de la forme $y(t)=(A+Bt)e^{\frac{-a}{2}t}$ donc $\lim_{t\to+\infty} y(t)=0$ car $a>0$.

Si $0<a<2$, , $y(t)$ est de la forme $y(t)=e^{\frac{-a}{2}t}(A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t))$ où β est la valeur absolue de la partie imaginaire des racines de l'équation caractéristique. On a $|y(t)|\leqslant e^{\frac{-a}{2}t}(|A|+|B|)$ donc $\lim_{t\to+\infty} y(t)=0$ car $a>0$.

Exercice 11

1) Si l'on pose $f(t)=\frac{1}{t}$ on définit une fonction deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$\forall t>0,\ tf''(t)+2(1+t)f'(t)+2f(t)=\frac{2t}{t^3}-\frac{2(1+t)}{t^2}+\frac{2}{t}=0.$

2)

a) La fonction $t\to z(t)$ est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et
$z''(t)+2z'(t)=2y'(t)+ty''(t)+2y(t)+2ty'(t)=ty''(t)+(2+2t)y'(t)+2y(t)$
donc $y(t)$ est solution de (E) si et seulement si $z''(t)+2z'(t)=0$.

b) La fonction $y(t)$ est solution de (E) si et seulement si $z''(t)+2z'(t)=0$, c'est à dire, en résolvant cette dernière équation, si et seulement si
$\exists A\in\mathbb{R},\ \exists B\in\mathbb{R}\ :\ \forall t>0,\ z(t)=A+Be^{-2t}$, c'est à dire si et seulement si
$\exists A\in\mathbb{R},\ \exists B\in\mathbb{R}\ :\ \forall t>0,\ y(t)=\frac{A+Be^{-2t}}{t}$.

3) Les conditions $y(1)=1$ et $y'(1)=0$ sont équivalentes à $A+Be^{-2}=1$ et
$A+3Be^{-2}=0$, ce qui donne $A=\frac{3}{2}$ et $B=\frac{-1}{2}e^2$ d'où $\forall t>0,\ y(t)=\frac{3-e^{2(1-t)}}{2t}$.

Exercice 12

On trouve $y_p(t)=-t-1$ et $y_h(t)=Ae^t+B^{-2t}$ donc les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y(t)=Ae^t+B^{-2t}-t-1$. La condition $\lim_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{t^2}=0$ signifie que $A=0$ (croissances comparées). La condition $y(0)=0$ signifie que $B=1$. Il existe une unique solution au problème posé : $y(t)=e^{-2t}-t-1$.

Exercice 13

1) $y''+y'-6y=0$ ou toute équation proportionnelle.
2) $y''+8y'+25y=0$ ou toute équation proportionnelle.
3) $y''+y'=0$ ou toute équation proportionnelle.
4) $y''-2y'+y=0$ ou toute équation proportionnelle.

Exercice 14

Si u est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier et est telle que $\forall t\in\mathbb{R},\ u'(t)+2=e^{-u(t)}$, alors la fonction v définie par $v(t)=e^{u(t)}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier et $v'(t)=u'(t)e^{u(t)}=\left(e^{-u(t)}-2\right)e^{u(t)}=1-2v(t)$. On a alors $\forall t\in\mathbb{R},\ v'(t)+2v(t)=1$ donc v admet une expression de la forme $v(t)=\frac{1}{2}+Ae^{-2t}$. Puisque $\forall t\in\mathbb{R},\ v(t)=e^{u(t)}>0$, on déduit que $A\geqslant 0$ en faisant tendre t vers $-\infty$.

Il vient que : $\exists A\geqslant 0,\ \forall t\in\mathbb{R},\ u(t)=\ln\left(\frac{1}{2}+Ae^{-2t}\right)$.

Réciproquement, si $A\geqslant 0$, la fonction $u : t\in\mathbb{R}\to\ln\left(\frac{1}{2}+Ae^{-2t}\right)$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, et $\forall t\in\mathbb{R},\ u'(t)+2=\frac{-2\mathrm{A}e^{-2\mathrm{t}}}{\frac{1}{2}+Ae^{-2\mathrm{t}}}+2=\frac{1}{\frac{1}{2}+Ae^{-2t}}=e^{-\ln\left(\frac{1}{2}+Ae^{-2t}\right)}=e^{-u(t)}$.

On a $u(0)=\ln\left(A+\frac{1}{2}\right)$ donc puisque $A\geqslant 0$, il existe une solution de condition initiale $u(0)=a$ si et seulement si $a\geqslant-\ln(2)$. Cette restriction est due au fait que l'équation différentielle est non linéaire.

Exercice 15

1) On a $y_h(t)=(At+B)e^{2\mathrm{t}}$ où A et B sont deux constantes réelles.
2) Pour que y soit une solution particulière, il suffit que $u''(t)e^{2\mathrm{t}}=\frac{e^{2\mathrm{t}}}{t^3}$ ce qui permet de choisir $u(t)=\frac{1}{2t}$. Les solutions de (E) sont de la forme $y(t)=\left(At+B+\frac{1}{2t}\right)e^{2\mathrm{t}}$ où A et B sont deux constantes réelles.

Exercice 16

1) On injecte (2) dans (1) pour obtenir $2(2\mathrm{y}''(t)+3y'(t))+3(2\mathrm{y}'(t)+3y(t))=y(t)$ ce qui donne :

$4y''(t)+12y'(t)+8y(t)=0$,

c'est à dire $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=0$

On trouve alors que $y(t)=Ae^{-t}+Be^{-2\mathrm{t}}$ où A et B sont deux constantes réelles.

On a alors par (2) : $x(t)=Ae^{-t}-Be^{-2\mathrm{t}}$.

2) On résout le système $\begin{cases}A-B=-1\\A+B=2\end{cases}$ qui donne $x(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{3}{2}e^{-2\mathrm{t}}$ et $y(t)=\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2\mathrm{t}}$.

Exercice 17

1) Supposons que $y(t)$ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors la fonction z est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, et pour tout réel t non nul, on a $y(t)=tz(t)$, et $y'(t)=tz'(t)+z(t)$ donc pour tout réel t non nul :

$t^2=ty'(t)+(2\mathrm{t}-1)y(t)=t^2z'(t)+tz(t)+(2\mathrm{t}^2-t)z(t)=t^2(z'(t)+2z(t))$, donc en divisant par $t\neq 0$, on obtient $\forall t\neq 0,\ z'(t)+2\mathrm{z}(t)=1$.

2) Supposons que $y(t)$ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors, par la question précédente, $\forall t \neq 0,\ z'(t) + 2z(t) = 1$, d'où :

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall t > 0,\ z(t) = \frac{1}{2} + A e^{-2t},$$

$$\exists B \in \mathbb{R} : \forall t < 0,\ z(t) = \frac{1}{2} + B e^{-2t}.$$

On a alors :

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall t > 0,\ y(t) = \frac{t}{2} + A t e^{-2t},$$

$$\exists B \in \mathbb{R} : \forall t < 0,\ y(t) = \frac{t}{2} + B t e^{-2t}.$$

La fonction ainsi trouvée est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$ et prolongeable par continuité en 0 car $y(0^-) = y(0^+) = 0$. D'autre part, $y'(0^-) = \frac{1}{2} + B$, $y'(0^-) = \frac{1}{2} + A$: par le Théorème 4 du chapitre sur la dérivation, on doit avoir A=B pour que la fonction *y* soit dérivable en 0. On a donc

$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \frac{t}{2} + A t e^{-2t}$ pour une certaine constante A.

Réciproquement, pour tout réel A, la fonction $y : t \to \frac{t}{2} + A t e^{-2t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ t y'(t) + (2t-1) y(t) = t\left(\frac{1}{2} + A e^{-2t} - 2 A t e^{-2t}\right) + (2t-1)\left(\frac{t}{2} + A t e^{-2t}\right)$$
$$= t^2 + A e^{-2t}\left(t(1-2t) + t(2t-1)\right) = t^2.$$

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y(t) = \frac{t}{2} + A t e^{-2t}$.

Exercice 18

1) a) On a $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) + X(t) = 1$.

b) On en déduit que $X(t) = 1 + A e^{-t}$ pour une certaine constante $A \in \mathbb{R}$. Puisque $x(0) = y(0) = 0$, on en déduit que $X(0) = 0$ donc $X(t) = 1 - e^{-t}$.

2) a) Puisque $x(t) - 2y(t) = 1 - e^{-t}$ on déduit du (2) que :

$$y'(t) + 2y(t) + 2(2y'(t) + e^{-t} + 4y(t) + 2 - 2e^{-t}) = 0$$

d'où

$$5y'(t) + 10y(t) = -4 + 2e^{-t}.$$

b) Si l'on pose $y_p(t) = a + b e^{-t}$, on a $5y'(t) + 10y(t) = 10a + 5b e^{-t}$ donc par identification, on trouve $a = \frac{-2}{5}$ et $b = \frac{2}{5}$. On a alors $y_p(t) = -\frac{2}{5}(1 - e^{-t})$.

c) On a donc $y(t) = A e^{-2t} - \frac{2}{5}(1 - e^{-t})$ pour une certaine constante A. La condition initiale $y(0) = 0$ implique alors que A=0 donc $y(t) = -\frac{2}{5}(1 - e^{-t})$.

On a alors $x(t) = 2y(t) + 1 - e^{-t} = \frac{1}{5}(1 - e^{-t})$.

Exercice 19

1) On a sur $[0;1]$ la relation $y'+y=\alpha$. On en déduit, par la condition initiale que $y(t)=\alpha-(\alpha-1)e^{-t}$
2) On a sur $[1;+\infty[$ la relation $y'+y=0$. On en déduit que y admet une expression de la forme $y(t)=Ae^{-t}$. La continuité de y en 1 implique que $y(1^-)=y(1^+)$ donc $\alpha-(\alpha-1)e^{-1}=Ae^{-1}$ d'où l'on déduit $\forall t\geqslant 1,\ y(t)=(\alpha e-(\alpha-1))e^{-t}$.
3) La solution $y(t)$ est nulle sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $\alpha e-(\alpha-1)=0$, c'est à dire $\alpha=\dfrac{1}{1-e}$.

Exercice 20 (*analyse-synthèse)*

a) On a $y'(t)=\dfrac{-v'(t)}{v^2(t)}$ donc $y'(t)+y(t)=\dfrac{-v'(t)}{v^2(t)}+\dfrac{1}{v(t)}=\dfrac{v(t)-v'(t)}{v^2(t)}=\dfrac{\frac{1}{2}v^2(t)}{v^2(t)}=\dfrac{1}{2}$.

b) La fonction y admet une expression de la forme $y(t)=\dfrac{1}{2}+Ae^{-t}$ de par la relation *(E')*. La condition initiale $y(0)=\dfrac{1}{v(0)}=\dfrac{1}{\alpha}$ donne $y(t)=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{2}\right)e^{-t}$.

c) Si $\alpha\in]0;2[$, on a $\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{2}>0$ donc y est strictement décroissante.

Si $\alpha=2$ on a $\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{2}=0$ donc y est constante (donc monotone).

Si $\alpha\in]0;+\infty[$, on a $\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{2}<0$ donc y est strictement croissante.

d) Si $\alpha\in]0;2[$, on a y strictement décroissante. Puisque $y(+\infty)=\dfrac{1}{2}$, cela implique que $\forall t\geq 0,\ y(t)>\dfrac{1}{2}>0$.

Si $\alpha=2$ on a y constante, égale à $\dfrac{1}{2}>0$.

Si $\alpha\in]0;+\infty[$, on a y strictement croissante. Puisque $y(0)=\dfrac{1}{\alpha}$, on a $\forall t\geq 0,\ y(t)>\dfrac{1}{\alpha}>0$.

e) **(Analyse)** Si il existe une fonction $v(t)$ strictement positive, solution au problème sur $[0;+\infty[$, par ce qui précède, $\forall t>0, \dfrac{1}{v(t)}=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{2}\right)e^{-t}$ donc $\forall t>0,\ v(t)=\dfrac{2\alpha}{\alpha+(2-\alpha)e^{-t}}$.

(Synthèse) Réciproquement, pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction y définie pour $t > 0$ par l'expression $y(t)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)e^{-t}$ est strictement positive (question d) donc la fonction v définie par l'expression $v(t)=\frac{1}{y(t)}$ est bien définie, et dérivable, sur $]0;+\infty[$ et

$$v'(t)-v(t)+\frac{1}{2}v(t)^2=\frac{-y'(t)}{y^2(t)}-\frac{1}{y(t)}+\frac{\frac{1}{2}}{y^2(t)}=\frac{-y'(t)-y(t)+\frac{1}{2}}{y^2(t)}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)e^{-t}-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)e^{-t}+\frac{1}{2}}{y^2(t)}=0$$

d'où le fait que la fonction v définie par $\forall t > 0,\ v(t)=\frac{2\alpha}{\alpha+(2-\alpha)e^{-t}}$ est bien solution de (E) avec la condition initiale $v(0)=\alpha > 0$.

Exercice 21

1) On trouve $y_p(t)=\frac{1}{2}$.
2) On a $y(t)=\frac{1}{2}+A\,e^{-4t}$ pour une certaine constante A.

Exercice 22

1) $y'(t)+2\,y(t)=0$ et toute équation proportionnelle.
2) $y''(t)+4\,y'(t)+4\,y(t)=0$ et toute équation proportionnelle.

Exercice 23

1) $y(t)=A^{-t}+B\,e^{5t}$
2) On a $y'_p(t)=a(1-t)e^{-t}$ et $y_p''(t)=a(t-2)e^{-t}$ donc y_p est une solution particulière si et seulement si $-6a\,e^{-3t}=3\,e^{-3t}$ d'où $y_p(t)=\frac{-1}{2}t\,e^{-t}$
3) On a alors $y(t)=\left(A-\frac{t}{2}\right)e^{-t}+B\,e^{5t}$ et $y'(t)=\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}-A\right)e^{-t}+5\,B\,e^{5t}$ d'où l'on déduit par les conditions initiales : $\begin{cases} A+B=0 \\ -A+5\,B=\frac{-1}{2} \end{cases}$ d'où $A=\frac{1}{12}$ et $B=-\frac{1}{12}$.

$$y(t)=\frac{1}{12}\left((1-6\,t)e^{-t}-e^{5t}\right)$$

Exercice 24

1) Puisque $\forall t \geqslant 0,\ y(t) > 1$ l'expression $y'(t)\left(\frac{1}{y(t)+1}-\frac{1}{y(t)-1}\right)$ a bien un sens et

$\forall t \geqslant 0,\ y'(t)\left(\frac{1}{y(t)+1}-\frac{1}{y(t)-1}\right)=\frac{2\,y'(t)}{y^2(t)-1}=2$ de par la relation $y'(t)=1-y(t)^2$.

2) On a $\forall t \geqslant 0,\ 2=\frac{y'(t)}{y(t)+1}-\frac{y'(t)}{y(t)-1}$ ce qui donne en primitivant sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

$\exists C \in \mathbb{R} : \forall t \geqslant 0,\ 2t=\ln(y(t)+1)-\ln(y(t)-1)+C$.

En posant $t=0$, on a $0=\ln(y(0)+1)-\ln(y(0)-1)+C=\ln(3)+C$ d' où $C=-\ln(3)$.

On a donc $\forall t \geqslant 0,\ 2t=\ln(y(t)+1)-\ln(y(t)-1)-\ln(3)=\ln\left(\frac{y(t)+1}{y(t)-1}\right)-\ln(3)$

d'où la relation : $\ln\left(\frac{y(t)+1}{y(t)-1}\right)=2t+\ln(3)$.

3) On a donc $\frac{y(t)+1}{y(t)-1}=3e^{2t}$ d'où l'on déduit $\forall t \geqslant 0,\ y(t)=\frac{3e^{2t}+1}{3e^{2t}-1}$.

On vérifie que $y(0)=2$, que y est dérivable et :

$\forall t \geqslant 0,\ y'(t)=\frac{-12e^{2t}}{(3e^{2t}-1)^2}$,

$\forall t \geqslant 0,\ 1-y^2(t)=1-\left(\frac{3e^{2t}+1}{3e^{2t}-1}\right)^2=\left(1-\frac{3e^{2t}+1}{3e^{2t}-1}\right)\left(1+\frac{3e^{2t}+1}{3e^{2t}-1}\right)=\frac{-2}{3e^{2t}-1}\cdot\frac{6e^{2t}}{3e^{2t}-1}=\frac{-12e^{2t}}{(3e^{2t}-1)^2}$

ce qui prouve la relation $y'(t)=1-y(t)^2$.

Exercice 25

1) On a $y_h(t)=Ae^{-\frac{5}{2}t}$, $y_p(t)=\frac{10}{3}e^{-t}$ donc $y(t)=Ae^{-\frac{5}{2}t}+\frac{10}{3}e^{-t}$. La condition $y(1)=0$ donne $A=-\frac{10}{3}e^{\frac{3}{2}}$, d'où $y(t)=\frac{10}{3}\left(e^{-t}-e^{\frac{3-5t}{2}}\right)$.

2) $y(t)=e^{-2t}(A\cos(t)+B\sin(t))$.

3) On applique le Théorème 6 avec $a(t)=\frac{-t}{t^2+1}$. On obtient $y(t)=Ae^{\frac{1}{2}\ln(t^2+1)}=A\sqrt{t^2+1}=\sqrt{\frac{t^2+1}{2}}$ avec la condition initiale.

4) On résout l'équation homogène en la réécrivant sur $]-1;+\infty[$ sous la forme $y'(t)+\frac{t}{(t+1)(t+2)}y(t)=0$. On applique le Théorème 6 avec $a(t)=\frac{t}{(t+1)(t+2)}=\frac{2}{t+2}-\frac{1}{t+1}$. On en déduit $A(t)=2\ln(t+2)-\ln(t+1)$ et $y_h(t)=Ce^{-A(t)}=C\frac{t+1}{(t+2)^2}$ pour une certaine constante C.

En vue cette fois d'appliquer le Théorème 7, on cherche maintenant une solution particulière de la forme $y_p(t)=u(t)e^{-A(t)}$. (pas la peine ici d'expliciter la fonction $A(t)$.)

On a $y'_p(t)=\left(u(t)e^{-A(t)}\right)'=u'(t)e^{-A(t)}-a(t)e^{-A(t)}u(t)$ donc

$y'_p(t)+a(t)y_p(t)=\frac{1}{(t+1)(t+2)} \Leftrightarrow u'(t)e^{-A(t)}=\frac{1}{(t+1)(t+2)}$

$\Leftrightarrow u'(t)\frac{t+1}{(t+2)^2}=\frac{1}{(t+1)(t+2)} \Leftrightarrow u'(t)=\frac{t+2}{(t+1)^2}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}$.

On peut alors choisir $u(t)=\ln(t+1)-\frac{1}{t+1}$.

On a donc $y_p(t)=u(t)e^{-A(t)}=\frac{t+1}{(t+2)^2}\ln(t+1)-\frac{1}{(t+2)^2}$ d'où la solution générale de l'équation :

$y(t)=\frac{(t+1)(C+\ln(t+1))-1}{(t+2)^2}$ pour une certaine constante C.

Exercice 26

1) a) $y(t)=\frac{1}{2}+Ce^{-4t}$ pour C réel arbitraire.

b) On a toujours $\lim_{y\to+\infty} y(t)=\frac{1}{2}$.

2) a) On a $y(t)=\frac{1}{2}+Ce^{-4t}$ donc $y_a(0)=a\Leftrightarrow C=a-\frac{1}{2}$ d'où $y_a(t)=\frac{1}{2}+(a-\frac{1}{2})e^{-4t}$

b) On a $0=y_a(1)=\frac{1}{2}+\left(a-\frac{1}{2}\right)e^{-4}$ d'où $a=\frac{1}{2}(1-e^4)$.

Exercice 27

Remarquons que y n'est pas la fonction nulle.
L'équation caractéristique vaut $aX^2+bX+c=0$. Posons $\Delta=b^2-4ac$.

Si $\Delta<0$, la fonction y admet une expression de la forme $y(t)=e^{\alpha t}(A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t))$. La fonction y, étant non identiquement nulle, change donc de signe sur tout voisinage de $-\infty$ (car elle est du même signe que la fonction sinusoïdale non nulle $t\to A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t)$) ce qui contredit $\lim_{t\to-\infty} y(t)=+\infty$. Ce cas là est donc impossible.

Si $\Delta=0$, la fonction y admet une expression de la forme $y(t)=e^{\alpha t}(A+Bt)$. D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, les points (ii) et (iii) impliquent que la fonction y s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ donc $B\neq0$. Par le principe des croissances comparées, le point (iii) implique que $\lim_{t\to-\infty} e^{\alpha t}=+\infty$ donc $\alpha<0$. On déduit alors toujours du principe des croissances comparées que $\lim_{t\to+\infty} y(t)=0$.

Si $\Delta>0$, la fonction y admet une expression de la forme $y(t)=Ae^{\alpha t}+Be^{\beta t}$ où α et β sont les racines de l'équation caractéristique. Puisque la fonction y s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, on a A et B non nuls et de signes opposés. Quitte à échanger les rôles de α et β, on peut supposer que $B<0<A$. On a alors $y(t)\leqslant Ae^{\alpha t}$ donc par le point (iii), $\lim_{t\to-\infty} Ae^{\alpha t}=+\infty$, ce qui ne peut arriver que si $\alpha<0$. On a par le point (i) $\forall t\geqslant t_0,\ y'(t)\geqslant0$ donc $\forall t\geqslant t_0,\ \alpha Ae^{\alpha t}+\beta Be^{\beta t}\geqslant0$ d'où $\forall t\geqslant t_0,\ \beta Be^{\beta t}\geqslant-\alpha Ae^{\alpha t}>0$ car $\alpha<0<A$. Puisque $B<0$ on en déduit que $\beta<0$. Les réels α et β étant strictement négatifs, on en déduit que $\lim_{t\to+\infty} y(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(Ae^{\alpha t}+Be^{\beta t}\right)=0$.

E - INTÉGRATION

La notion d'intégrale est centrale en théorie du signal. D'une part, elle permet de définir mathématiquement les transformées de Fourier et de Laplace (utilisées par exemple en traitement du signal et en automatique), et d'autre part, l'intégrale est à la base des calculs, d'aire, de valeur moyenne d'une fonction et d'énergie.

I) Primitives d'une fonction continue

I.1) Généralités

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Définition 1 : on appelle primitive de f sur I toute fonction dérivable F sur I telle que $F'(t)=f(t)$.

Prenons un cas concret : on considère un point mobile qui se déplace sur un axe $(O,\vec{i})$ et qui est situé à l'abscisse $x(t)$ à l'instant t . Supposons connue sa vitesse $x'(t)$ à chaque instant t. Alors, pour trouver la position du point à l'instant t, on est amené à trouver une primitive de la fonction $t \rightarrow x'(t)$. Le problème, comme on va le voir ci-dessous, c'est qu'une fonction n'admet généralement pas qu'une seule primitive, mais moyennant une condition supplémentaire sur la fonction $t \rightarrow x(t)$ (à savoir une « condition initiale ») on peut néanmoins, dans l'exemple cité, retrouver la fonction $t \rightarrow x(t)$ à partir de la connaissance de la fonction $t \rightarrow x'(t)$. Ainsi, si vous êtes en voiture, et si vous connaissez à chaque instant votre vitesse instantanée, vous connaissez exactement (en théorie) la distance que vous avez parcourue (moyennant de savoir calculer une intégrale!) : le compteur kilométrique est en quelque sorte un intégrateur du compteur de vitesse !

Théorème 1 :
(i) toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.
(ii) Elle en possède en fait une infinité, mais ses primitives diffèrent toutes d'une constante.

<u>Preuve du point (ii)</u>
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Alors, quel que soit $C \in \mathbb{R}$, l'application $t \rightarrow F(t)+C$ a encore pour dérivée la fonction f : il y a donc une infinité de primitives de f. Enfin, si F_1 et F_2 sont deux primitives de la fonction f sur I, alors la fonction $F_1 - F_2$ est dérivable de dérivée nulle sur I : elle est donc constante, ce qui signifie que toutes les primitives de f sont égales à une constante additive près.
Le point (i) est pour le moment admis et fera l'objet du paragraphe suivant.

Le théorème 1 dit donc que l'ensemble des primitives d'une fonction f sur un intervalle I est une famille de fonctions égales à une constante additive près. Moyennant une condition initiale, on peut choisir de façon unique une seule primitive parmi cette famille infinie :

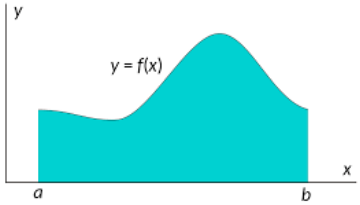
Propriété 1 (condition initiale): Soit $x_0 \in I$, et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors, f possède une seule primitive F vérifiant la condition $F(x_0)=y_0$.

Preuve : Soit F_0 une primitive de *f*. Alors, si F est une primitive quelconque de *f*, il existe une constante C telle que $\forall t \in I, F(t) = F_0(t) + C$. On a ainsi
$F(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F_0(x_0) + C = y_0 \Leftrightarrow C = y_0 - F_0(x_0)$.
Cela montre que la constante C ne peut prendre qu'une seule valeur, donc *f* possède une seule primitive F vérifiant la condition $F(x_0) = y_0$.

I.2) (*) Existence d'une primitive pour une fonction continue

L'objet de ce paragraphe est d'expliquer pourquoi une fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Soient deux réels $a < b$. Considérons, dans un premier temps, une fonction f continue et strictement positive sur l'intervalle $[a;b]$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (c'est à dire un repère dont les deux vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de directions orthogonales et de norme 1). Considérons *(S)* la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, et la courbe (C) :



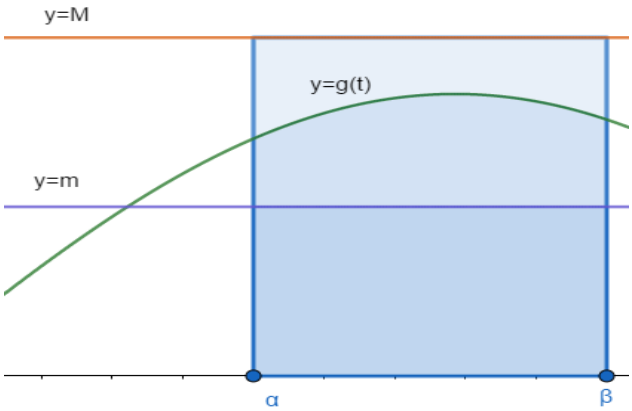
Nous aimerions pouvoir considérer l'aire de cette portion du plan, mais cela pose un problème, car en dehors de cas très particuliers comme celui, par exemple, où la fonction *f* est constante sur $[a;b]$, il est difficile de définir ce qu'est cette aire, même si, intuitivement, on peut en donner un sens. Une approche possible est de quadriller cette surface en petit carrés de côtés ε très petit, compter le nombre de ces carré inclus dans *(S)*, et le multiplier par ε^2, l'aire de chacun de ces carrés, pour obtenir une valeur approchée par défaut de l' aire de *(S)*. C'est l'idée utilisée par les mathématiciens pour définir la notion d'aire, mais la justification rigoureuse de cette démarche est assez difficile. Nous ne la ferons pas et admettrons qu'on peut définir l'aire de *(S)* dans le cas où *f* est continue et strictement positive.

Considérons à nouveau une fonction $t \to f(t)$ continue et strictement positive sur l'intervalle $[a;b]$ (remarquer que l'on nomme cette fois *t* sa variable, pour des raisons de commodité qui apparaîtront ultérieurement).
Pour $x \in [a;b]$, considérons $A(a,x)$ l'aire de la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $t = a$ et $t = x$, et la courbe (C) :
On va prouver que la fonction $x \to A(a,x)$ est dérivable de dérivée $A'(a,x) = f(x)$, ce qui nous fournira une primitive de la fonction *f*.

Pour cela, on aura besoin du :

Lemme Soient $\alpha < \beta$ et soit g une fonction continue sur $[\alpha;\beta]$ et à valeurs dans $]0;+\infty[$. Soit A l'aire de la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $t = \alpha$ et $t = \beta$, et la courbe représentative de *g* dans un repère orthonormé.
Alors, si l'on a l'encadrement $\forall t \in [\alpha;\beta],\ m \leq g(t) \leq M$, on a : $m(\beta - \alpha) \leq A \leq M(\beta - \alpha)$.

Ce résultat découle simplement du fait que la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $t = \alpha$ et $t = \beta$, et la courbe représentative de *g* est comprise au sens de l'inclusion entre les deux rectangles de base l'intervalle $[\alpha,\beta]$ et de hauteurs respectives *m* et *M* :



Soit x fixé dans $[a;b]$ et $\varepsilon>0$. Alors, par continuité de la fonction f en x, il existe $\eta>0$ tel que pour tout réel h tel que $x+h\in[a;b]$, on ait l'implication
$(|h|<\eta)\Rightarrow f(x)-\varepsilon<f(x+h)<f(x)+\varepsilon$. Si ε est assez petit, on a $f(x)-\varepsilon>0$ car $f(x)>0$.
Soit $h\in\mathbb{R}^*$ tel que $|h|<\eta$ et $x+h\in[a;b]$. On a deux cas :

(i) $h>0$ (ce cas là étant impossible si $x=b$).
Dans ce cas, $A(a,x+h)-A(a,x)=A(x,x+h)$ correspond à l'aire de la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $t=x$ et $t=x+h$, et la courbe (C). Sur l'intervalle $[x;x+h]$ on a $\forall t\in[x;x+h]$, $f(x)-\varepsilon<f(t)<f(x)+\varepsilon$ et le lemme ci-dessus appliqué à $\alpha=x$, $\beta=x+h$, $f=g$, $m=f(x)-\varepsilon$ et $M=f(x)+\varepsilon$ donne :
$h(f(x)-\varepsilon)\leq A(a,x+h)-A(a,x)\leq h(f(x)+\varepsilon)$
donc puisque $h>0$:
$$f(x)-\varepsilon\leq\frac{A(a,x+h)-A(a,x)}{h}\leq f(x)+\varepsilon$$

(ii) $h<0$ (ce cas là étant impossible si $x=a$).

Dans ce cas, c'est $A(a,x)-A(a,x+h)=A(x+h,x)$ qui correspond à l'aire de la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $t=x+h$ et $t=x$, et la courbe (C). Le même raisonnement que précédemment aboutit à la relation :
$-h(f(x)-\varepsilon)\leq A(a,x)-A(a,x+h)\leq -h(f(x)+\varepsilon)$ donc puisque $-h>0$:
$$f(x)-\varepsilon\leqslant\frac{A(a,x)-A(a,x+h)}{-h}=\frac{A(a,x+h)-A(a,x)}{h}\leqslant f(x)+\varepsilon\ .$$

Conclusion, pour tout $\varepsilon>0$ assez petit, on peut trouver un $\eta>0$ tel que pour tout réel h tel que $x+h\in[a;b]$, on ait l'implication $(|h|<\eta)\Rightarrow f(x)-\varepsilon\leqslant\frac{A(a,x+h)-A(a,x)}{h}\leqslant f(x)+\varepsilon$. Cela signifie que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=f(x)$ c'est à dire que la fonction $x\to A(x)$ est dérivable de dérivée $A'(x)=f(x)$.

On a donc prouvé que f admet une primitive sur $[a;b]$ et c'est la fonction aire $x\to A(a,x)$ (mais nous avons mis de côté les difficultés théoriques liées à la définition de la notion d'aire).
Considérons maintenant que f prenne des valeurs de signe quelconque. D'après le Théorème 2 du chapitre sur les fonctions élémentaires, il existe une constante C telle que $\forall t\in[a;b]$, $f(t)\geqslant C$. Ainsi, la fonction g définie sur $[a;b]$ par l'expression $g(t)\overset{\text{def}}{=}f(t)-C+1$ est continue et strictement positive :

on se ramène donc au cas précédent et on peut assurer l'existence d'une primitive G de *g*. Il est alors facile de vérifier que la fonction F définie sur $[a;b]$ par l'expression $F(t) \overset{\text{def}}{=} G(t) + (C-1)t$ est une primitive de *f*.

Exemple : prenons $[a;b]=[0;1]$ et $f(t)=t^2$. On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ et on voudrait calculer $A(0,1)$ l'aire de la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $t=0$ et $t=1$, et la courbe représentative de *f*.
Par ce qui précède, la fonction $x \rightarrow A(0,x)$ est une primitive de *f*. De plus, puisque $A(0,0)=0$, la fonction $x \rightarrow A(0,x)$ est une primitive de *f* qui s'annule en 0. Or, d'après la propriété 1, cette primitive est unique, et il est, dans le cas qui nous intéresse, facile d'en trouver l'expression :

$$\forall x \in [0;1],\ A(0,x)=\frac{1}{3}x^3.$$

On en déduit que $A(0,1)=\frac{1}{3}$.

Remarque : nous avons réussi à calculer une aire sans avoir vraiment défini ce que c'est. En y regardant de plus près, nous nous sommes basés sur les deux points suivants:
le calcul de l'aire d'un rectangle : base $\times$ hauteur
le fait que si (S) et (S') sont deux portions du plan admettant une mesure d'aire et telles que $(S) \subset (S')$, alors l'aire de (S) est inférieure ou égale à celle de (S').

I.3) Calcul pratique d'une primitive

L'approche utilisée dans le 2) pour « construire » une primitive ne peut être guère utilisée en pratique puisque, en dehors de quelques cas très particuliers, nous ne savons pas calculer l'aire d'une surface.
Pour trouver une primitive, on utilisera plutôt les formules de dérivation « à l'envers ».

Notation :
on désigne par $\int f(t)\,dt$ (sans les bornes) une primitive quelconque de f. Plus exactement, il s'agit d'une classe de fonctions qui sont égales à une constante additive près.

Tableau des primitives usuelles

$f(t)$	$\int f(t)\,dt$ + cste
t^α ou $u'(t)u(t)^\alpha$, $\alpha \neq -1$	$\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ ou $\frac{u(t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \neq -1$
$\frac{1}{t}$ ou $\frac{u'(t)}{u(t)}$	$\ln(\lvert t \rvert)$ ou $\ln(\lvert u(t) \rvert)$ sur tout intervalle où f ne s'annule pas
e^t ou $u'(t)e^{u(t)}$	e^t ou $e^{u(t)}$
$\frac{1}{t^2+1}$ ou $\frac{u'(t)}{u^2(t)+1}$	$\arctan(t)$ ou $\arctan(u(t))$
$\cos(t)$ ou $u'(t)\cos(t)$	$\sin(t)$ ou $\sin(u(t))$
$\sin(t)$ ou $u'(t)\sin(t)$	$-\cos(t)$ ou $-\cos(u(t))$
$u'(at+b)$ avec $a \neq 0$	$\frac{1}{a}.\ u(at+b)$

Cas particuliers fréquemment rencontrés :

<u>De la première formule,</u> on déduit :

si $f(t)=\frac{u'(t)}{u(t)^n}$, $\int f(t)\ \mathrm{dt}=\frac{-1}{n-1}.\frac{1}{u(t)^{n-1}}$ pour $n\neq 1$ en prenant $\alpha=-n$

en particulier si $f(t)=\frac{u'(t)}{u(t)^2}$, $\int f(t)\ \mathrm{dt}=\frac{-1}{u(t)}$ avec $n=2$.

si $f(t)=\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}}$, $\int f(t)\ \mathrm{dt}=2\sqrt{u(t)}$ avec $\alpha=-\frac{1}{2}$.

<u>De la septième formule</u>, on déduit que

si $f(t)=e^{at}$, $\int f(t)\ \mathrm{dt}=\frac{1}{a}e^{at}$ pour $a\neq 0$

si $f(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, $\int f(t)\ \mathrm{dt}=\frac{A}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)$

si $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$, $\int f(t)\ \mathrm{dt}=-\frac{A}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)$

Exemple : si $f(t)=\frac{3}{2\mathrm{t}-9}$ sur $[a;b]=[2;3]$. En écrivant que $\forall t\in[2;3],\ f(t)=3.\frac{1}{2\mathrm{t}-9}=\frac{3}{2}.\frac{2}{2\mathrm{t}-9}=\frac{3}{2}\frac{u'(t)}{u(t)}$ avec $u(t)=2t-9$ et $u'(t)=2$. On remarque que $\forall t\in[2;3],\ u(t)<0$ donc une primitive de f est donnée sur $[2;3]$ par l'expression $F(t)=\frac{3}{2}\ln|2\mathrm{t}-9|=\frac{3}{2}\ln(9-2\mathrm{t})$.

II) Approche de l'intégrale par les valeurs moyennes

Dans cette section, nous allons essayer de comprendre comment les calculs de primitives permettent de définir la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. La première chose à faire est de donner un sens à cette dernière notion : nous allons pour cela utiliser des idées issues de la statistique en travaillant sur des grands échantillons de valeurs prises par la fonction f.

II.1) Position du problème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On souhaite dans un premier temps définir la moyenne des valeurs prises par f sur l'intervalle $[a;b]$, la difficulté théorique étant qu'il y a une infinité de réels dans l'intervalle $[a;b]$. L'idée est donc de considérer de nombreuses valeurs $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N$ régulièrement réparties sur l'intervalle $[a;b]$ et de calculer la moyenne approchante : $\frac{1}{N+1}\left(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_N)\right)$.

II.2) Notion d'échantillonnage d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On découpe de façon régulière l'intervalle en N sous-intervalles $[x_n;x_{n+1}]$ de même longueur ,la suite finie $(x_n)_{0\leq n\leq N}$ étant arithmétique de raison $\frac{b-a}{N}$, est telle que $x_0=a$, $x_N=b$.

Définition 2: la suite finie $(f(x_n))_{0\leq n\leq N}$ est appelée <u>échantillonnage régulier de f</u> effectué avec pas de $\frac{b-a}{N}$ sur l'intervalle $[a;b]$. On appellera valeur moyenne de cet échantillon le nombre :

$$V_N(f)=\frac{1}{N+1}\left(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_N)\right).$$

Exemple : considérons la fonction $f:x\rightarrow x^2$ sur l'intervalle $[0;2]$. On choisit un entier assez grand N. Alors, on a $x_n=\frac{2n}{N}$ et $f(x_n)=\frac{4n^2}{N^2}$. Alors l'échantillonnage régulier de f effectué avec un pas $\frac{2}{N}$ sur l'intervalle $[0;2]$ est la suite finie $\left(\frac{4n^2}{N^2}\right)_{0\leq n\leq N}=\left(0;\frac{4}{N^2};\frac{16}{N^2};\frac{36}{N^2};...;\frac{4N^2}{N^2}=4\right)$ et

$$V_N(f)=\frac{1}{N+1}\left(0+\frac{4}{N^2}+\frac{16}{N^2}+\frac{36}{N^2}+...+4\right)=\frac{4}{N^2(N+1)}\left(0+1^2+2^2+...+N^2\right)$$ que l'on notera

$$V_N(f)=\frac{4}{N^2(N+1)}\sum_{k=0}^{N}k^2$$ de façon plus compacte. Si l'on admet la formule classique

$$\sum_{k=0}^{N}k^2=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6},$$ il vient que

$$V_N(f)=\frac{4}{N^2(N+1)}.\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}=\frac{2(2N+1)}{3N}=\frac{4}{3}+\frac{2}{3N}.$$

Sur cet exemple, on voit que si N tend vers l'infini, $v_N(f)$ tend vers $\frac{4}{3}$. Ce nombre pourra être considéré comme la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0;2]$. Ce dernier résultat est la conséquence d'une propriété générale, que l'on va voir dans le paragraphe suivant.

II.3) Calcul de la valeur moyenne d'une fonction .

L'idée du résultat ci-dessous est la suivante : la moyenne des valeurs prises par f tend vers une certaine valeur si la taille de l'échantillonnage tend vers $+\infty$. C'est ce que l'on a observé dans l'exemple précédent.

Théorème 2 (sommes de Darboux) : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Alors, la suite $(V_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$ où F est une primitive de f sur $[a;b]$.

<u>(*)Preuve :</u> Nous démontrons ce résultat dans le cas où f est une fonction monotone et strictement positive, disons croissante. On découpe de façon régulière l'intervalle $[a;b]$ en N sous-intervalles $[x_n;x_{n+1}]$ de même longueur , $(x_n)_{0\leq n\leq N}$ étant une suite arithmétique finie telle que $x_0=a$, $x_N=b$, la raison de cette suite étant $\frac{b-a}{N}$.

Tout comme dans le I)2), pour $\alpha,\beta\in[a;b]$ avec $\alpha<\beta$, notons $A(\alpha,\beta)$ l'aire de la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $t=\alpha$ et $t=\beta$, et la courbe (C).
Soit n un entier naturel vérifiant $0\leqslant n\leqslant N-1$. On applique le lemme vu dans la section I)2 avec $\alpha=x_n$ et $\beta=x_{n+1}$, et, vu que f est croissante, $m=f(x_n)$ et $M=f(x_{n+1})$. Cela donne la

relation $f(x_n)(x_{n+1}-x_n)\leqslant A(x_n;x_{n+1})\leq f(x_{n+1})(x_{n+1}-x_n)$, que l'on peut réécrire sous la forme

$$(1)\ :\ \frac{b-a}{N}f(x_n)\leqslant A(x_n;x_{n+1})\leqslant\frac{b-a}{N}f(x_{n+1}).$$

Si l'on définit la fonction F sur $[a;b]$ par l'expression $F(x)=A(a,x)$, alors F est une primitive de f sur $[a;b]$ (voir I)2) et nous avons :

$$\forall n\in\{0;1;...;N-1\},\ A(x_n;x_{n+1})=A(a;x_{n+1})-A(a;x_n)=F(x_{n+1})-F(x_n)\ ,$$

ce qui permet de réécrire (1) sous la forme :

$$\forall n\in\{0;1;...;N-1\},\ \frac{b-a}{N}f(x_n)\leqslant F(x_{n+1})-F(x_n)\leqslant\frac{b-a}{N}f(x_{n+1}).$$

En ajoutant ces inégalités pour n allant de 0 à N-1, on a :

$$(2)\ :\ \frac{b-a}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(x_n)\leqslant\sum_{n=0}^{N-1}\left(F(x_{n+1})-F(x_n)\right)\leqslant\frac{b-a}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(x_{n+1}).$$

On remarque que :

(i) $$\sum_{n=0}^{N-1}f(x_n)=f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{N-1})=(N+1)V_N(f)-f(x_N)$$
$$=(N+1)V_N(f)-f(b)$$

(ii) $$\sum_{n=0}^{N-1}\left(F(x_{n+1})-F(x_n)\right)=F(x_N)-F(x_0)=F(b)-F(a)$$ (principe des sommes télescopiques)

(iii) $$\sum_{n=0}^{N-1}f(x_{n+1})=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_N)=(N+1)V_N(f)-f(x_0)$$
$$=(N+1)V_N(f)-f(a)$$

En reportant cela dans (2), il vient :

$$\frac{(b-a)\left((N+1)V_N(f)-f(b)\right)}{N}\leqslant F(b)-F(a)\leqslant\frac{(b-a)\left((N+1)V_N(f)-f(a)\right)}{N}$$

ce qui se réécrit, après calculs :

$$\frac{N(F(b)-F(a))+(b-a)f(a)}{(N+1)(b-a)}\leqslant V_N(f)\leqslant\frac{N(F(b)-F(a))+(b-a)f(b)}{(N+1)(b-a)}\ .$$

En faisant tendre maintenant N vers l'infini, on en déduit par le Théorème des Gendarmes que

$$\lim_{N\to+\infty}(V_N(f))=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}\ .$$

On revient à l'exemple suivant la définition 2. Le théorème 2 dit que la suite $(V_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{F(2)-F(0)}{2}$ .En prenant comme primitive de f la fonction $F(x)=\frac{1}{3}x^3$, on retrouve le fait que la suite $(V_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\frac{1}{3}2^3-0}{2}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.

Le Théorème 2 justifie la terminologie de « valeur moyenne » dans la définition ci-dessous :

Définition 3: La quantité $F(b)-F(a)$ est appelée <u>intégrale de f</u> sur l'intervalle $[a;b]$ et se note $\int_a^b f(t)dt$. Le théorème 1 se reformule donc en disant que $\lim_{N\to+\infty}(V_N(f))_N=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

La quantité $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ est appelée <u>valeur moyenne de f sur</u> $[a;b]$.

<u>Remarque :</u> la quantité $F(b)-F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F. Si on choisit une autre primitive F_1, elle aura une expression de la forme $F_1(x)=F(x)+C$ et $F_1(b)-F_1(a)=F(b)+C-(F(a)+C)=F(b)-F(a)$.

Notation : on notera souvent la quantité $F(b)-F(a)$ par la notation $[F(t)]_a^b$ pour faciliter les écritures des calculs.

II.4) Intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a;b]$. La fonction f n'admet pas forcément de primitive de sorte que la définition 3 ne peut pas être appliquée directement.

On considère une subdivision de l'intervalle $[a;b]$ en N sous-intervalles $[x_n;x_{n+1}]$ de sorte que $x_0=a$, $x_N=b$, et que f soit une fonction continue sur chaque sous intervalle $]x_n;x_{n+1}[$. On peut donc, pour chaque entier $n\in\{0;1;....;N-1\}$ définir l'intégrale $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\mathrm{dt}$ en prolongeant f par continuité sur l'intervalle $[x_n;x_{n+1}]$ par $f(x_n)=f(x_n^+)$ et $f(x_{n+1})=f(x_{n+1}^-)$.

On définira alors la quantité $\int_a^b f(t)\mathrm{dt}$ par l'égalité $\int_a^b f(t)\mathrm{dt}=\sum_{k=0}^{N-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{dt}\right)$ c'est à dire que

$$\int_a^b f(t)\mathrm{dt}=\int_{x_0=a}^{x_1} f(t)\mathrm{dt}+\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{dt}+....+\int_{x_{N-1}}^{x_N=b} f(t)\mathrm{dt}$$ (relation de Chasles)

Exemple : si $t\to U(t)$ est la fonction échelon, alors

$$\int_{-1}^{2} U(t)\mathrm{dt}=\int_{-1}^{0} U(t)\mathrm{dt}+\int_{0}^{2} U(t)\mathrm{dt}=\int_{-1}^{0} 0\,\mathrm{dt}+\int_{0}^{2} 1\,\mathrm{dt}=0+2=2.$$

Propriété 2 : On ne change pas la valeur de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux en changeant un nombre fini de valeurs de la fonction.

Exemple : en reprenant l'exemple ci-dessus, si $f(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ \frac{1}{2} & \text{si } t=0\\ 1 & \text{si } t>0\end{cases}$, alors $\forall t\neq 0, f(t)=U(t)$ donc

$$\int_{-1}^{2} f(t)\mathrm{dt}=\int_{-1}^{2} U(t)\mathrm{dt}=2.$$

III) Propriétés de l'intégrale

III.1) Propriétés générales

Propriété 3: **relation de Chasles**

$$\int_a^c f(t)dt=\int_a^b f(t)dt+\int_b^c f(t)dt \quad .$$

Preuve : Supposons f continue. Alors,

$\int_a^b f(t)dt+\int_b^c f(t)dt=F(b)-F(a)+F(c)-F(b)=F(c)-F(a)=\int_a^c f(t)dt.$ Si f est seulement continue par morceaux, on se ramène au cas où f est continue par morceaux en subdivisant l'intervalle d'intégration comme dans le II.4)

Propriété 4: **linéarité de l'intégrale**

$$\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \int_a^b(\lambda f(t)+\mu g(t))dt=\lambda\int_a^b f(t)+\mu\int_a^b g(t)dt.$$

Preuve : Supposons f et g continues.
Alors, si l'on désigne par F et G des primitives de f et g respectivement, on a :

$$\int_a^b(\lambda f(t)+\mu g(t))dt=[\lambda F(t)+\mu G(t)]_a^b=\lambda F(b)+\mu G(b)-(\lambda F(a)+\mu G(a))$$

$=\lambda(F(b)-F(a))+\mu(G(b)-G(a))=\lambda\int_a^b f(t)+\mu\int_a^b g(t)dt.$ Si f ou g est seulement continue par morceaux, on se ramène au cas où f et g sont continues en subdivisant l'intervalle d'intégration comme dans le II.4)

Remarque : En général, $\int_a^b f(t).g(t)dt\neq\int_a^b f(t).\int_a^b g(t)dt$! ! Par contre, la formule d'intégration par parties (Théorème 3 ci-dessous) nous permettra de calculer l'intégrale d'un produit dans certains cas.

Propriété 5:

$$(i)\ \int_a^b k\,dt=k(b-a) \qquad (ii)\ \int_a^a f(t)dt=0 \qquad (iii)\ \int_a^b f(t)\mathrm{dt}=-\int_b^a f(t)\mathrm{dt}$$

Preuve :

(i) On a $\int_a^b k\,dt=[k\,x]_a^b=k\,b-k\,a=k(b-a)$.

(ii) Puisqu'on ne change pas la valeur de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux en changeant un nombre fini de valeurs de la fonction, on peut supposer que $f(a)=0$ donc $\int_a^a f(t)\ \mathrm{dt}=\int_a^a 0\,\mathrm{dt}=0.$

(iii) Si f est continue, alors si F est une primitive de f, on a :
$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a) = -(F(a)-F(b)) = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$. Si f est seulement continue par morceaux, on se ramène au cas où f est continue par morceaux en subdivisant l'intervalle d'intégration comme dans le II.4)

***Propriété 6:* fonction intégrale**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et $x_0 \in [a;b]$. La fonction $x \to \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ est l'unique primitive de $f(t)$ sur $[a;b]$ qui s'annule en x_0.

<u>Preuve :</u> Si F est une primitive de f, on peut écrire $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = F(x)-F(x_0)$ donc la fonction $x \to \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ étant égale, à une constante additive près, à $x \to F(x)$, elle est aussi une primitive de f. Le fait qu'elle s'annule en x_0 découle de l'égalité $\int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt = 0$.

Remarque : que se passe-t-il si f est seulement continue par morceaux ? La réponse est donnée par la

***Propriété 6 bis :* fonction intégrale**
Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a;b]$ et $x_0 \in [a;b]$. La fonction $F : x \to \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ est alors une fonction continue, dérivable en tout point x où f est continue, et, pour ces valeurs x là, on a $F'(x) = f(x)$.
Une telle fonction F sera appelée <u>pseudo-primitive</u> de f et f' est la pseudo-dérivée de f au sens où on l'a définie dans la définition 3 du chapitre sur les fonctions dérivées.

Exemple : si $t \to U(t)$ est la fonction échelon, et $x_0 = 1$ alors $\int_1^x U(t)\,dt = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ x-1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Cette dernière fonction est une pseudo-primitive de la fonction échelon : elle est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.

III.2) Cas de l'intégrale d'une fonction positive.

Propriété 7 :
Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a;b]$ et positive, et *(C)* sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Alors le nombre $\int_a^b f(t)\,dt$ est égal à l'aire de la portion de plan délimitée par *(C)*, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.
Remarque : cela découle bien sur du I)2, où $A(a,x)$ est une primitive de f qui s'annule clairement pour $x = a$. Il découle alors de la propriété 6 que $A(a,x) = \int_a^x f(t)\,dt$ donc $A(a,b) = \int_a^b f(t)\,dt$.

***Propriété* 8: propriétés liées à l'ordre** Soient a < b et f une fonction continue sur $[a;b]$. . Alors :

(i) Si $\forall t, f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f(t) \leq \int_a^b g(t)$

(ii) $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$

(iii) Si $\forall t, f(t) \geq 0$, alors $\int_a^b f(t) \geq 0$.

(iv) Si f est continue et si $\forall t, f(t) \geq 0$ et $\int_a^b f(t) = 0$ alors $\forall t \in [a;b], f(t) = 0$.

<u>Preuve</u> :

(iii) On suppose d'abord f continue. Si $\forall t \in]a;b[, f(t) \geq 0$ alors l'application $x \to \int_a^x f(t)dt$ est dérivable de dérivée $f(x) \geq 0$.

Elle est donc croissante, et puisque $b > a$, on a $\int_a^b f(t)\mathrm{dt} \geq \int_a^a f(t)\mathrm{dt} = 0$. Si f est seulement continue par morceaux, on se ramène au cas où f est continue par morceaux en subdivisant l'intervalle d'intégration comme dans le II.4) et on écrit alors $\int_a^b f(t)\mathrm{dt}$ comme somme d'intégrales positives.

(i) On applique le (iii) à la fonction $g - f$: $\int_a^b (g(t) - f(t))\mathrm{dt} \geq 0$ donc par linéarité de l'intégrale $\int_a^b g(t)\mathrm{dt} - \int_a^b f(t)\mathrm{dt} \geq 0$ d'où le résultat.

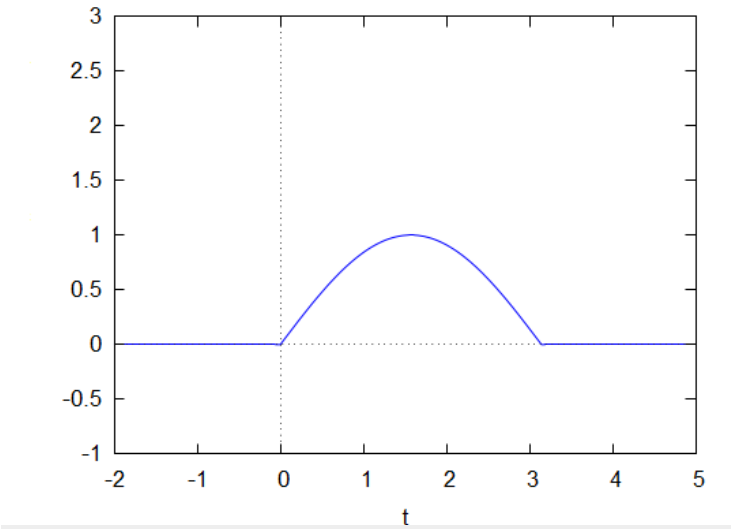
(ii) On a $\forall t \in [a;b], -|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ donc en utilisant le (i) : $\int_a^b -|f(t)| \leq \int_a^b f(t) \leq \int_a^b |f(t)|$ d'où $-\int_a^b |f(t)| \leq \int_a^b f(t) \leq \int_a^b |f(t)|$. Cela implique que $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

(iv) On a vu dans la preuve du (iii) que l'application $x \to \int_a^x f(t)dt$ est croissante. Si $\int_a^b f(t) = 0$ alors l'application $x \to \int_a^x f(t)dt$ prend les mêmes valeurs pour $x = a$ et $x = b$. Elle est donc constante sur l'intervalle $[a;b]$ donc sa dérivée est identiquement nulle : $\forall t \in [a;b], f(t) = 0$.

III.3) Applications de l'intégrale en théorie du signal

Définition 4 : Soit un signal $x(t)$ une fonction continue du temps. On définit sa valeur moyenne sur l'intervalle $[a;b]$ par l'expression $\frac{1}{b-a}\int_a^b x(t)dt$. On note cette valeur moyenne $<x>_{[a,b]}$. On définit sa puissance moyenne sur l'intervalle $[a;b]$ par l'expression $\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2(t)dt$ qui est notée $<x^2>_{[a,b]}$. On utilisera plus volontiers en physique la valeur efficace de $x(t)$ qui est définie par l'expression $x_{\text{eff}}=\sqrt{<x^2>_{[a,b]}}$. Enfin, son énergie sur l'intervalle $[a;b]$ sera définie par $\int_a^b x^2(t)dt$.

Exemple : on considère une « impulsion sinusoïdale » c'est à dire un signal $x(t)$ définie par $x(t)=\begin{cases}\sin(t) \text{ si } t\in[0;\pi] \\ 0 \text{ si } t\notin[0;\pi]\end{cases}$.



Alors sa valeur moyenne sur $[0;\pi]$ vaut $<x>=\frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi \sin(t)\text{dt}=\frac{1}{\pi}[-\cos(t)]_0^\pi=\frac{2}{\pi}$. Sa puissance moyenne sur $[0;\pi]$ vaut $<x^2>=\frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi \sin^2(t)\text{dt}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (1-\cos(2\text{t}))\text{dt}$ après linéarisation de $\sin^2(t)$ d'où $<x^2>=\frac{1}{2\pi}[t-\frac{\sin(2\text{t})}{2}]_0^\pi=\frac{1}{2\pi}.(\pi)=\frac{1}{2}$. Sa valeur efficace sur $[0;\pi]$ vaut donc $\sqrt{<x^2>}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. En reprenant le calcul de la puissance moyenne, on trouve que l'énergie du signal sur $[0;\pi]$ vaut $\frac{\pi}{2}$.

IV) Techniques avancées de calcul intégral

Pour beaucoup d'intégrales, il n'est pas facile de trouver une primitive de la fonction à intégrer. Nous allons voir deux techniques qui permettent alors de contourner ce problème.

IV.1) Intégration par parties

On rappelle que $\int_a^b f(t).g(t)dt \neq \int_a^b f(t).\int_a^b g(t)dt$. Il existe cependant une formule permettant dans de nombreux cas de calculer l'intégrale d'un produit : il s'agit de la formule dite <u>d'intégration par parties</u> (ou I.P.P) .

Théorème 3 : **Intégration par parties**
On considère $u(t)$ et $v(t)$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ avec $u'(t)$ et $v'(t)$ continues. Alors on a :
$$\int_a^b u'(t)v(t)dt=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

<u>Preuve</u> : on part de la formule de dérivation d'un produit :
$(u(t).v(t))'=u'(t).v(t)+u(t).v'(t)$, d'où l'on déduit que $u(t).v(t)$ est une primitive de $u'(t).v(t)+u(t).v'(t)$. Cette dernière fonction est continue, donc on peut l'intégrer.On obtient alors $\int_a^b (u'(t).v(t)+u(t).v'(t))dt=\int_a^b u'(t).v(t)dt+\int_a^b u(t).v'(t)dt=[u(t).v(t)]_a^b$. On peut réécrire l'égalité ci-dessus sous la forme : $\int_a^b u'(t).v(t)dt=[u(t).v(t)]_a^b-\int_a^b u(t).v'(t)dt.$

On retiendra l'idée suivante : la formule d'intégration par parties sert à intégrer un produit : on dérive un des deux facteurs (il s'agit de $v(t)$) et on primitive l'autre (il s'agit de $u'(t)$). Le choix du facteur à intégrer est guidé par les idées suivantes :

a) il faut que $u(t)$ soit assez facile à trouver .

Par exemple, dans l'intégrale $\int_0^1 t\arctan(t)\mathrm{dt}$, il n'est pas judicieux de poser $u'(t)=\arctan(t)$ car on serait bien en peine de trouver une expression de $u(t)$. Il vaut mieux poser $u'(t)=t$ et $v(t)=\arctan(t)$ de sorte que $u(t)=\frac{t^2}{2}$ et $v'(t)=\frac{1}{t^2+1}$. On obtient ainsi :
$$\int_0^1 t\arctan(t)\mathrm{dt}=\int_0^1 u'(t).v(t)\mathrm{dt}=[u(t).v(t)]_0^1-\int_0^1 u(t).v'(t)\mathrm{dt}=[\frac{t^2}{2}\arctan(t)]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{dt}$$
$$\int_0^1 t\arctan(t)\mathrm{dt}=\frac{1}{2}.\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{dt}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}[t-\arctan(t)]_0^1$$
$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

b) il faut que $v'(t)$ puisse simplifier l'intégrale $\int_a^b u(t).v'(t)dt.$

Par exemple, dans l'intégrale $\int_1^2 t^2 \ln(t)\,\mathrm{dt}$ on pose $u'(t)=t^2$ et $v(t)=\ln(t)$ de sorte que $u(t)=\frac{t^3}{3}$ et $v'(t)=\frac{1}{t}$. On obtient ainsi :

$$\int_1^2 t^2 \ln(t)\,\mathrm{dt}=\int_1^2 u'(t).v(t)\mathrm{dt}=[u(t).v(t)]_1^2-\int_1^2 u(t).v'(t)\,\mathrm{dt}=[\frac{t^3}{3}\ln(t)]_1^2-\int_1^2 \frac{t^2}{3}\mathrm{dt}$$
$$=\frac{8}{3}\ln(2)-0-[\frac{t^3}{9}]_1^2=\frac{8}{3}\ln(2)-\left(\frac{8}{9}-\frac{1}{9}\right)$$
$$=\frac{24\ln(2)-7}{9}.$$

c) Il arrive qu'il faille faire deux (ou plus) intégrations par parties successives pour arriver au résultat ! On a ainsi une IPP dans une IPP, telles des poupées russes.

Par exemple :

$$(1)\quad \int_{-1}^1 t^2 e^t\,\mathrm{dt}=[t^2 e^t]_{-1}^1-\int_{-1}^1 2te^t\,\mathrm{dt}=e-e^{-1}-2\int_{-1}^1 te^t\,\mathrm{dt}$$

(on intègre l'exponentielle et dérive t^2.)

On refait une intégration par parties de la même façon pour calculer la dernière intégrale :

$$\int_{-1}^1 te^t\,\mathrm{dt}=[te^t]_{-1}^1-\int_{-1}^1 e^t\,\mathrm{dt}=e+e^{-1}-\int_{-1}^1 e^t\,\mathrm{dt}=e+e^{-1}-[e^t]_{-1}^1=e+e^{-1}-(e-e^{-1})=2e^{-1}.$$

On utilise ce résultat pour finir le calcul (1) :

$$\int_{-1}^1 t^2 e^t\,\mathrm{dt}=e-e^{-1}-2\int_{-1}^1 te^t\,\mathrm{dt}=e-e^{-1}-4e^{-1}$$
$$\int_{-1}^1 t^2 e^t\,\mathrm{dt}=e-5e^{-1}.$$

De façon générale, une intégrale de la forme $\int_a^b t\,f(t)\,\mathrm{dt}$ se calcule souvent (mais pas toujours ! Voir exemple du a)) à l'aide d'une IPP en primitivant $f(t)$ et en dérivant *t*.

IV.2) Changement de variable

Le théorème suivant permet souvent de se ramener à une intégrale plus simple :

Théorème 4 : **Changement de variables**
Soit $u(t)$ une fonction dérivable à dérivée continue sur un intervalle $[a;b]$, et soit $f(t)$ une fonction continue sur un intervalle I contenant $u(a)$ et $u(b)$. Alors on a :

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx=\int_a^b f(u(t))u'(t)dt.$$

Preuve : Soit F une primitive de f. Alors, d'après le théorème de dérivation des fonctions composées, $F(u(t))$ est une primitive de $f(u(t))u'(t)$ sur l'intervalle $[a;b]$. On a alors :

d'une part : $\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dt=[F(x)]_{u(a)}^{u(b)}=F(u(b))-F(u(a))$

d'autre part $\int_a^b f(u(t))u'(t)dt=[F(u(t))]_a^b=F(u(b))-F(u(a))$. (l'intégrale a un sens car la fonction intégrée est continue).

On en déduit l'égalité du Théorème 4 .

Mise en œuvre pratique : on écrit formellement : $x=u(t)$ et $u'(t)=\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}$ donc « $\mathrm{dx}=u'(t)\mathrm{dt}$ ».

On a donc : $f(u(t))u'(t)dt=f(x)\mathrm{dx}$ donc $\int_a^b f(u(t))u'(t)dt=\int_?^{??} f(x)\mathrm{dx}$. Pour trouver les bornes, on raisonne en disant que si $t=a$ alors $x(=u(t))=u(a)$ et si $t=b$ $x(=u(t))=u(b)$ ce qui donne les bornes $?=u(a)$ et $??=u(b)$.

Remarques :

1) On peut :

soit partir de l'intégrale $\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx$ et faire un changement de variables $x=u(t)$: on parle de <u>changement de variables direct</u>

soit chercher à écrire l'intégrale à calculer sous la forme $\int_a^b f(u(t))u'(t)dt$ pour une bonne fonction u : on parle de <u>changement de variables indirect.</u>

2) Le choix de la fonction $u(t)$ peut être difficile, voire subtil. C'est l'expérience en général qui dicte ce choix.

Exemples :

a) changement de variable direct.

Soit $I=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx}$. On pose $x=u(t)$ où u est la fonction définie sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ par l'expression $u(t)=\sin(t)$. On remarque pour le choix de l'intervalle $[0;\frac{\pi}{2}]$ que $u(0)=0$ et $u\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Les bornes pour la variable t seront donc 0 et $\frac{\pi}{2}$.

On a donc $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2(t)}=|\cos(t)|=\cos(t)$ car $\forall t\in[0;\frac{\pi}{2}],\ \cos(t)\geq 0$. De plus,

$\mathrm{dx}=\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}.\mathrm{dt}=u'(t)\mathrm{dt}=\cos(t)\mathrm{dt}$.

On peut ainsi écrire :

$$I=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t).\cos(t)\mathrm{dt}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{dt}.$$

On finit le calcul de l'intégrale par la formule de linéarisation $\cos^2(t)=\frac{1}{2}(1+\cos(2\mathrm{t}))$ qui donne :

$$I=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{dt}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2}(1+\cos(2\mathrm{t})))\mathrm{dt}$$
$$=[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin(2\mathrm{t})]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

b) changement de variables indirect.

Supposons que l'on veuille calculer $\int_0^2 t\sqrt{2-t}\ \mathrm{dt}$. On définit la fonction u sur l'intervalle $[0;2]$ par $u(t)=\sqrt{2-t}$. Posons $x=u(t)$. On a $t=0\Rightarrow x=u(0)=\sqrt{2}$ et $t=2\Rightarrow x=u(2)=0$. Les nouvelles bornes sont donc $\sqrt{2}$ et 0 (dans cet ordre !)

D'autre part, $x^2=2-t$ donc $t=2-x^{2.}$ ce qui implique que $\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dx}}=-2\mathrm{x}$ d'où $\mathrm{dt}=-2x\,\mathrm{dx}$.

On a ainsi :

$$\int_0^2 t\sqrt{2-t}\ \mathrm{dt}=\int_{\sqrt{2}}^0 (2-x^2)x(-2\mathrm{x})\mathrm{dx}=-2\int_{\sqrt{2}}^0 x^2(2-x^2)\mathrm{dx}=-2\int_{\sqrt{2}}^0 (2\mathrm{x}^2-x^4)\mathrm{dx}.$$

D'après le (iii) de la propriété 5 il vient :

$$\int_0^2 t\sqrt{2-t}\ \mathrm{dt}=2\int_0^{\sqrt{2}} (2\mathrm{x}^2-x^4)\mathrm{dx}=2[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5]_0^{\sqrt{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{2}^{\,3}-\frac{2}{5}\sqrt{2}^{\,5}$$
$$=\frac{8}{3}\sqrt{2}-\frac{8}{5}\sqrt{2}$$
$$\frac{16}{15}\sqrt{2}.$$

V) Quelques compléments

V.1) Intégrale d'une fonction paire ou impaire.

La propriété suivante peut être utile pour simplifier les calculs d'intégrale :

Propriété 9 Soit $a>0$ .Alors :

Si f est une fonction paire, on a $\int_{-a}^{a} f(t)dt=2\int_0^a f(t)dt$

Si f est une fonction impaire, on a $\int_{-a}^{a} f(t)dt=0$

<u>Preuve:</u> on présente la preuve pour une fonction f continue.

Si f est une fonction impaire, on a par la relation de Chasles (1) $\int_{-a}^{a} f(t)dt=\int_{-a}^{0} f(t)dt+\int_0^a f(t)dt$.

Par le changement de variable $t=-s$,

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt=\int_{+a}^{0} f(-s)(-ds)$$

$$=\int_{+a}^{0} -f(s)(-ds)=\int_{+a}^{0} f(s)ds \quad \text{car } f \text{ est impaire}$$

$$=-\int_{0}^{a} f(s)ds \quad \text{par interversion des bornes (propriété 5(iii)).}$$

On a donc à partir de (1) :

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt=\int_{-a}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{a} f(t)dt=-\int_{0}^{a} f(t)dt+\int_{0}^{a} f(t)dt=0.$$

Si f est une fonction paire, la démonstration est très semblable. On a par la relation de Chasles

$$(2) \quad \int_{-a}^{a} f(t)dt=\int_{-a}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{a} f(t)dt \quad .$$

Par le changement de variable $t=-s$,

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt=\int_{+a}^{0} f(-s)(-ds)$$

$$=\int_{+a}^{0} f(s)(-ds)=-\int_{+a}^{0} f(s)ds \quad \text{car } f \text{ est paire}$$

$$=+\int_{0}^{a} f(s)ds \quad \text{par interversion des bornes (propriété 5(iii)).}$$

On a donc à partir de (2) :

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt=\int_{-a}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{a} f(t)dt=\int_{0}^{a} f(t)dt+\int_{0}^{a} f(t)dt=2\int_{0}^{a} f(t)dt.$$

Exemple :

Si l'on veut calculer $\int_{-1}^{1} \frac{(t+1)^2}{t^2+1}\cos(t)\mathrm{dt}$, il suffit de remarquer que :

$$\frac{(t+1)^2}{t^2+1}\cos(t)=\frac{t^2+2\mathrm{t}+1}{t^2+1}\cos(t)=\frac{t^2+1}{t^2+1}\cos(t)+\frac{2\mathrm{t}}{t^2+1}\cos(t)=\cos(t)+\frac{2\mathrm{t}}{t^2+1}\cos(t)$$

ce qui donne

$$\int_{-1}^{1} \frac{(t+1)^2}{t^2+1}\cos(t)\mathrm{dt}=\int_{-1}^{1}\cos(t)\mathrm{dt}+\int_{-1}^{1}\frac{2\mathrm{t}}{t^2+1}\cos(t)\mathrm{dt} \quad .$$

Cette dernière intégrale est l'intégrale d'une fonction impaire sur l'intervalle $[-1;1]$, elle est donc nulle, d'où :

$$\int_{-1}^{1} \frac{(t+1)^2}{t^2+1}\cos(t)\mathrm{dt}=\int_{-1}^{1}\cos(t)\mathrm{dt}=2\int_{0}^{1}\cos(t)\mathrm{dt} \quad \text{(par parité de la fonction cos)}$$

$$=[\sin(t)]_0^1=\sin(1).$$

V.2) Intégrale d'une fonction rationnelle.

Vous savez maintenant théoriquement intégrer toutes les fonctions rationnelles. Par décomposition en éléments simples et la linéarité de l'intégrale, on se ramène à l'intégration :

(i) de polynômes
(ii) d 'éléments simples de première espèce
(iii) d 'éléments simples de seconde espèce

Pour le (i), pas de difficulté.

Pour le (ii), on utilise les formules de primitive de $\frac{u'(t)}{u(t)}$ et de $\frac{u'(t)}{u^n(t)}$

Pour le (iii), après mise sous forme canonique du dénominateur on intègre à l'aide des formules de primitive de $\frac{u'(t)}{u(t)}$ et $\frac{u'(t)}{u^2(t)+1}$ pour les éléments simples du premier ordre (voir exercice 4 pour un exemple d'intégration d'élément simple de seconde espèce et d'ordre supérieur à 1).

Exemple :

$$I=\int_2^3 \frac{3}{(X-1)^2(X^2+X+1)}dX .$$

Après décomposition en éléments simples (traitée en exemple dans le cours sur les fractions rationnelles), il vient que

$$I=\int_2^3\left(\frac{-1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{X+1}{X^2+X+1}\right)\mathrm{dX}=\int_2^3\left(\frac{-1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}\right)\mathrm{dX}+\int_2^3\left(\frac{X+1}{X^2+X+1}\right)\mathrm{dX}.$$

La première intégrale du membre de droite se traite directement :

$$\int_2^3\left(\frac{-1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}\right)\mathrm{dX}=[-\ln(X-1)-\frac{1}{X-1}]_2^3=\left(-\ln(2)-\frac{1}{2}+0+1\right)=\frac{1}{2}-\ln(2).$$

La deuxième intégrale est plus technique : on se ramène aux formules de primitive de $\frac{u'(t)}{u(t)}$ et $\frac{u'(t)}{u^2(t)+1}$ en mettant le dénominateur sous forme canonique :

$$\frac{X+1}{X^2+X+1}=\frac{X+1}{\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{X+1}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(X+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right)}=\frac{4}{3}\cdot\frac{X+1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(X+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}$$

. On pose alors $Y=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(X+\frac{1}{2}\right)$ d'où $X=\frac{\sqrt{3}}{2}Y-\frac{1}{2}$ et $\mathrm{dX}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{dY}$. Les nouvelles bornes de l'intégrale seront $Y_1=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{\sqrt{3}}$ et $Y_2=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(3+\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{\sqrt{3}}$.

On a donc :

$$\int_2^3\left(\frac{X+1}{X^2+X+1}\right)\mathrm{dX}=\frac{4}{3}\int_{\frac{5}{\sqrt{3}}}^{\frac{7}{\sqrt{3}}}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}Y-\frac{1}{2}+1}{Y^2+1}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{dY}$$

$$=\int_{\frac{5}{\sqrt{3}}}^{\frac{7}{\sqrt{3}}}\left(\frac{Y+\frac{\sqrt{3}}{3}}{Y^2+1}\right)\mathrm{dY}=\frac{1}{2}\int_{\frac{5}{\sqrt{3}}}^{\frac{7}{\sqrt{3}}}\left(\frac{2Y}{Y^2+1}\right)\mathrm{dY}+\frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{5}{\sqrt{3}}}^{\frac{7}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{Y^2+1}\right)\mathrm{dY}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left(Y^2+1\right)\right]_{\frac{5}{\sqrt{3}}}^{\frac{7}{\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\arctan\left(Y\right)\right]_{\frac{5}{\sqrt{3}}}^{\frac{7}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{52}{3}\right)-\ln\left(\frac{28}{3}\right)\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)-\arctan\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{13}{7}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)-\arctan\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

On a finalement : $I=\frac{1}{2}-\ln(2)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{13}{7}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)-\arctan\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)\right).$

V.3) Intégrale d'une fonction à valeurs complexe

Soit f une fonction à valeurs complexes et continue par morceaux sur un intervalle $[a;b]$, c'est à dire que $f(t)=f_r(t)+j\,f_i(t)$ où f_r et f_j sont à valeurs réelles et continues par morceaux sur un intervalle $[a;b]$ (plus précisément, $f_r(t)=\mathrm{Re}\,f(t)$ et $f_j(t)=\mathrm{Im}\,f(t)$)

On définit tout naturellement l'intégrale : $\int_a^b f(t)\,dt=\left(\int_a^b f_r(t)\,dt\right)+j.\left(\int_a^b f_i(t)\,dt\right).$

Nous avons dans un précédent chapitre défini la notion de dérivée d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeur complexe, en travaillant séparément sur sa partie réelle et sa partie imaginaire. Cela nous mène directement à la

Propriété 10

Soit $u:[a;b]\to\mathbb{C}$ une fonction dérivable. Alors on a $\int_a^b u'(t)\,dt=u(b)-u(a).$

<u>Preuve</u> : En écrivant $u(t)=\mathrm{Re}(u(t))+j\,\mathrm{Im}(u(t))$, on a

$$u'(t)=\frac{d}{dt}(\mathrm{Re}(u))(t)+j\frac{d}{dt}(\mathrm{Im}(u))(t)$$

d'où

$$\int_a^b u'(t)\,dt=\int_a^b\frac{d}{dt}(\mathrm{Re}(u))(t)\,dt+j\int_a^b\frac{d}{dt}(\mathrm{Im}(u))(t)\,dt$$

$$=\mathrm{Re}(u)(b)-\mathrm{Re}(u)(a)+j\left(\mathrm{Im}(u)(b)-\mathrm{Im}(u)(a)\right)$$

$$=\mathrm{Re}(u)(b)+j\,\mathrm{Im}(u)(b)-\left(\mathrm{Re}(u)(a)+j\,\mathrm{Im}(u)(a)\right)$$

$$=u(b)-u(a).$$

On déduit des formules de dérivation des fonctions à valeurs complexes les formules suivantes :

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$u'(x)+v'(x)$	$u(x)+v(x)$
$\lambda u'(x)$	$\lambda u(x),\ \lambda\in\mathbb{R}$
$\dfrac{-v'(x)}{v^2(x)}$	$\dfrac{1}{v(x)}=v^{-1}(x)$
$\alpha u'(x)u^{\alpha-1}(x), \alpha\in\mathbb{Z}, \alpha\neq 0$	$u^{\alpha}(x)$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$a u'(ax+b), a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$	$u(ax+b)$

VI) Exercices

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$A=\int_0^{\pi} \sin(t)\cos(2t)\,dt$ (on linéarisera la fonction à intégrer)

$B=\int_0^{2} \frac{t\,dt}{t^2+4}$ $\quad C=\int_{-1}^{2} e^{-2t}\,dt$ $\quad D=\int_0^{3} t(1+t^2)^3\,dt$ $\quad E=\int_0^{9} \sqrt{\frac{1}{3}t+1}\,dt$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$A=\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2-5t+6}$ $\quad B=\int_3^{4} \frac{t.dt}{(t+1)(t-2)^2}$ $\quad C=\int_0^{1} \frac{t^3+1}{t^2+1}\,dt$ $\quad D=\int_{-2}^{2} \frac{1}{(t+4)(t^2+4)}\,dt$

Exercice 3

1) Écrire la forme canonique du polynôme $P(X)=X^2+4X+29$
2) En faisant le changement de variable $s=\frac{t+2}{5}$, calculer $\int_{-2}^{3} \frac{t}{t^2+4t+29}\,dt.$.

Exercice 4

Calculer $\int_0^{1} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ en faisant le changement de variable $x=\tan(t)$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=0$ pour $t<0$ et $f(t)=t$ pour $t\geq 0$.

1) On définit dans cette question la fonction F sur $\mathbb{R}$ par la relation $F(x)=\int_0^{x} f(t)\,dt$.
   Donner les expressions de $F(x)$ sur les intervalles $]-\infty;0]$ et $]0;+\infty[$.
2) On définit dans cette question la fonction G sur $\mathbb{R}$ par la relation $G(x)=\int_{x-1}^{x} f(t)\,dt$. Donner les expressions de $G(x)$ sur les intervalles $]-\infty;0]$, $]0;1]$ et $]1;+\infty[$.
3) On définit dans cette question la fonction H sur $\mathbb{R}$ par la relation $H(x)=\int_0^{x} t\,f(x-t)\,dt$.
   Donner les expressions de $H(x)$ sur les intervalles $]-\infty;0]$ et $]0;+\infty[$.

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes.

1) $\int_0^2 \frac{ds}{(2s+1)^2}$ 2) $\int_0^{\pi} 3\sin\left(\frac{t}{3}\right)dt$ 3) $\int_0^1 x\,e^{-x^2}$

Exercice 7

On rappelle les formules :

$(1)\quad \cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$ $(2)\quad \sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$

1) A l'aide des formules (1) et (2), montrer que $\sin^4(x)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{8}\cos(4x)$.

2) En déduire la valeur moyenne de la fonction $f(x)=\sin^4(x)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

Exercice 8

Calculer les intégrales suivantes :

$A=\int_0^1 t\,e^{2t}\,dt$ $B=\int_0^{\pi} e^{(2+j)t}\,dt$ $C=\int_0^{\pi} e^{2t}\sin(t)\,dt$ (utiliser le B) $D=\int_1^2 (t^2+1)\ln(t)\,dt$

$E=\int_{-1}^1 t^2\sqrt{t+1}\,dt$ (on posera $s=\sqrt{t+1}$.) $F=\int_1^3 t(\ln(t))^2\,dt$

(*)Exercice 9

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$. On suppose que $\int_0^1 f(t)\,dt=0$.

1) Expliquer pourquoi l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $]0;1[$.

2) On suppose de plus que $\int_0^1 t.\,f(t)\,dt=0$. Le but de cette question est de prouver que l'équation $f(x)=0$ admet au moins deux solutions sur l'intervalle $]0;1[$. On raisonne par l'absurde en supposant que l'équation $f(x)=0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $]0;1[$. Soit α cette unique solution.

a) Montrer que la fonction f change de signe en α.

b) Montrer que . $\int_0^1 (t-\alpha)f(t)\,dt\neq 0$.

c) En déduire une contradiction. Conclure.

Exercice 10

Soit a >1.

1) A l'aide du changement de variable $u=\frac{1}{t}$, montrer que $\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt=-\int_1^a \frac{\ln(t)}{1+t^2}$.

2) En déduire la valeur de $\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$.

Exercice 11

1) Montrer que $\int_0^1 e^t\,dt - \int_0^1 t^n e^t\,dt < \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}\,dt < \int_0^1 e^t\,dt$ (utiliser la linéarité de l'intégrale).

2) Montrer que $0 < \int_0^1 t^n e^t\,dt < \frac{e}{n+1}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}\,dt$.

Exercice 12

Calculer les intégrales suivantes.

1) $\int_0^2 \frac{ds}{(s+1)^2}$ 2) $\int_0^\pi 2\sin(3t)\,dt$ 3) $\int_0^1 x\,e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$

4) $\int_1^3 \frac{3x}{(x+1)(x+4)}\,\mathrm{dx}$

Exercice 13

On considère les intégrales $I = \int_0^\pi e^{-t}\sin(2t)\,dt$ et $J = \int_0^\pi e^{-t}\cos(2t)\,dt$.

1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = 2J$.
2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J = 1 - e^{-\pi} - 2I$.
3) Déduire des deux questions précédentes les valeurs de I et de J .

Exercice 14

On considère $I = \int_1^4 \frac{1}{x - 2\sqrt{x} + 2}\,\mathrm{d}x$.

A l'aide du changement de variable $x = (t+1)^2$, calculer la valeur exacte de I

Exercice 15

Soit $I = \int_1^2 \frac{\ln(t)}{(2+t)^2}\,\mathrm{dt}$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_1^2 \frac{\ln(t)}{(2+t)^2}\,\mathrm{dt} = \frac{-\ln(2)}{4} + \int_1^2 \frac{1}{t(2+t)}\,\mathrm{dt}$.

2. En déduire la valeur exacte de I.

Exercice 16

A l'aide du changement de variable $x = \frac{t-1}{2}$, calculer $\int_{-1}^3 \frac{2t-1}{t^2-2t+5}\,\mathrm{dt}$.

Exercice 17 (Équation intégrale) *(nécessite le cours sur les équations différentielles)*

On cherche une fonction $y(t)$ continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant la relation :

$$(E) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) + 4\int_0^t y(s)\,ds = 10.$$

1. Expliquer pourquoi si $y(t)$ est une solution continue de *(E)*, alors $y(t)$ est dérivable.
2. Montrer que si $y(t)$ est une solution de *(E)*, alors $y'(t) + 4y(t) = 0$.
3. Montrer que l'équation *(E)* possède une unique solution continue que l'on déterminera.

(*)Exercice 18 (comportement asymptotique d'une primitive de fonction périodique)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $F(t) = \int_0^t |\sin(s)|\,\mathrm{d}s$.

1) Trouver une expression de $F(t)$ pour $t \in [0, \pi]$ et une expression de $F(t)$ pour $t \in [\pi, 2\pi]$.

2) On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $G(t) = F(t+\pi) - F(t)$.

a) Montrer que G est dérivable.

b) Montrer ensuite que la fonction G est égale à une constante que l'on déterminera.

3) On considère enfin la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $H(t) = F(t) - \frac{2}{\pi}t$.

a) Montrer que la fonction H est $\pi-$périodique.

b) Calculer la valeur de $H\left(\frac{940}{3}\pi\right)$. En déduire la valeur exacte de $F\left(\frac{940}{3}\pi\right)$.

c) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{F(t)}{t}$ (on pourra majorer $H(t)$ sur $[0\,;\pi]$).

4) On considère maintenant une fonction $f(t)$ continue et $T-$périodique sur $\mathbb{R}$ avec $T > 0$. On pose $F(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$. En s'inspirant de la démarche des questions précédentes, déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{F(t)}{t}$.

(*) Exercice 19 (Lissage d'un signal) *(nécessite le cours sur les équations différentielles)*

Un signal périodique $x(t)$ de période $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ est lissé par un filtre R-C. L'entrée $x(t)$ et la sortie $y(t)$ sont liées par la relation :

$$(E) : a\,y'(t) + y(t) = x(t)$$

avec $a = RC$.

Mathématiquement, si $x(t)$ est continue, l'ensemble des solutions de (E) est infini, si l'on n'a pas accès à la valeur de la condition initiale $y(0)$. En revanche, si l'on impose à $y(t)$ d' être périodique de période T (ce qui correspond à l'idée d'un régime permanent périodique), l'équation différentielle (E) va nous permettre de définir de façon non ambiguë la sortie $y(t)$.

Soit $y_p(t)$ une solution particulière de (E) (pas nécessairement périodique) et soit $y(t)$ une solution quelconque de (E).

1) a) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = C e^{\frac{-t}{a}} + y_p(t)$.

b) Montrer qu'il existe une unique valeur de C pour laquelle $y(0) = y(T)$ et la déterminer en fonction des paramètres *a, T,* $y_p(0)$ et $y_p(T)$. On notera C_0 cette valeur.

c) Expliquer pourquoi si $y(t)$ est T-périodique, alors $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = C_0 e^{\frac{-t}{a}} + y_p(t)$.

2) Réciproquement, soit $y(t) = C_0 e^{\frac{-t}{a}} + y_p(t)$ (C_0 étant la constante trouvée au 1)) Posons $\tilde{y}(t) = y(t+T) - y(t)$.

a) Montrer que $\tilde{y}(0) = 0$.

b) En utilisant la T-périodicité de $x(t)$, montrer que $a\,\tilde{y}'(t) + \tilde{y}(t) = 0$.

c) Que peut-on en déduire sur $\tilde{y}(t)$? Sur $y(t)$?

3) Que peut-on conclure quant aux solutions T- périodiques éventuelles de (E) ?

4) Le but de cette question est d'établir l'inégalité dite de Cauchy-Schwartz.
Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$, $a < b$.
Posons, pour $X \in \mathbb{R}$, $P(X) = \int_a^b (f(t) - X g(t))^2 dt$. On suppose pour le moment que $g(t)$ n'est pas la fonction nulle.

a) Montrer que $\int_a^b (g(t))^2 dt > 0$ et que $\forall X \in \mathbb{R}$, $P(X) \geq 0$.

b) En utilisant les propriétés de linéarité de l'intégrale, montrer que $P(X)$ est un polynôme du second degré.

c) Que peut-on dire du discriminant de $P(X)$? En déduire l'inégalité dite de Cauchy-Schwartz : $\left|\int_a^b f(t) g(t)\ \mathrm{dt}\right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\ \mathrm{dt}} \sqrt{\int_a^b (g(t))^2\ \mathrm{dt}}$

d) L'inégalité reste-elle exacte si $g(t)$ est la fonction nulle ? Si $a = b$?

A partir de maintenant, on considère $y(t)$ l'unique solution T-périodique de (E). On note $< x > = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\ \mathrm{dt}$ et $< x^2 > = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\ \mathrm{dt}$. Mêmes notations pour $y(t)$.

5) Prouver à partir de la relation (E) que $< x > = < y >$.

En soustrayant aux deux membres de (E) la quantité $< x >$ on obtient la relation :
$(E'): a\,y'(t) + y(t) - < x > = x(t) - < x >$

6) a) Montrer par l'absurde qu'il est faux de dire que $\forall t \in [0;T]$, $y(t) > < x >$. De même montrer par l'absurde qu'il est faux de dire que $\forall t \in [0;T]$, $y(t) < < x >$. (On s'aidera du 5))

b) En déduire $\exists t_0 \in [0;T]$: $y(t_0) = < x >$.

Dans la suite t_0 désignera un réel appartenant à $[0;T]$ et vérifiant $y(t_0) = < x >$.

7) a) En multipliant l'égalité (E') par $y'(t)$, montrer que
$a \int_0^T (y'(t))^2 \mathrm{dt} = \int_0^T y'(t)(x(t) - < x >)\mathrm{dt}$.

b) En déduire à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwartz que :
(1) $\int_0^T (y'(t))^2 \mathrm{dt} \leq \frac{1}{a^2}\int_0^T (x(t) - < x >)^2 \mathrm{dt}$

8) a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \langle x \rangle + \int_{t_0}^{t} y'(s)\,\mathrm{d}s$.

b) En déduire par l'inégalité de Cauchy-Schwartz que

$$\forall t \in [t_0 ; T],\ |y(t) - \langle x \rangle| \leq \sqrt{t - t_0} . \sqrt{\int_{t_0}^{t} (y'(s))^2\,\mathrm{d}s}$$

$$\forall t \in [0 ; t_0],\ |y(t) - \langle x \rangle| \leq \sqrt{t_0 - t} . \sqrt{\int_{t}^{t_0} (y'(s))^2\,\mathrm{d}s}$$

c) Déduire, à l'aide du résultat de la question 7)b), que

$$\forall t \in [0 ; T],\ |y(t) - \langle x \rangle|^2 \leq \frac{T}{a^2} \int_0^T (x(t) - \langle x \rangle)^2 \mathrm{d}t$$

d) En déduire que

$$\forall t \in [0 ; T],\ |y(t) - \langle x \rangle|^2 \leq \frac{T^2}{a^2} \left(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \right)$$

e) Que peut-on dire de $y(t)$ si $a \to +\infty$? A quel phénomène physique peut-on relier ce résultat ?

9) Dans cette question, on suppose que $x(t) = |\sin(2\pi t)|$.

a) Montrer que $x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique.

b) Pour quelles valeur de *a* peut-on dire que $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) \sim \frac{2}{\pi}$ à 10^{-2} près ? Commenter physiquement le résultat ainsi obtenu.

(*) Exercice 20

1) A l'aide du théorème des sommes de Darboux, calculer

$\lim_{n \to} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$. En déduire un équivalent simple de la forme $A n^{\alpha}$ de $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}$ quand $n \to +\infty$.

2) Soit $p \in \mathbb{N}$. S'inspirer de la question précédente pour trouver un équivalentde la forme $A n^{\alpha}$ de $1 + 2^p + 3^p + \ldots + n^p$ quand $n \to +\infty$.

(*)Exercice 21 (Équation différentielle non linéaire)

On s'intéresse aux fonction $t \to y(t)$ dérivables sur $[0 ; +\infty[$ vérifiant $y'(t) = \sqrt{1 + y^2(t)}$ avec la condition initiale $y(0) = a$ où *a* est un réel donné.

Partie A : Existence

Soit *F* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} dt$.

1) Déterminer le sens de variations de la fonction *F*. Est-elle paire ? Impaire ?
2) a) Montrer que $\forall t \geq 0,\ \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \geq \frac{1}{t + 1}$.

   b) En déduire que $\forall x \geq 0, F(x) \geq \ln(x + 1)$.
3) Montrer que *F* établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
4) Justifier que la fonction $t \to y(t) = F^{-1}(F(a) + t)$ est dérivable et est une solution de l'équation différentielle $y'(t) = \sqrt{1 + y^2(t)}$ avec la condition initiale $y(0) = a$.

Partie B : Unicité

On suppose que $t \to y_1(t)$ et $t \to y_2(t)$ sont deux fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$, et sont solutions de l'équation $y'(t)=\sqrt{1+y^2(t)}$ avec la condition initiale $y(0)=a$.

5) Montrer que les fonctions $t \to F(y_1(t))$ et $t \to F(y_2(t))$ sont égales. Que peut on en déduire des fonctions $t \to y_1(t)$ et $t \to y_2(t)$?

Partie C : expression des solutions

Soit $t \to y(t)$ **la** solution sur $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle $y'(t)=\sqrt{1+y^2(t)}$ avec la condition initiale $y(0)=a$.

6) Montrer que la fonction dérivée $t \to y'(t)$ est elle aussi dérivable, et que $\forall t \geq 0,\ y''(t)=y(t)$.
7) a) Exprimer $y'(0)$ en fonction de a .
   b) En déduire une expression de $y(t)$.
8) a) En utilisant le résultat de la question 4) et le cas $a = 0$, montrer que $\forall x \geq 0,\ e^{2F(x)}-2xe^{F(x)}-1=0$.
   b) En déduire une expression de $F(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$ pour $x \geq 0$.

(*)Exercice 22 (Approximation affine par la méthode des moindres carrés)
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[0;A]$ avec $A>0$. Dans tout l'exercice, on pose

$$<f(t)>=\frac{1}{A}\int_0^A f(t)dt \quad , \quad <f^2(t)>=\frac{1}{A}\int_0^A f^2(t)dt \quad \text{et} \quad <tf(t)>=\frac{1}{A}\int_0^A tf(t)dt \quad .$$

1) Dans cette question, on cherche à trouver une constante $a \in \mathbb{R}$ telle que la quantité

$$P_0(a)=\int_0^A (f(t)-a)^2 dt \quad \text{soit minimale.}$$

a) Montrer que l'application $a \to P_0(a)$ est un polynôme du second degré.
b) En déduire que l'application $a \to P_0(a)$ admet un minimum pour $a=<f(t)>$.
Commenter le résultat obtenu.

A partir de maintenant, on cherche à obtenir la droite d'ajustement de f sur l'intervalle $[0;A]$ par la méthode des moindres carrés : il s'agit de trouver les constantes a et b de sorte que la quantité

$$P_1(a,b)=\int_0^A (f(t)-at-b)^2 dt$$

soit minimale.

Soient $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a_0;b_0) \in \mathbb{R}^2$. On pose $g(t)=at+b$ et $g_0(t)=a_0t+b_0$.

2) Montrer que

$$\int_0^A (f(t)-g(t))^2 dt=\int_0^A (f(t)-g_0(t))^2 dt+\int_0^A (g_0(t)-g(t))^2 dt+2\int_0^A (f(t)-g_0(t))(g_0(t)-g(t))dt$$

3)

a) Montrer qu'il existe un unique couple $(a_0;b_0)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\int_0^A (f(t)-g_0(t))\,dt=0$ et $\int_0^A t(f(t)-g_0(t))\,dt=0$. Déterminer a_0 et b_0 explicitement en fonction de $<f(t)>=\frac{1}{A}\int_0^A f(t)\,dt$ et $<t\,f(t)>=\frac{1}{A}\int_0^A t\,f(t)\,dt$.

b) Justifier alors que $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$, on a $\int_0^A (f(t)-g_0(t))(g_0(t)-at-b)\,dt=0.$

On fixe le couple $(a_0;b_0)$ à la valeur trouvée à la question précédente.

4) Déduire des questions précédentes que $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2,\ P_1(a,b)-P_1(a_0;b_0)=\int_0^A (g_0(t)-g(t))^2\,dt$.

Montrer enfin que $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2,\ P_1(a,b)>P_1(a_0;b_0)$ sauf si $a=a_0$ et $b=b_0$.

5) Application : on prend $A=\frac{\pi}{2}$ et $f(t)=\sin(t)$. Trouver l'équation de la droite d'ajustement de la fonction *f* obtenue par la méthode des moindres carrés.

(*)Exercice 23

Dans cet exercice, on rappelle le théorème suivant : pour toute fonction g continue sur $[0;1]$ *, il existe* $k\in\mathbb{R}$ *tel que* $\forall t\in[0;1],\ |f(t)|\leqslant k$ *(voir Théorème 2, chapitre fonctions élémentaires)*

Soit *f* une fonction dérivable sur $[0;1]$. On définit sur $]0;1]$ la fonction φ_f par l'expression $\varphi_f(x)=x\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt$.

1) Calculer une expression de $\varphi_f(x)$ dans la cas où *f* est une fonction affine ($f(t)=at+b$).
2) On suppose dans cette question que $\exists k\in\mathbb{R}\ :\ \forall t\in[0;1],\ |f(t)|\leqslant k\,t$. Montrer que $\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=0$.
3) Dans le cas général, montrer que $\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)$ existe et exprimer simplement sa valeur à l'aide de la fonction *f*.

Exercice 24 (Théorème de Rouché et localisation des racines d'un polynôme).

1) Soit *I* un intervalle et $u\ :\ I\to\mathbb{C}$ une fonction dérivable. On pose $\forall t\in I,\ x(t)=\mathrm{Re}(u(t))$ et $y(t)=\mathrm{Im}(u(t))$. On suppose de plus que $\forall t\in I,\ x(t)\neq 0$

   a) Montrer que $\frac{u'(t)}{u(t)}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2(t)+y^2(t)\right)+j\arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)\right)$.

   b) En déduire que si $I=\mathbb{R}$, et que $u\ :\ I\to\mathbb{C}$ est 2π-périodique , alors $\int_0^{2\pi}\frac{u'(t)}{u(t)}\,dt=0$.

2) Dans cette question, on considère $r>0$, $z_0\in\mathbb{C}$ tel que $|z_0|\neq r$, et soit $z_0=r_0e^{jt_0}$ la forme exponentielle de z_0.

a) Montrer que si $|z_0|>r$, alors $\int_0^{2\pi}\frac{re^{jt}}{re^{jt}-z_0}dt=0.$

On suppose maintenant que $|z_0|<r$.

b) Vérifier que $\forall t\in\mathbb{R}$, $\frac{re^{jt}}{re^{jt}-z_0}=1+\frac{z_0e^{-jt}}{r-z_0e^{-jt}}$.

c) En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi}\frac{re^{jt}}{re^{jt}-z_0}dt$.

3) Vérifier que pour tout polynôme $P\in\mathbb{C}[X]$ et pour tout nombre complexe α la fonction $t\to P(e^{\alpha t})$ est dérivable de dérivée $t\to\alpha e^{\alpha t}P'(e^{\alpha t})$ (on rappelle que si $P(X)=\sum_{n=0}^{d}a_nX^n$, la dérivée formelle de P est $P'(X)=\sum_{n=1}^{d}n\,a_nX^{n-1}$.)

4) On considère $P\in\mathbb{C}[X]$ avec $\deg(P(X))\geqslant 1$ et soit $P(X)=a\Pi_{k=1}^{p}(X-z_k)^{n_k}$ sa factorisation en produit de polynômes irréductibles.

a) Montrer par un raisonnement par récurrence que la décomposition en éléments simples de $\frac{P'(X)}{P(X)}$ est égal à $\frac{P'(X)}{P(X)}=\sum_{k=1}^{p}\frac{n_k}{X-z_k}$.

b) Montrer que pour tout réel $r>0$ tel que $\forall k, |z_k|\neq r$, l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{jt}P'(re^{jt})}{P(re^{jt})}dt$ est égale au nombre de racines de $P(X)$ (comptées avec leur ordre de multiplicité) de module strictement plus petit que *r*.

5) Dans cette question, on considère deux polynômes $P,Q\in\mathbb{C}[X]$ vérifiant la condition :
(R) : $\forall z\in\mathbb{C},\ |z|=1\Rightarrow|P(z)-Q(z)|<|Q(z)|$

a) Vérifier que les racines de $P(X)$ et de $Q(X)$ sont de module différent de 1.

b) On pose $h(t)=\frac{P(e^{jt})}{Q(e^{jt})}$. Montrer à l'aide de la question 1) que $\int_0^{2\pi}\frac{h'(t)}{h(t)}dt=0$.

On pose également $f(t)=P(e^{jt})$ et $g(t)=Q(e^{jt})$.

c) Vérifier que $\int_0^{2\pi}\frac{f'(t)}{f(t)}dt=\int_0^{2\pi}\frac{g'(t)}{g(t)}dt.$ Que peut on en déduire sur les racines de $P(X)$ et de $Q(X)$ (Théorème de Rouché) ?

6) Dans cette question, on considère pour $n\geqslant 2$ les deux polynômes $P(X)=X^n+3X^{n-1}+1$ et $Q(X)=3X^{n-1}$. Montrer que $P(X)$ et $Q(X)$ vérifient la relation *(R)* de la question 5. En déduire que le polynôme $X^n-3X^{n-1}+1$ ne possède qu'une seule racine de module supérieur ou égal à 1.

VII) Corrigés

Exercice 1

On a $A=\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(2t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\sin(3t)-\sin(t))\,dt=\frac{1}{2}\left[\cos(t)-\frac{1}{3}\cos(3t)\right]_0^{\pi}=-\frac{2}{3}.$

(Autre méthode :

$A=\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(2t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(2\sin(t)\cos^2(t)-\sin(t))\,dt=\frac{1}{2}\left[\cos(t)-\frac{1}{3}\cos^3(t)\right]_0^{\pi}=-\frac{2}{3}.$)

On a $B=\int_0^2\frac{t\,dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{2t\,dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}[\ln(t^2+4)]_0^2=\frac{1}{2}\ln(2)$

On a $C=\int_{-1}^2 e^{-2t}\,dt=\frac{-1}{2}[e^{-2t}]_{-1}^2=\frac{e^2-e^{-4}}{2}.$

On a $D=\int_0^3 t(1+t^2)^3\,dt=\frac{1}{2}\int_0^3(2t)(1+t^2)^3\,dt=\frac{1}{8}[(1+t^2)^4]_0^3=\frac{9999}{8}$

On a $E=\int_0^9\sqrt{\frac{1}{3}t+1}\,dt=3\int_0^9\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}t+1}\,dt=3\left[\frac{\left(\frac{1}{3}t+1\right)\sqrt{\frac{1}{3}t+1}}{\frac{3}{2}}\right]_0^9=2\left[\left(\frac{1}{3}t+1\right)\sqrt{\frac{1}{3}t+1}\right]_0^9=14.$

Exercice 2

Par une décomposition en éléments simples,

$A=\int_{-1}^1\frac{dt}{t^2-5t+6}=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t-2}\right)dt=[\ln|t-3|-\ln|t-2|]_{-1}^1=\ln\left(\frac{3}{2}\right).$

Par une décomposition en éléments simples,

$B=\int_3^4\frac{t.dt}{(t+1)(t-2)^2}=\frac{1}{9}\int_3^4\left(-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t-2}+\frac{6}{(t-2)^2}\right)=\frac{1}{9}\left[\ln\left(\frac{t-2}{t+1}\right)-\frac{6}{t-2}\right]_3^4=\frac{1}{9}\left(\ln\left(\frac{8}{5}\right)+3\right)$.

Par division euclidienne, on a

$C=\int_0^1\frac{t^3+1}{t^2+1}\,dt=\int_0^1 t+\frac{1-t}{t^2+1}\,dt=\left[\frac{t^2}{2}+\arctan(t)-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\ln(2)}{2}$

Par une décomposition en éléments simples

$D=\int_{-2}^2\frac{1}{(t+4)(t^2+4)}\,dt=\frac{1}{20}\int_{-2}^2\left(\frac{1}{t+4}-\frac{t-4}{t^2+4}\right)dt=\frac{1}{20}\int_{-2}^2\left(\frac{1}{t+4}+\frac{4}{t^2+4}\right)dt-\frac{1}{20}\int_{-2}^2\left(\frac{t}{t^2+4}\right)dt$

$=\frac{1}{20}\int_{-2}^2\left(\frac{1}{t+4}+\frac{4}{t^2+4}\right)dt$ car l'intégrale d'une fonction impaire sur $[-2;2]$ vaut 0

$=\frac{1}{20}\int_{-2}^2\left(\frac{1}{t+4}+2.\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\right)dt=\frac{1}{20}\left[\ln(t+4)+2\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_{-2}^2=\frac{1}{20}(\ln(3)+\pi).$

Exercice 3

1) $P(X)=(X+2)^2+5^2$.

2) On a $\int_{-2}^{3}\frac{t}{t^2+4t+29}dt=\int_0^1\frac{5s-2}{25(s^2+1)}5\,ds=\frac{1}{5}\int_0^1\frac{5s-2}{s^2+1}ds=\left[\frac{1}{2}\ln(s^2+1)-\frac{2}{5}\arctan(s)\right]_0^1$

$=\frac{-\pi}{10}+\frac{1}{2}\ln(2)$.

Exercice 4

$$\int_0^1\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2(t)}{(1+\tan^2(t))^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2(t)}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}1+\cos(2t)\,dt=\frac{1}{8}(\pi+2)$$

Exercice 5

1) Pour $x\in]-\infty;0]$, $F(x)=0$ et pour $x\in]0;+\infty[$, $F(x)=\int_0^x t\,dt=\frac{1}{2}x^2$.

2) On a pour $x\in]-\infty;0]$, $G(x)=0$, pour $x\in]0;1]$, $G(x)=\int_0^x t\,dt=\frac{1}{2}x^2$ et pour

$x\in]1;+\infty[$, $G(x)=\int_{x-1}^x t\,dt=x-\frac{1}{2}$.

3) On a pour $x\in]-\infty;0]$, $H(x)=\int_0^x t\,f(x-t)dt=0$ car $\forall t\in[x;0]$, $x-t\leqslant 0$ donc

$f(x-t)=0$ et la fonction à intégrer est nulle.

On a pour $x\in]0;+\infty[$, $H(x)=\int_0^x t\,f(x-t)dt=\int_0^x t(x-t)dt=\left[\frac{1}{2}xt^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^x=\frac{x^3}{6}$.

Exercice 6

1) $\int_0^2\frac{ds}{(2s+1)^2}=\frac{-1}{2}\left[\frac{1}{2s+1}\right]_0^2=\frac{2}{5}$

2) $\int_0^\pi 3\sin(\frac{t}{3})dt=\left[-9\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right]_0^\pi=\frac{9}{2}$.

3) $\int_0^1 x\,e^{-x^2}=\frac{-1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^1=\frac{1-e^{-1}}{2}$.

Exercice 7

1)

$$\sin(x)^4=\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1-2\cos(2x)+\frac{1+\cos(4x)}{2}\right)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{8}\cos(4x).$$

2) On a $<f>=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin^4(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{8}\cos(4x)\right)dx=\frac{3}{8}$.

Exercice 8

Calculer les intégrales suivantes :

1) On procède par IPP: $A=\int_0^1 t\,e^{2t}\,dt=\frac{1}{2}\left[t\,e^{2t}\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2t}\,dt=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)=\frac{1+e^2}{4}$.

2) $B=\int_0^{\pi} e^{(2+j)t}\,dt=\frac{1}{2+j}\left[e^{(2+j)t}\right]_0^{\pi}=\frac{e^{(2+j)\pi}-1}{2+j}=\frac{e^{2\pi}+1}{5}(-2+j)$

3) $C=\int_0^{\pi} e^{2t}\sin(t)\,dt=\mathrm{Im}(B)=\frac{1+e^{2\pi}}{5}$

4) On procède par IPP : $D=\int_1^2 (t^2+1)\ln(t)\,dt=\left[\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\ln(t)\right]_1^2-\int_0^1\left(\frac{t^2}{3}+1\right)dt=\frac{14}{3}\ln(2)-\frac{10}{9}$.

5) $E=\int_{-1}^1 t^2\sqrt{t+1}\,dt$ (on posera $s=\sqrt{t+1}$.)

On a $E=\int_{-1}^1 t^2\sqrt{t+1}\,dt=\int_0^{\sqrt{2}} s\left(s^2-1\right)^2(2s)\,ds=2\int_0^{\sqrt{2}} s^6-2s^4+s^2\,ds=\frac{44}{105}\sqrt{2}$

6) On a par une première IPP

$F=\int_1^3 t(\ln(t))^2\,dt=\frac{1}{2}\left[t^2\ln(t)^2\right]_1^3-\int_1^3 t\ln(t)\,dt=\frac{9}{2}(\ln(3))^2-\int_1^3 t\ln(t)\,dt$,

puis par une deuxième IPP :

$F=\frac{9}{2}(\ln(3))^2-\left(\frac{1}{2}\left[t^2\ln(t)\right]_1^3-\frac{1}{2}\int_1^3 t\,dt\right)=\frac{9}{2}(\ln(3))^2-\frac{9}{2}\ln(3)+2$.

Exercice 9

1) Si l'équation $f(x)=0$ n'avait pas de solution sur l'intervalle $]0;1[$, la fonction f serait toujours strictement positive ou toujours strictement négative sur $]0;1[$, ce qui impliquerait que $\int_0^1 f(t)\,dt\neq 0$.

2)

a) Si la fonction f ne changeait pas de signe en α , alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle serait de signe constant sur $]0;1[$ f ne s'annule pas en d'autres valeurs que α . La fonction f serait soit toujours strictement positive sur $]0;1[$ sauf en α , soit toujours strictement négative sur $]0;1[$ sauf en α , ce qui dans tous les cas entraînerait $\int_0^1 f(t)\,dt\neq 0$, ce qui n'est pas vrai.

b) On déduit du a) que la fonction $t\rightarrow(t-\alpha)f(t)$ serait soit toujours strictement positive sur $]0;1[$ sauf en α , soit toujours strictement négative sur $]0;1[$ sauf en α , ce qui entraînerait aussi que $\int_0^1 (t-\alpha)f(t)\,dt\neq 0$.

c) On a $\int_0^1 (t-\alpha)f(t)\,dt=\int_0^1 t\,f(t)\,dt-\alpha\int_0^1 f(t)\,dt=0-0=0$, ce qui est en contradiction avec le résultat de la question précédente.

Exercice 10

1) On a $\int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = \int_a^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\frac{1}{u^2}}.\left(\frac{-du}{u^2}\right) = \int_a^1 \frac{-\ln(u)}{1+u^2}.(-du) = \int_a^1 \frac{\ln(u)}{1+u^2}du = -\int_1^a \frac{\ln(u)}{1+u^2}du$ par permutation des bornes.

2) Par la relation de Chasles $\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt + \int_1^a \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = -\int_1^a \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt + \int_1^a \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = 0$

Exercice 11

1) Soit n un entier naturel fixe. On a $\forall t > 0,\ (1-t^n)e^t - \frac{e^t}{1+t^n} = \frac{-e^t t^{2n}}{1+t^n} < 0$ donc

$$\int_0^1 e^t\,dt - \int_0^1 t^n e^t\,dt = \int_0^1 (1-t^n)e^t\,dt < \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt.$$

D'autre part, $\forall t > 0,\ \frac{e^t}{1+t^n} < e^t$ donc $\int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt < \int_0^1 e^t\,dt$.

2) Soit n un entier naturel fixe. On a $\forall t \in]0\,;1],\ t^n e^t \leqslant t^n e$ donc $\int_0^1 t^n e^t\,dt < e\int_0^1 t^n\,dt = \frac{e}{n+1}$.

L'inégalité $0 < \int_0^1 t^n e^t\,dt$ provient du fait que la fonction $t \to t^n e^t$ est strictement positive sur $]0\,;1]$.

On déduit du 1) que $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 e^t\,dt - \frac{e}{n+1} < \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt < \int_0^1 e^t\,dt$, c'est à dire que

$\forall n \in \mathbb{N},\ e-1-\frac{e}{n+1} < \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt < e-1$, ce qui, par le Théorème des gendarmes implique que

$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt = e-1$. Tout se passe comme si on négligeait le t^n dans l'intégrale, ce qui, ici, est conforme à l'intuition car $\forall t \in [0\,;1[,\ t^n \to 0$ si $n \to +\infty$.

Exercice 12

1) $\int_0^2 \frac{ds}{(s+1)^2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

2) $\int_0^{\pi} 2\sin(3t)\,dt = \frac{-2}{3}\left[\cos(3t)\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}$.

3) $\int_0^1 x\,e^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right)$.

4) $\int_1^3 \frac{3x}{(x+1)(x+4)}\,\mathrm{dx} = \int_1^3 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{4}{x+4}\right)\mathrm{dx} = 4\ln\left(\frac{7}{5}\right) - \ln(2)$.

Exercice 13

1) $I = \int_0^{\pi} e^{-t}\sin(2t)\,dt = -\left[e^{-t}\sin(2t)\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} e^{-t}\cos(2t)\,dt = 2J$.

2) $J=\int_0^{\pi} e^{-t}\cos(2t)\,dt=-\left[e^{-t}\cos(2t)\right]_0^{\pi}-2\int_0^{\pi} e^{-t}\sin(2t)\,dt=1-e^{-\pi}-2\,I.$

3) On a $J=1-e^{-\pi}-2\,I=1-e^{-\pi}-4\,J$ car $I=2\mathrm{J}$. On en déduit que $J=\dfrac{1-e^{-\pi}}{5}$ et $I=2\mathrm{J}=2\dfrac{1-e^{-\pi}}{5}$.

Exercice 14

On a $I=\int_1^4 \dfrac{1}{x-2\sqrt{x}+2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \dfrac{1}{(t+1)^2-2(t+1)+2}\,2(t+1)\,dt=\int_0^1 \dfrac{2t+2}{t^2+1}\,dt$

$\left[\ln(t^2+1)+2\arctan(t)\right]_0^1=\ln(2)+\dfrac{\pi}{2}.$

Exercice 15

1. On a $I=\int_1^2 \dfrac{\ln(t)}{(2+t)^2}\,\mathrm{dt}=-\left[\dfrac{\ln(t)}{2+t}\right]_1^2+\int_1^2 \dfrac{1}{t(2+t)}\,\mathrm{dt}=\dfrac{-\ln(2)}{4}+\int_1^2 \dfrac{1}{t(2+t)}\,\mathrm{dt}$

2. La question précédente donne, avec une décomposition en éléments simples :

$I=\dfrac{-\ln(2)}{4}+\dfrac{1}{2}.\int_1^2 \dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2+t}\,\mathrm{dt}=\dfrac{-\ln(2)}{4}+\dfrac{1}{2}\left[\ln\left(\dfrac{t}{t+2}\right)\right]_1^2=\dfrac{\ln(3)}{2}-\dfrac{3}{4}\ln(2).$

Exercice 16

On a $\int_{-1}^3 \dfrac{2t-1}{t^2-2t+5}\,\mathrm{dt}=\int_{-1}^3 \dfrac{2(t-1)+1}{(t-1)^2+2^2}\,\mathrm{dt}=2\int_{-1}^1 \dfrac{4x+1}{4(x^2+1)}\,\mathrm{dx}=2\int_{-1}^1 \dfrac{x}{x^2+1}\,\mathrm{dx}+\dfrac{1}{2}\int_{-1}^1 \dfrac{1}{x^2+1}\,\mathrm{dx}$.

On a $\int_{-1}^1 \dfrac{x}{x^2+1}\,\mathrm{dx}=0$ (intégrale d'une fonction impaire entre – 1 et +1) et $\dfrac{1}{2}\int_{-1}^1 \dfrac{1}{x^2+1}\,\mathrm{dx}=\dfrac{\pi}{4}$. On a donc $\int_{-1}^3 \dfrac{2t-1}{t^2-2t+5}\,\mathrm{dt}=\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 17

1. Si $y(t)$ est une solution continue de *(E)*, alors la fonction $t \rightarrow \int_0^t y(s)\,ds$ en est une primitive, donc est dérivable . Il en est donc de même de $y(t)$ car $\forall t\in\mathbb{R},\quad y(t)=10-4\int_0^t y(s)\,ds.$

2. Il suffit alors de dériver l'équation (E).

3. Soit $y(t)$ une solution de *(E)*. En posant $t=0$ dans l'équation *(E)*, on obtient $y(0)=10.$ Puisque $\forall t\in\mathbb{R},\ y'(t)+4\,y(t)=0,$ on obtient que $y(t)=10\,e^{-4t}.$

Réciproquement, si $y(t)=10\,e^{-4t},$ alors

$\forall t\in\mathbb{R},\quad y(t)+4\int_0^t y(s)\,ds=10\,e^{-4t}+40\int_0^t e^{-4s}\,ds=10\,e^{-4t}-10\left[e^{-4s}\right]_0^t=10\,e^{-4t}-10\left(e^{-4t}-1\right)=10$,

donc y est solution de *(E)*.

Exercice 18

1) On a $\forall t\in[0,\pi],\ \sin(t)\geqslant 0$ donc $\forall t\in[0,\pi],\ F(t)=\int_0^t \sin(s)\,\mathrm{d}s=1-\cos(t)$.
On a $\forall t\in[\pi,2\pi],\ \sin(t)\leqslant 0$ donc
$\forall t\in[0,\pi],\ F(t)=\int_0^t \sin(s)\,\mathrm{d}s=\int_0^\pi \sin(s)\,\mathrm{d}s-\int_\pi^t \sin(s)\,\mathrm{d}s=3+\cos(t)$.

2)

a) La fonction F est dérivable comme primitive de fonction continue, donc G est dérivable comme différence de deux fonctions dérivables.

b) On a $G'(t)=F'(t+\pi)-F'(t)=|\sin(t+\pi)|-|\sin(t)|=|-\sin(t)|-|\sin(t)|=0$. La fonction G est donc constante, égale à $G(0)=F(\pi)-F(0)=F(\pi)=2$.

3)

a) On a $H(t+\pi)-H(t)=G(t)-\frac{2}{\pi}(t+\pi-t)=G(t)-2=0$ d'après la question précédente, donc la fonction H est $\pi-$périodique.

b) Par $\pi-$périodicité de la fonction H, on a $H\left(\frac{940}{3}\pi\right)=H\left(313\pi+\frac{1}{3}\pi\right)=H\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ car H est $\pi-$périodique. On a alors
$H\left(\frac{940}{3}\pi\right)=H\left(\frac{1}{3}\pi\right)=F\left(\frac{1}{3}\pi\right)-\frac{2}{3}=1-\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$. On en déduit que
$F\left(\frac{940}{3}\pi\right)=H\left(\frac{940}{3}\pi\right)+\frac{2}{\pi}.\left(\frac{940}{3}\pi\right)=\frac{-1}{6}+\frac{1880}{3}=\frac{1253}{2}$.

c) Si $t\in[0,\pi]$, on a $H(t)=F(t)-\frac{2}{\pi}t=1-\cos(t)-\frac{2}{\pi}t$ ce qui donne
$\forall t\in[0,\pi],\ |H(t)|\leqslant 4$.

Puisque H est $\pi-$périodique, on a donc $\forall t\in\mathbb{R},\ |H(t)|\leqslant 4$. On a donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{H(t)}{t}=0$.

Puisque $\forall t\neq 0,\ \frac{F(t)}{t}=\frac{2}{\pi}+\frac{H(t)}{t}$, on en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{F(t)}{t}=\frac{2}{\pi}$.

4) On pose $G(t)=F(t+T)-F(t)$. Puisque f est continue, les fonctions F et G sont dérivables et $G'(t)=f(t+T)-f(t)=0$ car f est $T-$périodique sur $\mathbb{R}$. La fonction G est constante, égale à $G(0)=F(T)=\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}s$.

Soit H définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $H(t)=F(t)-\frac{t}{T}\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}s=F(t)-t.<f>_T$. On a
$H(t+T)-H(t)=G(t)-<f>_T(t+T-t)=G(t)-\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}s=0$. La fonction H est donc périodique de période T.
On a
$\forall t\in[0\,;T],\ |H(t)|=\left|\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s-\frac{t}{T}\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_0^t |f(s)\,\mathrm{d}s|+\left|\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}s\right|\leqslant 2.\left|\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}s\right|$
et , puisque H est périodique de période T , on a
$\forall t\in\mathbb{R},\ |H(t)|\leqslant 2.\left|\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}s\right|$.
Puisque $\forall t\neq 0,\ \frac{F(t)}{t}=<f>_T+\frac{H(t)}{t}$, on a alors
$\forall t\neq 0,\ \left|\frac{F(t)}{t}-<f>_T\right|\leqslant\frac{2}{t}.\left|\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}s\right|$
donc

$\lim_{t \to +\infty} \frac{F(t)}{t} = < f >_T$.

Cela traduit l'idée suivante : la valeur moyenne sur $[0\,;+\infty[$ (et même sur $\mathbb{R}$) d'une fonction périodique continue est égale à sa valeur moyenne sur une période (voir propriété 1 du chapitre sur la transformation de Laplace).

Exercice 19

1) a) C'est le Théorème de structure appliqué à (E) .

b) On a $y(0)=y(T) \Leftrightarrow C=C_0=\frac{y_p(T)-y_p(0)}{e^{\frac{-T}{a}}-1}$.

c) Si $y(t)$ est T-périodique, alors nécessairement $y(0)=y(T)$, donc $C=C_0$ par le 1)b) et on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t)=C_0 e^{\frac{-t}{a}}+y_p(t)$.

2)

a) On a par le 1)b, $y(0)=y(T)$ donc $\tilde{y}(0)=y(T)-y(0)=0$.

b) On a :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ a\tilde{y}'(t)+\tilde{y}(t) &= a(y(t)-y(t-T))'+(y(t)-y(t-T)) \\ &= (a y'(t)+y(t))-(a y'(t-T)+y(t-T)) \\ &= x(t)-x(t-T),\end{aligned}$$

en utilisant la relation (E) avec $t-T$ à la place de t.

On a alors :

$\forall t \in \mathbb{R},\ a\tilde{y}'(t)+\tilde{y}(t)=0$

car *x* est T-périodique.

c) La relation

$\forall t \in \mathbb{R},\ a\tilde{y}'(t)+\tilde{y}(t)=0$

montre que $\forall t \in \mathbb{R},\ \tilde{y}(t)=A e^{\frac{-t}{a}}$ pour une certaine constante A, et la relation $\tilde{y}(0)=0$ implique que $A=0$. On en déduit que la fonction $t \to \tilde{y}(t)$ est nulle, donc $t \to y(t)$ est T-périodique.

3) Il existe une unique solution T- périodique de (E) : le 1) c) montre l'unicité, et le 2) montre l'existence.

4)

a) Le (iii) de la propriété 8 montre que $\int_a^b (g(t))^2 dt \geqslant 0$, et puisque $g(t)$ n'est pas la fonction nulle, le (iv) de la propriété 8 montre que $\int_a^b (g(t))^2 dt > 0$.

Le fait que $\forall X \in \mathbb{R},\ P(X) \geqslant 0$ est une conséquence directe du (iii) de la propriété 8.

b) On a $X \in \mathbb{R},\ P(X)=\left(\int_a^b (g(t))^2 dt\right)X^2-2\left(\int_a^b f(t).g(t)dt\right)X+\int_a^b (f(t))^2 dt$

qui est bien un polynôme du second degré car $\int_a^b (g(t))^2 dt \neq 0$.

c) Puisque le polynôme $P(X)$ ne prend que des valeurs positives lorsque $X \in \mathbb{R}$, on a $\Delta \leqslant 0$ donc $4\left(\left(\int_a^b f(t).g(t)dt\right)^2-4\left(\int_a^b (g(t))^2 dt\right).\left(\int_a^b (f(t))^2 dt\right)\right) \leqslant 0$. En prenant la racine carrée on obtient $\left|\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{dt}\right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\ \mathrm{dt}}\sqrt{\int_a^b (g(t))^2\ \mathrm{dt}}$.

d) Oui, car dans les deux cas, on obtient $0 \leqslant 0$.

5) On a en intégrant (E) entre 0 et T :

$$a\int_0^T y'(t)\,dt + \int_0^T y(t)\,dt = \int_0^T x(t)\,dt \quad .$$

Or $\int_0^T y'(t)\,dt = y(T) - y(0) = 0$

donc

$$\int_0^T y(t)\,dt = \int_0^T x(t)\,dt.$$

d'où

$$<x> = <y> \quad .$$

6) a) Si l'on avait $\forall t \in [0\,;T]$, $y(t) > <x>$, la fonction y étant continue, cela donnerait :

$$\int_0^T \left(y(t) - <x>\right) dt > 0$$

$$\int_0^T y(t)\,dt > T <x>$$

$$<y> > <x>$$

ce qui contredit le résultat du 5).

Raisonnement similaire pour montrer que $\forall t \in [0\,;T]$, $y(t) < <x>$

b) Le a) montre que la fonction $t \rightarrow y(t) - <x>$ n'est pas de signe constant sur $[0\,;T]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule sur cet intervalle.

7) a) On a donc :

$$a\int_0^T \left(y'(t)\right)^2 dt + \int_0^T \left(y'(t).\left(y(t) - <x>\right)\right) dt = \int_0^T y'(t)\left(x(t) - <x>\right) \mathrm{dt}$$

$$a\int_0^T \left(y'(t)\right)^2 dt + \frac{1}{2}\left[\left(y(t) - <x>\right)^2\right]_0^T = \int_0^T y'(t)\left(x(t) - <x>\right) \mathrm{dt}$$

d'où

$$a\int_0^T \left(y'(t)\right)^2 \mathrm{dt} = \int_0^T y'(t)\left(x(t) - <x>\right) \mathrm{dt}$$

car $y(0) = y(T)$.

b) On a par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\int_0^T y'(t)\left(x(t) - <x>\right) \mathrm{dt} \leqslant \sqrt{\int_0^T \left(y'(t)\right)^2 \mathrm{dt}}\sqrt{\int_0^T \left(x(t) - <x>\right)^2 \mathrm{dt}}$$

donc

$$a\int_0^T \left(y'(t)\right)^2 \mathrm{dt} \leqslant \sqrt{\int_0^T \left(y'(t)\right)^2 \mathrm{dt}}\sqrt{\int_0^T \left(x(t) - <x>\right)^2 \mathrm{dt}} \quad .$$

Si $\int_0^T \left(y'(t)\right)^2 \mathrm{dt} = 0$ la relation (1) est vraie, sinon, en divisant l'inégalité ci-dessus par $\sqrt{\int_0^T \left(y'(t)\right)^2 \mathrm{dt}}$, on obtient $a\sqrt{\int_0^T \left(y'(t)\right)^2 \mathrm{dt}} \leqslant \sqrt{\int_0^T \left(x(t) - <x>\right)^2 \mathrm{dt}}$ d'où

$a^2\int_0^T (y'(t))^2\,\mathrm{dt} \leq \int_0^T (x(t) - <x>)^2\,\mathrm{dt}$ c'est à dire (1).

8) a) On a $\forall t \in \mathbb{R}\ <x> + \int_{t_0}^t y'(s)\,\mathrm{ds} = <x> + y(t) - y(t_0) = y(t)$ car $y(t_0) = <x>$.

b) On a par le 8)a) : $\forall t \in [t_0 ; T], |\ y(t) - <x>\ | = \left|\int_{t_0}^t y'(s)\,\mathrm{ds}\right|$.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz car $t_0 \leqslant t$:

$$\forall t \in [t_0 ; T],\ |\ y(t) - <x>\ | = \left|\int_{t_0}^t 1.\,y'(s)\,\mathrm{ds}\right|$$

$$\leqslant \sqrt{\int_{t_0}^t 1^2\,\mathrm{ds}}.\sqrt{\int_{t_0}^t (y'(s))^2\ \mathrm{ds}} = \sqrt{t - t_0}.\sqrt{\int_{t_0}^t (y'(s))^2\ \mathrm{ds}}.$$

Même raisonnement pour établir que :

$$\forall t \in [0 ; t_0], |\ y(t) - <x>\ | \leq \sqrt{t_0 - t}.\sqrt{\int_t^{t_0} (y'(s))^2\ \mathrm{ds}}$$

en faisant attention que les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant.

c) On remarque que par la question précédente :

$$\forall t \in [t_0 ; T], |\ y(t) - <x>\ | \leqslant \sqrt{t - t_0}.\sqrt{\int_{t_0}^t (y'(s))^2\ \mathrm{ds}} \leqslant \sqrt{T}\sqrt{\int_0^T (y'(s))^2\ \mathrm{ds}}$$

et

$$\forall t \in [0 ; t_0], |\ y(t) - <x>\ | \leq \sqrt{t_0 - t}.\sqrt{\int_t^{t_0} (y'(s))^2\ \mathrm{ds}} \leqslant \sqrt{T}\sqrt{\int_0^T (y'(s))^2\ \mathrm{ds}}\ .$$

On a donc :

$$\forall t \in [0 ; T],\ |\ y(t) - <x>\ | \leqslant \sqrt{T}\sqrt{\int_0^T (y'(s))^2\ \mathrm{ds}} \leqslant \frac{\sqrt{T}}{a}\sqrt{\int_0^T (x(t) - <x>)^2\,\mathrm{dt}}$$

par le 8)a).

On en déduit le résultat demandé en élevant au carré.

d) Il suffit de remarquer que

$$\int_0^T (x(t) - <x>)^2\,\mathrm{dt} = \int_0^T x^2(t)\,\mathrm{dt} - 2<x>\int_0^T x(t)\,\mathrm{dt} + \int_0^T (<x>)^2\,\mathrm{dt}\ .$$

$$= T<x^2> - 2T<x>^2 + T<x>^2 = T(<x^2> - <x>^2)$$

On a donc par le 8)c) :

$$\forall t \in [0 ; T],\ |y(t) - <x>|^2 \leq \frac{T}{a^2}\int_0^T (x(t) - <x>)^2\,\mathrm{dt} \leqslant \frac{T^2}{a^2}(<x^2> - <x>^2)\ .$$

e) On a obtenu le résultat suivant :

$$\forall t \in [0 ; T],\ |y(t) - <x>| \leq \frac{T}{a}\sqrt{(<x^2> - <x>^2)}\ .$$

Interprétons chaque terme de cette inéquation :

la quantité $|y(t) - <x>|$ représente l'écart entre les valeurs prises par la solution *y* et la valeur moyenne de $x(t)$,

la quantité $\sqrt{(<x^2> - <x>^2)}$ représente « l'écart-type » de l'entrée $x(t)$.

Si $a \to +\infty$, (il faut plutôt l'interpréter comme $\frac{a}{T} \to +\infty$) c'est que la constante de temps $a = \tau = RC$ devient grande devant la période du signal d'entrée. On en déduit que $\frac{T}{a} \to 0$ et le résultat obtenu $\forall t \in [0 ; T],\ |y(t) - <x>| \leq \frac{T}{a}\sqrt{(<x^2> - <x>^2)}$ montre que $y(t) \sim <x>$. Le signal $y(t)$ peut être alors considéré comme quasi-constant, égal à la valeur moyenne de l'entrée. C'est le phénomène de <u>lissage</u> du signal d'entrée.

9)

a) Évident.

b) On a $T=1$, et $\sqrt{\left(<x^2>-<x>^2\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}}$. On a donc :

$\forall t\in[0;1],\ \left|y(t)-\frac{2}{\pi}\right|\leq\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}}$.

Il suffit que $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}}<10^{-2}$, c'est à dire que $a>100\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}}$ pour pouvoir affirmer que $\forall t\in\mathbb{R},\ y(t)\sim\frac{2}{\pi}$ à 10^{-2} près. Si l'on tolère une erreur de 10^{-2} , on peut affirmer que le signal d'entrée $x(t)=|\sin(2\pi t)|$ est correctement lissé si $a>100\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}}$.

Exercice 20

1) Définissons $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ par $f(t)=\sqrt{t}$. Le Théorème des somme de Darboux (Théorème 2) implique alors que $\int_0^1 f(t)\,dt=\frac{1}{n}\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ .\ .\ +\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ .\ .\ +\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

d'où l'on déduit $\lim_{n\to}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ .\ .\ +\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\frac{2}{3}$. On a alors $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ .\ .\ +\sqrt{n}\sim\frac{2}{3}n\sqrt{n}$.

2) Définissons $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ par $f(t)=t^p$. Le Théorème des somme de Darboux (Théorème 2) implique alors que $\int_0^1 f(t)\,dt=\frac{1}{n}\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2^p+3^p+\ .\ .\ +n^p}{n^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^p+3^p+\ .\ .\ +n^p}{n^{p+1}}$

d'où l'on déduit $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^p+3^p+\ .\ .\ +n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$

On a alors $1+2^p+3^p+\ .\ .\ +n^p\sim\frac{n^{p+1}}{p+1}$.

Exercice 21

Partie A : Existence

1) La fonction F étant la primitive qui s'annule en 0 de la fonction continue $t\to\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$, elle est dérivable de dérivée strictement positive, donc est strictement croissante.La fonction $t\to\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ étant paire, la fonction F est impaire. En effet, en faisant le changement de variables $s=-t$, on obtient $F(x)=\int_0^{-x}\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}(-ds)=-\int_0^{-x}\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\,ds=-F(-x)$.

2) a) On a $(t+1)^2=t^2+2t+1\geqslant t^2+1>0$ car $t\geqslant 0$ et on obtient l'inégalité demandée en prenant la racine carrée et l'inverse.

b) Puisque $\forall t\geq 0,\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\geq\frac{1}{t+1}$, $\forall x\geqslant 0,\ \int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt\geq\int_0^x\frac{1}{t+1}\,dt=\ln(x+1)$.

3) Le 2)b) implique $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$, et par imparité de F, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$. Puisque de plus, F est continue et strictement croissante, elle établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

4) La fonction F^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $t \to y(t) = F^{-1}(F(a) + t)$ est bien définie.

Par le Théorème 2 du chapitre sur la dérivation, puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(t) > 0$, la fonction F^{-1} est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc $t \to y(t) = F^{-1}(F(a) + t)$ aussi. On a alors par le Théorème 2

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(F^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))}$$

et, par composition de fonctions :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = \frac{1}{F'(F^{-1}(t + F(a)))} = \sqrt{1 + \left(F^{-1}(t + F(a))\right)^2} = \sqrt{1 + y^2(t)}$$ ce qui montre que la fonction y suit l' équation $y'(t) = \sqrt{1 + y^2(t)}$, et on a $y(0) = F^{-1}(F(a)) = a$

Partie B : Unicité

5) Par composition de fonctions dérivables, pour $i = 1,2$ la fonction $t \to F(y_i(t))$ est dérivable de dérivée $t \to y_i'(t) F'(y_i(t)) = \frac{y_i'(t)}{\sqrt{1 + y_i^2(t)}} = 1$ car $y_i'(t) = \sqrt{1 + y_i^2(t)}$. Puisque la fonction $t \to F(y_i(t))$ prend la valeur $F(a)$ en 0 , on a $\forall t \in \mathbb{R},\ F(y_i(t)) = t + F(a)$ donc $\forall t \in \mathbb{R},\ y_i(t) = F^{-1}(F(a) + t)$ ce qui prouve que les fonctions $t \to y_1(t)$ et $t \to y_2(t)$ sont égales.

Il n'y a donc qu'une seule solution à l'équation différentielle $y'(t) = \sqrt{1 + y^2(t)}$ avec la condition initiale $y(0) = a$.

Partie C : expression des solutions

6) Par composée de fonctions dérivables, la fonction $y'(t) = \sqrt{1 + y^2(t)}$ est aussi dérivable de dérivée $y''(t) = \frac{y(t)\, y'(t)}{\sqrt{1 + y^2(t)}} = y(t)$ car $y'(t) = \sqrt{1 + y^2(t)}$.

7) a) On a $y'(0) = \sqrt{1 + y^2(0)} = \sqrt{1 + a^2}$.

b) De part la relation $\forall t \geq 0,\ y''(t) = y(t)$ la fonction y admet une expression de la forme $y(t) = A e^t + B e^{-t}$. Les conditions initiales $y(0) = a$ et $y'(0) = \sqrt{1 + a^2}$ donnent $y(t) = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{1 + a^2}\right) e^t + \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{1 + a^2}\right) e^{-t}$.

8) a) Puisque $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = F^{-1}(F(0) + t) = F^{-1}(t)$ si $a = 0$, on a par la question précédente : $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} = F^{-1}(t)$ donc, en posant $t = F(x)$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2} e^{F(x)} - \frac{1}{2} e^{-F(x)} = F^{-1}(F(x)) = x$$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2} e^{2F(x)} - \frac{1}{2} = x\, e^{F(x)}$

ce qui mène à l'équation demandée.

b) Si $x \geqslant 0$, la relation $e^{2F(x)} - 2x e^{F(x)} - 1 = 0$ donne, par résolution d'une équation du second degré d'inconnue $e^{F(x)}$, soit $e^{F(x)} = x - \sqrt{1+x^2} < 0$ (impossible), soit $e^{F(x)} = x + \sqrt{1+x^2}$ seule possibilité restante.

On a donc $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ pour $x \geq 0$.

Exercice 22

1) a) On a $P_0(a) = A.\left(a^2 - \left(\frac{2}{A}\int_0^A f(t)dt\right)a + \frac{1}{A}\int_0^A f^2(t)dt\right) = A.\left(a^2 - 2<f(t)>.a + <f^2(t)>\right)$ qui est bien une expression polynomiale de degré 2.

b) Cela découle directement de l'étude des variations de la fonction $a \to P(a)$. Le minimum est atteint quand a est égal à la valeur moyenne de f sur $[0\,;A]$ et un calcul direct montre que le minimum vaut $A\left(<f^2(t)> - <f(t)>^2\right)$, ce qui prouve par dessus le marché que l'inégalité $|<f(t)>| \leqslant \sqrt{<f^2(t)>}$ est toujours vraie, la quantité $<f^2(t)> - <f(t)>^2$ pouvant être interprétée comme la variance de f sur $[0\,;A]$.

2) On développe l'expression $(f(t) - g(t))^2 = \left([f(t) - g_0(t)] + [g_0(t) - g(t)]\right)^2$ par une identité remarquable et on intègre entre 0 et A.

3)a)

Les relations $\int_0^A (f(t) - g_0(t))dt = 0$ et $\int_0^A t(f(t) - g_0(t))dt = 0$ se réécrivent respectivement :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a_0 A^2 + b_0 A = \int_0^A f(t)dt \\ \frac{1}{3}a_0 A^3 + \frac{1}{2}b_0 A^2 = \int_0^A t f(t)dt \end{cases},$$

c'est à dire $\begin{cases} \frac{1}{2}a_0 A + b_0 = <f(t)> \\ \frac{1}{3}a_0 A + \frac{1}{2}b_0 = \frac{1}{A}<t f(t)> \end{cases}$

ce qui donne l'unique couple solution $(a_0\,;b_0)$ avec $a_0 = \frac{6}{A^2}\left(2<t f(t)> - A<f(t)>\right)$ et $b_0 = \frac{2}{A}\left(2A<f(t)> - 3<t f(t)>\right)$.

b) $\int_0^A (f(t) - g_0(t))(g_0(t) - g(t))dt = (a_0 - a)\int_0^A t(f(t) - g_0(t))dt + (b_0 - b)\int_0^A (f(t) - g_0(t))dt$
$= 0 + 0 = 0$ par la question précédente.

4) Sachant que $\forall (a\,;b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\int_0^A (f(t) - g_0(t))(g_0(t) - at - b)dt = 0$, le résultat du 2) se

réécrit $P_1(a;b)=P_1(a_0;b_0)+\int_0^A (g_0(t)-g(t))^2\,dt$. On a donc

$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2,\ P_1(a,b)>P(a_0;b_0)$ sauf si $\int_0^A (g_0(t)-g(t))^2\,dt=0$, i.e $g=g_0$, i.e $a=a_0$ et $b=b_0$.

5) On calcule

$$<f(t)>=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\,dt=\frac{2}{\pi}$$

et

$$<t\,f(t)>=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin(t)\,dt=\frac{-2}{\pi}\left[t\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\quad .$$

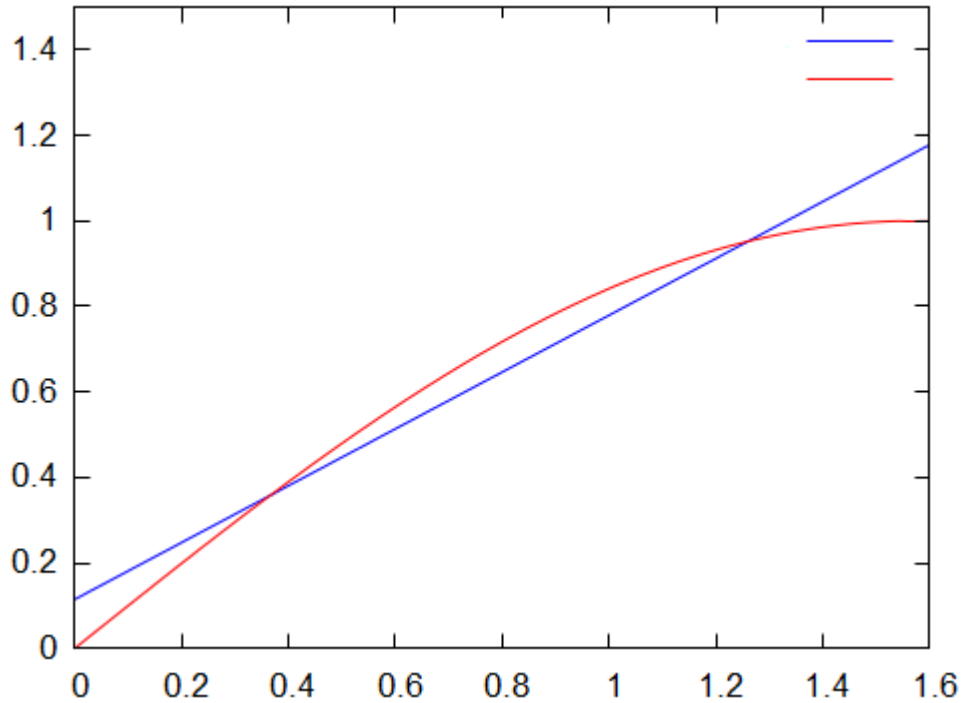
On a donc

$$a_0=\frac{24}{\pi^2}\left(\frac{4}{\pi}-1\right)\quad\text{et}\quad b_0=\frac{4}{\pi}\left(2-\frac{6}{\pi}\right)\quad .$$

La droite d'ajustement de la fonction f obtenue par la méthode des moindres carrés est

$$y=\frac{24}{\pi^2}\left(\frac{4}{\pi}-1\right)x+\frac{4}{\pi}\left(2-\frac{6}{\pi}\right)$$

Tracé de la fonction sinus (rouge) et de la droite d'ajustement en bleu :



Exercice 23

1) On a $\forall x\in]0;1],\ \varphi_f(x)=x\int_x^1\frac{a\,t+b}{t^2}\,dt=b-a\,x\ln(x)-bx$.

2) On a $\forall x\in]0;1],\ |\varphi_f(x)|\leqslant x\int_x^1\frac{|f(t)|}{t^2}\,dt\leqslant k\,x\int_x^1\frac{1}{t}\,dt=-k\,x\ln(x)$.

Puisque $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$, on en déduit $\lim_{x\to 0^+}\varphi_f(x)=0$.

3) On définit sur $[0;1]$ la fonction g par l'expression $g(t)=\begin{cases}\dfrac{f(t)-f(0)}{t} & \text{si } t\in]0;1]\\ f'(0) & \text{si } t=0\end{cases}$.

La fonction g est continue sur $]0;1]$ et la dérivabilité de f en 0 assure que g est continue en 0.
En écrivant que $\forall t\in[0;1],\ f(t)=f(0)+t\,g(t)$, on obtient, en posant $h(t)=t\,g(t)$:
$\varphi_f(x)=x\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt=x\,f(0)\int_x^1\frac{1}{t^2}\,dt+\varphi_h(x)=(1-x)f(0)+\varphi_h(x)$. Puisque la fonction g est continue sur $[0;1]$, elle est bornée (Théorème 2 chapitre fonctions élémentaires) donc $\exists k\in\mathbb{R}:\ \forall t\in[0;1],\ |h(t)|\leqslant k\,t$ ce qui implique par le 2) que $\lim_{x\to 0^+}\varphi_h(x)=0$. On a donc $\lim_{x\to 0^+}\varphi_f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1-x)f(0)=f(0)$.

Exercice 24

1) a) On a

$$\forall t\in I,\ \frac{u'(t)}{u(t)}=\frac{x'(t)+j\,y'(t)}{x(t)+j\,y(t)}=\frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{x^2(t)+y^2(t)}+j\,\frac{x(t)y'(t)-y(t)x'(t)}{x^2(t)+y^2(t)}$$

$$=\frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{x^2(t)+y^2(t)}+j\,\frac{x(t)y'(t)-y(t)x'(t)}{x^2(t)}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(x^2(t)+y^2(t)\right)}{x^2(t)+y^2(t)}+j\,\frac{d}{dt}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2(t)+y^2(t)\right)+\arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)\right).$$

b) On a alors $\int_0^{2\pi}\frac{u'(t)}{u(t)}\,dt=\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2(t)+y^2(t)\right)+\arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)\right]_0^{2\pi}=0$ car les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont 2π-périodiques.

2)

a) On aimerait utiliser le résultat de la question 1) pour $u(t)=r\,e^{jt}-z_0$. On a $x(t)\overset{\text{def}}{=}\mathrm{Re}(u(t))=r\cos(t)-\mathrm{Re}(z_0)$ mais, malheureusement, cette fonction peut très bien s'annuler.

Pour contrer cette difficulté, nous allons écrire :
$\int_0^{2\pi}\frac{r\,e^{jt}}{r\,e^{jt}-z_0}\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{r\,e^{jt}}{r\,e^{jt}-r_0e^{jt_0}}\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{r\,e^{j(t-t_0)}}{r\,e^{j(t-t_0)}-r_0}\,dt$ en divisant numérateur et dénominateur par e^{-jt_0}.

On utilise le résultat de la question 1) pour $v(t)=r\,e^{j(t-t_0)}-r_0$. La fonction à valeurs complexes v est dérivable de dérivée $v'(t)=jr\,e^{j(t-t_0)}$. Elle est clairement 2π-périodique car on a :
$v(t+2\pi)=r\,e^{j(t-t_0+2\pi)}-r_0=r\,e^{2j\pi}e^{j(t-t_0)}-r_0=r\,e^{j(t-t_0)}-r_0=v(t)$.

On a enfin $x(t)=\mathrm{Re}(v(t))=r\cos(t-t_0)-r_0\leqslant r-r_0<0$ ce qui assure l'hypothèse $\forall t\in I,\ x(t)\neq 0$

On en déduit donc que $\int_0^{2\pi}\frac{r\,e^{jt}}{r\,e^{jt}-z_0}\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{v'(t)}{v(t)}\,dt=0.$

On suppose maintenant que $|z_0|<r$.

b) On a $\forall t\in\mathbb{R},\ 1+\dfrac{z_0e^{-jt}}{r-z_0e^{-jt}}=\dfrac{r-z_0e^{-jt}}{r-z_0e^{-jt}}+\dfrac{z_0e^{-jt}}{r-z_0e^{-jt}}=\dfrac{re^{jt}}{re^{jt}-z_0}$.

c) Par intégration de l'égalité précédente, on a $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{re^{jt}}{re^{jt}-z_0}dt=2\pi+\int_0^{2\pi}\frac{z_0e^{-jt}}{r-z_0e^{-jt}}dt$.

On applique le résultat de la question 1) à $v(t)=r-z_0e^{-jt}$. La fonction à valeurs complexes *v* est dérivable de dérivée $v'(t)=jz_0e^{-jt}$. Elle est aussi clairement 2π-périodique et $x(t)=\mathrm{Re}(v(t))=r-\mathrm{Re}(r_0e^{j(t_0-t)})=r-r_0\cos(t-t_0)\geqslant r-r_0>0$, ce qui assure l'hypothèse $\forall t\in I,\ x(t)\neq 0$ On en déduit donc que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{re^{jt}}{re^{jt}-z_0}dt=2\pi+\frac{1}{j}\int_0^{2\pi}\frac{v'(t)}{v(t)}dt=2\pi$.

3) On a $P(e^{\alpha t})=\displaystyle\sum_{n=0}^{d}a_ne^{n\alpha t}$: chacun des termes $e^{n\alpha t}$ est dérivable de dérivée $n\alpha e^{n\alpha t}$. On en déduit que $P(e^{\alpha t})$ est dérivable de dérivée

(1) $\dfrac{d}{dt}\left(P(e^{\alpha t})\right)=\alpha\displaystyle\sum_{n=0}^{d}na_ne^{n\alpha t}$.

D'autre part on a $\alpha e^{\alpha t}P'(e^{\alpha t})=\alpha e^{\alpha t}\displaystyle\sum_{n=1}^{d}na_ne^{(n-1)\alpha t}=\alpha\sum_{n=1}^{d}na_ne^{\alpha t}e^{(n-1)\alpha t}$, d'où

(2) $\alpha e^{\alpha t}P'(e^{\alpha t})=\alpha\displaystyle\sum_{n=1}^{d}na_ne^{n\alpha t}$.

Par comparaison de (1) et de (2), on en déduit l'égalité voulue.

4)

a) Nous allons raisonner par récurrence sur *p,* le nombre de racines distinctes de *P.*

Avant tout, remarquons que si $A,B\in\mathbb{C}[X]$, alors $(AB(X))'=A'(X)B(X)+A(X)B'(X)$ au sens de la dérivation formelle des polynômes.

En effet, par dérivation d'un produit de fonctions, nous avons

$\forall t\in\mathbb{R},\ (AB)'(t)=A'(t)B(t)+A(t)B'(t)$.

Il suffit alors de remarquer que le polynôme $(AB)'(X)-A'(X)B(X)-A(X)B'(X)$ ayant tous les réels comme racines est identiquement nul .

Par itération de cette formule, on en déduit aussi que $\forall n\in\mathbb{N},\ (P^n)'(X)=nP'(X)P^{n-1}(X)$.

Pour $p=1$:

Si $P(X)=a(X-z_1)^{n_1}$. On a donc $P(X)=a(X-z_1)^{n_1}$ donc $P'(X)=an_1(X-z_1)^{n_1-1}$ et

$\dfrac{P'(X)}{P(X)}=\dfrac{an_1(X-z_1)^{n_1-1}}{a(X-z_1)^{n_1}}=\dfrac{n_1}{X-z_1}$.

Si la propriété est vraie au rang *p* :

Considérons $P(X)=a\Pi_{k=1}^{p+1}(X-z_k)^{n_k}=P_0(X).(X-z_{p+1})^{n_{p+1}}$ où $P_0(X)=a\Pi_{k=1}^{p}(X-z_k)^{n_k}$.

Par dérivation formelle d'un produit, on a

$P'(X)=P'_0(X).(X-z_{p+1})^{n_{p+1}}+n_{p+1}P_0(X).(X-z_{p+1})^{n_{p+1}-1}$

donc

$$\frac{P'(X)}{P(X)}=\frac{P'_0(X).(X-z_{p+1})^{n_{p+1}}+n_{p+1}P_0(X).(X-z_{p+1})^{n_{p+1}-1}}{P_0(X).(X-z_{p+1})^{n_{p+1}}}$$

c'est à dire, après simplification :

$$\frac{P'(X)}{P(X)}=\frac{P_0'(X)}{P_0(X)}+\frac{n_{p+1}}{X-z_{p+1}}\ .$$

Il ne reste plus qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence à $P_0(X)$ pour obtenir :

$$\frac{P'(X)}{P(X)}=\frac{P_0'(X)}{P_0(X)}+\frac{n_{p+1}}{X-z_{p+1}}=\sum_{k=1}^{p}\frac{n_k}{X-z_k}+\frac{n_{p+1}}{X-z_{p+1}}=\sum_{k=1}^{p+1}\frac{n_k}{X-z_k}.$$

b) Par la question a), on a $\forall t\in\mathbb{R},\ \dfrac{re^{jt}P'(re^{jt})}{P(re^{jt})}=\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1}n_k\frac{re^{jt}}{re^{jt}-z_k}$,

cette expression étant bien définie car la condition $\forall k, |z_k|\neq r$ assure que les dénominateurs ne sont jamais nuls.

On a donc $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{re^{jt}P'(re^{jt})}{P(re^{jt})}dt=\sum_{k=1}^{p}\frac{n_k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{jt}}{re^{jt}-z_k}dt$.

Par la question 2), l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{re^{jt}}{re^{jt}-z_k}dt$ vaut 0 si $r<|z_k|$ et 2π si $r>|z_k|$.

On a donc $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{re^{jt}P'(re^{jt})}{P(re^{jt})}dt=\sum_{k\ \text{tq}\ |z_k|<r}n_k$ ce qui est égal au nombre de racines de $P(X)$ (comptées avec leur ordre de multiplicité) de module strictement plus petit que *r*.

5)

a) Si *z* est une racine de *P*, on a $|P(z)-Q(z)|=|Q(z)|$ ce qui implique $|z|\neq 1$ auquel cas l'inégalité stricte de la relation (R) ne pourrait pas se réaliser.

De même, si *z* est une racine de *Q*, on a $0=|Q(z)|$ ce qui implique $|z|\neq 1$ auquel cas l'inégalité stricte de la relation (R) ne pourrait pas se réaliser.

b) La fonction *h* est bien définie car Q n'a pas de racine de module 1 (voir a)). D'après le 3), les fonctions $f(t)=P(e^{jt})$ et $g(t)=Q(e^{jt})$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc *h* l'est aussi par quotient de fonctions dérivables et *h* est clairement 2π-périodique . Le point délicat est de montrer que $\forall t\in\mathbb{R},\ x(t)\overset{\text{def}}{=}\mathrm{Re}(h(t))\neq 0$.

Par la relation (R) appliquée à $z=e^{jt}$ on a

$|P(e^{jt})-Q(e^{jt})|<|Q(e^{jt})|$ d'où

$\left|\dfrac{P(e^{jt})}{Q(e^{jt})}-1\right|<1$ c'est à dire

$|h(t)-1|<1$.

On a alors $1-\mathrm{Re}(h(t))=\mathrm{Re}(1-h(t))\leqslant|h(t)-1|<1$ car $\forall z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z)\leqslant|z|$.

On en déduit alors que

$\forall t\in\mathbb{R},\ \mathrm{Re}(h(t))>0$.

Par le 1), on conclut que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{h'(t)}{h(t)}dt=0$.

c) On a $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{f'(t)}{f(t)}dt-\int_0^{2\pi}\frac{g'(t)}{g(t)}dt=\int_0^{2\pi}\frac{f'(t)}{f(t)}-\frac{g'(t)}{g(t)}dt=\int_0^{2\pi}\frac{f'(t)g(t)-f(t)g(t)}{g^2(t)}.\frac{g(t)}{f(t)}dt$

c'est à dire

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{f'(t)}{f(t)}dt-\int_0^{2\pi}\frac{g'(t)}{g(t)}dt=\int_0^{2\pi}\frac{h'(t)}{h(t)}dt=0$ (cf b)).

car $h(t)=\dfrac{f(t)}{g(t)}$ et $h'(t)=\dfrac{f'(t)g(t)-f(t)g(t)}{g^2(t)}$.

On remarque maintenant que, d'après le 3), avec $\alpha=j$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{f'(t)}{f(t)}dt=j\int_0^{2\pi}\frac{e^{jt}P'(e^{jt})}{P(e^{jt})}dt$. En appliquant cette fois le 4)b) avec $r=1$, on obtient que $\dfrac{1}{2j\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{f'(t)}{f(t)}dt$ est égal au nombre de

racines de $P(X)$ de module strictement plus petit que 1.

On déduit de l'égalité $\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{g'(t)}{g(t)} dt$ que les polynômes P et Q ont le même nombre de racines de module strictement plus petit que 1.

6) On vérifie que $\forall z \in \mathbb{C}$ avec $|z|=1$, on a $|P(z)-Q(z)|=|z^n+1| \leqslant |z|^n+1 \leqslant 2 < 3 = |Q(z)|$ donc $P(X)$ et $Q(X)$ vérifient la relation *(R)*.

On déduit de la question 5) que P et Q ont le même nombre de racines de module strictement plus petit que 1.

Puisque 0 est racine est la seule racine de $Q(X)$ et est d'ordre *n-1*, le polynôme $P(X)$ admet exactement *n*-1 racines de module strictement plus petit que 1 (comptées avec leur ordre de multiplicité).

Il reste une racine simple de $P(X)$ de module strictement plus grand que 1 (on a vu que $P(X)$ et $Q(X)$ vérifiant la relation (R), ils ne peuvent avoir de racine de module 1).

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à l'intervalle $[1;+\infty[$ montre que cette racine est un réel strictement plus grand que 1.

F - INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

I) Position du problème.

On considère une fonction continue par morceaux sur un intervalle contenant $+\infty$, par exemple $[0;+\infty[$. On s'intéresse à l' intégrale $\int_0^X f(t)\,dt$ pour $X>0$. On se pose la question de savoir si, pour la fonction f donnée, la limite $\lim_{X\to+\infty}\int_0^X f(t)\,dt$ existe.

Définition 1 Soit $a\in\mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux sur l' intervalle $[a;+\infty[$ On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est <u>convergente</u> si la limite $\lim_{X\to+\infty}\int_a^X f(t)\,dt$ existe. Dans ce cas, on pose $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt=\lim_{X\to+\infty}\int_a^X f(t)\,dt$. On dit que l'intégrale <u>diverge</u> sinon.

Définition similaire pour l'intégrale $\int_{-\infty}^a f(t)\,dt$.

Exemples.

1) L'intégrale $\int_0^{+\infty}\cos(t)\,\mathrm{dt}$ est divergente. En effet,

$\forall X\in\mathbb{R},\ \int_0^X\cos(t)\,\mathrm{dt}=[\sin(t)]_0^X=\sin(X)$. Puisque $\lim_{X\to+\infty}\sin(X)$ n'existe pas, c'est que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\cos(t)\,\mathrm{dt}$ diverge.

2) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,\mathrm{dt}$ est aussi divergente, mais pas pour les mêmes raisons. En effet,

$\forall X>0,\ \int_1^X\frac{1}{t}\,\mathrm{dt}=[\ln(t)]_1^X=\ln(X)$. Cela prouve que $\lim_{X\to+\infty}\left(\int_1^X\frac{1}{t}\,\mathrm{dt}\right)=+\infty$. Cela prouve que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,\mathrm{dt}$ diverge. Mais contrairement à l'exemple précédent où l'objet mathématique " $\int_0^{+\infty}\cos(t)\,\mathrm{dt}$ " n'existe pas (on ne devrait même pas écrire l'expression " $\int_0^{+\infty}\cos(t)\,\mathrm{dt}$ " !), on peut considérer l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,\mathrm{dt}$ comme un objet mathématique existant et égal à $+\infty$ ce qui permet d'écrire $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,\mathrm{dt}=+\infty$.

3) $\int_{-\infty}^{0} e^{2t}\,\mathrm{dt}$ converge. En effet, si $X \in \mathbb{R}$, $\int_{x}^{0} e^{2t}\,\mathrm{dt} = [\frac{1}{2}e^{2t}]_X^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2X}$, du coup, $\lim_{X \to -\infty}\left(\int_{x}^{0} e^{2t}\,\mathrm{dt}\right) = \frac{1}{2}$,ce qui signifie que l'objet $\int_{-\infty}^{0} e^{2t}\,\mathrm{dt}$ existe et vaut $\frac{1}{2}$.

Problématique : Dans tous les exemples ci-dessus, on s'est débrouillé pour connaître la nature de l'intégrale considérée, en calculant une primitive de la fonction. Mais la plupart du temps, cela n'est pas faisable !
On peut éventuellement calculer de façon approchée par des méthodes numériques une intégrale généralisée $\int_{a}^{+\infty} f(t)\,dt$, même si on ne sait pas calculer une primitive de *f*, mais encore faut-il savoir si l'intégrale $\int_{a}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge . C'est l'objet de la suite du cours, et on verra comment répondre à la question de la convergence de l'intégrale sans avoir à calculer de primitive de *f*.

II) Intégrales de référence.

Il est fréquent de se ramener à l'étude d'intégrales généralisées de fonctions particulières : ce sont les intégrales dites de référence.

II.1) Intégrale de Riemann

Définition 2 Une intégrale de Riemann est une intégrale généralisée de la forme $I = \int_{a}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}}$ avec $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Par exemple, $I = \int_{4}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est une intégrale de Riemann avec $a = 4, \alpha = \frac{1}{2}$.

Propriété 1 **(critère de Riemann)** L'intégrale $\int_{a}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve :
Considérons pour le moment le cas $\alpha > 1$. Soit $X > 0$. On a alors :

$$\int_{a}^{X} \frac{dt}{t^{\alpha}} = \int_{a}^{X} t^{-\alpha}\,\mathrm{dt} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^X = \frac{X^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}.$$

Puisque dans le cas considéré, $-\alpha+1 < 0$, $\lim_{X \to +\infty} X^{-\alpha+1} = 0$ d'où $\lim_{X \to +\infty}\left(\int_{a}^{X} \frac{dt}{t^{\alpha}}\right) = \frac{-a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \frac{a^{-\alpha+1}}{\alpha-1}$

donc $\int_{a}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}}$ converge.

Considérons le cas $\alpha < 1$. Le calcul précédent reste valable et : $\int_a^X \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{X^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ .Puisque dans le cas considéré, $-\alpha+1>0$, $\lim_{X \to +\infty} X^{-\alpha+1} = +\infty$ d'où $\lim_{X \to +\infty} \left(\int_a^X \frac{dt}{t^\alpha} \right) = +\infty$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge alors.

Reste le cas critique $\alpha = 1$. Les choses sont très différentes car $\int_a^X \frac{dt}{t^\alpha} = \int_a^X \frac{1}{t} \mathrm{dt} = [\ln(t)]_a^X = \ln(X) - \ln(a)$. On en déduit que $\lim_{X \to +\infty} \left(\int_a^X \frac{dt}{t} \right) = +\infty$.

II.2) Intégrale d'une exponentielle.

Propriété 2 Si $a>0$, l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} e^{-at} dt$ converge pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. .De façon plus générale, on a aussi pour tout réel $a>0$ la convergence de $\int_{x_0}^{+\infty} P(t) e^{-at} dt$ pour toute fonction polynôme $P(t)$.

<u>Preuve :</u> Si $X \in \mathbb{R}$, $\int_{x_0}^X e^{-at} \mathrm{dt} = [-\frac{1}{a} e^{-at}]_{x_0}^X = \frac{-1}{a}\left(e^{-aX} - e^{-a x_0}\right)$. Si X tend vers $+\infty$, on a $e^{-aX} \to +\infty$ car $a>0$ donc $\int_{x_0}^X e^{-at} \mathrm{dt}$ tend vers $\frac{1}{a} e^{-a x_0}$: l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} e^{-at} dt$ converge. La preuve que $\int_{x_0}^{+\infty} P(t) e^{-at} dt$ converge pour toute fonction polynôme $P(t)$ sera faite à la suite du Théorème 1 du IV)1.

III) Quelques remarques

La propriété ci-dessous illustre le fait que la convergence d'une intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ ne dépend que du comportement de la fonction f au voisinage de l'infini.

Propriété 3 La nature d'une intégrale généralisée ne dépend pas de sa borne inférieure. Plus précisément, la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est équivalente à celle de $\int_b^{+\infty} f(t) dt$ (sous réserve que f soit continue par morceaux sur les intervalles d'intégration). Plus précisément, soit les deux intégrales $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_b^{+\infty} f(t) dt$ convergent , soit elles sont toutes les deux égales à $+\infty$,ou à $-\infty$, soit aucune d'entre elle n'existe.

Preuve : il s'agit d'une conséquence directe de la relation de Chasles. En effet, supposons que f soit continue par morceaux sur un intervalle $[a;+\infty[$. Soient $b\in[a;+\infty[$ et $X\in[a;+\infty[$. Alors $\int_a^X f(t)dt=\int_a^b f(t)dt+\int_b^X f(t)dt$: cela montre que la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est équivalente à celle de $\int_b^{+\infty} f(t)dt$.

Définition 3 On dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge si les deux intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ sont convergentes pour un certain a. Dans ce cas, par la relation de Chasles, on pose $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=\int_{-\infty}^{a} f(t)dt+\int_a^{+\infty} f(t)dt$.

Exemple : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt}$ converge.

En effet, $\int_0^X \frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt}=[\arctan(t)]_0^X=\arctan(X)$ et de même $\int_{Y\to-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt}=[\arctan(t)]_Y^0=-\arctan(Y)$

donc $\lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt}=\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{X\to-\infty}\int_Y^0 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt}=\frac{\pi}{2}$. On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt}=\frac{\pi}{2}$ et $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt}=\frac{\pi}{2}$ d'où la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt}$ qui vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt}=\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt}+\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt}=\pi.$$

Attention : si $X>0$, $\lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^{+X} \frac{2\mathrm{t}}{1+t^2}\mathrm{dt}=0$ car la fonction $t\to\frac{2\mathrm{t}}{1+t^2}$ est impaire implique que $\forall X\in\mathbb{R}, \int_{-X}^{+X} \frac{2\mathrm{t}}{1+t^2}\mathrm{dt}=0$, mais on ne peut en déduire la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\mathrm{t}}{1+t^2}\mathrm{dt}$

Cette dernière intégrale diverge en fait, vu que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{t}}{1+t^2}\mathrm{dt}$ diverge. En effet :

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^{+X} \frac{2\mathrm{t}}{1+t^2}\mathrm{dt}=\lim_{X\to+\infty}[\ln(1+t^2)]_0^X=\lim_{X\to+\infty}\ln(1+X^2)=+\infty$$

Remarque importante : il y a souvent confusion entre la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et la convergence de $f(t)$ vers 0 en $+\infty$. Or, ces deux notions n'ont rien à voir !

On peut avoir $f(t)$ qui tend vers 0 en $+\infty$ alors que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge. L'exemple type est le cas de la fonction $f(t)=\frac{1}{t}$ avec $a>0$ (conséquence directe du critère de Riemann).

De même, la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ n'implique pas que $f(t)$ tende vers 0 en $+\infty$ (contre exemple : $f(t)=\sin(t^2)$)

Application à la théorie du signal :

Définition 4 Soit $x(t)$ une fonction à valeurs complexes et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ par exemple. On dit que $x(t)$ est un signal à énergie finie sur $[0\,;+\infty[$ si l'intégrale $\int_0^{+\infty} |x(t)|^2\,dt$ converge.

Remarque : physiquement, la quantité $\int_0^{+\infty} |x(t)|^2\,dt$ est souvent proportionnelle à une énergie, d'où la terminologie employée dans la définition ci-dessus.

Exemple : On considère une résistance R parcourue par un courant d'intensité $i(t)$ dépendant du temps de la forme $i(t)=\frac{U_0}{R}e^{\frac{-t}{RC}}$ (exemple rencontré lors de l'étude de la décharge d'un condensateur dans une résistance R). Alors, sachant que la puissance instantanée dissipée dans la résistance à l'instant t est donnée par la formule $P_{\text{ins}}=Ri(t)^2$, on en déduit que l'énergie dissipée par effet Joule pendant une durée T vaut :

$$E(T)=\int_0^T R\,i(t)^2\,\mathrm{dt}=\int_0^T R\left(\frac{U_0}{R}e^{\frac{-t}{RC}}\right)^2\mathrm{dt}=\frac{U_0^2}{R}\int_0^T e^{\frac{-2t}{RC}}\,\mathrm{dt}.$$

Faisons le calcul de l'intégrale : $\int_0^T e^{\frac{-2t}{RC}}\,\mathrm{dt}=\left[-\frac{RC}{2}e^{\frac{-2t}{RC}}\right]_0^T=\frac{RC}{2}\left(1-e^{\frac{-2T}{RC}}\right)$. Si T est grand devant la constante de temps RC , on peut considérer que $T\to+\infty$ et le calcul précédent donne : $\int_0^{+\infty} e^{\frac{-2t}{RC}}\,\mathrm{dt}=\frac{RC}{2}$. On en déduit l'énergie dissipée : $E=\frac{U_0^2}{R}\int_0^{+\infty} e^{\frac{-2t}{RC}}\,\mathrm{dt}=\frac{C\,U_0^2}{2}$ (ce qui permet de retrouver une formule bien connue).
Dans cet exemple, le signal $t\to i(t)$ est à énergie finie.

IV) Critères de convergence dans le cas de fonctions positives

Les intégrales de fonctions qui ne changent pas de signe au voisinage de l'infini sont les plus faciles à manipuler.

Nota bene
(i) il peut y avoir une ambiguïté sur le mot « critère » en mathématique. On emploie ici le mot critère au sens de « condition suffisante » et non pas au sens de « nécessaire et suffisante ».
(ii) Les théorèmes ci-dessous s'adaptent aussi au cas des fonctions négatives

IV.1) Critère de comparaison.

Définition 5 Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a\,;+\infty[$. On dit que $f\leq g$ en $+\infty$ si il existe un certain réel M tel que $\forall t>M$, $f(t)\leq g(t)$.

Remarque : on peut traduire cette définition de la façon suivante : on dit que $f\leq g$ en $+\infty$ si pour t assez grand on a $f(t)\leq g(t)$.

Exemples:

(i) On a $e^t > t$ en $+\infty$. En effet, $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ (croissances comparées) donc il existe un certain $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t > M$, $\frac{e^t}{t} \geq 1$ ce qui se réécrit $\forall t > M$, $e^t \geq t$.

(ii) Une fonction est positive (resp négative) en $+\infty$ si $\exists M \in \mathbb{R} : \forall t > M, f(t) \geq 0$ (resp. $f(t) \leq 0$).

On rappelle le Théorème 4 de convergence monotone déjà démontré dans le chapitre sur les fonctions élémentaires :

Théorème (convergence monotone) Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$ et f une fonction croissante sur l' intervalle $]a;b[$.
Alors $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\lim_{x \to b^-} f(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Nous allons en déduire un premier résultat très général qui permet d'affirmer l'existence systématique de l'objet mathématique $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ dans le cas où f est une fonction positive. Plus précisément :

Lemme : Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a;+\infty[$ et positive (resp. négative) au voisinage de $+\infty$. Alors l'objet $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est soit un réel, soit égal à $+\infty$ (resp. $-\infty$.)

<u>Preuve :</u> La fonction f est supposée ici positive en $+\infty$ (la preuve est similaire dans le cas où f est supposée négative en $+\infty$). Cela signifie qu'il existe un réel $b \in [a;+\infty[$ tel que : $\forall t \geq b, f(t) \geq 0$.

On considère la fonction F définie sur $[a;+\infty[$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (attention, on ne peut pas affirmer que F est une primitive de f si cette dernière n'est pas continue!). Alors F est croissante sur l'intervalle $[b;+\infty[$. En effet si $b \leq x_1 \leq x_2$, alors

$F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t$ par la relation de Chasles. Or sur l'intervalle $[x_1;x_2]$ la fonction f est positive et $x_1 \leq x_2$ implique alors que $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ d'où $F(x_1) \leq F(x_2)$. Cela prouve que F est croissante donc par le Théorème de convergence monotone, on a $\lim_{x \to +\infty} F(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$: cela signifie que $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est soit un réel, soit égal à $+\infty$.

Conséquence : si f est de signe constant en $+\infty$, on pourra toujours considérer l'objet $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

Attention, cela ne signifie pas que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge car elle peut être égale à $+\infty$!

Théorème 1. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux et positives en $+\infty$ sur un intervalle $[a;+\infty[$ et telles que $f \leq g$ en $+\infty$. Alors si $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Preuve : puisque f est positive en $+\infty$, on peut considérer l'objet $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ par le lemme précédent.

On raisonne par l'absurde en supposant que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$.

Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \geq b,\ f(t) \leq g(t)$. Alors, on a :

(1) $\forall X \geq b,\ \int_b^X f(t)\,\mathrm{dt} \leq \int_b^X g(t)\,\mathrm{dt}$.

Puisque la nature d'un intégrale généralisée ne dépend pas de sa borne inférieure, on aurait $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty \Rightarrow \int_b^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$. Par le théorème de comparaison de limites appliqué à (1), on déduirait que $\int_b^{+\infty} g(t)\,dt = +\infty$ d'où $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt = +\infty$ (la nature d'un intégrale généralisée ne dépend pas de sa borne inférieure) ce qui contredit l'hypothèse que $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.

On en déduit alors la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$

Corollaire : Soit f et g deux fonctions continues par morceaux et positives en $+\infty$ sur un intervalle $[a;+\infty[$ et telles que $f \leq g$ en $+\infty$. Alors si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge.

On est maintenant en mesure d'achever la preuve de la propriété 2.

Preuve de la propriété 2 : suite et fin. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Puisqu'un polynôme ne peut admettre qu'un nombre fini de racines, pour t assez grand, $P(t) \neq 0$. La fonction $t \to P(t)$ est continue donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, cela implique que $t \to P(t)$ est de signe constant au voisinage de $+\infty$. Sans perte de généralité, on peut alors supposer que $P(t) \geq 0$ en $+\infty$.

Soit n le degré de P. Alors , si $a > 0$: $\dfrac{P(t)}{e^{\frac{a}{2}t}} = \dfrac{P(t)}{t^n} \times \dfrac{t^n}{e^{\frac{a}{2}t}}$. On sait que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{P(t)}{t^n}$ est finie (quotient des termes de plus haut degrés) et que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^n}{e^{\frac{a}{2}t}} = 0$ (croissances comparées) donc par produit de limites : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{P(t)}{e^{\frac{a}{2}t}} = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(\dfrac{P(t)}{t^n} \times \dfrac{t^n}{e^{\frac{a}{2}t}} \right) = 0$ ce qui signifie que pour t assez grand , $\dfrac{P(t)}{e^{\frac{a}{2}t}} \leq 1$

d'où , pour t assez grand :

$$0 \leq P(t) \leq e^{\frac{a}{2}t}$$

$$0 \leq P(t)e^{-at} \leq e^{\frac{a}{2}t} e^{-at} = e^{\frac{-a}{2}t}.$$

Puisque l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} e^{\frac{-a}{2}t}\,\mathrm{dt}$ converge, alors le Théorème 1 implique que $\int_{x_0}^{+\infty} P(t)e^{-at}\,\mathrm{dt}$ converge.

Exemple pour le Théorème 1 : $\int_1^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{dt}$ converge (ce qui signifie que la fonction sinus cardinal est à énergie finie). En effet si l'on pose dans le Théorème 1 $a=1$, $f(t)=\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ et $g(t)=\frac{1}{t^2}$ alors d'après le critère de Riemann l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge donc on obtient la convergence de $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{dt}$ (le fait que $f(t)\leq g(t)$ se déduit de l'inégalité $(\sin(t))^2\leq 1.$)

IV.2) Critère de l'équivalent.

Les résultats vus au paragraphe précédents impliquent que pour prouver qu'une intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, il suffit de majorer $f(t)$ par une « bonne » fonction $g(t)$ dont l'intégrale converge. Mais une telle fonction g n'est pas toujours facile à trouver, c'est pourquoi on peut faire appel au critère suivant :

Théorème 2. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a;+\infty[$, avec $f\geq 0$ en $+\infty$, et telles que $f\sim g$ en $+\infty$. Alors les intégrales $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ ont la même nature. Autrement dit, $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge (resp. diverge) si et seulement si $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge (resp. diverge). Le résultat reste vrai si $f\leq 0$ en $+\infty$.

<u>Preuve :</u> on rappelle que $f\sim g$ en $+\infty$ signifie que $\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=1.$ Donc il existe un réel b tel que

$$(1)\quad \forall t\geq b,\ \frac{1}{2}\leq\frac{f(t)}{g(t)}\leq\frac{3}{2}.$$

Puisque $f\geq 0$ en $+\infty$, quitte à prendre b assez grand, on peut aussi supposer que

$$(2)\quad \forall t\geq b,\ f(t)\geq 0.$$

On déduit de (1) que si $t\geq b$ on a $\frac{f(t)}{g(t)}\geq 0$ donc $f(t)$ et $g(t)$ sont de même signe, positif d'après (2).

En multipliant (1) par $g(t)\geq 0$ on obtient :

$$(3)\quad \forall t\geq b,\ 0\leq\frac{1}{2}g(t)\leq f(t)\leq\frac{3}{2}g(t).$$

On déduit de (3) et du Théorème 1 que si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors $\frac{1}{2}\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge donc $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.

De même, si $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, alors $\frac{3}{2}\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge donc par (3) et le théorème 1, $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge ce qui montre l'équivalence entre les convergences de $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et de $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$.

Exemple 1 : on peut ainsi établir la nature de l'intégrale généralisée de n'importe quelle fonction rationnelle définie sur l'intervalle d'intégration.
Par exemple $\int_1^{+\infty} \frac{2t-1}{t^4+1}dt$ converge d'après le Théorème2. En effet, par le principe d'équivalence d'une fraction rationnelle en l'infini, en $+\infty$, $\frac{2t-1}{t^4+1} \sim \frac{2t}{t^4} = \frac{2}{t^3} > 0$. Le critère de convergence de Riemann dit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^3}dt$ converge (avec $\alpha = 3 > 1$) donc par Théorème 2 l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{2t-1}{t^4+1}dt$ converge.

Exemple 2: $\int_{-\infty}^{0} \sin(e^t)dt$ converge. En effet, en se rappelant qu'en 0 on a $\sin(u) \sim u$ on déduit que $\sin(e^t) \sim e^t$ pour $t \to -\infty$ car dans ce cas la, $u = e^t \to 0$. Puisque $e^t > 0$ le principe d'équivalence du Théorème 2 dit que les intégrales $\int_{-\infty}^{0} \sin(e^t)dt$ et $\int_{-\infty}^{0} e^t dt$ ont la même nature. Or un calcul direct prouve que $\forall X \in \mathbb{R}$, $\int_X^0 e^t dt = [e^t]_X^0 = 1 - e^X$ qui tend vers 1 si $X \to -\infty$. Cela prouve que $\int_{-\infty}^{0} e^t dt$ converge (vers 1) donc $\int_{-\infty}^{0} \sin(e^t)dt$ converge.

Attention : le Théorème 2 dit seulement que les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ ont la même nature, mais cela ne signifie pas qu'elles aient la même valeur !!!

V) Cas des fonctions non positives.

La section qui précède ne concerne que les fonctions qui ont un signe constant en $+\infty$. Cela concerne donc une grande partie des fonctions usuelles, mais pas toutes.
Aucun des deux théorèmes précédents n'est utilisable pour déterminer la nature des intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(t)dt$ ou $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ qui sont utilisées en théorie du signal par exemple, ou celle de $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt$ qui est utilisée pour des calculs de diffraction. Dans certains cas, une réponse peut être apportée par le Théorème 3 ci-dessous.

V.1) Intégrale d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas de signe constant en $+\infty$.

On peut se ramener au cas des fonctions positives grâce au théorème suivant.

Théorème 3 Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a;+\infty[$. On suppose que $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ converge. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Remarque importante : les théorèmes 1 et 2 peuvent servir à prouver que $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge, donc que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Par exemple, on peut prouver à l'aide du théorème 3 que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\,\mathrm{dt}$ converge. En effet, il suffit, par le théorème 3, de montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |e^{-t}\sin(t)|\,\mathrm{dt}$ est convergente. Or là, on peut utiliser le théorème de comparaison (théorème1).
En effet, on a :

$\forall t \geq 0,\ 0 \leq |e^{-t}\sin(t)| = e^{-t}|\sin(t)|$ car $e^{-t} \geq 0$

$\forall t \geq 0,\ 0 \leq |e^{-t}\sin(t)| \leq e^{-t}$ car $|\sin(t)| \leq 1$.

Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{dt}$ converge (par la propriété 2), alors par le théorème 2 (principe de comparaison) l'intégrale $\int_0^{+\infty} |e^{-t}\sin(t)|\,\mathrm{dt}$ converge ce qui prouve que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\,\mathrm{dt}$ converge.

(*)Preuve du Théorème 3

On définit les fonctions par les expressions : $f^{(-)}(t) = \frac{|f(t)| - f(t)}{2}$ et $f^{(+)}(t) = \frac{|f(t)| + f(t)}{2}$.

Ces définitions peuvent sembler au premier abord très artificielles. Remarquons tout de suite que si $t \in \mathbb{R}$, alors :

si $f(t) \geq 0$, $|f(t)| = f(t)$ donc $f^{(-)}(t) = \frac{|f(t)| - f(t)}{2} = 0$ et $f^{(+)}(t) = \frac{|f(t)| + f(t)}{2} = f(t)$, et

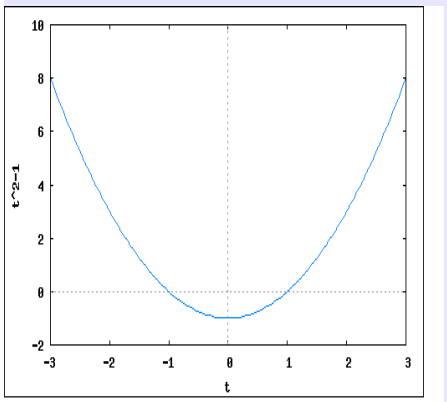
si $f(t) \leq 0$, $|f(t)| = -f(t)$ donc $f^{(-)}(t) = \frac{|f(t)| - f(t)}{2} = -f(t)$ et $f^{(+)}(t) = \frac{|f(t)| + f(t)}{2} = 0$.

Remarquons que dans le cas où $f(t) = 0$, $f^{(-)}(t) = f^{(+)}(t) = 0$.

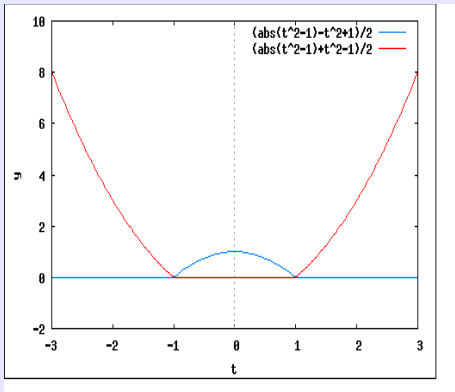
Graphiquement, la représentation graphique de $f^{(-)}$ est l'opposée de la partie négative de f et la représentation graphique de $f^{(+)}$ correspond à la partie positive de f :

Exemple

Graphe de $f(t) = t^2 - 1$



Graphes de $f^{(-)}$ *(bleu) et de* $f^{(+)}$ *(rouge)*



Étape 1 : la fonction $t \to |f(t)|$ est continue par morceaux (on rappelle que la composée de deux fonctions continues par morceaux n'est pas toujours continue par morceaux : il y a donc une preuve à apporter).
En effet, si f est continue en a, alors $t \to |f(t)|$ est continue en a par composée de fonctions continues (on rappelle que la fonction valeur absolue est continue)
Si a est tel que f admet une discontinuité de première espèce en t, alors les limites
$\lim\limits_{x \to a^-} f(t)$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(t)$ sont finies, donc il en est de même des limites
$\lim\limits_{x \to a^-} |f(t)|$ et $\lim\limits_{x \to a^+} |f(t)|$
Il vient alors que les fonctions $f^{(-)}$ et $f^{(+)}$ sont continues par morceaux par somme de fonctions continues par morceaux.

Étape 2 : puisque $\forall t \in \mathbb{R},\ -|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ (en fait, au moins un des deux signes $\leq$ est une égalité) on a :
(1) $\forall t \in \mathbb{R},\ f^{(-)}(t) \geq 0$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ f^{(+)}(t) \geq 0$.
De plus il faut remarquer que de part la définition de $f^{(-)}$ et $f^{(+)}$ on a :
(2) $\forall t \in \mathbb{R},\ f^{(-)}(t) + f^{(+)}(t) = |f(t)|$
(3) $\forall t \in \mathbb{R},\ f^{(+)}(t) - f^{(-)}(t) = f(t)$.

Étape 3 : d'après (1) et (2), $\forall t \in \mathbb{R},\ f^{(-)}(t) \leq |f(t)|$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ f^{(+)}(t) \leq |f(t)|$ donc puisque $f^{(-)}$ et $f^{(+)}$ sont des fonctions positives continues par morceaux, l'application du Théorème 1 permet de dire que $\int_a^{+\infty} f^-(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty} f^+(t)\,dt$ convergent vu que $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge.
On peut alors déduire du (3) que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Définition 6 Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a;+\infty[$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est <u>absolument convergente</u> si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge.

Ainsi, et c'est heureux, une intégrale absolument convergente est convergente d'après le Théorème 3 !!
Mais la réciproque est fausse : une intégrale convergente peut très bien ne pas être absolument convergente.
Par exemple, $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{dt}$ converge mais $\int_\pi^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{dt}$ diverge (voir exercice 7).

V.2) Fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit f une fonction à valeurs complexes et continue par morceaux sur un intervalle $[a;+\infty[$, c'est à dire que $f(t) = f_r(t) + j\,f_i(t)$ où f_r et f_j sont à valeurs réelles et continues par morceaux sur un intervalle $[a;+\infty[$ (plus précisément, $f_r(t) = \mathrm{Re}\,f(t)$ et $f_j(t) = \mathrm{Im}\,f(t)$)
On définit tout naturellement pour $b \in [a;+\infty[$ l'intégrale :
$$\int_a^b f(t)\,dt = \left(\int_a^b f_r(t)\,dt\right) + j.\left(\int_a^b f_i(t)\,dt\right).$$

Définition 7 Soit f une fonction continue par morceaux et à valeurs complexes sur un intervalle $[a;+\infty[$.
On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si les intégrales $\int_a^{+\infty} f_r(t)\,dt$ <u>**et**</u> $\int_a^{+\infty} f_i(t)\,dt$ convergent. Dans ce cas, $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^{+\infty} f_r(t)\,dt + j.\int_a^{+\infty} f_i(t)\,dt$.

Exemples :

(i) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+jt}\,\mathrm{dt}$ diverge. En effet $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+jt} = \frac{1-jt}{1+t^2}$ ce qui signifie dans cet exemple que $f_r(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et $f_i(t) = \frac{-t}{1+t^2}$.

On peut montrer (exercice) que $\int_0^{+\infty} f_r(t)\,dt$ converge mais $\int_0^{+\infty} f_i(t)\,dt$ diverge. (Indication : utiliser le critère de l'équivalent).

On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+jt}\,\mathrm{dt}$ diverge.

(ii) $\int_0^{+\infty} e^{-(1+j)t}\,\mathrm{dt}$ converge.

En effet, dans ce cas là on a $f_r(t) = e^{-t}\cos(t)$ et $f_i(t) = e^{-t}\sin(t)$. On a montré dans l'exemple du Théorème 3 que $\int_0^{+\infty} f_i(t)\,dt$ converge (car elle est absolument convergente). On montrerait de la même façon que $\int_0^{+\infty} f_r(t)\,dt$ est absolument convergente.

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-(1+j)t}\,\mathrm{dt}$ converge.

Propriété 4 Soit f une fonction continue par morceaux et à valeurs complexes sur un intervalle $[a;+\infty[$. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge : on dit dans ce cas que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est absolument convergente.

Remarque : la notation $|f(t)|$ désigne le module de $f(t)$, ce qui coïncide avec sa valeur absolue dans le cas où la fonction f prend des valeurs réelles.

<u>Preuve :</u> Puisque $|f(t)| = \sqrt{f_r^2(t) + f_i^2(t)}$, on en déduit que $|f_r(t)| \leq |f(t)|$ et $|f_i(t)| \leq |f(t)|$.
Donc par le principe de comparaison des intégrales de fonctions positives, on en déduit que les intégrales $\int_a^{+\infty} f_r(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty} f_i(t)\,dt$ sont absolument convergentes, donc convergentes. Cela signifie que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

La propriété suivante nous sera fort utile dans le chapitre sur la transformation de Laplace :

(*) Propriété 5. Soit $p \in \mathbb{C}$. Alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{pt}\,\mathrm{dt}$ converge ssi Re(p) <0 .

<u>Preuve</u> :

On élimine d'entrée le cas $p = 0$, auquel cas $\forall t \geq 0, e^{pt} = 1$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{pt}\,\mathrm{dt}$ diverge.

Supposons que Re(p) <0 . On peut alors écrire $p = p_1 + j\,p_2$ avec $p_1 < 0$.

On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $|e^{pt}| = e^{p_1 t}$ donc $\int_0^{+\infty} |e^{pt}|\,\mathrm{dt} = \int_0^{+\infty} e^{p_1 t}\,\mathrm{dt}$ converge d'après la propriété 2.

Il vient que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{pt}\,\mathrm{dt}$ est absolument convergente, donc convergente.

Supposons que $\mathrm{Re}(p)\geq 0$. Soit $X\geq 0$. Alors $\int_0^X e^{pt}\,\mathrm{dt}=[\frac{1}{p}e^{pt}]_0^X=\frac{1}{p}e^{pX}-\frac{1}{p}$. Il reste à montrer que l'expression $\frac{1}{p}e^{pX}$ n'a pas de limite finie dans $\mathbb{C}$ quand $X\to+\infty$.

si $p_1>0$, on a $\left|\frac{1}{p}e^{pX}\right|=\frac{1}{|p|}e^{p_1 X}$ donc $\lim_{X\to+\infty}\left|\frac{1}{p}e^{pX}\right|=+\infty$. Cela montre que l'expression $\frac{1}{p}e^{pX}$ n'a pas de limite finie dans $\mathbb{C}$ quand $X\to+\infty$.

si $p_1=0$, on a $\frac{1}{p}e^{pX}=\frac{-j}{p_2}\left(\cos(p_2 X)+j\sin(p_2 X)\right)$, qui n'a pas de limite finie si $X\to+\infty$.

Exemple : calcul de $\int_0^{+\infty}\sin(2\mathrm{t})e^{-t}\,\mathrm{dt}$.

Posons $f(t)=e^{(-1+2\mathrm{j})t}$: on a $f(t)=e^{-t}e^{2\mathrm{j}t}=e^{-t}\left(\cos(2\mathrm{t})+j\sin(2\mathrm{t})\right)=e^{-t}\cos(2\mathrm{t})+je^{-t}\sin(2\mathrm{t})$

On a $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{dt}$ qui converge d'après la propriété 5 appliquée à $p=-1+2\mathrm{j}$ ($\mathrm{Re}(p)=-1<0$.)

Cela implique que $\int_0^{+\infty}\sin(2\mathrm{t})e^{-t}\,\mathrm{dt}$ converge et $\int_0^{+\infty}\sin(2\mathrm{t})e^{-t}\,\mathrm{dt}=\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{dt}\right)$. (Définition 7).

Soit $X\geq 0$. Alors $\int_0^X e^{(-1+2\mathrm{j})t}\,\mathrm{dt}=\left[\frac{1}{-1+2\mathrm{j}}e^{(-1+2\mathrm{j})t}\right]_0^X=\frac{1}{-1+2\mathrm{j}}e^{(-1+2\mathrm{j})X}-\frac{1}{-1+2\mathrm{j}}$.

On a $\left|e^{(-1+2\mathrm{j})X}\right|=e^{-X}$ et $\lim_{X\to+\infty}e^{-X}=0$ donc $\lim_{X\to+\infty}e^{(-1+2\mathrm{j})X}=0$. On déduit alors que :

$\lim_{X\to+\infty}\left(\int_0^X e^{(-1+2\mathrm{j})t}\,\mathrm{dt}\right)=\frac{-1}{-1+2\mathrm{j}}=\frac{1}{1-2\mathrm{j}}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}j$ c'est à dire : $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{dt}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}j$.

Ainsi, $\int_0^{+\infty}\sin(2\mathrm{t})e^{-t}\,\mathrm{dt}=\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{dt}\right)=\frac{2}{5}$.

VI) Exercices

Exercice 1

Montrer que les intégrales suivantes convergent et les calculer

1) $I_1=\int_4^{+\infty}\frac{11x-3}{(x-1)(x-3)(x+3)}dx$
2) $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{5x-2}{x^2(x+2)}dx$
3) $I_3=\int_2^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}dx$ (on pourra prouver qu'au voisinage de l'infini, $\ln(x)<\sqrt{x}$).
4) $I_4=\int_2^{+\infty}\frac{3x-5}{(x^2-1)^2}dx$
5) $I_5=\int_0^{+\infty}\frac{11x-7}{(x+3)(x^2+1)}dx$
6) $I_6=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{1+e^x}dx$
7) $I_7=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$ (faire d'abord le changement de variable $x=\tan(t)$).

Exercice 2

A tout réel u on associe la fonction F_u définie par :

$$F_u(x)=\frac{1}{(1+x^2)(1+x^u)}$$

a) Montrer que pour tout réel $x>0$ et pour tout réel u on a : $F_{-u}(x)=\frac{1}{x^2+1}-F_u(x)$.

b) Etudier la nature de l'intégrale $I_u=\int_0^{+\infty}F_u(x)dx$

2) Calculer I_0 et I_1.
3) En effectuant dans I_u le changement de variable $t=\frac{1}{x}$ et en utilisant la relation prouvée à la question 1)a, calculer I_u pour $u\geq 0$.

Exercice 3

<u>Etudier</u> la nature des intégrales (t réel positif ou nul) suivantes

$\mathrm{I}=\int_1^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{dx}$ $\qquad$ $\mathrm{J}=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x^3+2}}dx$

$\mathrm{K}=\int_2^{+\infty}\frac{\cos x+\sin 2x}{x^2}\mathrm{dx}$ $\qquad$ $\mathrm{L}=\int_0^{+\infty}y\,\mathrm{e}^{-y}(1+y)^2dy$

$\mathrm{M}=\int_a^{\infty}\frac{dt}{t\ln t}$, $a>1$ (on calculera tout d'abord $\int_a^X\frac{dt}{t\ln t}$, $X>a$ puis on fera tendre X vers l'infini).

Exercice 4 (autour de l'intégrale de Gauss)

Pour toutes les questions suivantes, on admet que l'intégrale (dite "intégrale de Gauss") $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1) Pour $a > 0$, déterminer à l'aide d'un changement de variable la convergence et l'expression de $\int_0^{+\infty} e^{-at^2} dt$ en fonction de a.

2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer pour $a > 0$ une expression de $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-at^2} dt$ après avoir prouvé que l'intégrale converge.

Exercice 5 (utilisation des nombres complexes)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(t) = e^{-3t}\cos(4t)$.

1) En écrivant que $f(t) = \mathrm{R}e\left(e^{(-3+4j)t}\right)$, trouver une primitive de $f(t)$.

2) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et trouver sa valeur.

Exercice 6

Rappel : $\forall x \in]-1\,;1[,\quad 1 + x + x^2 + \ .\ .\ .\ + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Soit $f(t)$ une fonction continue 1-périodique sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x+1) = f(x)$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\int_n^{n+1} e^{-t} f(t)\,dt = e^{-n}\int_0^1 e^{-s} f(s)\,ds$. (on pourra faire le changement de variable $t = s + n$).

2) En déduire que $\int_0^n e^{-t} f(t)\,dt = \frac{e}{e-1}\left(1 - e^{-n}\right)\int_0^1 e^{-s} f(s)\,ds$

3) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\,dt$ converge, puis exprimer à l'aide du résultat de la question précédente sa valeur en fonction de $\int_0^1 e^{-s} f(s)\,ds$

(*)Exercice 7 (Intégrale convergente mais non absolument convergente)

1) a) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ converge.

b) En déduire à l'aide d'une intégration par parties que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

2) S'inspirer des questions précédentes pour prouver que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ converge.

2) a) Montrer que pour tout réel t on a $|\sin(t)| \geq \sin^2(t)$.

b) En déduire l'inégalité $\forall X \geq 1$, $\int_1^X \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt \geq \frac{1}{2}\ln(X) - \frac{1}{2}\int_1^X \frac{\cos(2t)}{t} dt$ (on rappelle l'égalité de linéarisation $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$).

c) En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ ne converge pas absolument.

Exercice 8 ($\int_0^{+\infty} f$ CV **n'implique pas** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.)

1) Montrer que $\int_{-\infty}^{0} \sin(e^t) dt$ converge.
2) A l'aide d' une intégration par parties, en écrivant que $\sin(e^t) = (e^{-t})(e^t \sin(e^t))$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(e^t) dt$ est convergente.

(*) Exercice 9 (solutions à énergie finie d'une EDO1) *(nécessite le cours sur les équations différentielles)*

On suppose que $t \to f(t)$ est une fonction continue et à énergie finie sur $[0;+\infty[$ (c'est à dire que $\int_0^{+\infty} f^2(t) dt$ converge) et soit $\tau > 0$. On s'intéresse à une fonction u solution de l'équation différentielle $\tau u'(t) + u(t) = f(t)$ pour $t \geq 0$.

1) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ on a : $\frac{1}{2}\tau\left(u^2(x) - u^2(0)\right) + \int_0^x u^2(t) dt = \int_0^x f(t) u(t) dt$.
2) a) Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

   b) Déduire des questions précédentes que $\int_0^x u^2(t) dt \leq \int_0^x f^2(t) dt + \tau u^2(0)$.

   c) Prouver alors que la fonction u est à énergie finie sur $[0;+\infty[$.

3) Montrer que le résultat établi dans la question 2) est faux si $\tau < 0$ en expliquant sur quel point la preuve établie dans le 2) devient fausse, et en exhibant un contre-exemple.

Exercice 10

1) a) Montrer que $t+\sin(t)\geq t-1$

b) En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t+\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{dt}$ diverge.

2) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^4}\,\mathrm{dt}$ est convergente. On ne demande pas de calculer sa valeur.

3) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+4}\,\mathrm{dt}$ est convergente. On ne demande pas de calculer sa valeur.

Exercice 11

On rappelle que la fonction $\arctan(t)$ est positive sur $[0\,;+\infty[$, croissante et que $\lim_{t\to+\infty} \arctan(t)=\frac{\pi}{2}$. On rappelle aussi que $\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$.

1) A l'aide d'une comparaison de fonctions, montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}\,dt$ est convergente.
2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t^2+1)}$.
3) En déduire la valeur exacte de $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}\,dt$.

Exercice 12

Soit $I=\int_4^{+\infty} \frac{dt}{t(\sqrt{t}+2)}$

1) Montrer que l' intégrale I converge.
2) Montrer à l'aide du changement de variable $t=4u^2$, $u>0$, que $I=\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)}$
3) En déduire la valeur de I.

Exercice 13

Déterminer la nature des intégrales suivantes (on ne les calculera pas)

1) $I=\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{1+e^t}$
2) $I=\int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-t})\,dt$
3) $I=\int_1^{+\infty} \frac{8t^3+25}{t^4+t^2+1}$

Exercice 14 (ou pourquoi faut-il se méfier de l'intuition)

Montrer que les propriétés ci-dessous sont fausses à l'aide d'un contre-exemple de la forme $f(t)=t^n$ ou $f(t)=\frac{1}{t^n}$:

1) Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et si $\lim_{t \to +\infty} f(t)=0$, alors $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

2) Si $\lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{X} f(t)=0$ alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

3) Si $\int_1^{+\infty} f^2(t)dt$ converge, alors $\int_1^{+\infty} |f(t)|dt$ converge.

(*) Exercice 15

Soit $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue positive telle que $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{dt}$ converge . Montrer que $\int_1^{+\infty} f(t^2)\mathrm{dt}$ converge et que $\int_1^{+\infty} f(t^2)\mathrm{dt} \leq \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{dt}$.

Montrer en revanche que $\int_1^{+\infty} f(\sqrt{t})\mathrm{dt}$ ne converge pas forcément.

(*)Exercice 16

Soit n un entier naturel .

1) Montrer que l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente.
2) A l'aide d'une intégration par parties, prouver que $I_{n+1} = (n+1) I_n$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = n! \overset{\text{def}}{=} 1 \times 2 \times .... \times n$.
3) On considère cette fois $J_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-nt} dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. .
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 1,\ e^{-nt} \leq e^{-t}$
   b) En déduire la convergence de l'intégrale J_n pour tout entier naturel n non nul.
   c) A l'aide d'un changement de variable, exprimer J_n à l'aide de I_n , puis de n.
   d) Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$.
4) Soit $P(t)$ une fonction polynomiale de degré n.
   a) Montrer que . $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)$.
   b) En déduire une expression similaire pour $\int_a^{+\infty} P(t)e^{-t} dt$, où $a \in \mathbb{R}$.

(*)Exercice 17 (solutions d'intégrale convergente pour une EDO1)*(nécessite le cours sur les équations différentielles)*

<u>Partie 1</u>

Soit f une fonction continue et positive sur $[0;+\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

On considère la fonction y_0 unique solution de l'équation différentielle $y'(x) + y(x) = f(x)$ pour $x \in [0;+\infty[$ avec la condition initiale $y(0)=0$.

1) Vérifier que $\forall x \geq 0,\ y_0(x) = e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt$. En déduire que $\forall x \geq 0,\ y_0(x) \geq 0$.

2) Déduire de l'équation différentielle que $\forall x \geq 0,\ \int_0^x y_0(t)\,dt \leq \int_0^x f(t)\,dt$.

3) Montrer alors que l'intégrale $\int_0^{+\infty} y_0(x)\,dx$ converge.

4) Déduire de l'équation différentielle que $\lim_{x \to +\infty} y_0(x)$ est finie et vaut 0.

5) Montrer alors que $\int_0^{+\infty} y_0(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

<u>Partie 2</u>

Soit maintenant *f* une fonction continue et de signe quelconque sur $[0\,;+\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge.

On considère la fonction y_0 unique solution de l'équation différentielle $y'(x) + y(x) = f(x)$ pour $x \in [0\,;+\infty[$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

Soit y_+ l 'unique solution de l'équation différentielle $y'_+(x) + y_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$ pour $x \in [0\,;+\infty[$ avec la condition initiale $y_+(0) = 0$, et soit y_- l 'unique solution de l'équation différentielle $y'_-(x) + y_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$ pour $x \in [0\,;+\infty[$ avec la condition initiale $y_-(0) = 0$.

On posera $f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$ et $f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$.

6) En utilisant la relation $\forall X \in \mathbb{R},\ -|X| \leq X \leq |X|$, démontrer que les fonctions f_+ et f_- sont continues, positives, et que les intégrales $\int_0^{+\infty} f_-(x)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} f_+(x)\,dx$ convergent.

7) Déduire de la partie 1 que les fonctions y_+ et y_- sont positives. Que valent les intégrales $\int_0^{+\infty} y_-(x)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} y_+(x)\,dx$?

8) Montrer que $\forall x \geqslant 0,\ y_0(x) = y_+(x) - y_-(x)$.

9) a) Montrer que $\forall x \geqslant 0,\ |y_0(x)| \leq y_+(x) + y_-(x)$.

b) En déduire que $\int_0^{+\infty} |y_0(x)|\,dx \leq \int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ et que $\int_0^{+\infty} y_0(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

(*)Exercice 18 (solutions d'intégrale absolument convergente pour une EDO1) *(nécessite le cours sur les équations différentielles)*

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère f une fonction continue sur $[0\,;+\infty[$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge.

Soit *y* une solution de l'équation différentielle sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$:

$(E)\ :\ y'(t) + a\,y(t) = f(t)$.

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} y(t)\,dt$.

1) Dans cette question on suppose que $a=0$. Montrer que l'équation (E) possède une seule ou aucune solution y d'intégrale $\int_0^{+\infty} y(t)\,dt$ convergente. On donnera un exemple de fonction f telle que l'équation (E) possède une seule solution y d'intégrale $\int_0^{+\infty} y(t)\,dt$ convergente et un exemple où l'équation (E) ne possède aucune solution y d'intégrale $\int_0^{+\infty} y(t)\,dt$ convergente.

A partir de maintenant, on suppose que $a\neq 0$.

2) Soit y une solution quelconque de (E).

a) Montrer que $\forall t\geqslant 0 \;\; y(t)=y(0)+\int_0^t f(s)\,ds-a\int_0^t y(s)\,ds$.

b) Déduire de cette relation l'équivalence entre :

(i) l'intégrale $\int_0^{+\infty} y(t)\,dt$ converge.

(ii) $\lim_{t\to+\infty} y(t)=0$.

Attention !: cette équivalence n'est vraie que dans le cadre des hypothèses de l'énoncé ! Elle est fausse pour une fonction y quelconque.

3) a) Montrer que la solution spéciale y_0 de (E) vérifiant la condition initiale $y_0(0)=0$ a pour expression $y_0(t)=e^{-at}\int_0^t e^{as} f(s)\,ds$.

b) En déduire que pour toute solution y de (E) , il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que $y(t)=e^{-at}\left(C+\int_0^t e^{as} f(s)\,ds\right)$.

On suppose à partir de maintenant que $a>0$.

4) Montrer que $\forall t>0,\; \left|\int_0^t e^{as} f(s)\,ds\right|\leq e^{at}\int_0^t |f(s)|\,ds$.

5) En déduire, à l'aide du 3) a) et de la relation de Chasles pour les intégrales que

$$\forall t>0,\; |y_0(t)|\leq e^{\frac{-at}{2}}\|f\|_1+\int_{\frac{t}{2}}^t |f(s)|\,ds \quad ,$$

où l'on a posé $\|f\|_1=\int_0^{+\infty} |f(s)|\,ds$

6) a) Montrer que $\lim_{t\to+\infty}\int_{\frac{t}{2}}^t |f(s)|\,ds=0$.

b) En déduire que $\lim_{t\to+\infty} y_0(t)=0$ puis que $\int_0^{+\infty} y_0(t)\,dt$ converge.

c) Montrer en se servant du 2)a) que $\int_0^{+\infty} y_0(t)\,dt=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

7) A l'aide du 3) b) , prouver que pour toute solution y de (E) , l'intégrale $\int_0^{+\infty} y(t)\,dt$ converge.

Exprimer sa valeur à l'aide de a , $y(0)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

On suppose à partir de maintenant que $a<0$.

8) a) Montrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E), alors il existe une constante C telle que $y_2(t)=y_1(t)+Ce^{-at}$.

b) En déduire qu'il n'existe qu'au plus une solution y de (E) telle que $\int_0^{+\infty} y(t)\,dt$ converge.

Le but des questions suivantes est de montrer qu'il existe toujours une solution y de (E) telle que $\int_0^{+\infty} y(t)\,dt$ converge. On procède par analyse-synthèse.

9) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{as} f(s)\,ds$ converge.

10) Soit y une solution de (E) telle que $\int_0^{+\infty} y(t)\,dt$ converge. Écrivons -là sous la forme

$y(t)=e^{-at}\left(C+\int_0^{t} e^{as} f(s)\,ds\right)$ (voir 3)b)).

Montrer à l'aide du 2)b) que nécessairement $C=-\int_0^{+\infty} e^{as} f(s)\,ds$.

11) Soit y la solution donnée par $y(t)=e^{-at}\left(C+\int_0^{t} e^{as} f(s)\,ds\right)$ avec $C=-\int_0^{+\infty} e^{as} f(s)\,ds$.

a) Montrer qu'alors $y(t)=-e^{-at}\int_t^{+\infty} e^{as} f(s)\,ds$.

b) Démontrer que $\forall t>0,\ |y(t)|\leq\int_t^{+\infty} |f(s)|\,ds$.

c) Déduire du 2)b) que l'intégrale $\int_0^{+\infty} y(t)\,dt$ converge.

12) Conclusion de l'exercice ?

(*)Exercice 19 (solutions d'intégrale absolument convergente pour l'équation harmonique)
(nécessite le cours sur les équations différentielles)

On considère f une fonction continue sur $[0;+\infty[$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge.

On considère l'équation différentielle du second ordre sur $[0;+\infty[$:

$(E)\ :\ y''(t)+y(t)=f(t)$.

Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une seule solution y d'intégrale $\int_0^{+\infty} y(t)\,dt$ convergente.

Ce résultat se traduit physiquement de la façon suivante : un oscillateur harmonique soumis à l'instant t à une excitation $f(t)$ qui tend vers 0 suffisamment vite quand t tend vers l'infini peut être stabilisé moyennant un bon choix de condition initiales.

1) Soit y une solution de (E).
   a) A l'aide d'une double intégration par parties, montrer que
   $$\forall x \geq 0,\ \int_0^x y''(t)e^{jt}\,dt = (y'(x) - j\,y(x))e^{jx} - y'(0) + j\,y(0) - \int_0^x y(t)e^{jt}\,dt.$$
   b) En déduire la relation valable pour toute solution y de (E) :
   $$(1)\ :\ \forall x \geq 0,\ \int_0^x f(t)e^{jt}\,dt = (y'(x) - j\,y(x))e^{jx} - y'(0) + j\,y(0).$$
2) Montrer que l'intégrale complexe $\int_0^{+\infty} f(t)e^{jt}\,dt$ est absolument convergente.
   On considère $\int_0^{+\infty} f(t)e^{jt}\,dt = m + p\,j$ l'écriture algébrique du nombre complexe $\int_0^{+\infty} f(t)e^{jt}\,dt.$
3) a) Montrer à partir de la relation (1) que pour un bon choix de conditions initiales $y(0)$ et $y'(0)$ que l'on explicitera à l'aide des réels m et p, il existe une solution de (E), notée y_0, telle que $\lim_{x \to +\infty} (y_0'(x) - j\,y_0(x))e^{jx} = 0$.
   b) En déduire que $\lim_{x \to +\infty} y_0(x) = \lim_{x \to +\infty} y'_0(x) = 0$.
4) a) Montrer que pour toute solution y de (E) on a :
   $$\forall x \geq 0,\ \int_0^x y(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt + y'(0) - y'(x)\ .$$
   b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} y_0(t)\,dt$ converge.
5) a) Montrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E), alors il existe deux constantes A et B telles que $y_2(t) = y_1(t) + A\cos(t) + B\sin(t)$.
   b) En déduire que y_0 est la seule solution de (E) d'intégrale sur $[0\,;+\infty[$ convergente.
6) a) Cas particulier (problème de contrôle) : on suppose que la fonction f est à durée finie, c'est à dire qu'il existe un réel T tel que $\forall t \geq T,\ f(t) = 0$. Montrer que la solution y_0 de (E) est nulle sur l'intervalle $[T\,;+\infty[$ et que c'est la seule solution de (E) à vérifier cette propriété.
   b) Application : On considère $f = \Pi_{0,T}$ (la fonction porte de base l'intervalle $[0\,;T]$. Quelles conditions initiales $y(0)$ et $y'(0)$ doit- on imposer à (E) pour obtenir une solution nulle sur $[T\,;+\infty[$? (On pourra reprendre le raisonnement effectué à la question 3) . Déterminer alors la solution y_0 et la représenter sur $[0\,;+\infty[$.

(*)Exercice 20

Soit f une fonction continue sur $[0\,;+\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt$ converge.

1) Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par l'expression $g(t) = \frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)$.

a) Si $0<a<b$, montrer que $\int_a^b g(t)^2\,dt=\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f(x)^2\,dx$.

b) En déduire que $\int_{0^+}^{+\infty} g(t)^2\,dt=\int_0^{+\infty} f(x)^2\,dx$ où $\int_{0^+}^{+\infty} g(t)^2\,dt \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon^+}^{+\infty} g(t)^2\,dt$.

2) On définit sur $[0\,;+\infty[$ la fonction F par l'expression $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ et la fonction h par l'expression $h(x)=\begin{cases}\dfrac{F(x)}{x} & \text{si } x>0\\ f(0) & \text{si } x=0\end{cases}$.

a) Montrer que h est continue sur $[0\,;+\infty[$.

Soient ε et X tels que $0<\varepsilon<X$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$\int_\varepsilon^X h(t)^2\,dt\le h(\varepsilon)F(\varepsilon)+2\int_\varepsilon^X f(t)h(t)\,dt$.

c) Montrer que $\forall A\in\mathbb{R},\forall B\in\mathbb{R},\ AB\le A^2+\frac{1}{4}B^2$.

d) En déduire que $2\int_\varepsilon^X f(t)h(t)\,dt\le 2\int_\varepsilon^X f(t)^2\,dt+\frac{1}{2}\int_\varepsilon^X h(t)^2\,dt$.

e) Déduire alors du b) que $\int_\varepsilon^X h(t)^2\,dt\le 2h(\varepsilon)F(\varepsilon)+4\int_\varepsilon^X f(t)^2\,dt$.

f) Démontrer alors que $\forall X>0,\ \int_0^X h(t)^2\,dt\le 4\int_0^X f(t)^2\,dt$.

g) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t)^2\,dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} h(t)^2\,dt\le 4\int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt$.

(**) i) Montrer que le résultat obtenu ci-dessus est optimal, au sens où la constante 4 ne peut pas être remplacée par une valeur strictement inférieure (on pourra considérer pour $1>\lambda>\frac{1}{2}$ la fonction $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[0\,;1]\\ \dfrac{1}{x^\lambda} & \text{si } x>1\end{cases}$)

Remarque : En écrivant que $\sqrt{\int_0^{+\infty} h(t)^2\,dt}\leqslant 2\sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt}$, on a prouvé que la valeur efficace de la fonction « valeur moyenne » $x\to\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ est toujours inférieure ou égale au double de celle de *f*.

VII) Corrigés

Exercice 1

1) La fonction $x \to \frac{11x-3}{(x-1)(x-3)(x+3)}$ est définie et continue sur $[4;+\infty[$. On a $\frac{11x-3}{(x-1)(x-3)(x+3)} \sim \frac{11}{x^2} > 0$ si $x \to +\infty$. L'intégrale $\int_4^{+\infty} \frac{11}{x^2} dx$ converge par le critère de Riemann, donc I_1 converge par le critère d'équivalence.

On a la décomposition en éléments simples suivante $\frac{11x-3}{(x-1)(x-3)(x+3)} = \frac{-\frac{3}{2}}{x+3} - \frac{1}{x-1} + \frac{\frac{5}{2}}{x-3}$

donc

$$\int \frac{11x-3}{(x-1)(x-3)(x+3)} dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(x-3)^5}{(x+3)^3(x-1)^2}\right)$$

d'où l'on déduit $I_1 = \frac{1}{2}(3\ln(7) + 2\ln(3))$.

2) L'intégrale I_2 converge pour des raisons similaires au 1).

On a la décomposition en éléments simples suivante $\frac{5x-2}{x^2(x+2)} = \frac{-3}{x+2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$

donc

$$\int \frac{5x-2}{x^2(x+2)} dx = 3\ln\left(\frac{x}{x+2}\right) + \frac{1}{x}$$

d'où l'on déduit $I_2 = 3\ln(3) - 1$.

3) Puisque $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0^+$, on a pour x assez grand $0 < \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} < 1$ donc $\ln(x) < \sqrt{x}$.

On a donc pour x assez grand $0 < \frac{\ln(x)}{x^2} < \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ donc le critère de Riemann, puis le critère de comparaison permet de conclure à la convergence de I_3.

4) L'intégrale I_4 converge pour des raisons similaires au 1).

On a la décomposition en éléments simples suivante $\frac{3x-5}{(x^2-1)^2} = \frac{\frac{5}{4}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} - \frac{\frac{5}{4}}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$

donc

$$\int \frac{3x-5}{(x^2-1)^2} dx = \frac{5}{4}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

d'où l'on déduit $I_4 = \frac{5}{4}\ln(3) - \frac{7}{6}$.

5) L'intégrale I_5 converge pour les mêmes raisons qu'au 1).

On a la décomposition en éléments simples suivante $\frac{11x-7}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{-4}{x+3} + \frac{4x-1}{x^2+1}$

donc

$$\int \frac{11x-7}{(x+3)(x^2+1)}dx = 2\ln\left(\frac{x^2+1}{(x+3)^2}\right) - \arctan(x).$$

d'où l'on déduit $I_2 = 4\ln(3) - \frac{\pi}{2}$.

6) Le plus simple est de calculer : $\int_{-X}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}dx = \left[\ln(1+e^x)\right]_{-X}^{0} = \ln\left(\frac{2}{1+e^{-X}}\right)$ et d'en déduire que $I_7 = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}dx$ converge et que $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}dx = \ln(2)$

7) L'intégrale I_7 converge pour les mêmes raisons qu'au 1). Bien voir d'abord que les deux intégrales $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ et $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ convergent.

En faisant le changement de variable $x = \tan(t)$, il vient

$$I_8 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \frac{1+\tan^2(t)}{(1+\tan^2(t))^2}dt = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \frac{1}{(1+\tan^2(t))}dt = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \cos^2(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} (1+\cos(2t))dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 2

1) a)On a $F_{-u}(x) = \frac{x^u}{(1+x^2)(1+x^u)} = \frac{(1+x^u)-1}{(1+x^2)(1+x^u)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(1+x^2)(1+x^u)}$.

b) On a trois cas :

Si $u > 0$: quand $x \to +\infty$, $x^u \to +\infty$, donc $1+x^u \sim x^u$ et $1+x^2 \sim x^2$ d'où $\frac{1}{(1+x^2)(1+x^u)} \sim \frac{1}{x^{2+u}} > 0$. Par le critère de Riemann, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{u+2}}dx$ converge donc par le critère de l'équivalent, I_u converge.

Si $u = 0$: on a $\frac{1}{(1+x^2)(1+x^u)} = \frac{1}{2(1+x^2)}$. Par le critère de Riemann et de l'équivalent, I_0 converge.

Si $u < 0$: par le 1)a), $F_u(x) = \frac{1}{x^2+1} - F_{-u}(x)$. Or $\int_0^{+\infty} F_{-u}(x)dx$ converge (voir premier cas) et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ converge donc par différence de deux intégrales convergentes, l'intégrale $\int_0^{+\infty} F_u(x)dx$ converge.

2) On a $I_0 = \int_0^{+\infty} F_0(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

On a

$$I_1 = \int_0^{+\infty} F_1(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x)}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{-x+1}{1+x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \arctan(x)\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

3)

On a

$$I_u=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^u)}dx=\int_{+\infty}^0\frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{t}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{1}{t}\right)^u\right)}\left(\frac{-dt}{t^2}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)(1+t^{-u})}dx$$

$$=I_{-u}.$$

Par le 1)a), on a aussi $I_u+I_{-u}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}$ et l'on déduit des deux relations que

$\forall u\in\mathbb{R},\ I_u=\frac{\pi}{2}.$

Remarque : le cas $u=2$ a été traité dans le 7) de l'exercice 1 par une méthode différente.

Exercice 3

1) Si x tend vers $+\infty$, on a par produit d'équivalents $\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x}.\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}>0$.

Le critère de Riemann et celui de l'équivalent donnent la convergence de I.

2) Si x tend vers $+\infty$, on a $\sqrt{x+2}+1\sim\sqrt{x}$ car $\frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x}}\to 1$ et on a aussi $\sqrt{x^3+2}\sim x\sqrt{x}$ car $\frac{\sqrt{x^3+2}}{x\sqrt{x}}=\sqrt{1+\frac{2}{x\sqrt{x}}}\to 1$ donc par quotient d'équivalents, $\frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x^3+2}}\sim\frac{1}{x}>0$. Le critère de Riemann et celui de l'équivalent donnent la divergence de J.

3) On a $\forall x\geqslant 2,\ \left|\frac{\cos x+\sin 2x}{x^2}\right|\leqslant\frac{2}{x^2}$. L'intégrale $\int_2^{+\infty}\frac{2}{x^2}\mathrm{dx}$ converge (critère de Riemann) donc par le critère de comparaison l'intégrale $\int_2^{+\infty}\left|\frac{\cos x+\sin 2x}{x^2}\right|\mathrm{dx}$ converge, donc K est convergente par le Théorème 3.

4) L'intégrale L converge : c'est une application directe de la propriété 2.

5) On a $\int_a^X\frac{dt}{t\ln t}=\int_a^X\frac{(\ln(t))'}{\ln t}dt=\ln(\ln(X))-\ln(\ln(a))$ et en faisant tendre X vers l'infini, on obtient que M est divergente.

Exercice 4

1) On fixe pour le moment $X>0$, et par le changement de variables $s=\frac{t}{\sqrt{a}}$ on a

$\int_0^X \mathrm{e}^{-at^2}dt=\sqrt{a}.\int_0^{\frac{X}{\sqrt{a}}}\mathrm{e}^{-s^2}ds$ ce qui permet de dire que $\lim_{X\to+\infty}\int_0^X \mathrm{e}^{-at^2}dt$ existe et vaut

$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at^2}dt=\sqrt{a}.\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s^2}ds=\frac{\sqrt{a\pi}}{2}.$

2) On fixe pour le moment $X>0$, et par IPP on a

$$\int_0^X t^2 e^{-at^2} dt = -\frac{1}{2a}\int_0^X t.(-2a\,t)\,e^{-at^2} = -\frac{1}{2a}\left(\left[t\,e^{-at^2}\right]_0^X - \int_0^X e^{-at^2} dt\right) = \frac{1}{2a}\int_0^X e^{-at^2} dt - \frac{X\,e^{-aX^2}}{2a}.$$

Si $X \to +\infty$, on a $\lim\limits_{X\to+\infty} X\,e^{-aX^2} = \lim\limits_{Y\to+\infty} \sqrt{Y}\,e^{-aY} = \lim\limits_{Y\to+\infty} \frac{\sqrt{Y}}{e^{aY}} = 0$ par la propriété 10 du chapitre sur les fonctions élémentaires, donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_0^X t^2 e^{-at^2} dt$ existe et vaut

$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-at^2} dt = \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-at^2} dt = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ d'après le 1).

Exercice 5

1) On a $\int f(t)\,dt = \int \mathrm{Re}\left(e^{(-3+4j)t}\right) dt = \mathrm{Re}\left(\int e^{(-3+4j)t}\,dt\right)$ (voir V)2) du cours)

$$\int f(t)\,dt = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(-3+4j)t}}{-3+4j}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-3t}\left(\cos(4t) + j\sin(4t)\right)(-3-4j)}{25}\right)$$

$$= \frac{1}{25}e^{-3t}\left(4\sin(4t) - 3\cos(4t)\right).$$

2) On a par ce qui précède pour $X > 0$: $\int_0^X f(t)\,dt = \frac{3}{25} - \frac{1}{25}e^{-3X}\left(4\sin(4X) - 3\cos(4X)\right)$ donc

$\left|\int_0^X f(t)\,dt - \frac{3}{25}\right| = \frac{1}{25}e^{-3X}\left|4\sin(4X) - 3\cos(4X)\right| \leqslant \frac{1}{25}e^{-3X}.5 = \frac{1}{5}e^{-3X}$, d'où l'on déduit que

$\lim\limits_{X\to+\infty} \int_0^X f(t)\,dt = \frac{3}{25}$.

Exercice 6

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\int_n^{n+1} e^{-t} f(t)\,dt = e^{-n}\int_0^1 e^{-s} f(s)\,ds$. (on pourra faire le changement de variable $t = s + n$).

On a :

$\int_n^{n+1} e^{-t} f(t)\,dt = \int_0^1 e^{-s-n} f(s+n)\,ds = \int_0^1 e^{-n}.e^{-s} f(s)\,ds$ car $f(t)$ est 1-périodique,

$\int_n^{n+1} e^{-t} f(t)\,dt = e^{-n}.\int_0^1 e^{-s} f(s)\,ds$.

2) Par la relation de Chasles,

$\int_0^n e^{-t} f(t)\,dt = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} e^{-t} f(t)\,dt = \sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{-k}.\int_0^1 e^{-s} f(s)\,ds$ par la question précédente

$\int_0^n e^{-t} f(t)\,dt = \int_0^1 e^{-s} f(s)\,ds.\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{-k} = \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}.\int_0^1 e^{-s} f(s)\,ds$ en factorisant par $\int_0^1 e^{-s} f(s)\,ds$ et en utilisant la formule rappelée, d'où :

$\int_0^n e^{-t} f(t)\,dt = \frac{e}{e-1}\left(1-e^{-n}\right).\int_0^1 e^{-s} f(s)\,ds$.

3) Par le Théorème 2 du chapitre sur les fonctions élémentaires, la fonction f est bornée sur $[0\,;1]$, donc sur $\mathbb{R}$ tout entier car f est 1-périodique : $\exists M>0$ t.q $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|\leqslant M$.

On a alors $\forall t\in\mathbb{R}$, $\left|e^{-t}f(t)\right|\leqslant M\,e^{-t}$. On sait que $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge, donc par le critère de comparaison, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}f(t)\,dt$ est absolument convergente, donc convergente.

On peut alors écrire :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}f(t)\,dt=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n} \mathrm{e}^{-t}f(t)\,dt=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e}{e-1}\left(1-e^{-n}\right)\,.\,\int_0^1 \mathrm{e}^{-s}f(s)\,ds\right)$$

$$=\frac{e}{e-1}\,.\,\int_0^1 \mathrm{e}^{-s}f(s)\,ds\,.$$

Exercice 7

1) a) On a $\forall t\geqslant 1$, $\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right|\leqslant\frac{1}{t^2}$. On sait que (critère de Riemann) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt$ converge, donc par le critère de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$ est absolument convergente, donc convergente.

b) Soit $X\geqslant 1$. On a par une IPP :

$$\int_1^X\frac{\sin(t)}{t}\,dt=-\left[\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^X-\int_1^X\frac{\cos(t)}{t^2}\,dt=\cos(1)-\frac{\cos(X)}{X}--\int_1^X\frac{\cos(t)}{t^2}\,dt.$$

Si $X\to+\infty$, alors :

d'une part $\left|\frac{\cos(X)}{X}\right|\leqslant\frac{1}{X}$ donc $\frac{\cos(X)}{X}\to 0$

d'autre part $\int_1^X\frac{\cos(t)}{t^2}\,dt\to\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$ (cf 1)a))

donc l'égalité ci-dessus montre que $\lim_{X\to 0}\int_1^X\frac{\sin(t)}{t}\,dt$ existe et vaut

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt=\cos(1)-\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}\,dt.$$

2) On a $\forall t\geqslant 1$, $\left|\frac{\sin(2t)}{t^2}\right|\leqslant\frac{1}{t^2}$. On sait que (critère de Riemann) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt$ converge, donc par le critère de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(2t)}{t^2}\,dt$ est absolument convergente, donc convergente.

Soit $X\geqslant 1$. On a par une IPP :

$$\int_1^X\frac{\cos(2t)}{t}\,dt=\left[\frac{\sin(2t)}{2t}\right]_1^X+\frac{1}{2}\int_1^X\frac{\sin(2t)}{t^2}\,dt=\frac{\sin(2X)}{2X}-\frac{\sin(2)}{2}+\frac{1}{2}\int_1^X\frac{\sin(2t)}{t^2}\,dt.$$

Si $X\to+\infty$, alors :

d'une part $\left|\frac{\sin(2X)}{2X}\right|\leqslant\frac{1}{2X}$ donc $\frac{\sin(2X)}{2X}\to 0$

d'autre part $\int_1^X\frac{\sin(2t)}{t^2}\,dt\to\int_1^{+\infty}\frac{\sin(2t)}{t^2}\,dt$

donc l'égalité ci-dessus montre que $\lim_{X\to 0}\int_1^X\frac{\cos(2t)}{t}\,dt$ existe et vaut

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2t)}{t}\,dt=-\frac{\sin(2)}{2}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin(2t)}{t^2}\,dt.$$

3) a) $|\sin(t)|-\sin^2(t)=|\sin(t)|-|\sin(t)|^2=|\sin(t)|(1-|\sin(t)|)\geqslant 0$ car $|\sin(t)|\leqslant 1$.

b) On a $\forall X\geq 1$, $\int_1^X \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt=\int_1^X \frac{|\sin(t)|}{t} dt\geqslant \int_1^X \frac{\sin^2(t)}{t} dt$ par la question 2)a)

$\int_1^X \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt\geqslant \frac{1}{2}\int_1^X \frac{1}{t} dt-\frac{1}{2}\int_1^X \frac{\cos(2t)}{t} dt=\frac{1}{2}\ln(X)-\frac{1}{2}\int_1^X \frac{\cos(2t)}{t} dt$.

c) On a $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(X)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\int_1^X \frac{\cos(2t)}{t} dt\right)=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ d'où l'on déduit par somme de limites que $\lim\limits_{X\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\ln(X)-\frac{1}{2}\int_1^X \frac{\cos(2t)}{t} dt\right)=+\infty$ d'où par comparaison de limites, $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_1^X \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt=+\infty$: cela prouve que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ ne converge pas absolument.

Exercice 8

1) Si $t\to-\infty$, $e^t\to 0$ donc $\sin(e^t)\sim e^t>0$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{0} e^t dt$ converge vers 1 donc par le critère de comparaison, $\int_{-\infty}^{0} \sin(e^t) dt$ converge.
2) Soit X un réel positif. On a par IPP :
$$\int_0^X \sin(e^t) dt=\int_0^X (e^{-t})(e^t\sin(e^t)) dt=-[e^{-t}\cos(e^t)]_0^X-\int_0^X e^{-t}\cos(e^t) dt$$
$$=\cos(1)-e^{-X}\cos(e^X)-\int_0^X e^{-t}\cos(e^t) dt.$$

En remarquant que $\forall t\in\mathbb{R}$, $|e^{-t}\cos(e^t)|\leqslant e^{-t}$, alors, si $X\to+\infty$:
d'une part $e^{-X}\cos(e^X)\to 0$
d'autre part , puisque $\int_0^X e^{-t} dt$ converge, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(e^t) dt$ converge absolument donc converge.
L'égalité ci-dessus montre alors que $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_0^X \sin(e^t) dt=\cos(1)-\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(e^t) dt$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(e^t) dt$ est convergente.

Remarque : la fonction $t\to\sin(e^t)$ est un exemple de fonction f où la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ n'implique pas que $f(t)$ tende vers 0 en $+\infty$

Exercice 9

1) Puisque $\forall t\in\mathbb{R},\ \tau u'(t)+u(t)=f(t)$ on a $\forall t\in\mathbb{R},\ \tau u'(t).u(t)+u^2(t)=f(t)u(t)$ c'est à dire $\forall t\in\mathbb{R},\ \tau\frac{d}{dt}\left(u^2(t)\right)+u^2(t)=f(t)u(t)$.

En intégrant de 0 à x on a :

$$\forall x\geqslant 0,\ \frac{1}{2}\tau\left(u^2(x)-u^2(0)\right)+\int_0^x u^2(t)\,dt=\int_0^x f(t)u(t)\,dt.$$

2) a) Il suffit de remarquer que $0\leqslant(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$ d'où $ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)$.

b) On a par le 2)a) $\forall t\geqslant 0,\ f(t)u(t)\leqslant\frac{1}{2}f^2(t)+\frac{1}{2}u^2(t)$. Si x est un réel positif, on déduit en intégrant cette relation : $\forall x\geqslant 0,\ \int_0^x f(t)u(t)\,dt\leqslant\frac{1}{2}\int_0^x f^2(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_0^x u^2(t)\,dt$. On déduit alors du 1) que $\forall x\geqslant 0,\ \frac{1}{2}\tau\left(u^2(x)-u^2(0)\right)+\int_0^x u^2(t)\,dt\leqslant\frac{1}{2}\int_0^x f^2(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_0^x u^2(t)\,dt$ d'où

$$\forall x\geqslant 0,\ \frac{1}{2}\tau\left(u^2(x)-u^2(0)\right)+\frac{1}{2}\int_0^x u^2(t)\,dt\leqslant\frac{1}{2}\int_0^x f^2(t)\,dt.$$

On a alors $\frac{1}{2}\int_0^x u^2(t)\,dt\leqslant\frac{1}{2}\int_0^x f^2(t)\,dt+\frac{1}{2}\tau u^2(0)-\frac{1}{2}\tau u^2(x)\leqslant\frac{1}{2}\int_0^x f^2(t)\,dt+\frac{1}{2}\tau u^2(0)$
ce qui donne le résultat demandé.

c) On a alors $\forall x\geqslant 0,\ \int_0^x u^2(t)\,dt\leqslant\frac{1}{2}\int_0^x f^2(t)\,dt+\frac{1}{2}\tau u^2(0)\leqslant\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt+\frac{1}{2}\tau u^2(0)$ ce qui montre que $\int_0^{+\infty} u^2(t)\,dt$ ne peut être infini, donc $\int_0^{+\infty} u^2(t)\,dt$ converge (voir IV)1) du cours).

3) Si $\tau<0$, l'inégalité $\frac{1}{2}\int_0^x f^2(t)\,dt+\frac{1}{2}\tau u^2(0)-\frac{1}{2}\tau u^2(x)\leqslant\frac{1}{2}\int_0^x f^2(t)\,dt+\frac{1}{2}\tau u^2(0)$ utilisée à la fin du 2)b) devient fausse car on ne peut plus dire que $-\frac{1}{2}\tau u^2(x)<0$.

Par exemple si $f=0$, $u(t)=e^{\frac{-t}{\tau}}$ est solution de $\tau u'(t)+u(t)=f(t)$ mais clairement $\int_0^{+\infty} u^2(t)\,dt$ ne converge pas.

Exercice 10

1) a) Découle de l'encadrement $\forall t\in\mathbb{R},\ -1\leqslant\sin(t)\leqslant 1$.

b) On a $\forall t\geqslant 1,\ \frac{t+\sin(2t)}{t^2}\geqslant\frac{t-1}{t^2}$. On a aussi $\frac{t-1}{t^2}\sim\frac{1}{t}>0$ quand $t\to+\infty$. On obtient facilement (critère de Riemann + équivalence) que $\int_1^{+\infty}\frac{t-1}{t^2}dt$ diverge, donc par le critère de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{t+\sin(t)}{t^2}\mathrm{dt}$ diverge.

2) On a $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t}=0$ donc pour t assez grand, $\frac{\ln(t)}{t}<1$ d'où $0<\frac{\ln(t)}{t^4}\leqslant\frac{1}{t^3}$. On obtient

facilement (critère de Riemann + comparaison) que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^4} dt$ est convergente.

3) Critère d'équivalence et critère de Riemann.

Exercice 11

1) On a $\forall t \geqslant 1,\ 0 < \frac{\arctan(t)}{t^2} < \frac{\pi}{2t^2}$ donc le résultat s'en suit par critère de comparaison et critère de Riemann.
2) On a pour tout réel $X \geqslant 1$:
$$\int_1^X \frac{\arctan(t)}{t^2} dt = \int_1^X \arctan(t) \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{\arctan(t)}{t} \right]_1^X + \int_1^X \frac{dt}{t(t^2+1)}$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(X)}{X} + \int_1^X \frac{dt}{t(t^2+1)}.$$
3) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t^2+1)}$ converge (critère de Riemann et critère de comparaison) et on a $\lim_{X \to +\infty} \frac{\arctan(X)}{X} = 0$ car $\forall X \geqslant 1,\ 0 < \frac{\arctan(X)}{X} < \frac{\pi}{2X}$ donc le résultat de la question 2) montre que
$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t^2+1)} = \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} + \frac{-t}{t^2+1} \right) dt$$
$$= \frac{\pi}{4} + \left[\ln\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \right) \right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2).$$

Exercice 12

1) Critère d'équivalence et de Riemann.
2) Soit $X \geqslant 1$. On a $\int_4^{4X^2} \frac{dt}{t(\sqrt{t}+2)} = \int_1^X \frac{8u\,du}{4u^2(2u+2)} = \int_1^X \frac{du}{u(u+1)}$.

On en déduit que $\lim_{X \to +\infty} \int_1^X \frac{du}{u(u+1)}$ existe et vaut *I*, d'où $I = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)}$

3) Une décomposition en éléments simples donne alors $I = \ln(2)$.

Exercice 13

1) Puisque $\forall t \geqslant 1,\ \left| \frac{\sin(t^2)}{1+e^t} \right| \leqslant \frac{1}{1+e^t} \leqslant \frac{1}{e^t}$, le critère de comparaison donne l'absolue convergence de I.
2) On a $\ln(1+e^{-t}) \sim e^{-t} > 0$ si $t \to +\infty$. Le critère d'équivalence donne la convergence de I.
3) Le critère de Riemann et d'équivalence donne la divergence de I.

Exercice 14

1) Prendre $f(t) = \frac{1}{t}$.
2) Prendre $f(t) = t$.
3) Prendre $f(t) = \frac{1}{t}$.

Exercice 15

Soit $X \geqslant 1$. On a en posant $s=t^2$: $\int_1^X f(t^2)\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\int_1^{X^2} f(s)\frac{ds}{\sqrt{s}}$.

Or, $\forall s \geqslant 1,\ 0 \leqslant \frac{f(s)}{\sqrt{s}} \leqslant f(s)$ donc le critère de comparaison montre que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(s)\frac{ds}{\sqrt{s}}$ converge et que $\int_1^{+\infty} f(s)\frac{ds}{\sqrt{s}} \leqslant \int_1^{+\infty} f(s)ds$. En faisant $X \to +\infty$ dans la relation $\int_1^X f(t^2)\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\int_1^{X^2} f(s)\frac{ds}{\sqrt{s}}$. on obtient $\int_1^{+\infty} f(t^2)\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} f(s)\frac{ds}{\sqrt{s}} \leqslant \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} f(s)ds$.

Si l'on prend l'exemple de $f : t \in [1;+\infty[\to \frac{1}{t^2}$, on a la convergence de $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{dt}$ mais pas celle de $\int_1^{+\infty} f(\sqrt{t})\mathrm{dt}$ (critère de Riemann).

Exercice 16

1) Propriété 2
2) On a pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1}=\int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-t}dt=-\left[t^{n+1}e^{-t}\right]_0^{+\infty}+(n+1)\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt=-\lim_{t\to+\infty} t^{n+1}e^{-t}+(n+1)I_n$$

$=(n+1)I_n$ par les croissances comparées.

On a donc :

$$I_{n+1}=(n+1)I_n=(n+1)nI_{n-1}=(n+1)n(n-1)I_{n-2}=....=(n+1)!I_0.$$

Or par un calcul simple $I_0=1$ donc $I_{n+1}=(n+1)!$ ce qui équivaut à dire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n=n!$.

3) a) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 1,\ -nt \leqslant -t$ donc $e^{-nt} \leq e^{-t}$ par croissance de la fonction exponentielle.

b) On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 1,\ 0 < t^n e^{-nt} \leqslant t^n e^{-t}$. Puisque $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ converge, le critère par comparaison montre que J_n converge.

c) On pose $t=\frac{s}{n}$: $J_n=\int_0^{+\infty} t^n e^{-nt}dt=\frac{1}{n^n}\int_0^{+\infty} s^n e^{-s}\frac{ds}{n}=\frac{I_n}{n^{n+1}}=\frac{n!}{n^{n+1}}$.

d) On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n!=1\times 2\times....\times n \leqslant n\times n\times...\times n=n^n$ donc $0<\frac{n!}{n^{n+1}}=\frac{1}{n}.\frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{1}{n}$ c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0<J_n \leqslant \frac{1}{n}$ ce qui assure que $\lim_{n\to+\infty} J_n=0$.

4)

a) La convergence de l'intégrale est assurée par la propriété 2. On montre par récurrence sur n la propriété : (P_n): pour tout polynôme de degré n, on a $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt=\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)$.

Initialisation : si $\deg(P)=0$, $P(t)=a \in \mathbb{R}$ on a $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt=a\int_0^{+\infty} e^{-t}dt=a$ et $\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)=P(0)=a$ d'où l'égalité $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt=P(0)=\sum_{k=0}^{0} P^{(k)}(0)$.

Hérédité : supposons (P_n) vraie pour un certain entier naturel *n*. Soit $P(t)$ une fonction polynomiale de degré *n+1* . Alors, par une intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = -\left[P(t)e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} P'(t)e^{-t}dt = P(0) - \lim_{t\to+\infty} P(t)e^{-t} + \int_0^{+\infty} P'(t)e^{-t}dt.$$

D'une part, par les croissances comparées,on a $\lim_{t\to+\infty} P(t)e^{-t} = 0.$

D'autre part, puisque $\deg(P') = n,$ la propriété (P_n) implique que

$$\int_0^{+\infty} P'(t)e^{-t}dt = \sum_{k=0}^{n} (P')^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k+1)}(0) = \sum_{k=1}^{n+1} P^{(k)}(0).$$

On en déduit $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = P(0) + \sum_{k=1}^{n+1} P^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n+1} P^{(k)}(0)$.

On en déduit que (P_{n+1}) est vraie.

b) On a $\int_a^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} P(s+a)e^{-s-a}ds = e^{-a}\int_0^{+\infty} P(s+a)e^{-s}ds.$

La fonction $Q(s) = P(s+a)$ est aussi une fonction polynôme de degré *n* donc le résultat de la question précédente donne :

$$\int_a^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = e^{-a}\int_0^{+\infty} Q(s)e^{-s}ds = e^{-a}\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(0)$$

ce qui aboutit à :

$$\int_a^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = e^{-a}\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a).$$

Exercice 17

<u>Partie 1</u>

1) Posons $\varphi(x) = e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$ pour $x \geqslant 0.$ La fonction $t \to e^t f(t)$ étant continue, la fonction primitive $x \to \int_0^x e^t f(t)dt$ est dérivable donc φ aussi comme produit de fonctions dérivables, et, par la formule de dérivation d'un produit :

$\varphi'(x) = -e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt + e^{-x}e^x f(x) = -\varphi(x) + f(x)$ donc φ est solution de l'équation différentielle $y'(x) + y(x) = f(x)$ pour $x \in [0;+\infty[$ avec la condition initiale $y(0) = 0.$ Par unicité d'une telle solution, on déduit que $\forall x \geq 0,\ y_0(x) = \varphi(x) = e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$.

L'intégrale sur $[0.x]$ avec $x \geqslant 0$ est positive donc $\forall x \geq 0,\ y_0(x) \geqslant 0$

2) Soit $x \geqslant 0$. La relation $\forall t \in [0;x],\ y_0'(t) + y_0(t) = f(t)$ donne par intégration sur $[0;x]$: $y_0(x) - y_0(0) + \int_0^x y_0(t)dt = y_0(x) + \int_0^x y_0(t)dt = \int_0^x f(t)dt$ d'où $\int_0^x y_0(t)dt = \int_0^x f(t)dt - y_0(x) \leqslant \int_0^x f(t)dt$ car $y_0(x) \geqslant 0.$

3) Puisque *f* est positive, on a $\forall x \geq 0,\ \int_0^x y_0(t)dt \leq \int_0^x f(t)dt \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)dt < +\infty$.

Ainsi, la fonction $x \to \int_0^x y_0(t)dt$ est croissante (car y_0 est positive) et majorée par $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ donc elle converge, c'est à dire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ converge.

4) La relation $\forall x \geqslant 0,\ y_0(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x y_0(t)\,dt$ et le 3) montrent que
$\lim\limits_{x\to+\infty} y_0(x)=\int_0^{+\infty} f(t)\,dt-\int_0^{+\infty} y_0(t)\,dt$.

5) Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} y_0(x)\,dx$ converge et que $\lim\limits_{x\to+\infty} y_0(x)$ existe, c'est que
$\lim\limits_{x\to+\infty} y_0(x)=0$ c'est à dire que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt=\int_0^{+\infty} y_0(t)\,dt$.

Partie 2

6) On a $\forall x \geqslant 0,\ -|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ donc f_+ et f_- sont positives.
Par composée de fonctions continues, la fonction $x \to |f(x)|$ est continue donc par somme de fonctions continues, f_+ et f_- le sont aussi.
Puisque $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge, $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge aussi, donc les intégrales $\int_0^{+\infty} f_-(x)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} f_+(x)\,dx$ convergent par somme et différence de fonctions d'intégrales convergentes.

7) On peut donc utiliser les résultats de la partie 1 avec $f_+(x)$ qui vérifie les mêmes hypothèses que la fonction *f* de la partie 1. Cela donne que la fonction y_+ est positive, d'intégrale convergente et
$\int_0^{+\infty} y_+(x)\,dx=\int_0^{+\infty} f_+(x)\,dx$.
Le même raisonnement montre que la fonction y_- est positive, d'intégrale convergente et
$\int_0^{+\infty} y_-(x)\,dx=\int_0^{+\infty} f_-(x)\,dx$.

8) On vérifie tout de suite que la fonction $x \to y_+(x)-y_-(x)$ est solution de l'équation différentielle $y'(x)+y(x)=f_+(x)-f_-(x)=f(x)$ avec la condition initiale $y(0)=0-0=0$ donc, par unicité $\forall x \geqslant 0,\ y_0(x)=y_+(x)-y_-(x)$

9) a) Les fonctions que les fonctions y_+ et y_- sont positives, donc l'inégalité triangulaire donne :
$\forall x \geqslant 0,\ |y_0(x)|=|y_+(x)-y_-(x)| \leqslant |y_+(x)|+|y_-(x)|=y_+(x)+y_-(x)$ car les fonctions y_+ et y_- sont positives.

b) On tire de la relation $\forall x \in \mathbb{R},\ |y_0(x)| \leq y_+(x)+y_-(x)$ l'inégalité
$\int_0^{+\infty} |y_0(x)|\,dx \leq \int_0^{+\infty} y_+(x)\,dx+\int_0^{+\infty} y_-(x)\,dx=\int_0^{+\infty} f_+(x)\,dx+\int_0^{+\infty} f_-(x)\,dx$ par le7)
$\int_0^{+\infty} |y_0(x)|\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} \left(f_+(x)+f_-(x)\right)dx=\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$.
D'autre par, la relation $\forall x \geqslant 0,\ y_0(x)=y_+(x)-y_-(x)$ donne par intégration
$\int_0^{+\infty} y_0(x)\,dx=\int_0^{+\infty} y_+(x)\,dx-\int_0^{+\infty} y_-(x)\,dx=\int_0^{+\infty} f_+(x)\,dx-\int_0^{+\infty} f_-(x)\,dx$ par le 7)
$\int_0^{+\infty} y_0(x)\,dx=\int_0^{+\infty} \left(f_+(x)-f_-(x)\right)dx=\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

Exercice 18

1) L'ensemble des solutions de l'équation (E) est donné par la famille de solutions $\{t \to \lambda + \int_0^t f(s)\,ds\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe (au moins) deux fonctions différentes appartenant à cette famille d'intégrale convergente. La différence entre deux telles fonctions, qui est une constante non nulle, serait aussi d'intégrale convergente, ce qui est absurde. On en déduit que l'équation (E) possède une seule ou aucune solution y d'intégrale $\int_0^{+\infty} y(t)\,dt$ convergente.

Si f est nulle, la solution $y=0$ est bien d'intégrale convergente.

Si $f(t)=\dfrac{1}{(t+1)^2}$, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est donné par la famille de solutions $\{t \to \lambda + 1 - \dfrac{1}{t+1}\}_{\lambda \in \mathbb{R}} = \{t \to \dfrac{(\lambda+1)t+\lambda}{t+1}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ et on vérifie facilement qu'aucune de ces fonctions n'est d'intégrale convergente (distinguer par exemple les cas $\lambda=-1$ et $\lambda \neq -1$).

2)

a) La relation $\forall s \in [0;t],\ y'(s)+a\,y(s)=f(s)$ donne par intégration sur $[0;t]$:
$y(t)-y(0)+a\int_0^t y(s)\,ds=\int_0^t f(s)\,ds$ ce qui correspond à la relation demandée.

b)

$(i) \Rightarrow (ii)$: puisque $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge, $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge aussi, donc le 2)a) implique que $\lim_{t \to +\infty} y(t)=y(0)+\int_0^{+\infty} f(s)\,ds - a\int_0^{+\infty} y(s)\,ds$. Puisque $\int_0^{+\infty} y(t)\,dt$ converge, cette limite ne peut être autre que zéro.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Le 2)a implique alors que $\lim_{t \to +\infty} \int_0^t y(s)\,ds = \dfrac{1}{a}\left(y(0)+\int_0^{+\infty} f(s)\,ds\right)$ ce qui signifie que l'intégrale $\int_0^{+\infty} y(t)\,dt$ converge.

3) a) Posons $\varphi(t)=e^{-at}\int_0^t e^{as} f(s)\,ds$. pour $t \geqslant 0$. La fonction $s \to e^{as} f(s)$ étant continue, la fonction primitive $t \to \int_0^t e^{as} f(s)\,ds$ est dérivable donc φ aussi comme produit de fonctions dérivables, et, par la formule de dérivation d'un produit :

$\varphi'(t)=-a\,e^{-at}\int_0^t e^{as} f(s)\,ds + e^{-at} e^{at} f(t) = -a\varphi(t)+f(t)$ donc φ est solution de l'équation différentielle $y'(t)+a\,y(t)=f(t)$ pour $t \in [0;+\infty[$ avec la condition initiale $y(0)=0$. Par unicité d'une telle solution, on déduit que $\forall t \geqslant 0,\ y_0(t)=\varphi(t)=e^{-at}\int_0^t e^{as} f(s)\,ds.$

b) Il s'agit du Théorème de structure des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, la famille de solutions de l'équation homogène associée étant $t \to C e^{-at},\ C \in \mathbb{R}$.

4) Soit $t>0$. On a $\forall s \in [0;t],\ e^{as} \leqslant e^{at}$ car a > 0 , donc
$\forall s \in [0;t],\ e^{as}|f(s)| \leqslant e^{at} f(s)$
et par intégration sur $[0;t]$,

$$\left|\int_0^t e^{as} f(s)\,ds\right| \leqslant \int_0^t e^{as}\,|f(s)|\,ds \leqslant e^{at}\int_0^t |f(s)|\,ds.$$

5) On a par le 3)a) : $\forall t>0,\ y_0(t)=e^{-at}\int_0^t e^{as} f(s)\,ds = e^{-at}\int_0^{\frac{t}{2}} e^{as} f(s)\,ds + e^{-at}\int_{\frac{t}{2}}^t e^{as} f(s)\,ds$

par la relation de Chasles, donc

$$(1)\ :\ \forall t>0,\ |y_0(t)| = e^{-at}\left|\int_0^t e^{as} f(s)\,ds\right| \leqslant e^{-at}\left|\int_0^{\frac{t}{2}} e^{as} f(s)\,ds\right| + e^{-at}\left|\int_{\frac{t}{2}}^t e^{as} f(s)\,ds\right|.$$

On a d'une part $\left|\int_0^{\frac{t}{2}} e^{as} f(s)\,ds\right| \leqslant e^{a\frac{t}{2}}\int_0^{\frac{t}{2}} |f(s)|\,ds$ par le 4) et d'autre part

$\left|\int_{\frac{t}{2}}^t e^{as} f(s)\,ds\right| \leqslant \int_{\frac{t}{2}}^t e^{as}|f(s)|\,ds \leqslant e^{at}\int_{\frac{t}{2}}^t |f(s)|\,ds$ car $\forall s\in\left[\frac{t}{2};t\right],\ e^{as}\leqslant e^{at}$.

En reportant dans (1), on obtient :

$$\forall t>0,\ |y_0(t)| \leqslant e^{-at}.e^{a\frac{t}{2}}\int_0^{\frac{t}{2}} |f(s)|\,ds + \int_{\frac{t}{2}}^t |f(s)|\,ds = e^{-a\frac{t}{2}}\int_0^{\frac{t}{2}} |f(s)|\,ds + \int_{\frac{t}{2}}^t |f(s)|\,ds$$

$$\leqslant e^{\frac{-at}{2}}\|f\|_1 + \int_{\frac{t}{2}}^t |f(s)|\,ds,$$

car $\int_0^{\frac{t}{2}} |f(s)|\,ds \leqslant \int_0^{+\infty} |f(s)|\,ds = \|f\|_1$

6) a) On a $\lim_{t\to+\infty}\int_{\frac{t}{2}}^t |f(s)|\,ds = \lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^t |f(s)|\,ds - \int_0^{\frac{t}{2}} |f(s)|\,ds\right) = \int_0^{+\infty} |f(s)|\,ds - \int_0^{+\infty} |f(s)|\,ds = 0.$

b) Puisque $\forall t>0,\ |y_0(t)| \leq e^{\frac{-at}{2}}\|f\|_1 + \int_{\frac{t}{2}}^t |f(s)|\,ds$ (par le 5)) et que

$\lim_{t\to+\infty} e^{\frac{-at}{2}}\|f\|_1 = 0$

$\lim_{t\to+\infty}\int_{\frac{t}{2}}^t |f(s)|\,ds = 0$ par le 6)a),

on déduit que $\lim_{t\to+\infty} y_0(t) = 0$, donc $\int_0^{+\infty} y_0(t)\,dt$ converge par le 2)b).

c) On a $\forall t\in\mathbb{R},\ y_0(t) = y_0(0) + \int_0^t f(s)\,ds - a\int_0^t y_0(s)\,ds = \int_0^t f(s)\,ds - a\int_0^t y_0(s)\,ds$.

En faisant tendre t vers l'infini, on obtient $0 = \int_0^{+\infty} f(s)\,ds - a\int_0^{\infty} y_0(s)\,ds$, d'où le résultat demandé.

7) Pour toute solution y de (E) , il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que $y(t)=Ce^{-at}+y_0(t)$.
Puisque $\int_0^{+\infty} y_0(t)\,dt$ converge et $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ aussi, on en déduit que $\int_0^{+\infty} y(t)\,dt$ aussi et
$$\int_0^{+\infty} y(t)\,dt=\frac{C}{a}+\int_0^{+\infty} y_0(t)\,dt=\frac{1}{a}\left(y(0)+\int_0^{+\infty} f(t)\,dt\right).$$

8) a) Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E), alors y_2-y_1 est une solution de l'équation homogène associée, donc est de la forme $y_2(t)-y_1(t)=Ce^{-at}$.
b) S'il y avait deux solutions distinctes y_1 et y_2 de (E) telles que $\int_0^{+\infty} y_1(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} y_2(t)\,dt$ convergent , alors $\int_0^{+\infty}\left(y_2(t)-y_1(t)\right)dt$ convergerait ce qui est impossible car $\lim_{t\to+\infty} y_2(t)-y_1(t)=\lim_{t\to+\infty} Ce^{-at}=\pm\infty$ ($C\neq 0$ si $y_1\neq y_2$) car $a<0$.

9) Puisque a < 0 , on a $\forall s\geqslant 0$, $\left|e^{as}f(s)\right|\leqslant\left|f(s)\right|$ donc par critère de comparaison, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{as}f(s)\,ds$ converge absolument donc converge.

10) Par le 2)b) , on a $\lim_{t\to+\infty} y(t)=0$ donc par produit de limites,
$$\lim_{t\to+\infty}\left(C+\int_0^{t} e^{as}f(s)\,ds\right)=\lim_{t\to+\infty} e^{at}y(t)=0$$
donc
$$C+\int_0^{+\infty} e^{as}f(s)\,ds=0.$$

11)
a) On a par la relation de Chasles :
$$y(t)=e^{-at}\left(\int_0^{t} e^{as}f(s)\,ds-\int_0^{+\infty} e^{as}f(s)\,ds\right)=e^{-at}\int_{+\infty}^{t} e^{as}f(s)\,ds=-e^{-at}\int_t^{+\infty} e^{as}f(s)\,ds.$$
b) Soit t > 0. Puisque a < 0, on a $\forall s\geqslant t$, $e^{as}\leqslant e^{at}$ donc
$$|y(t)|=e^{-at}\left|\int_t^{+\infty} e^{as}f(s)\,ds\right|\leqslant e^{-at}\int_t^{+\infty} e^{as}|f(s)|\,ds\leqslant e^{-at}\int_t^{+\infty} e^{at}|f(s)|\,ds$$
c'est à dire, puisque le facteur e^{at} ne dépend pas de s :
$$|y(t)|\leqslant e^{-at}e^{at}\int_t^{+\infty}|f(s)|\,ds=\int_t^{+\infty}|f(s)|\,ds$$
c)Puisque $\int_0^{+\infty}|f(t)|\,dt$ converge, on a $\lim_{t\to+\infty}\int_t^{+\infty}|f(s)|\,ds=0$ donc la question précédente implique que $\lim_{t\to+\infty} y(t)=0$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} y(t)\,dt$ converge par le 2)b).

12)
Si $a>0$: toutes les solutions sont d'intégrales convergentes.
Si $a=0$: il y a une seule ou aucune solution d'intégrale convergente, selon la fonction *f*.
Si $a<0$: il y a exactement une solution d'intégrale convergente, celle de condition initiale

$$y(0)=-\int_0^{+\infty} e^{as} f(s)\,ds.$$

Remarque : $y(0)=-\mathrm{TL}(f)(a)$ $\mathrm{TL}(f)$ est la transformée de Laplace de f.

Exercice 19

1)

a) Soit $x\geqslant 0$. On a par une première IPP :

$$\int_0^x y''(t)e^{jt}\,dt=\left[y'(t)e^{jt}\right]_0^x-j\int_0^x y'(t)e^{jt}\,dt=y'(x)e^{jx}-y'(0)-j\int_0^x y'(t)e^{jt}\,dt,$$

et par une seconde IPP très similaire :

$$\int_0^x y'(t)e^{jt}\,dt=y(x)e^{jx}-y(0)-j\int_0^x y(t)e^{jt}\,dt.$$

On obtient alors à partir des deux résultats précédents :

$$\int_0^x y''(t)e^{jt}\,dt=y'(x)e^{jx}-y'(0)-j\left(y(x)e^{jx}-y(0)-j\int_0^x y(t)e^{jt}\,dt\right)$$, ce qui donne le résultat demandé.

b) On obtient à partir de (E) par multiplication par l'exponentielle complexe et par intégration :

$$\forall x\geq 0,\ \int_0^x y''(t)e^{jt}\,dt+\int_0^x y(t)e^{jt}\,dt=\int_0^x f(t)e^{jt}\,dt.$$

Le résultat du 1)a donne alors

$$\int_0^x f(t)e^{jt}\,dt=(y'(x)-j\,y(x))e^{jx}-y'(0)+j\,y(0).$$

2) Se déduit de la convergence de $\int_0^{+\infty}|f(t)|\,dt$ via la critère de comparaison.

3) a) Soit y_0 la solution de (E) vérifiant les conditions initiales $y_0(0)=p$ et $y_0'(0)=-m$. La relation (1) donne (1) : $\forall x\geq 0,\ \int_0^x f(t)e^{jt}\,dt=m+jp+(y_0'(x)-j\,y_0(x))e^{jx}$. Puisque

$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)e^{jt}\,dt=m+jp$ on en déduit que $\lim_{x\to+\infty}(y_0'(x)-j\,y_0(x))e^{jx}=0$.

b) On a donc

$$0=\lim_{x\to+\infty}\left|(y_0'(x)-j\,y_0(x))e^{jx}\right|^2=\lim_{x\to+\infty}\left|(y_0'(x)-j\,y_0(x))\right|^2=\lim_{x\to+\infty}\left((y_0'(x))^2+(y_0(x))^2\right)$$

d'où $\lim_{x\to+\infty} y_0(x)=\lim_{x\to+\infty} y'_0(x)=0$.

4) a) Il suffit d'intégrer l'égalité (E) entre 0 et x et de remarquer que $\int_0^x y''(t)\,dt=y'(x)-y'(0)$.

b) On a par le 3)b) : $\lim_{x\to+\infty} y_0'(0)-y_0'(x)=y_0'(0)$ et $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ donc le

résultat du 4)a) montre que l'intégrale $\int_0^{+\infty} y_0(t)\,dt$ converge vers $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt + y_0'(0)$.

5) a) Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E), alors $y_2 - y_1$ est une solution de l'équation homogène associée, donc est de la forme $y_2(t) - y_1(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$.

b) S'il y avait deux solutions distinctes y_1 et y_2 de (E) telles que $\int_0^{+\infty} y_1(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} y_2(t)\,dt$ convergent, alors $\int_0^{+\infty} \left(y_2(t) - y_1(t)\right)dt$ convergerait ce qui est impossible car $y_2(t) - y_1(t)$ serait une fonction sinusoïdale non nulle d'après a).

6) a) Sur l'intervalle $[T\,;+\infty[$, on a la relation $y_0''(t) + y_0(t) = 0$ donc $\exists A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}$ t;q $\forall t \geqslant T,\ y_0(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$.

La convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} y_0(t)\,dt$ implique alors que $A = B = 0$ donc la solution y_0 de (E) est nulle sur l'intervalle $[T\,;+\infty[$.

D'autre part, toute solution de (E) nulle sur l'intervalle $[T\,;+\infty[$ est d'intégrale convergente sur $[0\,;+\infty[$. D'après le 5)b), une telle solution est forcément égale à y_0.

b) On a $\int_0^{+\infty} f(t)e^{jt}\,dt = \int_0^{T} e^{jt}\,dt = \frac{1}{j}\left(e^{jT} - 1\right) = \sin(T) + j(1 - \cos(T))$

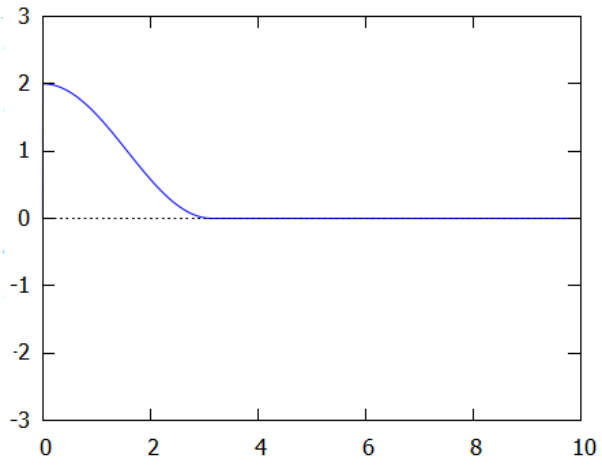
donc $m = \sin(T)$ et $p = 1 - \cos(T)$.

La fonction y_0 est donc l'unique solution de (E) à vérifier les conditions initiales $y_0(0) = 1 - \cos(T)$ et $y_0'(0) = -\sin(T)$.

On a $\forall t \in [0\,;T],\ y_0''(t) + y_0(t) = 1$, ce qui donne, avec les conditions initiales ci-dessus : $y_0(t) = 1 - \cos(T)\cos(t)\sin(T)\sin(t) = 1 - \cos(t - T)$ par les formules d'addition trigonométriques.

On a en conclusion $y_0(t) = \begin{cases} y_0(t) = 1 - \cos(t - T) & \text{si } t \in [0\,;T] \\ 0 & \text{si } t > T \end{cases}$.

Tracé de $t \to y_0(t)$ pour $T = \pi$:



Exercice 20

1)

a) Il suffit de faire le changement de variable $x=\frac{1}{t}$. On a ainsi

$$\int_a^b g(t)^2\,dt=\int_a^b\left(\frac{1}{t^2}f^2\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt=\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} x^2 f(x)^2\left(-\frac{dx}{x^2}\right)=-\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} f(x)^2\,dx=\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f(x)^2\,dx$$

b) Fixons $a>0$. Puisque f est continue sur $[0\,;+\infty[$, la fonction $t\to\int_t^{\frac{1}{a}} f(x)^2\,dx$ est dérivable sur $[0\,;\frac{1}{a}]$, donc continue, et ainsi :

$$\int_0^{\frac{1}{a}} f(x)^2\,dx=\lim_{t\to 0^+}\int_t^{\frac{1}{a}} f(x)^2\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f(x)^2\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b g(t)^2\,dt \quad \text{par le 1)a),}$$

ce qui montre que $\int_a^{+\infty} g(t)^2\,dt=\int_0^{\frac{1}{a}} f(x)^2\,dx.$ Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)^2\,dx$ converge on a alors l'existence de $\int_{0^+}^{+\infty} g(t)^2\,dt$ et $\int_{0^+}^{+\infty} g(t)^2\,dt=\int_0^{+\infty} f(x)^2\,dx$.

2)

a) La fonction F est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ car c'est une primitive de la fonction continue f, donc h est continue sur $]0\,;+\infty[$.

D'autre part, $\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=f(0)=h(0)$ ce qui prouve la continuité de h en 0.

b) On a, en faisant intervenir les deux fonctions $t\to\frac{1}{t^2}$ et $t\to F^2(t)$ dérivables à dérivées continues sur $[\varepsilon\,,X]$:

$$\int_\varepsilon^X h(t)^2\,dt=\int_\varepsilon^X \frac{1}{t^2}F^2(t)\,dt=\left[\frac{-1}{t}F^2(t)\right]_\varepsilon^X+2\int_\varepsilon^X\frac{1}{t}.f(t)F(t)\,dt$$

$$=\frac{F^2(\varepsilon)}{\varepsilon}-\frac{F^2(X)}{X}+2\int_\varepsilon^X\frac{1}{t}.f(t)F(t)\,dt=F(\varepsilon)h(\varepsilon)-F(X)h(X)+2\int_\varepsilon^X f(t)h(t)\,dt\ ,$$

en faisant intervenir la définition de la fonction h.

Puisque $F(X)h(X)=\frac{F^2(X)}{X}\geqslant 0$, il vient alors que $\int_\varepsilon^X h(t)^2\,dt\leq F(\varepsilon)h(\varepsilon)+2\int_\varepsilon^X f(t)h(t)\,dt$.

c) On a $0\leqslant\left(A-\frac{B}{2}\right)^2=A^2+\frac{B^2}{4}-AB$ ce qui mène à l'inégalité demandée.

d) On a $\forall t\in[\varepsilon\,;X],\ f(t)h(t)\leq f(t)^2+\frac{1}{4}h(t)^2$ ce qui mène par intégration au résultat demandé.

e) On combine les résultats du b) et du c) :

$$\int_\varepsilon^X h(t)^2\,dt\leq F(\varepsilon)h(\varepsilon)+2\int_\varepsilon^X f(t)h(t)\,dt\leqslant F(\varepsilon)h(\varepsilon)+2\int_\varepsilon^X f(t)^2\,dt+\frac{1}{2}\int_\varepsilon^X h(t)^2\,dt\ .$$

En retranchant $\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{X} h(t)^2\,dt$ on a :

$$\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{X} h(t)^2\,dt \leqslant F(\varepsilon)h(\varepsilon)+2\int_{\varepsilon}^{X} f(t)^2\,dt \quad .$$

f) Par continuité de F et de h en 0, on a $\lim_{\varepsilon\to 0} F(\varepsilon)h(\varepsilon)=F(0)h(0)=0.\mathrm{f}(0)=0.$

D'autre par les fonctions $\varepsilon \to \int_{\varepsilon}^{X} h(t)^2\,dt$ et $\varepsilon \to \int_{\varepsilon}^{X} f(t)^2\,dt$ étant dérivables sur $[0\,;+\infty[$ donc continues en 0, le résultat demandé est obtenu à partir de celui du e) en faisant $\varepsilon \to 0^+$.

g) On a $\forall X>0,\ \int_0^X h(t)^2\,dt \leq 4\int_0^X f(t)^2\,dt \leqslant 4\int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt<\infty$, donc la fonction $X \to \int_0^X h(t)^2\,dt$ étant croissante et majorée possède une limite finie si $X \to +\infty$, et on obtient alors par passage à la limite à partir du f) le résultat demandé.

h) Commençons par remarquer que pour tout réel $\alpha>1$, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\,dt=\left[\frac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_1^{+\infty}=\frac{1}{\alpha-1}.$$

Avec les notations de l'énoncé, on a d'une part :

$$\int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt=\int_0^1 f(t)^2\,dt+\int_1^{+\infty} f(t)^2\,dt=1+\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{2\lambda}}\,dt=1+\frac{1}{2\lambda-1}=\frac{2\lambda}{2\lambda-1} \quad .$$

On a d'autre part $F(x)=\begin{cases} x \text{ si } x\in[0\,;1] \\ 1+\int_1^x \frac{1}{t^{\lambda}}\,dt \text{ si } x>1 \end{cases}$. En remarquant que

$$\int_1^x \frac{1}{t^{\lambda}}\,dt=\left[\frac{-1}{(\lambda-1)t^{\lambda-1}}\right]_1^x=\frac{1}{\lambda-1}\left(1-\frac{1}{x^{\lambda-1}}\right)$$ on en déduit l'expression

$$F(x)=\begin{cases} x \text{ si } x\in[0\,;1] \\ \frac{1}{\lambda-1}\left(\lambda-\frac{1}{x^{\lambda-1}}\right) \text{ si } x>1 \end{cases} .$$

On a alors $h(x)=\begin{cases} 1 \text{ si } x\in[0\,;1] \\ \frac{1}{\lambda-1}\left(\frac{\lambda}{x}-\frac{1}{x^{\lambda}}\right) \text{ si } x>1 \end{cases}$.

On a donc

$$(1)\quad \int_0^{+\infty} h(t)^2\,dt=\int_0^1 h(t)^2\,dt+\int_1^{+\infty} h(t)^2\,dt=1+\int_1^{+\infty}\frac{1}{(\lambda-1)^2}\left(\frac{\lambda}{t}-\frac{1}{t^{\lambda}}\right)^2 dt.$$

Calculons cette dernière intégrale : $\int_1^{+\infty}\frac{1}{(\lambda-1)^2}\left(\frac{\lambda}{t}-\frac{1}{t^{\lambda}}\right)^2 dt=\frac{1}{(\lambda-1)^2}.\int_1^{+\infty}\left(\frac{\lambda^2}{t^2}+\frac{1}{t^{2\lambda}}-2\frac{\lambda}{t^{\lambda+1}}\right)dt.$

Par le calcul préliminaire, on trouve

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{(\lambda-1)^2}\left(\frac{\lambda}{t}-\frac{1}{t^{\lambda}}\right)^2 dt=\frac{\lambda^2}{(\lambda-1)^2}.\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt+\frac{1}{(\lambda-1)^2}.\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{2\lambda}}\,dt-\frac{2\lambda}{(\lambda-1)^2}.\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{1+\lambda}}\,dt$$

$$=\frac{1}{(\lambda-1)^2}\left(\lambda^2+\frac{1}{2\lambda-1}-2\right)dt=\frac{2\lambda^3-\lambda^2-4\lambda+3}{(2\lambda-1)(\lambda-1)^2}$$

$$=\frac{(\lambda-1)^2(2\lambda+3)}{(2\lambda-1)(\lambda-1)^2}=\frac{2\lambda+3}{2\lambda-1}.$$

La relation (1) se simplifie drastiquement en $\int_0^{+\infty} h(t)^2\,dt=1+\frac{2\lambda+3}{2\lambda-1}=\frac{4\lambda+2}{2\lambda-1}$.

On peut donc calculer $\frac{\int_0^{+\infty} h(t)^2\,dt}{\int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt}=\frac{\frac{4\lambda+2}{2\lambda-1}}{\frac{2\lambda}{2\lambda-1}}=2+\frac{1}{\lambda}$.

Supposons maintenant que la relation $\int_0^{+\infty} h(t)^2\,dt\leq C\int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt$ soit vraie pour un certain $C\in[0;4[$. Par ce qui précède, on aurait $\forall\lambda\in]\frac{1}{2};1[$, $2+\frac{1}{\lambda}\leqslant C$ donc en faisant tendre λ vers $\frac{1}{2}$, on obtiendrait que $4\leqslant C$ ce qui contredirait l'hypothèse que $C\in[0;4[$.

On en déduit par l'absurde que dans le résultat du g), la constante 4 ne peut pas être remplacée par une valeur strictement inférieure .

G - SUITES ET SÉRIES NUMÉRIQUES

Le but de ce chapitre est,d'une part de voir la notion de suite numérique qui est à la base de la modélisation de signaux discrets et, d'autre part, d'étudier les séries numériques. Ces dernières constitueront la première étape pour l'étude des séries entières qui serviront à définir la transformation en Z et la transformation de Fourier discrète, l'analogue de la transformation de Fourier pour les signaux discrets.

I) Suites numériques

I.1) Notion de suite numérique.

Définition1 Une suite numérique *u* est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ qui à un entier naturel *n* associe le nombre complexe u_n. La suite *u* peut être aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou en extension $(u_0, u_1, ...)$ tandis que u_n désignera le terme de rang *n* de la suite, c'est à dire l'image de *n* par l'application *u*.

Exemples :
a) La suite des entiers naturels impairs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=(1,3,5,7,.....)$. Le terme général de cette suite s'écrit $u_n=2n+1$, c'est à dire que l'image de *n* par *u* est $2n+1$.
b) La suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n=(1+j)^n$.
c) La suite des nombres premiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=(2,3,5,7,11,.....)$. Noter qu'elle est bien définie car 'il y a une infinité de nombres premiers.

Remarque : il n'est pas rare de définir une suite à partir d'un certain rang, c'est à dire considérer une suite de la forme $(u_n)_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq p}}$ pour un certain entier *p* strictement positif.

I.2) Mode de définition d'une suite.

Les deux façons principales de définir une suite sont :

(i) <u>La définition fonctionnelle</u> : on explicite une fonction $u:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{C}$ en définissant une expression du terme général u_n en fonction de *n*.

Exemple : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n=\frac{n-4}{n+2}$. Noter que cette expression est bien définie pour tout entier naturel *n*.

(ii) <u>La récurrence :</u> on donne un procédé récursif appelé <u>relation de récurrence</u> permettant de définir un terme de la suite en fonction du ou des précédents. Il faut alors donner le ou les premiers termes pour initier le procédé récursif (autant de termes que nécessaire selon le type de relation de récurrence).

Exemple : la suite *u* définie par ses deux premiers termes $u_0=1$ et $u_1=3$ et la relation de récurrence $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$ (chaque terme est la différence des deux précédents). On obtient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=(1,3,2,-1,-3,-2,1,3,.....)$ (remarquer que $u_6=u_0$ et $u_7=u_1$ donc la suite est périodique) .

Il existe des suites que l'on ne peut pas définir d'une des deux façons ci-dessus. Par exemple celle des nombres premiers , ou la suite (3,1,4,1,5,9,2,....) des décimales de π (On sait que π n'est pas un nombre décimal, donc l'ensemble des décimales de π ne forme pas une suite finie. Cette suite ne saurait non plus être périodique vu que π est irrationnel).

I.3) Quelques notions générales sur les suites.

Définition 2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\geq u_n$ et on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}> u_n$.
Définitions similaires pour une suite décroissante ou strictement décroissante.

Exemple : la suite de terme général $u_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}$ est décroissante car

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=\frac{n+2}{2^{n+2}}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{n+2}{2^{n+2}}-\frac{2n+2}{2^{n+2}}=\frac{-n}{2^{n+2}}\leq 0.$$

Elle est même strictement décroissante à partir du rang $n=1$.

Définition 3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes.
(i) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si on peut rendre $|u_n|$ aussi petit que l'on veut pourvu que n soit assez grand. Autrement dit :
$\forall\varepsilon> 0,\ \exists N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\in\mathbb{N},\ (n> N)\Rightarrow|u_n|<\varepsilon$.
(ii) Soit $l\in\mathbb{C}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si $(u_n-l)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
(iii) Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre complexe l, ce dernier est unique. Une suite qui ne converge vers aucun nombre $l\in\mathbb{C}$ est dite <u>divergente.</u>

Remarque : La définition peut sembler compliquée au premier abord. Supposons que l'on veuille déterminer numériquement, le mieux possible, un réel dont on sait seulement qu'il est la limité d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par exemple,on peut prouver que le nombre $\ln(2)$ est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{(-1)^n}{n+1}$. La définition 3 nous dit en substance que quelle que soit la précision $\varepsilon> 0$ avec laquelle on a besoin de connaître numériquement le réel l, on peut (théoriquement) trouver un rang N à partir duquel <u>tous</u> les termes de la suite seront environ égaux à l avec la précision voulue.

On prendra garde que le choix de N dépend de ε. En général, plus ε est petit, plus il faut choisir N grand.

Exemple : on peut prouver à l'aide de cette définition que la suite de terme général $u_n=\frac{1}{2^n}$ converge vers 0. Il faut alors, pour chaque choix (« virtuel », c'est à dire sans considérer de valeur numérique particulière) de $\varepsilon> 0$, être capable de montrer qu'il existe un rang N (qui dépend a priori de ε, on devrait d'ailleurs le noter $N(\varepsilon)$) tel que $|u_n|<\varepsilon$ dès que $n> N$. Une des façons les plus naturelles de procéder est d'exprimer N en fonction de ε.

En effet, soit $\varepsilon> 0$. Si N est un entier tel que $N>\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}$ (*), alors pour $n\geq N$, $n>\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}$ donc $n\ln(2)>\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ d'où en passant à l'exponentielle, qui est une fonction strictement croissante, $2^n>\frac{1}{\varepsilon}$ donc $u_n=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$.

(*) Cette condition peut sembler un peu parachutée …. On l' établit en résolvant l'inéquation $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$: la rédaction de la preuve consiste alors simplement à « remonter » les calculs effectués pour trouver *N*.

Un cas particulier notable de divergence est le suivant :

Définition 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.
(i) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si on peut rendre u_n aussi grand que l'on veut pourvu que *n* soit assez grand. Autrement dit :
$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow u_n > M$.
(ii) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Autrement dit :
$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow u_n < (-M)$.

La propriété suivante fournit quelques outils utiles pour prouver la convergence (ou la divergence) d'une suite :

Propriété 1 (critères de comparaison)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites à valeurs réelles telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour *n* assez grand. Alors :
(i) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
(ii) Si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.
(iii) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une même limite $l \in \mathbb{R}$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers *l* (« Théorème des gendarmes »).

Preuve :
(i) Soit $M > 0$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors il existe un rang N tel que
$\forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow u_n > M$. Puisque $u_n \leq v_n$ pour *n* assez grand, on a, quitte à choisir N assez grand,
$\forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow v_n > M$. Cela prouve que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
(ii) Démonstration similaire.
(iii) Soit $\varepsilon > 0$. Alors puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $l \in \mathbb{R}$ on peut dire que:
$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, (n > N_1) \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$
$\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, (n > N_2) \Rightarrow |w_n - l| < \varepsilon$
(Noter les indices rajoutés au rang N, car les deux entiers N_1 et N_2 n'ont pas de raison d'être égaux).
Ainsi, si N est simultanément plus grand que N_1 et N_2, on a $\forall n > N,\ l - \varepsilon < u_n \leq w_n < l + \varepsilon$.
Maintenant, si N est assez grand on sait que $\forall n > N,\ u_n \leq v_n \leq w_n$ ce qui, combiné à l'encadrement ci-dessus donne : $\forall n > N,\ l - \varepsilon < v_n < l + \varepsilon$.
Puisque pour chaque $\varepsilon > 0$ on est capable de trouver un rang N tel que $\forall n > N,\ l - \varepsilon < v_n < l + \varepsilon$ c'est que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers *l*.

Propriété 2 (convergence dans $\mathbb{C}$)
Soit $l \in \mathbb{C}$. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes et $(\varepsilon_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0. On suppose que pour *n* assez grand, $|u_n - l| \leq \varepsilon_n$.
Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers *l*.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Alors puisque $(\varepsilon_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0 il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N,\ \varepsilon_n < \varepsilon$. Pour $\forall n > N$, nous avons donc $|u_n - l| \leq \varepsilon_n < \varepsilon$ (quitte à choisir N assez grand pour que l'inégalité $|u_n - l| \leq \varepsilon_n$ ait lieu). Cela prouve d'après la définition 3 que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers *l*.

Exemple : soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ |q^n| = |q|^n$.
Or on sait que puisque $|q| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} |q|^n = 0$ (démonstration identique à celle de l'exemple de la définition 3) donc la propriété 2 appliquée avec $l = 0,\ u_n = q^n$ et $\varepsilon_n = |q|^n$ montre que $(q^n) \to 0$.

Corollaire
(i) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes telle que les suites $(\mathrm{Re}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers les réels *a* et *b*. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \to a + jb$.
(ii) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Arg}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers les réels *r* et *t*. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \to r e^{jt}$.

<u>Preuve :</u>
(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - (a + bj)| = |\mathrm{Re}(u_n) - a + j(\mathrm{Im}(u_n) - b)| \leq |\mathrm{Re}(u_n) - a| + |\mathrm{Im}(u_n) - b|$ (inégalité triangulaire) et la preuve découle de la propriété 2 avec $\varepsilon_n = |\mathrm{Re}(u_n) - a| + |\mathrm{Im}(u_n) - b|$.
(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r e^{jt}| = |r_n e^{jt_n} - r e^{jt}|$ où l'on a posé $r_n = |u_n|$ et $t_n = \mathrm{Arg}(u_n)$. On a alors :
$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r e^{jt}| = |r_n e^{jt_n} - r e^{jt}| = \sqrt{(r_n \cos(t_n) - r\cos(t))^2 + (r_n \sin(t_n) - r \sin(t))^2}$, cette dernière quantité tendant vers 0 si *n* tend vers l'infini par continuité des fonctions sin et cos.

Certaines suites à valeurs réelles divergentes ne tendent pas forcément vers $\pm\infty$. Par exemple la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a aucune limite. Cette suite-là est un cas particulier d'une classe importante de suites :

Définition 4 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs complexes et $p \in \mathbb{N}^*$. Cette suite est dite *p*-périodique si l'assertion $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$ est vraie.

Ainsi, les suites périodiques non constantes n'ont pas de limite.

Exemple : une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ est 6-périodique. En effet, posant $u_0 = a$ et $u_1 = b$ on a
$u_2 = b - a$
$u_3 = b - a - b = -a$
$u_4 = -a - (b - a) = -b$
$u_5 = -b - (-a) = a - b$
$u_6 = a - b + b = a = u_0$
$u_7 = a - (a - b) = b = u_1$
et ainsi de suite.

I.4) Convergence monotone

Pour montrer qu'une suite converge ou diverge vers $\pm\infty$, on peut trouver sa limite en utilisant les propriétés 1 et 2 par exemple, mais de nombreux exemples montrent que ce n'est pas toujours possible.
Le théorème ci-dessous permet de démontrer qu'une suite converge avec très peu d'informations.
Ce qui est très étonnant au premier abord, c'est que ce théorème permet de montrer par exemple qu'une suite converge sans connaître sa limite : c'est ainsi que l'on peut définir certains nombres réels comme la limite d'une certaine suite.

Théorème 1 (de convergence monotone)
(i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et croissante. Alors on a l'alternative suivante :
si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (*i.e* $\exists M\in\mathbb{R}$ tq $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq M$) alors elle converge vers un réel $l\leq M$.
si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$.
(ii) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et décroissante. Alors on a l'alternative suivante :
si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (*i.e* $\exists m\in\mathbb{R}$ tq $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq m$) alors elle converge vers un réel $l\geq m$.
si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, elle diverge vers $-\infty$.

Ce résultat se prouve comme le théorème 4 du chapitre sur les fonctions élémentaires.

Exemple : la suite définie par son premier terme $u_0=0$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{(n+1)^2}$. On a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=(0,1,\frac{5}{4},\frac{49}{36},.....)$. Elle est clairement croissante. On peut démontrer assez facilement par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n\leq 2-\frac{1}{n}$ (donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2) et par conséquent montrer qu'elle converge. Trouver que sa limite vaut $\frac{\pi^2}{6}$ est une toute autre histoire qui fait intervenir des outils sophistiqués tels que le Théorème de Parseval ! (voir exercice 6 sur les séries de Fourier)

Corollaire (suites adjacentes)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs réelles et telles que
(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
(ii) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
(iii) $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\leq v_n$
(iv) $\lim(u_n-v_n)=0$.
Alors les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites <u>adjacentes</u> et convergent vers la même limite l avec $\forall p\in\mathbb{N},\ \forall q\in\mathbb{N},\ u_p\leq l\leq v_q$.

<u>Preuve</u> : Par (i) et par (iii) nous avons :
$\forall n\in\mathbb{N}, u_0\leq u_n\leq v_n$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par u_0. Puisqu'elle est décroissante (cf (ii)) , alors par le Théorème 1 elle converge vers une limite l_v.
De la même manière, par (ii) et par (iii) nous avons :
$\forall n\in\mathbb{N}, v_0\geq v_n\geq u_n$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par v_0. Puisqu'elle est croissante ((cf (i)) alors par le Théorème 1 elle converge vers une limite l_u.
Par différence de limites, en faisant $n\to+\infty$ dans (iv) on obtient que $l_u=l_v$. L'encadrement $\forall p\in\mathbb{N},\ \forall q\in\mathbb{N},\ u_p\leq l\leq v_q$ découle du fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers l et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers l.

I.5) (*) Applications : démonstration de deux théorèmes importants sur les fonctions continues.

<u>Application 1) :</u> démonstration du théorème des valeurs intermédiaires.
Nous en rappelons l'énoncé :

Théorème (valeurs intermédiaires) : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $]a;b[$ (avec a ou b réels ou infinis). Alors, si f change de signe sur cet intervalle, l'équation $f(x)=0$ y admet au moins une solution. De plus, si f est strictement monotone sur cet intervalle, alors cette solution est unique.

Preuve : Soient $\alpha\in]a;b[$ et $\beta\in]a;b[$ tels que $f(\alpha)f(\beta)<0$. Supposons par exemple que $f(\alpha)<0<f(\beta)$ (si ce n'est pas le cas, il suffit de considérer $-f$ à la place de f.)
On procède par dichotomie : on définit par récurrence deux suites (x_n) et (y_n) telles que $\forall n\in\mathbb{N},\ x_n<y_n$ de la façon suivante :
(i) $x_0=\alpha$, $y_0=\beta$. On a bien $x_0<y_0$.
(ii) Si les termes x_n et y_n sont construits avec $x_n<y_n$ on construit x_{n+1} et y_{n+1} de la façon suivante :on considère le milieu de l'intervalle $[x_n;y_n]$ c'est à dire $\frac{x_n+y_n}{2}$. Si $f\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)<0$ alors on pose $x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ et $y_{n+1}=y_n$, et on a dans ce cas l'encadrement $x_n<x_{n+1}<y_n=y_{n+1}$ sinon on pose $x_{n+1}=x_n$ et $y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ et on a dans ce cas l'encadrement $x_n=x_{n+1}<y_{n+1}<y_n$.

Par ce procédé, on a deux suites (x_n) et (y_n) telles que $\forall n\in\mathbb{N},\ x_n<y_n$, (x_n) est croissante et (y_n) décroît (pas nécessairement strictement).
De plus, la longueur de l'intervalle $[x_{n+1};y_{n+1}]$ est égal à la moitié de celle de $[x_n;y_n]$: cela signifie que la suite $(y_n-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de raison $\frac{1}{2}$ donc $\lim(y_n-x_n)=0$. On en déduit que les deux suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes : elles convergent vers une même limite l.
De par la construction des suites (x_n) et (y_n), on a toujours $f(x_n)<0$, et puisque f est continue et que $(x_n)\to l$ on a $f(x_n)\to f(l)$. En passant à la limite dans l'inégalité $\forall n,\ f(x_n)<0$ on obtient que $f(l)\leq 0$.
De même, on a toujours $f(y_n)\geq 0$, et puisque f est continue et que $(y_n)\to l$ on a $f(y_n)\to f(l)$ par la propriété 15 du chapitre sur les fonctions élémentaires. En passant à la limite dans l'inégalité $\forall n,\ f(y_n)\geq 0$ on obtient que $f(l)\geq 0$.
On en déduit finalement que $f(l)=0$.

L'application suivante utilise un raisonnement très proche.

Application 2 : démonstration du Théorème 2 du chapitre des fonctions élémentaires, dont nous rappelons l'énoncé :

Théorème
Soient deux réels $a<b$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$. Alors f est bornée.

Preuve : On suppose d'abord que f est continue sur $[a;b]$.
On va montrer que f est majorée. Raisonnons par l'absurde et supposons que f ne soit pas majorée sur $[a;b]$.
On va construire par récurrence deux suites adjacentes (x_n) et (y_n) avec $\forall n\in\mathbb{N},\ x_n<y_n$ et telles que f ne soit pas majorée sur l'intervalle $[x_n;y_n]$.
On pose $x_0=a$, $y_0=b$. La fonction f n'est pas majorée sur l'intervalle $[x_0;y_0]$.
Si les termes x_n et y_n sont construits avec $x_n<y_n$ et f non majorée sur l'intervalle $[x_n;y_n]$, on construit x_{n+1} et y_{n+1} de la façon suivante :on considère le milieu de l'intervalle $[x_n;y_n]$ c'est à dire

$\frac{x_n+y_n}{2}$ .Il y a forcément (au moins) un des deux intervalles $\left[x_n;\frac{x_n+y_n}{2}\right]$ ou $\left[\frac{x_n+y_n}{2};y_n\right]$ où la fonction f n'est pas majorée (sinon elle le serait sur $[x_n;y_n]$, la réunion des deux). Si f n'est pas majorée sur $\left[\frac{x_n+y_n}{2};y_n\right]$, alors on pose $x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ et $y_{n+1}=y_n$, et on a dans ce cas l'encadrement $x_n<x_{n+1}<y_n=y_{n+1}$, sinon c'est que f n'est pas majorée sur $\left[x_n;\frac{x_n+y_n}{2}\right]$ et on pose $x_{n+1}=x_n$ et $y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ et on a dans ce cas l'encadrement $x_n=x_{n+1}<y_{n+1}<y_n$.

On obtient ainsi deux suites (x_n) et (y_n) telles que $\forall n\in\mathbb{N},\ x_n<y_n$, (x_n) est croissante et (y_n) décroissante.
De plus, par le procédé de construction, la longueur de l'intervalle $[x_{n+1};y_{n+1}]$ est égal à la moitié de celle de $[x_n;y_n]$: cela signifie que la suite $(y_n-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de raison $\frac{1}{2}$ donc $\lim(y_n-x_n)=0$. Ainsi, les deux suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes : elles convergent vers une même limite l.
Or, par construction, f n'est pas majorée sur $[x_n;y_n]$, donc $\forall n\in\mathbb{N},\ \exists z_n\in[x_n;y_n]$ tq $f(z_n)>n$.
Puisque $\forall n\in\mathbb{N},\ z_n\in[x_n;y_n]$, cela prouve que $(z_n)\to l$ donc $f(z_n)\to f(l)$, ce qui rentre en contradiction avec l'assertion $\forall n\in\mathbb{N},\ f(z_n)>n$ qui implique $f(z_n)\to+\infty$.
On en déduit que f est majorée sur $[a;b]$. En raisonnant sur $-f$, on déduit que f est minorée sur $[a;b]$. Elle y est donc bornée.

Si f est seulement continue par morceaux sur $[a;b]$, il existe une subdivision finie $a=x_0<x_1<...<x_p=b$ telle que f soit prolongeable par continuité en une fonction continue sur tous les intervalles $[x_i;x_{i+1}]$. Par le raisonnement qui précède, la fonction f étant bornée sur chaque intervalle $[x_i;x_{i+1}]$, qui sont en nombre fini, elle est bornée sur $[a;b]$.

I.6) Quelques suites importantes

On rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite <u>arithmétique</u> de raison $r\in\mathbb{C}$ si et seulement si elle vérifie la relation de récurrence $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+r$. On a dans ce cas l'expression $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_0+nr$.

On rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite <u>géométrique</u> de raison $q\in\mathbb{C}$ si et seulement si elle vérifie la relation de récurrence $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=q.u_n$. On a dans ce cas l'expression $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_0.q^n$.

Ces deux catégories de suites font partie de la famille des suites arithmético-géométriques, qui vérifient une relation de récurrence du type : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=q.u_n+r$. Si $q=1$, on retrouve une suite arithmétique et si $r=0$, on retrouve une suite géométrique.
La famille des suites arithmético-géométriques fait elle-même partie d'une classe de suites plus large, appelée famille des <u>suites à récurrence linéaire</u>, c'est à dire vérifiant une relation de récurrence du type :
$u_{n+p}=a_1u_{n+p-1}+a_2u_{n+p-2}+....+a_pu_n+v_n$ où :
(*) $p\in\mathbb{N}^*$
(**) $a_1,a_2,...,a_p\in\mathbb{C}$
(***) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite donnée

Si $p=1, a_1=q$ et $v_n=r=\text{cste}$, on retrouve la famille des suites arithmético-géométriques.

Ces suites interviennent en particulier lorsqu'on veut résoudre numériquement des équations différentielles par des méthodes de discrétisation. Cette situation sera étudiée dans le chapitre sur la transformation en Z, transformation qui permet de donner l'expression d'une suite à récurrence linéaire dans la plupart des cas.

I.7) Remarques sur les liens entre suites et fonctions de la variable réelle

Il est utile de remarquer que les suites et les fonctions de la variable réelle présentent de nombreuses similitudes. On peut dans les deux cas parler de sens de variation, de limites (bien que pour les suites, on ne parle que de limite en $+\infty$), de périodicité.
Il y a aussi de grandes différences : par exemple, il n'y a pas de définition par récurrence d'une fonction de la variable réelle. Sauf qu'en y regardant de plus près, il y a une similitude assez forte entre la situation où une suite est définie par une relation de récurrence et la valeur de son premier terme, et la situation où une fonction est définie comme l'unique solution d'une équation différentielle avec condition initiale donnée.

Par exemple, soit y la fonction dérivable définie comme l'unique solution de l'équation différentielle $y'(t)+y(t)=1$ avec la condition initiale $y(0)=0$. En considérant $h>0$ très petit, on peut réécrire cette équation différentielle sous la forme $\frac{y(t+h)-y(t)}{h}+y(t)\approx 1$ par la définition de la dérivée de y. Cette dernière relation peut se réécrire $y(t+h)-y(t)\approx h(1-y(t))$ d'où la relation : $y(t+h)\approx(1-h)y(t)+h$. Si l'on applique cette relation pour $t=nh$ avec $n\in\mathbb{N}$, il vient $y((n+1)h)\approx(1-h)y(nh)+h$, avec la condition initiale $y(0)=0$. En posant $x_n=y(nh)$, on obtient finalement une vraie relation de récurrence $x_{n+1}=(1-h)x_n+h$ avec la condition initiale $x_0=0$.
C'est le principe utilisé quand on discrétise une équation différentielle.
Pour une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée, la suite $(x_n-x_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sera considérée comme sa <u>dérivée discrète</u> (nous reverrons cela dans un chapitre ultérieur).

II) Séries numériques

Pour f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nous nous sommes déjà posés le problème de savoir si la quantité $\int_0^X f(t)\,dt$ avait une limite quand $X\to+\infty$. Nous allons nous poser une question analogue pour une suite.

II.1) Somme partielle et notion de série.

Définition 5 Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles associée, par son terme général $S_n\overset{\text{def}}{=}u_0+u_1+\ldots+u_n\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=0}^{n}u_k$.

Exemple : si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1, alors le terme général de la suite des sommes partielles associée est $S_n=1+1+\ldots+1=\sum_{k=0}^{n}1=n+1$.

Propriété 3(changement de variable) Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $p\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_{k+p}=\sum_{l=p}^{n+p} u_l$$

Preuve : C'est le genre de formule qui peut faire peur, mais il suffit d' écrire explicitement les deux membres de l'égalité pour rendre cette dernière évidente.

D'une part, $\sum_{k=0}^{n} u_{k+p}=u_{0+p}+u_{1+p}+\ldots+u_{n+p}$

D'autre part, $\sum_{l=p}^{n+p} u_l=u_p+u_{p+1}+\ldots+u_{n+p}$.

On retrouve bien la même chose.

Remarque : formellement, on fait le changement de variable $l=k+p$. Cela donne $k=l-p$ d'où :

$$\sum_{k=0}^{n} u_{k+p}=\sum_{k=0}^{k=n} u_{k+p}=\sum_{l-p=0}^{l-p=n} u_l=\sum_{l=p}^{l=p+n} u_l \quad .$$

Exemple : $\sum_{k=0}^{20} \frac{1}{k+6}=\sum_{l=6}^{26} \frac{1}{l}=\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{26}$

Propriété 4 Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles, on a $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=S_n-S_{n-1}$. Autrement dit, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la dérivée discrète de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve : $\forall n\geq 1,\ S_n-S_{n-1}=\sum_{k=0}^{n} u_k-\sum_{k=0}^{n-1} u_k=\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k+u_n\right)-\sum_{k=0}^{n-1} u_k=u_n.$

Remarque : puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la dérivée discrète de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être considérée comme une primitive discrète de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Propriété 5 (relation de Chasles) Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et deux entiers n et p tels que $0\leq p<n$ on a la relation $\sum_{k=0}^{n} u_k=\sum_{k=0}^{p} u_k+\sum_{k=p+1}^{n} u_k$

Attention : la variable de sommation k étant discrète, la deuxième somme ne commence pas à p mais à $p+1$.

Propriété 6 (linéarité de la somme) Étant donnée deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et deux nombres α et β on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\left(\alpha u_k+\beta v_k\right)=\alpha\sum_{k=0}^{n} u_k+\beta\sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Définition 5 Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles, si $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n)$ existe et est finie, on définit sa série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ comme étant $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty}(S_n)$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle et $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n)=\pm\infty$, on définit sa série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ comme étant $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \overset{\text{def}}{=} \pm\infty$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n)$ existe et est finie, on dira que sa série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

Dans tous les autres cas on dira que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge (auquel cas , soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n=\pm\infty$, soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ n'existe pas).

Remarque : on a l'habitude d'écrire l'objet $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ même lorsque ce dernier n'existe pas. C'est une habitude usuelle en mathématiques, mais assez dangereuse !!

Exemple, si $u_n=(-1)^n$ et que l'on considère « l'objet » $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ (à ne pas faire!!!) on pourrait être amené à faire le « raisonnement » suivant :

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n=1-1+1-1+1-\ldots$ donc $-\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n=-1+1-1+1-1+\ldots$ et on a aussi

$$-1+\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)=-1+(1-1+1-1+1-\ldots)=-1+1-1+1-1+\ldots$$

Cela signifierait que $-1+\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right)=-\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n=\frac{1}{2}$!!

Le raisonnement pourrait paraître logique, mais il est faux au sens où l'on présuppose que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est défini comme un nombre que l'on peut manipuler comme tel, alors qu'il ne l'est que comme un objet symbolique.....

Exemple (principe des « sommes télescopiques »): si $u_n=\frac{2}{(n+1)(n+3)}$, alors une décomposition en éléments simples du terme général donne :

$u_n=\frac{2}{(n+1)(n+3)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}$ donc pour $n\geq 2$ on a :

$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}\right)-\sum\limits_{k=2}^{n+2}\left(\frac{1}{k+1}\right)$ par changement de variable dans la deuxième somme,

$S_n=\sum\limits_{k=0}^{1}\left(\frac{1}{k+1}\right)+\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k+1}\right)-\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k+1}\right)-\sum\limits_{k=n+1}^{n+2}\left(\frac{1}{k+1}\right)$ (relation de Chasles sur les sommes)

$$S_n=\sum_{k=0}^{1}\left(\frac{1}{k+1}\right)-\sum_{k=n+1}^{n+2}\left(\frac{1}{k+1}\right)=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}.$$

On trouve donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n)=\frac{3}{2}$ d'où le fait que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n=\frac{3}{2}$.

Propriété 7 (condition nécessaire de convergence).
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge , alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=0.$

Preuve : On a $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=S_n-S_{n-1}$ (propriété 4). Puisque $\lim_{n\to+\infty}(S_n)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\in\mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to+\infty}(S_{n+1}-S_n)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n-\sum_{n=0}^{+\infty} u_n=0$ par soustraction de limites, donc $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=0.$

Très important : Ce n'est pas une condition suffisante de convergence ! On peut très bien avoir $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qui ne converge pas (exemple : $u_n=\frac{1}{n+1}$).
En général, on utilise la contraposée de propriété 7 , c'est à dire si $\lim_{n\to+\infty}(u_n)\neq 0$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge.

II.2) Deux types de série importantes.

II.2.a) Séries géométriques.

Définition 6 On appelle série géométrique une série associée à une suite géométrique. Autrement dit, c'est une série de la forme $C.\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ où C est une constante et $q\in\mathbb{C}$.

Le résultat suivant est très important en pratique.

Propriété 7 (convergence des séries géométriques).
La série $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ converge si et seulement si $|q|<1$. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n=\frac{1}{1-q}$.

Exemple : la série $\sum_{n=5}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge puisque $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge (vu que $\left|\frac{1}{3}\right|<1.$)
Pour le calcul, on remarque que $\sum_{n=5}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=5}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-5}\left(\frac{1}{3}\right)^5=\left(\frac{1}{3}\right)^5\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^5\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2.3^4}=\frac{1}{162}$.

Preuve :
On travaille par disjonction des cas.
(i) Si $|q|>1$: alors $\lim_{n\to+\infty}|q^n|=\lim_{n\to+\infty}|q|^n=+\infty$, donc on n'a pas $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$ d'où la divergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$.
(ii) Si $|q|=1$: alors $\lim_{n\to+\infty}|q^n|=\lim_{n\to+\infty}|q|^n=1$, donc on n'a pas $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$ d'où la divergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$.
(iii) Supposons $|q|<1$.

Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. Alors

$$(1-q)S_n = (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q.q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1}$$

$1+q+....+q^n-(q+q^2+...+q^{n+1}) = 1-q^{n+1}$ après simplifications. On en déduit la formule :

$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (formule déjà vue au Lycée) .

On sait que $(q^n) \to 0$ (voir exemple de la propriété 2) donc (S_n) converge vers $\frac{1}{1-q}$.

II.2.b) *Séries de Riemann.*

Définition 7 On appelle série de Riemann une série associée à une suite de la forme $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ avec $\alpha > 0$. Autrement dit, c'est une série de la forme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ avec un paramètre $\alpha > 0$.

Exemple : la série de terme général $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ est une série de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2}$.

On sait dire quand une série de Riemann converge, mais la plupart du temps, on ne sait pas dire vers quoi e elle converge.

Propriété 8 (convergence des séries de Riemann).
La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Cette propriété sera prouvée ultérieurement comme un cas particulier d'un résultat plus général.

Exemple : la série de terme général $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ est une série de Riemann convergente.

Remarque : il n'est pas possible d'expliciter la valeur de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ dans le cas général. On sait le faire dans le cas où α est un entier pair (et ce n'est déjà pas simple), mais pas dans le cas général. Il y a encore à l'heure actuelle de nombreuses conjectures non démontrées par rapport à la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, dont celle de l'hypothèse de Riemann : 1 million de dollars sera offert par l'institut de mathématiques Clay à celui ou celle qui saura démontrer si elle est vraie ou fausse.....

II.3) Convergence d'une série à termes positifs.

Dans tout ce paragraphe, nous supposerons qu'à partir d'un rang N_0, on a $u_n \geq 0$.

D'après la propriété 4, on a $\forall n > N_0,\ S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$ ce qui signifie que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang N_0. On déduit du Théorème 1 que l'on a les deux possibilités suivantes :

si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, elle converge donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge

si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

On en déduit les deux propriétés suivantes, qui nous permettrons souvent de se ramener à une série de référence du paragraphe 2 .

Propriété 9 (critère de comparaison)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang N_0 on ait :
$\forall n \geq N_0,\ 0 \leq u_n \leq v_n$.
Alors si $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.
Par contraposition, on peut dire que si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = +\infty$.

<u>Preuve :</u> pour $n \geq N_0$ définissons $(S_n)_{n\geq N_0}$ la suite de terme général $S_n = \sum_{k=N_0}^{n} u_k$.
D'une part, $\forall n \geq N_0,\ S_{n+1} - S_n = u_n \geq 0$ donc la suite $(S_n)_{n\geq N_0}$ est croissante.
D'autre part, puisque $\forall k \geq N_0,\ u_k \leq v_k$, on obtient par sommation $S_n = \sum_{k=N_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=N_0}^{n} v_k$. Il n'y a plus qu'à remarquer que $\sum_{k=N_0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{N_0-1} v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k - \sum_{k=0}^{N_0-1} v_k$ puisque tous les termes de la suite (v_n) sont positifs à partir du rang N_0. On en déduit que $\forall n \geq N_0,\ S_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k - \sum_{k=0}^{N_0-1} v_k$ donc la suite $(S_n)_{n\geq N_0}$ est majorée.
On déduit du Théorème 1 que la suite $(S_n)_{n\geq N_0}$ converge, c'est à dire que $\sum_{k=N_0}^{+\infty} u_k$ converge, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

Exemple : On a $\forall n \geq 1,\ 0 \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$ et on sait que la série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge car $\alpha = 2 > 1$. Le critère de comparaison permet donc d'affirmer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ converge (sans toutefois donner la valeur numérique de cette série).

Propriété 10 (critère d'équivalence)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang N_0 on ait : $\forall n \geq N_0,\ u_n > 0$ et telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ si $n \to +\infty$ (*i.e* $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$)

Alors les deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ont la même nature, c'est à dire que la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ équivaut à celle de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Preuve :

Supposons $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ convergente. Alors puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n}=1$, pour n assez grand on a $\frac{v_n}{u_n} \leq \frac{3}{2}$, donc si on suppose de plus que n est plus grand que N_0 , on a $v_n \leq \frac{3}{2} u_n$. On peut alors appliquer la propriété 9 pour en déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge.

Par symétrie de la relation d'équivalence, en échangeant les rôles des suites (u_n) et (v_n) , on montre de même que si $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

Exemple : la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ converge.

En effet, puisque $\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \to 0$ et $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, alors $\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2^n}$. La suite $\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ est strictement positive et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi}{2^n}$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{2}$), on en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ par le critère d'équivalence.

Attention cependant à ne pas dire que les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi}{2^n}$ sont égales : on peut seulement dire qu'elles sont toutes les deux convergentes.

On voit à travers les exemples donnés que l'on se ramène très souvent à une série géométrique ou de Riemann. Ce n'est cependant pas toujours possible. La propriété suivante nous donne alors un moyen supplémentaire pour déterminer la nature d'une série à termes positifs. Malheureusement, à l'instar des deux propriétés précédentes, on ne pourra que seulement déterminer la nature de la série et non sa valeur en cas de convergence. Le problème consistant à trouver la valeur d'une série convergente est souvent un problème délicat.

Propriété 11 (comparaison série-intégrale)

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[N_0;+\infty[$ avec $N_0 \in \mathbb{N}$ telle que f soit continue par morceaux, positive et décroissante.

Alors l'intégrale $\int_{N_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si la série $\sum_{n=N_0}^{+\infty} f(n)$ converge.

Rappel : dire que l'intégrale $\int_{N_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge signifie que $\lim_{X\to+\infty} \int_{N_0}^{X} f(t)\,dt$ existe et est finie.

Preuve :

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq N_0$. Intéressons nous à la fonction f sur l'intervalle $[k;k+1]$. Puisque f est décroissante sur cet intervalle nous avons $\forall t \in [k;k+1],\ f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$. En intégrant cette

inégalité sur l'intervalle $[k\,;k+1]$, on obtient la relation :

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dt$$

ce qui donne la relation :

$$(1)\ :\ \forall k \geq N_0,\ f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)\ .$$

En remplaçant k par k-1 on obtient :

$$(2)\ :\ \forall k > N_0,\ f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \leq f(k-1).$$

Posons maintenant $\forall k > N_0,\ u_k = f(k)$ et $v_k = \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$.

(i) Supposons que l'intégrale $\int_{N_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

La relation (2) implique que $\forall k > N_0,\ u_k \leq v_k$.

La fonction f étant positive, la suite $(u_n)_{n>N_0}$ est positive.

D'autre part, choisissons un entier n tel que $n > N_0$. On a par la relation de Chasles pour les intégrales :

$$\sum_{k=N_0+1}^{n} v_k = \sum_{k=N_0+1}^{n} \left(\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \right) = \int_{N_0}^{N_0+1} f(t)\,dt + \int_{N_0+1}^{N_0+2} f(t)\,dt + \ldots + \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt = \int_{N_0}^{n} f(t)\,dt.$$

Cela montre que la série $\sum_{k=N_0+1}^{+\infty} v_k$ converge vers $\int_{N_0}^{+\infty} f(t)\,dt$.

La propriété 9 permet alors de conclure que $\sum_{k=N_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=N_0}^{+\infty} f(k)$ converge.

(ii) Supposons que la série converge $\sum_{n=N_0}^{+\infty} f(n)$ converge.

La relation (1) et le critère de comparaison (propriété 9) montre que la série $\sum_{k=N_0}^{+\infty} v_k$ converge. Puisque

$\forall n \geq N_0,\ \sum_{k=N_0+1}^{n} v_k = \int_{N_0}^{n} f(t)\,dt$, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \int_{N_0}^{n} f(t)\,dt$ existe et est finie.

Puisque f est positive, la fonction $x \to \int_{N_0}^{x} f(t)\,dt$ est croissante, donc

$$\lim_{x \in \mathbb{R},\ x \to +\infty} \int_{N_0}^{x} f(t)\,dt = \lim_{n \in \mathbb{R},\ n \to +\infty} \int_{N_0}^{n} f(t)\,dt \in \mathbb{R}.$$

Exemple : on peut alors prouver la propriété 8. En effet, si $\alpha > 0$, la fonction $t \to \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante et positive sur $[1\,;+\infty[$ donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ a la même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$, l'intégrale de Riemann que l'on sait convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Enfin, le dernier résultat ci-dessous permet de se ramener au critère de comparaison dans certains cas en

comparant implicitement une suite avec une suite géométrique :

Propriété 12 (critère de d'Alembert)

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs à partir d'un certain rang, et telle que $l=\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe. Alors :

(i) Si $l\in[0;1[$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ converge.

(ii) Si $l\in]1;+\infty[\cup\{+\infty\}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ diverge.

(iii) Si $l=1$, on ne peut *a priori* rien dire .

La preuve est un peu technique mais l'idée directrice est très simple : dans le cas (i), on majore (u_n) par une suite géométrique de série convergente, et dans le cas (ii), on minore (u_n) par une suite géométrique de série divergente. Seule la mise en forme de la preuve est un peu technique.

(*)Preuve : (i) Remarquons d'abord que si $l\in[0;1[$, alors $l<\frac{l+1}{2}$. En effet, $\frac{l+1}{2}-l=\frac{1-l}{2}>0$.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l<1$ signifie qu'il existe un rang N tel que

$(1)\quad \forall n\geq N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{l+1}{2}$.

Montrons par récurrence sur n que la propriété $P(n)$: $u_n\leq\left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-N}u_N$ est vraie pour tout $n\geq N$.

En effet, $\left(\frac{l+1}{2}\right)^{N-N}u_N=1.u_N=u_N$ donc $P(N)$ est vraie (c'est en fait une égalité).

Soit $n\geq N$ tel que $P(n)$ soit vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

Le fait que $P(n)$ soit vraie signifie que $u_n\leq\left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-N}u_N$. Puisque d'après (1), $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{l+1}{2}$, on obtient que $u_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{u_n}\times u_n\leq\left(\frac{l+1}{2}\right)\left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-N}u_N=\left(\frac{l+1}{2}\right)^{n+1-N}u_N$ ce qui implique que $P(n+1)$ est vraie.

On en déduit dont qu'à partir d'un certain rang, $0<u_n\leq\left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-N}u_N$. Or, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-N}u_N$ est une série géométrique de raison $\frac{l+1}{2}$ et $0<\frac{l+1}{2}<1$ puisque $l<1$, donc elle converge (propriété 7). Par le critère de comparaison, $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ converge.

(ii) Posons $v_n=\frac{1}{u_n}$ (ce qu'on a le droit de faire à partir d'un certain rang car $u_n>0$ à partir d'un certain rang). On a alors $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_n}{u_{n+1}}$ donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{l}<1$ ($\frac{1}{l}$ étant remplacé par 0 si $l=+\infty$.)

Le raisonnement effectué au point (i) appliqué à (v_n) à la place de (u_n) et $\frac{1}{l}$ à la place de l ($\frac{1}{l}$ étant remplacé par 0 si $l=+\infty$) montre que $\lim(v_n)=0^+$ donc $\lim(u_n)=+\infty$: la série

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge vers $+\infty$.

On peut remarquer que le cas $l=1$ est malheureusement assez fréquent, et l'on ne peut alors pas conclure. Ainsi, si $(u_n)_{n\geq 1}=\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$, nous avons $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$ et la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge, alors que si $(u_n)_{n\geq 1}=\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$, nous avons $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$ mais cette fois, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

II.4) Séries à termes de signe non constant.

Les propriétés 9, 10, 11 et 12 sont toutes basées sur le fait que si une suite (u_n) est positive (au moins à partir d'un certain rang) alors la suite des sommes partielles (S_n) est croissante à partir d'un certain rang. Bien entendu, ces résultats peuvent s'adapter au cas d'une suite (u_n) négative à partir d'un certain rang. Nous allons maintenant étudier le cas des séries à termes de signe non constant et établir des propriétés permettant d'établir leur convergence ou leur divergence. Dans cette situation, la difficulté provient du fait que la suite des sommes partielles (S_n) peut très bien n'avoir ne pas avoir de limite (finie ou pas).

II.4.a) Séries alternées.

Définition 8 Étant donnée une suite (u_n) à termes réels, on dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une série alternée si $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n.u_{n+1}\leq 0$ (autrement dit , deux termes consécutifs de la suite (u_n) ont des signes opposés).

Exemple : la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$ est une série alternée. De façon générale, toute série géométrique de raison négative est alternée.

Remarque : par la définition 8, une série alternée est forcément de la forme $\pm\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ où (a_n) est une suite positive.

La propriété suivante est un moyen simple de prouver la convergence d'une série alternée. De plus, elle fournit un procédé simple pour obtenir une valeur approchée de la somme de la série avec la précision voulue.

Propriété 13 (critère des séries alternées).
Si (a_n) est une suite de réels décroissante et convergeant vers 0, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge. De plus, $\forall N\in\mathbb{N},\ \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^n a_n\right|\leq a_{N+1}$, la quantité $\sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ étant du signe de $(-1)^{N+1}$.

Exemple : Considérons la série $1-\frac{1}{11}+\frac{1}{101}-\frac{1}{1001}+\frac{1}{10001}-\ldots$. On peut l'écrire sous la forme

$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ avec $a_n=\frac{1}{10^n+1}$ si $n\geq 1$ et $a_0=1$.

La suite (a_n) est clairement décroissante et tend vers 0, on en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge. On souhaite, par exemple, trouver une valeur approchée à 10^{-6} près de $s=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$.

En remarquant que $\forall N\in\mathbb{N},\ s-\sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n=\sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^n a_n$, la propriété 13 nous dit que $\forall N\in\mathbb{N},\ \left|s-\sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n\right|\leq a_{N+1}$, donc si a_{N+1} est tel que $a_{N+1}\leq 10^{-6}$, on aura $\left|s-\sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n\right|<10^{-6}$ et donc $\sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n$ sera une valeur approchée de s à 10^{-6} près.

Il suffit de prendre N=5, car $a_6=\frac{1}{1000001}<10^{-6}$ et donc $\left|s-\sum_{n=0}^{5}(-1)^n a_n\right|<10^{-6}$. Toujours d'après la propriété 13, $s-\sum_{n=0}^{5}(-1)^n a_n=\sum_{n=6}^{+\infty}(-1)^n a_n$ est du signe de $(-1)^6$ donc est positif ce qui signifie que $\sum_{n=0}^{5}(-1)^n a_n\leq s\leq\sum_{n=0}^{5}(-1)^n a_n+10^{-6}$ ce qui donne numériquement l'encadrement $0{,}918083<s<0{,}918085$.

La preuve est un peu technique et utilise l'idée que la suite des sommes partielles d'une série alternée est formée par un entrelacement de deux suites adjacentes.

(*)Preuve : soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série , c'est à dire que $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. On définit les suites (x_n) et (y_n) par leurs termes généraux : $x_n=S_{2n}$ et $y_n=S_{2n+1}$. Remarquons que (x_n) et (y_n) représentent respectivement les termes d'indices pair et impair de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est à dire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}=(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$.
On dit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un entrelacement des suites (x_n) et (y_n) .
On a les propriétés suivantes

(i) La suite (x_n) est décroissante car

$$x_{n+1}-x_n=S_{2n+2}-S_{2n}=\sum_{k=2n+1}^{2n+2}(-1)^k a_k=(-1)^{2n+1}a_{2n+1}+(-1)^{2n+2}a_{2n+2}=-a_{2n+1}+a_{2n+2}\ .$$

Ainsi $x_{n+1}-x_n=a_{2n+2}-a_{2n+1}\leq 0$ car la suite (a_n) est décroissante.

(ii) La suite (y_n) est croissante car

$$y_{n+1}-y_n=S_{2n+3}-S_{2n+1}=\sum_{k=2n+2}^{2n+3}(-1)^k a_k=(-1)^{2n+2}a_{2n+2}+(-1)^{2n+3}a_{2n+3}=a_{2n+2}-a_{2n+3}\ .$$

Ainsi $y_{n+1}-y_n=a_{2n+2}-a_{2n+3}\geq 0$ car la suite (a_n) est décroissante.

(iii) On a $\forall n\in\mathbb{N},\ y_n\leq x_n$ car

$$x_n-y_n=S_{2n}-S_{2n+1}=-(-1)^{2n+1}a_{2n+1}=+a_{2n+1} \text{ et } a_{2n+1}\geq 0.$$

(iv) On a $\lim(x_n-y_n)=0$ car

$$x_n-y_n=+a_{2n+1} \text{ et } \lim(a_{2n+1})=0\ .$$

Les deux suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes donc convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$ (corollaire du Théorème 1).
On en déduit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ converge aussi vers l donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Prouvons la relation $\forall N \in \mathbb{N}, \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n a_n \right| \leq a_{N+1}$.
Soit $N \in \mathbb{N}$. On a deux cas :

a) si N est pair, on peut écrire $N = 2n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{N} (-1)^k a_k = l - S_N = l - S_{2n} = l - x_n.$$

On utilise l'encadrement $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \ y_p \leq l \leq x_q$ avec $p = q = n$. L'encadrement $y_n \leq l \leq x_n$ prouve que $0 \geqslant l - x_n \geqslant y_n - x_n = -a_{2n+1}$ ce qui montre que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n a_n < 0$ (donc est bien du signe de $(-1)^{N+1} = -1$ car N est pair) et $\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n a_n \right| \leq a_{2n+1} = a_{N+1}$.

b) si N est impair, on peut écrire $N = 2n+1$ avec $n \in \mathbb{N}$ et

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{N} (-1)^k a_k = l - S_N = l - S_{2n+1} = l - y_n.$$

On utilise l'encadrement $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \ y_p \leq l \leq x_q$ avec cette fois ci $p = n$ et $q = n+1$.
L'encadrement $y_n \leq l \leq x_{n+1}$ prouve alors que $0 \leq l - y_n \leq x_{n+1} - y_n = S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2}$ ce qui montre que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n a_n \geq 0$ (donc est bien du signe de $(-1)^{N+1} = +1$ car N est impair) et $\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n a_n \right| \leq a_{2n+2} = a_{N+1}$.

II.4.b) Séries absolument convergentes.

Le résultat suivant est d'une très grande importance, car il permet de se ramener à un problème de convergence de série à termes positifs, situation où l'on peut alors utiliser les propriétés 9 , 10, 11 et 12.

Théorème 2
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes.
Alors, si $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ converge, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et on a $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.
On a de plus la convergence des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + j \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n).$$

Exemple : Reprenons l'exemple de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{1}{10^n + 1}$ si $n \geq 1$ et $a_0 = 1$.
On a alors $|u_n| = a_n$. On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 < a_n \leq \frac{1}{10^n}$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{10} \in]-1\,;1[$.) Par le théorème de comparaison, on en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ converge et donc, par le Théorème 2, que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge et

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{10^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}.$$

(*)Preuve :

(i) On commence par supposer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Posons $x_n=\frac{1}{2}(|u_n|-u_n)$ et $y_n=\frac{1}{2}(|u_n|+u_n)$. Puisque $\forall n\in\mathbb{N}, -|u_n|\leq u_n\leq|u_n|$, on peut dire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites positives telles que :

$\forall n\in\mathbb{N},\ (1):\ y_n+x_n=|u_n|$ et $(2):\ y_n-x_n=u_n$.

On a donc grâce à (1) $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq x_n\leq|u_n|$ donc puisque $\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|$ converge, le critère de comparaison pour les suites positives implique que $\sum_{n=0}^{+\infty}x_n$ converge. Le même raisonnement implique que $\sum_{n=0}^{+\infty}y_n$ converge.

Maintenant la relation (2) implique que $\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}u_k=\sum_{k=0}^{n}y_k-\sum_{k=0}^{n}x_k$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty}y_n-\sum_{n=0}^{+\infty}x_n$. L'inégalité triangulaire $\left|\sum_{k=0}^{n}u_k\right|\leq\sum_{k=0}^{n}|u_k|$ donne par passage à la limite $\left|\sum_{k=0}^{+\infty}u_k\right|\leq\sum_{k=0}^{+\infty}|u_k|$.

(ii) On suppose maintenant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes. Soit $u_n=a_n+jb_n$ l'écriture algébrique de u_n . Alors $|u_n|^2=a_n^2+b_n^2$ donc $|a_n|\leq|u_n|$ et $|b_n|\leq|u_n|$. Le théorème de comparaison implique que $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}|b_n|$ convergent, donc par le point (i) de la preuve, $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$ convergent respectivement vers deux réels α et β .

Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors

$$\left|\left(\sum_{k=0}^{n}u_k\right)-(\alpha+j\beta)\right|^2=\left|\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)-\alpha+j\left(\left(\sum_{k=0}^{n}b_k\right)-\beta\right)\right|^2=\left|\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)-\alpha\right|^2+\left|\left(\sum_{k=0}^{n}b_k\right)-\beta\right|^2 .$$

Or puisque $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=\alpha$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n=\beta$ on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left|\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)-\alpha\right|^2+\left|\left(\sum_{k=0}^{n}b_k\right)-\beta\right|^2\right)=0$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\left(\sum_{k=0}^{n}u_k\right)-(\alpha+j\beta)\right|^2=0 ,$$

ce qui signifie que $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ converge vers $\alpha+j\beta$.

Exemple : nature et somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n)}{2^n}$.

Posons $u_n = \frac{e^{jn}}{2^n}$. Nous avons $|u_n| = \frac{1}{2^n}$ donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ converge. Il en est alors de même de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Ce dernier résultat peut être aussi retrouvé directement en remarquant que l'on a à faire à une série géométrique de raison complexe $q = \frac{e^j}{2}$ de module $\frac{1}{2} < 1$. Cela donne de plus la relation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1-q} = \frac{2}{2-e^j}$ .On en déduit la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{2^n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{2^n} = \mathrm{Re}\left(\frac{2}{2-e^j}\right) = \frac{4-2\cos(1)}{5-4\cos(1)}$.

Définition 9
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes.
Alors, si $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ converge, on dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est <u>absolument convergente.</u>
Ainsi, le théorème 2 se résume en disant que toute série absolument convergente est convergente.

Remarque importante : si toute série absolument convergente est convergente, il faut noter que la réciproque est fausse !! Une série convergente n'est pas nécessairement absolument convergente !

Exemple : la série harmonique alternée $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ étant décroissante et converge vers 0 donc la propriété 13 assure la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. Cependant, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ en utilisant la propriété 8 avec $\alpha = 1$.

III) Exercices

Exercice 1

Soit la suite u définie par la relation de récurrence $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$ et le premier terme $u_0=0$.

1) Calculer les valeurs exactes de u_1, u_2 et u_3.

2) On pose $v_n=3-u_{n.}$.

a) Calculer les valeurs de v_0, v_1, v_2 et v_3.

b) Montrer à partir de la relation de récurrence de la suite u que $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$.

c) En déduire une expression de v_n, puis de u_n.

Exercice 2

Utiliser la définition 3 pour prouver que la suite de terme général $u_n=\frac{1}{n+1}$ tend vers 0.

Exercice 3

1) Soit la suite u définie par son terme général $u_n=2\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$. Prouver que cette suite est périodique.

2) Même question avec la suite v définie par son terme général $u_n=\cos\left(\frac{n\pi}{p}\right)$ où p est une constante appartenant à $\mathbb{N}^*$.

Exercice 4

Soit une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$. Prouver que u est périodique.

Exercice 5

Soit une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ (suite dite de Fibonacci). On suppose que cette suite est à durée finie, c'est à dire qu'elle est nulle à partir d'un certain rang. Soit $k\in\mathbb{N}$ le plus petit rang à partir duquel la suite est nulle, c'est à dire que $\forall n\geq k,\ u_n=0$ et $u_{k-1}\neq 0$ (à moins que $k=0$, auquel cas il faut supprimer cette dernière condition).

Prouver par l'absurde que u ne peut être que la suite identiquement nulle.

(*)Exercice 6

Soit la suite u définie par la relation de récurrence $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n^2+1$ et son premier terme $u_0=a$ où $a\in\mathbb{R}$.

1) Soit $\varphi:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par l'expression $\varphi(t)=\frac{1}{2}t^2-t+1$.

Prouver que φ admet un minimum sur $\mathbb{R}$ dont on déterminera la valeur exacte.

2) Déduire du 1) que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n\geq\frac{1}{2}$.

3) Déterminer le sens de variation de la suite u . En déduire que soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, soit $\lim\limits_{n\rightarrow+\infty}(u_n)=+\infty$.

4) Montrer en raisonnant par l'absurde à partir du résultat de la question 2) que $\lim_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$.

Dans les questions suivantes, on ne suppose plus que $u_0 \in \mathbb{R}$.

5) Supposons que $u_0 = 1 \pm j$. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

6) Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que la suite complexe u définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n^2 + 1$ et son premier terme $u_0 = a$ converge vers un nombre $l \in \mathbb{C}$.

a) Prouver à partir de la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n^2 + 1$ que nécessairement, $l = 1 \pm j$.

b) Montrer que $u_{n+1} - l = \frac{1}{2}(u_n^2 - l^2)$.

c) Montrer que pour n assez grand, on a $|u_n + l| \geq \frac{5}{2}$. Déduire alors de la question 6)b) que pour n assez grand, $|u_{n+1} - l| \geq \frac{5}{4} |u_n - l|$.

d) Soit N un entier tel que $\forall n \geq N$, $|u_{n+1} - l| \geq \frac{5}{4} |u_n - l|$ (un tel entier existe par la question précédente). Montrer par récurrence sur p que $\forall p \in \mathbb{N}$, $|u_{N+p} - l| \geq \left(\frac{5}{4}\right)^p |u_N - l|$.

e) En déduire que $u_N = l$ (faire tendre p vers l'infini et raisonner par l'absurde) puis que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang N, c'est à dire que $\forall n \geq N$, $u_n = l$.

Remarque : On a prouvé que les seules suites complexes u vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n^2 + 1$ et convergentes sont les suites stationnaires : elles ne peuvent converger que si, à partir d'un certain rang elles deviennent exactement égales à leur limite. Il n'y a que certaines conditions initiales a qui permettent d'obtenir de telles suites. La détermination de ces valeurs de a est un problème difficile !

Exercice 7

Soit la suite u définie par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + \frac{1}{2^n}$.

1) Calculer les valeurs exactes de u_1, u_2 et u_3.
2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
3) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{4}{2^n}$.
4) Conclure quant au comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $n \to +\infty$.

(*)Exercice 8

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on considère le polynôme P_n défini pour $x \in [0;1]$ par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1 \quad .$$

Partie A Équation dépendant d'un paramètre n.

1) a) Quel est le sens de variation de la fonction P_n sur $[0;1]$?
   b) Démontrez que pour tout entier n, l'équation $P_n(x)=0$ admet une unique solution sur $[0;1]$. On note a_n cette unique solution et on ne cherchera pas son expression.
2) Donnez la valeur exacte de a_2
3) Expliquez pourquoi $P_{n+1}(a_n)=a_n^{n+1}$. En déduire le signe de $P_{n+1}(a_n)$.
4) Déduire du 3) que la suite (a_n) est strictement décroissante.
5) Montrez que la suite (a_n) converge.

Partie B L'objet de cette partie est de calculer la valeur exacte de $\lim(a_n)$. Soit *l* cette limite.

1) Prouvez que si $x\in[0;1[$ $P_n(x)=\dfrac{x^{n+1}-2x+1}{x-1}$.

2) Si $x\in[0;1[$, calculez $\lim\limits_{n\to\infty}(P_n(x))$. Pour quelle valeur de x a-t-on $\lim\limits_{n\to\infty}(P_n(x))=0$? Que peut-on conjecturer sur la valeur de *l* ?

3) Démontrons la conjecture précédente.
   a) Montrez que $a_n^{n+1}=2a_n-1$.
   b) Prouvez que $0\leqslant 2a_n-1\leqslant a_2^{n+1}$
   c) Démontrez la conjecture.

Exercice 9

Déterminer, en justifiant à l'aide du critère de comparaison ou d'équivalence, la nature des séries suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+3n}{n^4+n^2+1}$
2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$
3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{2^n+3}$
4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{3^n+2}$
5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-2}}$
6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(\frac{n^3+n}{n^3+1}\right)$
7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sin^2(n)e^{-n}$
8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(n)}{1{,}1^n}$
9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln(e^n+1)-n\right)$
10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\arctan\left(1+\frac{\pi}{n}\right)$
11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right)$

Exercice 10

1) En utilisant une intégrale généralisée, trouver la nature de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$.

2) Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}\ln(n)}$ converge-t-elle ?

Exercice 11

1) Trouver deux constantes a et b telles que l'on ait $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - u_{n-1} = \frac{n}{2^n}$ où u est la suite de terme général $u_n = \frac{a\,n + b}{2^n}$.

2) En déduire que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 12

1) Soit (u_n) une suite positive.

Prouver que si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$ converge.

2) a) Montrer par un contre-exemple que la réciproque de la question 1 est fausse.

b) Montrer par un contre-exemple de la forme $u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{\alpha}}$ pour un α bien choisi, que le résultat de la question 1) est faux si (u_n) n'est pas une suite positive.

3) Soit (u_n) une suite positive telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$ converge.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2}\left(u_n^2 + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{u_n}{n} \geq 0$.

b) En déduire la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}$.

4) Montrer par un contre-exemple que si (u_n) est une suite positive telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}$ converge, cela n'implique pas que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$ converge.

Exercice 13

1) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge.

Le but des questions suivantes est de déterminer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

2) Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} (-t)^n\right) dt$.

3) Déduire de la question précédente que $\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2) - (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t}\, dt$.

4) a) Montrer que $\forall N \in \mathbb{N},\ \left| \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t}\, dt \right| \leq \frac{1}{N+2}$.

b) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Exercice 14

1) Montrer par deux arguments différents que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ converge. (on rappelle que $0!=1$ et que $\forall n \geq 1,\ n!=1\times 2\times . . . n.$)

2) On admet que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}=e^{-1}=\frac{1}{e}$. Montrer à l'aide de la question 1) que $\left| \frac{53}{144} - \frac{1}{e} \right| < 2.10^{-4}$.

Exercice 15

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $u_n=\frac{n!}{n^n},\ n\geq 1$ (on rappelle que $\forall n \geq 1,\ n!=1\times 2\times . . . n.$)

1) Vérifier que $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$

2) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. En déduire la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

(*) Exercice 16

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $u_n=\frac{\sin(n)}{n},\ n\geq 1$. Le but de cet exercice est d'étudier la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

1) Dans cette question, on pose pour tout $n\in\mathbb{N},\ s_n=\sin(0)+\sin(1)+\sin(2)+ . . . +\sin(n)$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N},\ s_n=\mathrm{Im}\left(\frac{e^{j(n+1)}-1}{e^j-1}\right)$.

b) Montrer que $\forall z\in\mathbb{C},\ |\mathrm{Im}(z)|\leq|z|$.

c) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N},\ |s_n|\leq\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$.

2) En remarquant que $\forall n\geq 1,\ \sin(n)=s_n-s_{n-1}$ montrer que si N est un entier non nul on a $\sum_{n=1}^{N} u_n=\sum_{n=1}^{N}\frac{s_n}{n}-\sum_{n=0}^{N-1}\frac{s_n}{n+1}$.

3) En déduire que $\forall N\geq 2,\ \sum_{n=1}^{N} u_n=\frac{s_N}{N}+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{s_n}{n(n+1)}$.

4) a) Prouver à l'aide de la question 1) que $\lim_{N\to+\infty}\frac{s_N}{N}=0$.

b) Toujours à l'aide de la question 1), prouver que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s_n}{n(n+1)}$ est absolument convergente.

c) En déduire que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

5) Dans cette question, on pose pour tout entier naturel n :
$t_n=\sin^2(0)+\sin^2(1)+\sin^2(2)+ . . . +\sin^2(n)$.

a) Montrer en s'inspirant de la question 1) que $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \frac{1}{2}(n+1) - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{2j(n+1)}-1}{e^{2j}-1}\right)$.

b) En déduire qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2}n + a \leq t_n \leq \frac{1}{2}n + b$.

6) Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $v_n = \frac{\sin^2(n)}{n},\ n \geq 1$.

Montrer en s'inspirant des questions 2 et 3 que $\forall N \geq 2,\ \sum_{n=1}^{N} v_n = \frac{t_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{t_n}{n(n+1)}$.

7) a) Montrer à l'aide de la question 5)b que $\lim_{N \to +\infty} \frac{t_N}{N} = \frac{1}{2}$.

b) Toujours à l'aide de la question 5)b , prouver que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n}{n(n+1)}$ est divergente.

8) a) Déduire des questions précédentes que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ diverge.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| \geq v_n$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 17

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \frac{1}{1+2^n}$.

1) Justifier que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

2) Montrer que $\forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \leq \frac{1}{2^N}$.

3) En déduire une valeur approchée de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ à 10^{-2} près.

Exercice 18

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \frac{(1+j)^n}{a^n}$ où a est un réel strictement positif. Déterminer selon les valeurs de a la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et calculer sa valeur sous forme algébrique en cas de convergence. Montrer qu'en cas de convergence on a toujours $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sqrt{2}$.

IV) Corrigés

Exercice 1

1) On a $u_1=2$, $u_2=\frac{8}{3}$ et $u_3=\frac{26}{9}$.

2)

a) $v_0=3$, $v_1=1$, $v_2=\frac{1}{3}$ et $v_3=\frac{1}{9}$.

b) On a $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=3-u_{n+1}=3-\frac{1}{3}u_n-2=1-\frac{1}{3}u_n=\frac{1}{3}(3-u_n)=\frac{1}{3}v_n$.

c) La suite v_n est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de terme initial $v_0=3$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=\frac{3}{3^n}=\frac{1}{3^{n-1}}$. On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=3-v_n=3-\frac{1}{3^{n-1}}$.

Exercice 2

Soit $\varepsilon>0$. Posons $M=\frac{1}{\varepsilon}-1$. Alors, si $n>M$, $n+1>\frac{1}{\varepsilon}$ donc $0<\frac{1}{n+1}<\varepsilon$. On a donc $\forall\varepsilon>0,\ \exists M>0$ tq $\forall n\geq M$, $|u_n|\leq\varepsilon$. Cela veut dire, par définition, que la suite de terme général $u_n=\frac{1}{n+1}$ tend vers 0.

Exercice 3

1) On a pour tout entier naturel *n*, $u_{n+12}=2\cos\left(\frac{(n+12)\pi}{6}\right)=2\cos\left(\frac{n\pi}{6}+2\pi\right)=u_n$ donc la suite (u_n) est périodique de période 12.

2) On montre de la même façon que la suite *u* est 2p-périodique.

Exercice 4

Si $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$, donc $u_{n+3}=u_{n+2}-u_{n+1}=-u_n$, $u_{n+4}=u_{n+3}-u_{n+2}=-u_{n+1}$, $u_{n+5}=u_{n+4}-u_{n+3}=u_n-u_{n+1}$ et $u_{n+6}=u_{n+5}-u_{n+4}=u_n-u_{n+1}+u_{n+1}=u_n$.
La suite *u* est donc 6-périodique.

Exercice 5

Supposons $k\geq 1$. On aurait $u_{k+1}=u_k+u_{k-1}$ donc $u_{k-1}=u_{k+1}-u_k=0$ ce qui est absurde.
On en déduit que *k* = 0 donc la suite *u* est identiquement nulle.

Exercice 6

1) On a $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi'(t)=t-1$ ce qui, par une étude de signes aisée, permet de dire que la fonction φ admet un minimum égal à $\frac{1}{2}$ atteint pour $t=1$.

2) On a $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=\varphi(u_n)\geq\frac{1}{2}$ d'après la question précédente.

3) Puisque $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=\varphi(u_n)\geq\frac{1}{2}>0$, c'est que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
D'après le Théorème 1, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, soit $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=+\infty$.
4) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait vers une limite $l\in\mathbb{R}$, en faisant tendre n vers l'infini dans la relation $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n\geq\frac{1}{2}$, on aurait $l-l\geq\frac{1}{2}$, ce qui est absurde! On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=+\infty$.

5) On remarque que $u_1=\frac{1}{2}u_0^2+1=u_0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors constante.
6)
a) En faisant tendre n vers l'infini dans la relation $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n^2+1$, on obtient que l est solution de l'équation $l=\frac{1}{2}l^2+1$. On trouve en résolvant cette équation du second degré que nécessairement, $l=1\pm j$.
b) On a $u_{n+1}-l=\frac{1}{2}u_n^2+1-l=\frac{1}{2}u_n^2-\frac{1}{2}l^2$ car $1-l=\frac{-1}{2}l^2$. On a donc $u_{n+1}-l=\frac{1}{2}(u_n^2-l^2)$.
c) Si n tend vers l'infini, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l donc $|u_n+l|$ tend vers $|2l|=2\sqrt{2}>\frac{5}{2}$. On en déduit que pour n assez grand, on a $|u_n+l|\geq\frac{5}{2}$. On a alors d'après le 6)b)

$$|u_{n+1}-l|=\frac{1}{2}|u_n^2-l^2|=\frac{1}{2}|(u_n-l)(u_n+l)|=\frac{1}{2}|u_n-l||u_n+l|\geq\frac{5}{4}|u_n-l| \text{ car } |u_n+l|\geq\frac{5}{2}.$$

d) Soit (P_p) la propriété $|u_{N+p}-l|\geq\left(\frac{5}{4}\right)^p|u_N-l|$.
La propriété (P_0) est vraie car $|u_{N+0}-l|=\left(\frac{5}{4}\right)^0|u_N-l|$.
Soit p un entier tel que $|u_{N+p}-l|\geq\left(\frac{5}{4}\right)^p|u_N-l|$. Alors, $|u_{N+p+1}-l|\geq\frac{5}{4}|u_{N+p}-l|$ par le 6)c), donc

$|u_{N+p+1}-l|\geq\frac{5}{4}.\left(\frac{5}{4}\right)^p|u_N-l|$ par l'hypothèse de récurrence, c'est à dire

$|u_{N+p+1}-l|\geq\left(\frac{5}{4}\right)^{p+1}|u_N-l|$ ce qui prouve la propriété (P_p) au rang p+1.

e) Supposons que $u_N\neq l$. On a donc $|u_N-l|\neq0$, et en faisant tendre p vers l'infini dans la relation $\forall p\in\mathbb{N},\ |u_{n+p}-l|\geq\left(\frac{5}{4}\right)^p|u_N-l|$, on obtient que $\lim\limits_{p\to+\infty}|u_{n+p}-l|=+\infty$ ce qui est absurde car $\lim\limits_{p\to+\infty}|u_{n+p}-l|=0$ vu que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=l$. On en déduit que $u_N=l$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang N car $l=\frac{1}{2}l^2+1$.

Exercice 7

1) On a $u_1=1,\ u_2=\frac{3}{4}$ et $u_3=\frac{7}{16}$.

2) On a $u_0=0\geq 0$ et si $u_n\geq 0$, alors $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{1}{2^n}\geq 0$.

3) Posons pour n entier naturel : (P_n) : $u_n\leq\frac{4}{2^n}$.

(P_0) est vraie car $0\leq 4$.

Soit n un entier tel que (P_n) soit vraie. Alors $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{1}{2^n}\leq\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{2}{2^n}=\frac{4}{2^{n+1}}$ donc (P_{n+1}) est alors vraie.

4) De la relation $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_n\leq\frac{4}{2^n}$, on déduit du (iii) de la propriété 1 que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\to 0$ si $n\to+\infty$.

Exercice 8

<u>*Partie A*</u> .

1) a) La fonction P_n est strictement croissante sur $[0;1]$ car $\forall x\in]0;1];\ P'_n(x)=\sum_{k=1}^{n}k\,x^{k-1}>0$.

b) On a $P_n(0)=-1<0$ et $P_n(1)=n-1>0$. Puisque P_n est strictement croissante sur $[0;1]$, le théorème des valeurs intermédiaires implique que l'équation $P_n(x)=0$ admet une unique solution sur $]0;1[$.

2) Le réel a_2 est la racine réelle de x^2+x-1 appartenant à $[0;1]$. On trouve $a_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3) On a $\forall x\in\mathbb{R},\ P_{n+1}(x)=P_n(x)+x^{n+1}$ donc en posant $x=a_n$, on a $P_{n+1}(a_n)=P_n(a_n)+a_n^{n+1}=a_n^{n+1}$. Cela signifie que $P_{n+1}(a_n)>0$ car $a_n\in]0;1[$.

4) Puisque la fonction P_n est strictement croissante sur $[0;1]$, que $a_n\in]0;1[$ et $a_{n+1}\in]0;1[$ et que $P_{n+1}(a_n)>0=P_{n+1}(a_{n+1})$, c'est que $a_n>a_{n+1}$, et ce pour tout entier naturel n .

On en déduit que la suite (a_n) est strictement décroissante.

5) La suite (a_n) est strictement décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

<u>*Partie B*</u>

1) Par l'expression de la somme des termes d'une suite géométrique, on a

$$\forall x\in[0;1[,\ P_n(x)=x\frac{x^n-1}{x-1}-1=\frac{x^{n+1}-2x+1}{x-1}.$$

2) Si $x\in[0;1[$, on a $\lim_{n\to\infty}(P_n(x))=\frac{1-2x}{x-1}$. On peut donc penser que pour n grand, on a

$$0=P_n(a_n)\sim\frac{1-2a_n}{a_n-1}\quad\text{donc}\quad 1-2a_n\sim 0\quad\text{d'où la conjecture :}\quad l=\frac{1}{2}\quad .$$

3)

a) On a, puisque $a_n \in]0\,;1[$, la relation $0 = P_n(a_n) = \dfrac{a_n^{n+1} - 2a_n + 1}{a_n - 1}$ d'où $a_n^{n+1} = 2a_n - 1$.

b) Puisque la suite (a_n) est strictement décroissante et que pour tout entier naturel n on a $a_n \in]0\,;1[$, il vient que $\forall n \geq 2,\ 0 < a_n \leq a_2 < 1$ donc $\forall n \geq 2,\ 0 < a_n^{n+1} \leqslant a_2^{n+1} < 1$.
De la relation $a_n^{n+1} = 2a_n - 1$ on déduit l'encadrement $\forall n \geq 2,\ 0 < 2a_n - 1 \leqslant a_2^{n+1}$.

c) Puisque $0 < a_2 < 1$ la relation $\forall n \geq 2,\ 0 < 2a_n - 1 \leqslant a_2^{n+1}$ montre par le (iii) de la propriété 1 que $\lim(2a_n - 1) = 0$ donc $\lim(a_n) = \dfrac{1}{2}$, ce qui avait été conjecturé.

Exercice 9

1) On a $\dfrac{n^2 + 3n}{n^4 + n^2 + 1} \sim \dfrac{1}{n^2} > 0$. La série converge (critère de l'équivalent et de Riemann).

2) On a $\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) \sim \dfrac{\pi}{2^n} > 0$ La série converge (critère de l'équivalent et de convergence d'une série géométrique.).

3) On a $\dfrac{3^n}{2^n + 3} \sim \left(\dfrac{3}{2}\right)^n > 0$ La série diverge (critère de l'équivalent et de divergence d'une série géométrique.)

4) On a $\dfrac{2^n}{3^n + 2} \sim \left(\dfrac{2}{3}\right)^n > 0$ La série converge (critère de l'équivalent et de convergence d'une série géométrique.)

5) On a $\dfrac{1}{\sqrt{n^2 - 2}} \sim \dfrac{1}{n} > 0$ La série diverge (critère de l'équivalent et de Riemann).

6) On a $\ln\left(\dfrac{n^3 + n}{n^3 + 1}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{n-1}{n^3 + 1}\right) \sim \dfrac{n-1}{n^3 + 1} \sim \dfrac{1}{n^2} > 0$. La série converge (critère de l'équivalent et de Riemann).

7) On a $0 \leq \sin^2(n) e^{-n} \leq e^{-n}$. La série converge (critère de comparaison et de convergence d'une série géométrique.)

8) Par les croissances comparées, on a $\lim \dfrac{\ln(n)}{1{,}05^n} = 0$ donc $0 \leq \ln(n) \leq 1{,}05^n$ pour n grand. On en déduit que $0 \leq \dfrac{\ln(n)}{1{,}1^n} \leq \left(\dfrac{1{,}05}{1{,}1}\right)^n$. La série converge (critère de comparaison et de convergence d'une série géométrique.)

9) On a $\ln(e^n + 1) - n = \ln(e^n + 1) - \ln(e^n) = \ln(1 + e^{-n}) \sim e^{-n} > 0$. La série converge (critère de l'équivalent et de convergence d'une série géométrique.)

10) On a $1 + \dfrac{\pi}{n} > 1$ donc $\arctan\left(1 + \dfrac{\pi}{n}\right) > \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ d'où $\dfrac{1}{n}\arctan\left(1 + \dfrac{\pi}{n}\right) > \dfrac{\pi}{4n} > 0$. La série diverge (critère de comparaison et de Riemann).

11) On a $\dfrac{1}{n}\ln\left(1 + \dfrac{\pi}{n}\right) \sim \dfrac{\pi}{n^2} > 0$. La série converge (critère de l'équivalent et de Riemann).

Exercice 10

1) On définit sur $[2;+\infty[$ la fonction f par l'expression $f(x)=\frac{1}{x\ln(x)}$. C'est une fonction positive, continue et décroissante (car $f'(x)=-\frac{1+\ln(x)}{x^2\ln^2(x)}<0 \ \forall x\geq 2.$)

On a $\forall X>2, \int_2^X f(x)\,dx=[\ln(\ln(X))]_2^X=\ln(\ln(X))-\ln(\ln(2)).$ On en déduit que l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge : par la propriété 11, la série $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ diverge aussi.

2) Si $1\geqslant\alpha>0$, on a $\forall n\geqslant 2, \frac{1}{n^\alpha\ln(n)}\geqslant\frac{1}{n\ln(n)}>0$ donc par le critère de comparaison des séries numériques, on en déduit que $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha\ln(n)}$ diverge.

Si $\alpha>1$, on a $0<\frac{1}{n^\alpha\ln(n)}<\frac{1}{n^\alpha}$ pour n assez grand, donc le critère de comparaison et de Riemann prouve que la série $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha\ln(n)}$ converge .

Conclusion : la série $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha\ln(n)}$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

Exercice 11

1) Si l'on pose $u_n=\frac{an+b}{2^n}$, on a $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n-u_{n-1}=\frac{-an+2a-b}{2^n}$ donc si l'on pose $a=-1$ et b=-2 on a la relation voulue.

2) Posons $u_n=-\frac{n+2}{2^n}$. Soit N un entier non nul. Par le principe des somme télescopiques, on a $\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{2^n}=u_N-u_0=2-\frac{N+2}{2^N}$. En faisant tendre N vers l'infini, on en déduit la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$ et que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}=2.$

Exercice 12

1) Si $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ converge, alors $(u_n)\to 0$ donc pour n assez grand, on a $0\leq u_n<1$ d'où $0\leq u_n^2<u_n$.

Le critère de comparaison permet de dire que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2$ converge.

2) a) Si $(u_n)=\left(\frac{1}{n+1}\right)$, par le critère de Riemann, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ diverge alors que $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2$ converge.

b) Si $\alpha=\frac{1}{2}$, alors par la propriété 13 la série $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ converge alors que $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$ diverge par le critère de Riemann.

3)

a) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2}\left(u_n^2 + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{u_n}{n} = \frac{n^2 u_n^2 - 2 n u_n + 1}{2 n^2} = \frac{(n u_n - 1)^2}{2 n^2} \geq 0$

b) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2} u_n^2$ converge par hypothèse et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2 n^2}$ par le critère de Riemann donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(u_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$ converge par somme de séries convergentes. On déduit du a) par le critère de comparaison que la série à termes positifs $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}$ converge.

4) On considère le cas où $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}},\ n \geqslant 1$. On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ convergente par le critère de Riemann mais la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge par l'application du même critère.

Exercice 13

1) C'est une application directe de la propriété 13

2) On a par linéarité de l'intégrale $\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} (-t)^n\right) dt = \sum_{n=0}^{N} \left(\int_0^1 (-t)^n\, dt\right) = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$.

3) Par la formule de la somme des termes d'une suite géométrique, on a $\sum_{n=0}^{N} (-t)^n = \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t}$ donc le résultat du 2) donne

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} (-t)^n\right) dt = \int_0^1 \left(\frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t}\right) dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t}\right) dt - \int_0^1 \left(\frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\right) dt$$

$$= \ln(2) - (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t}\, dt$$

4) a) On a $\forall N \in \mathbb{N},\ \left|\int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t}\, dt\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{t^{N+1}}{1+t}\, dt\right| \leq \int_0^1 t^{N+1}\, dt$ car $1 + t \geq 1$.

On en déduit $\forall N \in \mathbb{N},\ \left|\int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t}\, dt\right| \leq \frac{1}{N+2}$.

b) On a par la question précédente $\lim_{N \to +\infty} \left(\int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t}\, dt\right) = 0$ donc en faisant tendre N vers l'infini dans la relation $\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2) - (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\, dt$ on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

Exercice 14

1) On peut utiliser le critère de convergence des séries alternées de la propriété 13.

On peut aussi remarquer que $\forall n \geqslant 2,\ \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| \leq \frac{1}{n(n-1)}$ et le critère de Riemann et de comparaison

assure l'absolue convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$, donc sa convergence.

2) On a $\sum_{n=0}^{6} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{53}{144}$ donc d'après la propriété 13 (majoration du reste) ,

$$\left| \frac{53}{144} - \frac{1}{e} \right| = \left| \sum_{n=7}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \right| < \frac{1}{7!} \sim 1{,}98.10^{-4} < 2{,}10^{-4}.$$

Exercice 15

1) On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n (n+1)!}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= (n+1) . \frac{n^n}{(n+1)^n} . \frac{1}{n+1} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n}$$

2) On a par la question précédente $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = -n \ln\left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim -1$ quand n tend vers l'infini donc

$$\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = -1.$$

Il vient que $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} \in]0\,;1[$. La propriété 12 permet de conclure que la série à termes strictement positifs $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

Exercice 16

1) a) On a pour tout entier naturel n, $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \mathrm{Im}\left(1 + e^j + e^{2j} + ... + e^{nj}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{j(n+1)} - 1}{e^j - 1} \right)$

d'après la formule de sommation des termes d'une suite géométrique.

b) On a $\forall z \in \mathbb{C},\ |z|^2 = |\mathrm{Im}(z)|^2 + |\mathrm{Re}(z)|^2 \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^2$ donc $\forall z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

c) On a $\frac{e^{j(n+1)} - 1}{e^j - 1} = \frac{e^{j\frac{n+1}{2}} \left(e^{j\frac{n+1}{2}} - e^{-j\frac{n+1}{2}} \right)}{e^{\frac{j}{2}} \left(e^{\frac{j}{2}} - e^{\frac{-j}{2}} \right)} = e^{j\frac{n}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2} \right)}{\sin\left(\frac{1}{2} \right)}$.

En appliquant le résultat des deux dernières questions :

$$n \in \mathbb{N},\ |s_n| = \left| \mathrm{Im}\left(\frac{e^{j(n+1)} - 1}{e^j - 1} \right) \right| \leqslant \left| \frac{e^{j(n+1)} - 1}{e^j - 1} \right| = \left| e^{j\frac{n}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2} \right)}{\sin\left(\frac{1}{2} \right)} \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2} \right)}{\sin\left(\frac{1}{2} \right)} \right| \leqslant \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2} \right)}$$

en majorant le numérateur par 1.

2) On a $\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{s_n - s_{n-1}}{n}$.

On va utiliser la méthode dite de « Sommation d'Abel », qui est en fait une « intégration par parties discrète » : dans la somme ci dessus, le terme $s_n - s_{n-1}$ est la dérivée discrète de s_n tandis que le terme $\frac{1}{n}$ va être « discrètement dérivé » en $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$. Voyons cela :

$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{s_n - s_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{s_n}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{s_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{s_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{s_n}{n+1}$ en faisant le changement d'indice $n \to n+1$ dans la dernière somme.

3) On a alors d'après la question précédente :

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{s_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{s_n}{n+1} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{s_n}{n} + \frac{s_N}{N} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{s_n}{n+1} - s_0 = \sum_{n=1}^{N-1} s_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{s_N}{N} = \frac{s_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{s_n}{n(n+1)}$$

4) a) On a $\forall N \in \mathbb{N},\ |s_N| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$ donc $\forall N \in \mathbb{N},\ \left|\frac{s_N}{N}\right| \leq \frac{1}{N \sin\left(\frac{1}{2}\right)}$ et le second membre tend bien vers 0 si N tend vers l'infini.

b) On a pour tout entier naturel non nul n la relation $\left|\frac{s_n}{n(n+1)}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{n^2+n}$. Le critère de comparaison et de Riemann assure que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s_n}{n(n+1)}$ est absolument convergente.

c) En faisant tendre N vers l'infini dans la relation $\sum_{n=1}^{N} u_n = \frac{s_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{s_n}{n(n+1)}$ on obtient que $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s_n}{n(n+1)}$: la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge bien .

5) a) On utilise la formule $\sin^2(a) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$ pour établir que

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} (1 - \cos(2k)) = \frac{1}{2}\left(n + 1 + \mathrm{Re}\left(1 + e^{2j} + e^{4j} + \ldots + e^{2nj}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(n + 1 + \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2j(n+1)} - 1}{e^2 j - 1}\right)\right)$$

b) On poursuit le calcul précédent comme on l'a fait pour le 1)c) :

$$t_n = \frac{1}{2}\left(n + 1 + \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2j(n+1)} - 1}{e^2 j - 1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(n + 1 + \mathrm{Re}\left(e^{jn} \frac{\sin(n+1)}{\sin(1)}\right)\right),$$

donc, en utilisant la relation $\forall z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, on a

$$\left|t_n - \frac{1}{2}n\right| = \frac{1}{2}\left|1 + \mathrm{Re}\left(e^{jn} \frac{\sin(n+1)}{\sin(1)}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2} + \left|e^{jn} \frac{\sin(n+1)}{2\sin(1)}\right| = \frac{1}{2} + \frac{|\sin(n+1)|}{2\sin(1)} \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sin(1)}\right).$$

Cela prouve que la suite $\left(t_n - \frac{1}{2}n\right)$ est bornée, d'où l'existence de deux réels a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a \leqslant t_n - \frac{1}{2}n \leqslant + b.$$

6) On a $\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin^2(n)}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{t_n - t_{n-1}}{n}$.

$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{t_n - t_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{t_n}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{t_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{t_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{t_n}{n+1}$ en faisant le changement d'indice $n \to n+1$ dans la dernière somme.

On poursuit le calcul :

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{t_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{t_n}{n+1} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{t_n}{n} + \frac{t_N}{N} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{t_n}{n+1} - t_0 = \sum_{n=1}^{N-1} t_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{t_N}{N} = \frac{t_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{t_n}{n(n+1)} .$$

7) a) On a $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2} + \frac{a}{N} \leqslant \frac{t_N}{N} \leq \frac{1}{2} + \frac{b}{N}$, ce qui donne par le Théorème des Gendarmes $\lim_{N \to +\infty} \frac{t_N}{N} = \frac{1}{2}$.

b) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2} n + a \leqslant t_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n + 2a}{2n(n+1)} \leqslant \frac{t_n}{n(n+1)}$

On a si n tend vers l'infini, $\frac{n + 2a}{2n(n+1)} \sim \frac{1}{2n} > 0$ donc par le critère de l'équivalent et de Riemann, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + 2a}{2n(n+1)}$ diverge vers $+\infty$.

Par le critère de comparaison, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n}{n(n+1)} = +\infty$.

8) a) On a $\lim_{N \to +\infty} \frac{t_N}{N} = \frac{1}{2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n}{n(n+1)} = +\infty$. Donc en faisant tendre N vers l'infini dans la relation $\forall N \geq 2,\ \sum_{n=1}^{N} v_n = \frac{t_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{t_n}{n(n+1)}$, on obtient la divergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

b) Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ |\sin(n)| \geqslant \sin^2(n)$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| \geq v_n$.

Puisque la série à termes positifs $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ diverge, on en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ diverge aussi.

On en déduit que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, bien que convergente, n'est pas absolument convergente.

Exercice 16

1) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq \frac{1}{2^n}$ donc le critère de comparaison et le critère de convergence des séries géométriques permet de conclure.

2) De la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq \frac{1}{2^n}$, on conclut que

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{N+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^N}.$$

3) On cherche N tel que $\frac{1}{2^N} \leqslant 10^{-2}$ ce qui a lieu pour N=7 par exemple, donc la relation

$\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \leq \frac{1}{2^N}$ donne $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{7} u_n \leq \frac{1}{2^7} \leq 10^{-2}$ et puisque tous les termes de la série sont positifs, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{7} u_n \leq \frac{1}{2^7} \leq 10^{-2} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - 10^{-2} \leq \sum_{n=0}^{7} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sim 1{,}25$ à 10^{-2} près.

Exercice 17

On a une série géométrique de raison complexe qui va converger si et seulement si $\left|\frac{1+j}{a}\right| < 1$ c'est à dire $|a| > \sqrt{2}$. On a dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1-\frac{1+j}{a}} = \frac{a}{a-1-j} = \frac{a(a-1)+aj}{a^2-2a+2}$.

On calcule $2-\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right|^2 = 2-\left|\frac{a}{a-1-j}\right|^2 = 2-\frac{a^2}{a^2-2a+2} = \frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+2} = \frac{(a-2)^2}{(a-1)^2+1} \geq 0$ donc $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sqrt{2}$.

H - FONCTIONS À DEUX VARIABLES

L'étude des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ne permet pas de modéliser toutes les situations rencontrées en physique.

En effet, les formules utilisées faisant intervenir souvent plus d'un paramètre, une grandeur physique dépend souvent de plusieurs variables. Par exemple, la loi des gaz parfaits $PV = nRT$ montre que la pression d'un gaz parfait, dans certaines conditions, dépend à la fois du volume qu'il occupe (V), de sa température (T) et de la quantité de molécules qui constituent le gaz (n).

Dans d'autres situations, les grandeurs physiques étudiées ne peuvent pas se ramener à une seule grandeur réelle. Par un exemple, une force se représente par un vecteur, qui peut dépendre de plusieurs variables (position du point où s'applique la force, temps, etc).

I) Courbes planes paramétrées .

I.1) Notion de courbe paramétrée.

Définition 1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x : I \to \mathbb{R}$, $y : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
On considère la fonction $M : I \to \mathbb{R}^2$ qui à un réel $t \in I$ associe le point $M(t)$ de coordonnées $M(t) : (x(t) ; y(t))$ dans un repère donné.
Alors, l'ensemble Γ des points de la forme $M(t)$ pour $t \in I$ est <u>une courbe paramétrée</u> et la fonction qui à un réel $t \in I$ associe le point $M(t)$ est appelée un <u>paramétrage</u> de Γ .

Exemple : l'application $M : [0 ; 2\pi[\to \mathbb{R}$ qui à tout réel $t \in [0 ; 2\pi[$ associe le point $M(t) : (\cos(t) ; \sin(t))$. Quand *t* décrit l'intervalle $[0 ; 2\pi[$, le point $M(t)$ décrit le cercle trigonométrique. : chaque point M du cercle trigonométrique correspond à un seul point $M(t)$, pour une seule valeur de *t* , et *t* correspond à la mesure dans l'intervalle $[0 ; 2\pi[$ de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM(0)} ; \overrightarrow{OM(t)}}\right)$.
Remarquons que l'application $N : [0 ; 2\pi[\to \mathbb{R}$ qui à tout réel $t \in [0 ; 2\pi[$ associe le point $N(t) : (\cos(2t) ; \sin(2t))$ est un autre paramétrage du cercle trigonométrique : chaque point M du cercle trigonométrique correspond à un point $M(t)$ pour, cette fois, deux valeurs de $t \in [0 ; 2\pi[$.
Ainsi, une même courbe paramétrée peut avoir des paramétrages différents.

I.2) Lien avec les fonctions d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$.

Considérons une fonction *f* définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la fonction $M : I \to \mathbb{R}^2$ qui à un réel $t \in I$ associe le point $M(t)$ de coordonnées $M(t) : (t ; f(t))$, dans un repère donné. Cela revient donc à considérer, dans la définition 1, $x(t) = t$ et $y(t) = f(t)$. Alors, la courbe paramétrée définie par l'ensemble des points de la forme $M(t)$ pour $t \in I$ n'est rien d'autre que le graphe de la fonction *f*. On remarque donc que la notion de courbe paramétrée généralise celle du graphe d'une fonction. Remarquons aussi qu'une courbe paramétrée n'est pas forcément le graphe d'une fonction : le cercle trigonométrique n'est pas le graphe d'une fonction *f* car, par exemple, il y a deux points du cercle d'abscisse 0, or $f(0)$ ne peut avoir qu'une seule valeur.

I.3) Vecteur tangent à une courbe paramétrée.

Puisque la notion de courbe paramétrée généralise celle du graphe d'une fonction, on va essayer dans ce paragraphe de d'étendre la notion de dérivation à une courbe paramétrée.

Propriété 1 On considère la fonction $M : I \to \mathbb{R}^2$ qui à un réel $t \in I$ associe le point $M(t)$ de coordonnées $M(t) : (x(t) ; y(t))$ dans un repère donné. On suppose que les fonctions $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $t_0 \in I$. On suppose que $(x'(t_0) ; y'(t_0)) \neq (0 ; 0)$.
Alors, si h est un réel assez petit et tel que $t_0 + h \in I$, on a $M(t_0) \neq M(t_0 + h)$ et si h tend vers0, la droite $(M(t_0) M(t_0 + h))$ « tend vers » la droite passant par le point $M(t_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} : (x'(t_0) ; y'(t_0))$ au sens suivant : le vecteur $\frac{1}{h} \overrightarrow{M(t_0) M(t_0 + h)}$ tend vers $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$ si h tend vers 0.
Cette droite est appelée <u>tangente à la courbe paramétrée</u> au point de paramètre t_0. Le vecteur $\vec{u} : (x'(t_0) ; y'(t_0))$ sera noté $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$.

Exemple : on reprend l'exemple de l'application $M : [0 ; 2\pi[\to \mathbb{R}$ qui à tout réel $t \in [0 ; 2\pi[$ associe le point $M(t) : (\cos(t) ; \sin(t))$. Prenons $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Alors le point $M(t_0)$ de paramètre t_0 est le point de coordonnées $(0 ; 1)$. On a $(x'(t_0) ; y'(t_0)) = \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) ; \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1 ; 0)$. Ainsi, la propriété 1 dit que la droite passant par le point $(0 ; 1)$ et dirigée par le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) : (-1 ; 0)$ est tangente au cercle trigonométrique, c'est à dire que la droite d'équation $y = 1$ est tangente au tangente au cercle trigonométrique, ce qui est conforme à l'intuition géométrique.

<u>Preuve</u> : on a $(x'(t_0) ; y'(t_0)) \neq (0 ; 0)$. Supposons par exemple que $x'(t_0) \neq 0$. Puisque $\lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} = x'(t_0)$, on a pour h assez petit : $\left|\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}\right| \geq \frac{|x'(t_0)|}{2} > 0$ donc $x(t_0 + h) \neq x(t_0)$ et ainsi $M(t_0) \neq M(t_0 + h)$. De même si $y'(t_0) \neq 0$. Maintenant, la droite $(M(t_0) M(t_0 + h))$ (qui existe bien pour h assez petit car on vient de voir qu'alors $M(t_0) \neq M(t_0 + h)$) passe bien évidemment par le point $M(t_0)$ et admet comme vecteur directeur le vecteur $\frac{1}{h} \overrightarrow{M(t_0) M(t_0 + h)} : \left(\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} ; \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h}\right)$.
Si h tend vers 0, ce vecteur tend vers $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) : (x'(t_0) ; y'(t_0))$ donc la droite $(M(t_0) M(t_0 + h))$ tend vers la droite passant par le point $M(t_0)$ et dirigée par le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) : (x'(t_0) ; y'(t_0))$.

<u>Dans le cas du graphe d'une fonction f dérivable sur I :</u> on a $x(t) = t$ et $y(t) = f(t)$ qui sont deux fonctions dérivables en tout point $t_0 \in I$ et $(x'(t_0) ; y'(t_0)) = (1 ; f'(t_0)) \neq (0 ; 0)$ même si $f'(t_0) = 0$. Alors, si h tend vers 0, la droite $(M(t_0) M(t_0 + h))$ tend vers la droite passant par le point $(t_0 ; f(t_0))$ et dirigée par le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$: on retrouve ainsi dans ce cas particulier le fait que $f'(t_0)$ estl e coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse t_0.

Interprétation cinématique : considérons un point M qui se déplace sur Γ. Cela signifie qu'en se plaçant dans un repère, on a à l'instant t $M=M(t):(x(t);y(t))$ pour deux certaines fonctions $x:I\to\mathbb{R}$ et $y:I\to\mathbb{R}$.

Alors si les deux fonction x et y sont dérivables sur I, le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t):(x'(t);y'(t))$ est appelé vecteur vitesse instantanée du point M à l'instant t. Comme nous le dit la propriété 1, ce vecteur est tangent à la trajectoire du point M, autrement dit à Γ.

On définit de la même façon le vecteur accélération $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t_0)=a(t):(x''(t);y''(t))$ si les deux fonction x et y sont deux fois dérivables sur I. Mais attention, le vecteur accélération n'est plus tangent à la trajectoire du point M : il possède en effet généralement une composante centrifuge ou centripète due à la courbure de la trajectoire du point M, ce qui fait que le vecteur $a(t)$ n'a aucune raison d'être colinéaire au vecteur $v(t)$.

II) Fonctions à deux variables

II.1) Généralités

On travaille dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ que l'on supposera orthonormé (c'est à dire que les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions orthogonales et sont tous les deux de norme 1).
Ainsi, chaque point M du plan peut être repéré par ses coordonnées x et y ce qui signifie qu'il peut être représenté par un couple de réels (x,y) tel que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$.
On s'intéresse dans ce paragraphe à des fonctions f à deux variables qui à un couple de réels (x,y) associe un nombre, que l'on notera $f(x;y)$, l'image du couple (x,y) par la fonction f.

Exemples :

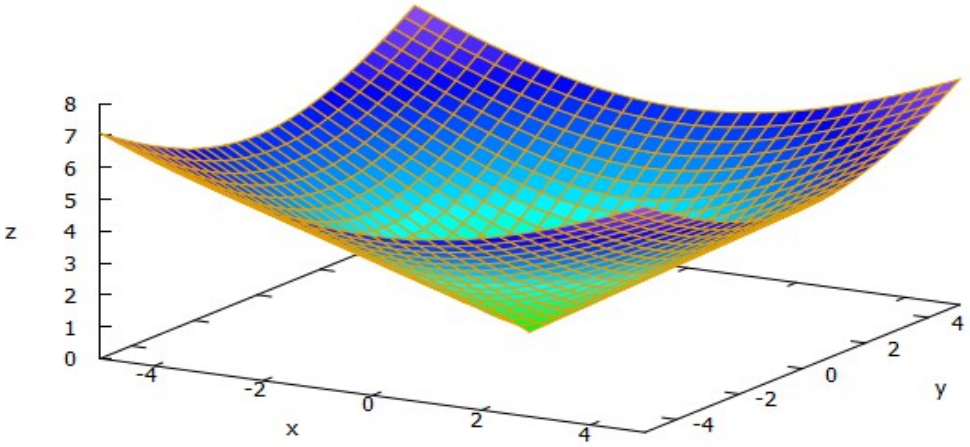
1) si f est la fonction qui à un couple de réels (x,y) associe la distance OM (où M est le point de coordonnées (x,y)), f est une fonction à deux variables. La formule de calcul d'une distance entre deux points, valable dans un repère orthonormé, montre qu'elle admet comme expression $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$.
Elle est définie pour tout couple (x,y) : on dira que son domaine de définition est $\mathbb{R}^2$.

2) si f est la fonction qui à un couple de réels (x,y) associe la quantité $f(x;y)=\frac{y}{x}$, le domaine de définition de f correspond à l'ensemble des couples de réels (x,y) tels que $x\neq 0$: cela correspond au plan privé de l'axe des ordonnées.

De la même façon qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ peut être représentée par un graphe dans le plan, une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ peut être représentée par une surface dans l'espace.

Définition 2 Étant donnée une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$, sa représentation graphique est définie comme la surface dans $\mathbb{R}^3$ constituée par l'ensemble des points de l'espace de coordonnées $(x;y;f(x;y))$ avec $(x;y)\in D$.

Exemple : on considère la fonction f définie sur le plan $\mathbb{R}^2$ par l'expression $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$.
Sa représentation graphique est donc constituée des points de l'espace de coordonnées $(x;y;\sqrt{x^2+y^2})$:



Notons que ce type de représentation n'est pas aussi pratique à manipuler que le simple graphe d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, il n'y a plus de sens à parler de fonction croissante ou décroissante dans le cas d'une fonction à plusieurs variables : on ne peut donc pas en faire un tableau de variations.

Voyons une dernière notion assez utile lorsqu'on étudie une fonction à plusieurs variables.

Définition 3 Soit f une fonction à deux variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0; y_0) \in D$.
On définit la <u>ligne de niveau</u> associée à f et passant par le point $(x_0; y_0)$ comme étant l'ensemble des points $(x; y) \in D$ tels que $f(x; y) = f(x_0; y_0)$.

Exemples :
1) Si f est la fonction qui à un couple de réels (x, y) associe la distance OM (où M est le point de coordonnées (x, y)) et si $(x_0; y_0) = (1; 1)$, alors la ligne de niveau associée à f et passant par le point $(1; 1)$ correspond aux couples (x, y), coordonnées des points M tels que $OM = OA = \sqrt{2}$ (où A est le point de coordonnés $(1; 1)$). Autrement dit, cette ligne de niveau est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
2) Si f est la fonction qui à un couple de réels (x, y) ($x \neq 0$) associe la quantité $f(x; y) = \frac{y}{x}$, les lignes de niveau associées à la fonction f sont les droites passant par l'origine et privées de ce dernier point.

II.2) Continuité.

Soit f une fonction à deux variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0; y_0) \in D$. On s'intéresse ici à l'étude de la quantité $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ quand x et y sont assez proches de x_0 et y_0.
Pour cela, il faut être sûr que lorsque x et y sont assez proches de x_0 et y_0, on a aussi $(x; y) \in D$.
Cela nous amène à définir la notion suivante :

Définition 4 Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.
On dit que D est une <u>partie ouverte</u> de $\mathbb{R}^2$ si pour tout couple $(x_0; y_0) \in D$, le couple $(x; y)$ appartient aussi à D dès que x et y sont assez proches de x_0 et y_0.

Exemple :
Soit $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \setminus x>0 \text{ et } y>0\}$, c'est à dire la partie du plan située strictement à droite de l'axe des ordonnées et strictement au-dessus de l'axe des abscisses, est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. En effet, si $(x_0;y_0)\in D$, c'est que $x_0>0$ et $y_0>0$ donc si x et y sont assez proches de x_0 et y_0 , on a encore $x>0$ et $y>0$, c'est à dire $(x;y)\in D$, dès que le couple $(x;y)$ est assez proche du couple $(x_0;y_0)$.

Définition 5 Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction à deux variables définie sur D .Soit enfin $(x_0;y_0)\in D$.
On dit que la fonction f <u>est continue en</u> $(x_0;y_0)$ si on peut rendre la quantité $f(x,y)$ aussi proche que l'on veut de $f(x_0,y_0)$ pourvu que le couple $(x;y)$ est assez proche du couple $(x_0;y_0)$., ce que l'on écrit $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)=f(x_0;y_0)$.
Si f est continue en tout point de D , on dira que f <u>est continue sur D.</u>
Plus précisément, cela signifie que pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un réel $\delta>0$ tel que pour tout couple $(x;y)\in D$, on ait $|f(x_0;y_0)-f(x;y)|<\varepsilon$ dès que $|x-x_0|<\delta$ et $|y-y_0|<\delta$.

Remarque : cette définition généralise la définition de continuité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On admettra que toute fonction à deux variables construite par somme, produit, quotient et composée de fonction à une variable continue est continue sur son domaine de définition.

Exemple : soit f définie sur $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \setminus x\neq y\}$ (on admet que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ce que l'on peut prouver comme dans l'exemple de la définition 4) par l'expression $f(x;y)=\dfrac{x^2y+x}{y-x}$. Alors f est continue sur D.
En effet, la fonction $x\to x^2$ de la variable x et la fonction $y\to y$ de la variable y sont continues donc la fonction à deux variables $(x;y)\to x^2y$ est continue par produit de deux fonctions continues à une seule variable. La fonction $x\to x$ de la variable x est continue donc la fonction $(x;y)\to x^2y+x$ est continue comme somme de deux fonctions continues à une seule variable.
On montre de même que la fonction à deux variables $(x;y)\to y-x$ est continue et ne s'annule pas sur D donc par quotient de fonctions continues, la fonction f est continue sur D.

II.3) Dérivation

Si φ est une fonction à une variable, et si a est un réel au voisinage duquel la fonction φ est définie, on étudie la dérivabilité de φ en a en étudiant la limite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}$. Cela ne peut pas se faire tel quel pour une fonction f à deux variables car une expression telle que : " $\dfrac{f(x;y)-f(a;b)}{(x;y)-(a;b)}$ " n'aurait aucun sens.
Il faut donc adapter la définition de dérivabilité pour une fonction à deux variables en parlant de dérivée par rapport à la variable x ou par rapport à la variable y.

Plus précisément, soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction à deux variables définie sur D .Soit enfin $(x_0;y_0)\in D$. On fixe dans un premier temps la variable y à la valeur y_0 . D étant une

partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, on peut dire que $(x\,;y_0)\in D$ pour x réel assez proche de x_0. On peut ainsi définir , pour x assez proche de x_0 , la fonction $\varphi(x)=f(x\,;y_0)$ (c'est à dire qu'on fixe la variable y à la valeur y_0). Et de la même façon on peut définir , pour y assez proche de y_0 , la fonction $\psi(y)=f(x_0\,;y)$ (c'est à dire qu'on fixe la variable x à la valeur x_0).
On peut ainsi , en se ramenant aux deux fonctions à une variable φ et ψ , étudier la « dérivabilité » de f au point $(x\,;y_0)\in D$ en étudiant la dérivabilité des deux fonctions à une variable φ et ψ en x_0 et y_0 respectivement.

Définition 6
Avec les notations ci-dessus, on dira que f est dérivable par rapport à x (resp. par rapport à y) en $(x_0\,;y_0)$ si la fonction φ (resp. ψ) est dérivable en x_0 (resp. en y_0).
On utilisera les notations $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0\,;y_0)=\varphi'(x_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0\,;y_0)=\psi'(y_0)$ de sorte que, de façon plus explicite, si f est dérivable par rapport à x (resp. par rapport à y) en $(x\,;y_0)$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0\,;y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}\quad\left(\text{resp. }\frac{\partial f}{\partial y}(x_0\,;y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}\right).$$

Les quantités $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0\,;y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0\,;y_0)$ sont appelées <u>dérivées partielles</u> de f au point $(x\,;y_0)$.

Exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par l'expression $(x\,;y)\to x^2y+y^3x-y$.
Si l'on suppose y fixé, la fonction $x\to x^2y+y^3x-y$ est un polynôme du second degré par rapport à x de dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y)=2xy+y^3$.
Inversement, si l'on suppose cette fois que c'est la variable x qui fixée, la fonction $y\to x^2y+y^3x-y$ est un polynôme du troisième degré par rapport à y de dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y)=x^2+3y^2x-1$.

Définition 7
Toujours avec les notations précédentes, si l'on suppose que f est dérivable par rapport à x et y en tout point de D, on définit les fonctions dérivées partielles (d'ordre 1) $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ comme étant les fonctions à deux variables définies sur D par :
$(x\,;y)\in D\to\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y)$ et $(x\,;y)\in D\to\frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y)$.
On appelle <u>gradient de f</u> au point $(x\,;y)$ le vecteur $\overrightarrow{\nabla f}(x\,;y)$ de coordonnées

$$\overrightarrow{\nabla f}(x\,;y):\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y)\end{pmatrix}$$

Reprenons l'exemple précédent pour illustrer ces définitions.
La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par l'expression $(x\,;y)\to 2xy+y^3$ et la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par l'expression $(x\,;y)\to x^2+3y^2x-1$. On en déduit l'expression du gradient de f au point $(x\,;y)$: $\overrightarrow{\nabla f}(x\,;y):\begin{pmatrix}2xy+y^3\\ x^2+3y^2x-1\end{pmatrix}$. Ainsi, le gradient de f

au point de coordonnées $(2;1)$ est le vecteur de coordonnées $\overrightarrow{\nabla f}(2;1):\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}$.

Interprétation du gradient

On a, sous des hypothèses assez générales, le résultat suivant : le gradient de f au point de coordonnées $(x;y)$ est un vecteur de direction orthogonale à la ligne de niveau passant par le point de coordonnées $(x;y)$ et dirigé dans le sens des valeurs croissantes de f.

L'exemple de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par l'expression $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$ est assez parlant. En effet, un calcul direct montre que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point différent de l'origine et $\overrightarrow{\nabla f}(x;y):\begin{pmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Donc si M est le point de coordonnées $(x;y)$, avec $M\neq O$ on a : $\overrightarrow{\nabla f}(x;y)=\dfrac{1}{OM}\,.\,\overrightarrow{OM}$.

Si l'on se souvient que la ligne de niveau associée à f et passant par le point M est le cercle de centre O et passant par M, la relation $\overrightarrow{\nabla f}(x;y)=\dfrac{1}{OM}\,.\,\overrightarrow{OM}$ montre bien que le vecteur $\overrightarrow{\nabla f}(x;y)$ est orthogonal à ce cercle (c'est un vecteur radial) et dirigé vers l'extérieur de ce cercle où f prend des valeurs plus grandes qu'à l' intérieur de ce dernier.

II.4) Dérivées d'ordre 2 et plus

Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction à deux variables définie sur D et dérivable par rapport à chacune de ses variables x et y sur tout le domaine D.

Alors, il est possible que les fonctions $(x;y)\rightarrow\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ et $(x;y)\rightarrow\dfrac{\partial f}{\partial y}(x;y)$ soient à leur tour dérivables par rapport à x ou y, de sorte que l'on peut considérer les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)\right),\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)\right)\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)\right)\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)\right)$$

que l'on écrira plus simplement : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x;y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x;y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)$. On dira que la fonction f admet des dérivées partielles d'ordre 2.

Exemple : si l'on reprend l'exemple de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par l'expression $(x;y)\rightarrow f(x;y)=x^2y+y^3x-y$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y)=2\mathrm{x}\,y+y^3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x;y)=x^2+3y^2x-1$.

On remarque ainsi que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 et que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=2\mathrm{y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x;y)=2x+3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x;y)=2x+3y^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=6xy.$$

On remarquera sur cet exemple que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x;y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x;y)$. Il ne s'agit pas d'un hasard : sous des hypothèses très générales, dériver par rapport à x puis dériver par rapport à y revient à dériver par rapport à y

puis dériver par rapport à x :

Théorème 1 (de Schwartz)
Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction à deux variables définie sur D .On suppose que f est continue et admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 qui sont toutes les six continues sur D.
Alors on a $\forall (x;y)\in D,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y)$.

Remarque : il peut paraître surprenant d'imposer à la fonction f à la fois sa continuité et l'existence de ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2, quand on est habitué aux fonctions à une seule variable. En effet, contrairement à ces dernières, l'existence de dérivées partielles n'implique pas la continuité !

Un théorème analogue existe aussi pour les dérivées partielles d'ordre 3 et plus.
On a ainsi, dans les conditions d'application de ce théorème, 3 dérivées *a priori* différentes d'ordre 2 et $n+1$ dérivées partielles d'ordre n.

III) Comportement local d'une fonction à deux variables.

L'objet de ce paragraphe est d'approfondir les notions vues dans le II.

III.1) Différentielle.

Définition 8 Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction à deux variables définie sur D .On suppose que f est continue et admet des dérivées partielles d'ordre 1. Soit $(a;b)\in D$. On appelle <u>différentielle de f au point ($a;b$)</u> la fonction $\mathrm{df}_{(a;b)}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui, à un couple de réels $(h;k)$ associe
$\mathrm{df}_{(a;b)}(h;k):=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a;b)\right)h+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a;b)\right)k$.

Ainsi, étant donnée une fonction f qui vérifie les conditions de la définition ci-dessus, il existe autant de différentielles que de points de D où f admet des dérivées partielles. C'est pourquoi il est important de préciser « la différentielle de f **en** $(a;b)$. »

Prenons encore l'exemple de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par l'expression
$(x;y)\to f(x;y)=x^2y+y^3x-y$.
Alors, pour tout couple de réels $(a;b)$, l'application $\mathrm{df}_{(a;b)}$ est la fonction
$(h;k)\to(2\mathrm{ab}+b^3)h+(a^2+3ab^2-1)k$.
Ainsi, par exemple, l'application $\mathrm{df}_{(2;1)}$ est la fonction $(h;k)\to 5h+9k$. C'est une fonction qui est dite linéaire par rapport aux variables h et k.

Un des intérêts principaux de la notion de différentielle est qu'elle permet d'approximer simplement une fonction à deux variables.

III.2) Approximation affine d'une fonction à deux variables.

Pour commencer, prenons le cas d'une fonction φ à une variable dérivable sur $\mathbb{R}$. On a pour tout réel a $\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}=\varphi'(a)$ ce qui signifie que $\forall h\neq 0,\ \frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}=\varphi'(a)+\varepsilon(h)$ où $h\to\varepsilon(h)$ est une fonction qui tend vers 0 si h tend vers 0. Cette dernière relation se réécrit $\varphi(a+h)=\varphi(a)+h\varphi'(a)+h\varepsilon(h)$: cela signifie que si h est petit, $\varphi(a+h)$ peut être approximé par $\varphi(a)+h\varphi'(a)$ et l'erreur commise en remplaçant $\varphi(a+h)$ par $\varphi(a)+h\varphi'(a)$ vaut $h\varepsilon(h)$ c'est à dire h fois quelque chose qui tend vers 0 : cette erreur est négligeable devant h.
On peut prouver un résultat similaire dans le cas d'une fonction à deux variables où la relation précédente devient $f(a+h,b+k)=f(a;b)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a;b)\right)h+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a;b)\right)k+h\varepsilon_1(h,k)+k\varepsilon_2(h,k)$, où $(h;k)\to\varepsilon_1(h;k)$ et $(h;k)\to\varepsilon_2(h;k)$ sont deux fonctions qui tendent vers 0 en (0 ; 0) , ce qui peut se reformuler de la façon suivante :

Théorème 2 Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction à deux variables définie sur D .On suppose que f est continue et admet des dérivées partielles d'ordre 1 $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$ qui sont continues sur D . Soit $(a;b)\in D$. Alors il existe deux fonctions $(h;k)\to\varepsilon_1(h;k)$ et $(h;k)\to\varepsilon_2(h;k)$ qui tendent vers 0 en (0 ; 0) et telles que si h et k sont assez petits on ait :
$f(a+h,b+k)=f(a;b)+\mathrm{df}_{(a;b)}(h;k)+h\varepsilon_1(h,k)+k\varepsilon_2(h,k)$.
L'application $(h;k)\to f(a;b)+\mathrm{df}_{(a;b)}(h;k)$ s'appelle l'approximation affine de f au point $(a;b)$.

Preuve en annexe.

Remarque : Le théorème signifie que pour h et k petits, on a $f(a+h,b+k)\approx f(a;b)+\mathrm{df}_{(a;b)}(h;k)$.

Exemple : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par l'expression $f(x;y)=xy^2$. Considérons $(a;b)=(2;3)$.
La fonction f admet des dérivées partielles d'ordre 1 égales à $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=y^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=2xy$,
et qui constituent des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.
On a ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}(2;3)=9$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(2;3)=12$, donc la différentielle $\mathrm{df}_{(2;3)}$ a pour expression $\mathrm{df}_{(2;3)}(h;k)=9h+12k$.
On vérifie ainsi que l' approximation affine de f au point $(2;3)$ est donnée par :
(1) $f(2;3)+\mathrm{df}_{(2;3)}(h;k)=18+9h+12k$.
Calculons maintenant $f(;2+h,3+k)$:
$f(2+h,3+k)=(2+h)(3+k)^2=(2+h)(9+6k+k^2)=18+9h+12k+(6hk+2k^2+hk^2)$,
ce qui se réécrit grâce à (1) :
(2) $f(2+h,3+k)=f(2;3)+\mathrm{df}_{(2;3)}(h;k)+h(6k+k^2)+k(2k)$,
ce qui correspond à l'égalité donnée par le Théorème 1 avec $\varepsilon_1(h;k)=6k+k^2$ et $\varepsilon_2(h;k)=2k$.

IV) Extrema d'une fonction à deux variables.

De nombreux problèmes issus d'applications concrètes peuvent se formuler de la façon suivante : étant donnée une grandeur A qui dépend de deux variables x et y, et que l'on peut donc écrire sous la forme $A=f(x;y)$, comment choisir x et y pour que la quantité $A=f(x;y)$ soit la plus petite possible (ou la plus grande possible) ?
C'est ce que l'on appelle <u>un problème d'optimisation</u>. Nous allons voir dans cette section un théorème important qui permet de traiter cette question.

IV.1) Dérivation de fonctions composées.

Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction à deux variables définie sur D .On suppose que f est continue et admet des dérivées partielles d'ordre 1 $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$ qui sont continues sur D.
Soit Γ une courbe paramétrée de paramétrage $M:I\to\mathbb{R}^2$ qui à un réel $t\in I$ (I étant un intervalle ouvert) associe le point $M(t)$ de coordonnées $M(t):(x(t);y(t))$ dans un repère donné. On suppose enfin que $\Gamma\subset D$ de sorte que l'on peut considérer la fonction $\varphi:I\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(t)=f(x(t);y(t))$. Remarquer que la fonction φ est bien définie sur I car la condition $\Gamma\subset D$ signifie que le couple $(x(t);y(t))$ appartient au domaine de définition de f.

Interprétation : si l'on voit les choses de façon cinématique, $M(t)$ est un point mobile, et $\varphi(t)$ est la valeur de la fonction au point M à l'instant t.

On a un résultat important concernant la dérivabilité de $\varphi(t)$:

Propriété 2
On suppose que la fonction f est continue sur D et admet des dérivées partielles d'ordre 1 continues. On suppose que les fonctions $x:I\to\mathbb{R}$ et $y:I\to\mathbb{R}$ sont dérivables.
Alors la fonction $\varphi:I\to\mathbb{R}$ est dérivable et

$$\varphi'(t)=x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t);y(t))+y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t);y(t)).$$

Remarque : si on travaille dans un repère orthonormé, alors le résultat de la propriété 2 peut s'écrire à l'aide du produit scalaire : $\varphi'(t)=\overrightarrow{\nabla f}(x(t);y(t)).\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$.

<u>(*) Preuve</u> :
Soit $a\in I$ fixé une fois pour toutes, et soit $t\neq 0$, variable, assez petit pour que $a+t\in I$ (I est un intervalle ouvert).
Alors $\frac{\varphi(a+t)-\varphi(a)}{t}=\frac{f(x(a+t);y(a+t))-f(x(a);y(a))}{t}$.
Si l'on pose $h=x(a+t)-x(a)$ et $k=y(a+t)-y(a)$, en remarquant que $(x(a+t);y(a+t))=(x(a)+h;y(a)+k)$,
la relation ci-dessus se réécrit :

$$(1)\quad \frac{\varphi(a+t)-\varphi(a)}{t}=\frac{f(x(a)+h;y(a)+k)-f(x(a);y(a))}{t}.$$

Grâce à la définition de h et k et grâce à la continuité des fonctions $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ (elles sont dérivables donc continues), on remarque que si t tend vers 0, h et k tendent vers 0 : on utilise alors le Théorème 2 au point $(x(a); y(a))$, ce qui permet de dire qu'il il existe deux fonctions $(h;k) \to \varepsilon_1(h;k)$ et $(h;k) \to \varepsilon_2(h;k)$ qui tendent toutes les deux vers 0 en $(0;0)$ et telles que si h et k sont assez petits on ait :

$$f(x(a)+h, y(a)+k) = f(x(a); y(a)) + \mathrm{df}_{(x(a); y(a))}(h;k) + h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k),$$

donc la relation (1) se réécrit, pour t assez petit :

$$\frac{\varphi(a+t)-\varphi(a)}{t} = \frac{\mathrm{df}_{(x(a); y(a))}(h;k) + h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k)}{t}$$

$$(2) : \frac{\varphi(a+t)-\varphi(a)}{t} = \frac{\mathrm{df}_{(x(a); y(a))}(h;k)}{t} + \frac{h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k)}{t}.$$

(ne pas oublier que h et k dépendent de t).

Explicitons les deux termes du membre de droite.

D'une part, $\dfrac{\mathrm{df}_{(x(a); y(a))}(h;k)}{t} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(a); y(a)).\ \dfrac{h}{t} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(a); y(a)).\ \dfrac{k}{t}$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x(a); y(a)).\ \frac{x(t+a)-x(a)}{t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(a); y(a)).\ \frac{y(t+a)-y(a)}{t},$$

ce qui permet d'obtenir par la dérivabilité des fonctions $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$:

$$(3) : \lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{df}_{(x(a); y(a))}(h;k)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(a); y(a)).x'(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(a); y(a)).\ y'(a).$$

D'autre part :

$$\frac{h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k)}{t} = \frac{(x(t+a)-x(a))}{t}\varepsilon_1(h,k) + \frac{(y(t+a)-y(a))}{t}\varepsilon_2(h,k).$$

Si t tend vers 0 , on a vu que h et k tendent vers 0 , donc les quantités $\varepsilon_1(h,k)$ et $\varepsilon_2(h,k)$ aussi car les fonctions $(h;k) \to \varepsilon_1(h;k)$ et $(h;k) \to \varepsilon_2(h;k)$ tendent toutes les deux vers 0 en (0 ; 0) .

On obtient donc par la dérivabilité des fonctions $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ que

$$(4) : \lim_{t \to 0} \frac{h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k)}{t} = x'(a) \times 0 + y'(a) \times 0 = 0.$$

En faisant tendre t vers 0 dans (2) et en utilisant (3) et (4) il vient que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(a+t)-\varphi(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(a); y(a)).x'(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(a); y(a)).\ y'(a) + 0$$

c'est à dire que $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a et que

$$\varphi'(a) = x'(a)\frac{\partial f}{\partial x}(x(a); y(a)) + y'(a)\frac{\partial f}{\partial y}(x(a); y(a)).$$

Exemple : avec les notations et hypothèses précédentes, supposons que Γ soit incluse dans une ligne de niveau de f. Cela signifie donc que la fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est constante, donc que sa dérivée est nulle. On obtient alors si l'on travaille dans un repère orthonormé,

$$\forall t \in I,\ \varphi'(t) = \overrightarrow{\nabla} f(x(t); y(t)).\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = 0$$

ce qui s'interprète géométriquement en disant que les vecteurs $\overrightarrow{\nabla} f(x(t); y(t))$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$ ont des directions orthogonales. Le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$ étant un vecteur tangent à Γ au point $M(t)$ on en déduit que Γ est une courbe qui est orthogonale en chacun de ses points au gradient de f.

Corollaire (« chain rule »)

Soit D (resp. D') une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et soit f (resp. x, y) une (resp. des) fonction(s) à deux variables définie sur D (resp. D'). On suppose que f (resp. x, y) est continue et admet des dérivées partielles d'ordre 1 qui sont continues sur son domaine de définition, et l'on suppose aussi que $\forall (s;t) \in D', (x(s;t); y(s;t)) \in D$ de sorte que l'on peut définir une fonction à deux variables g sur D' par l'expression $g(s;t) = f(x(s;t); y(s;t))$.

Alors g est continue et admet des dérivées d'ordre 1 donnée par les expressions :

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s;t) = \frac{\partial x}{\partial s}(s;t)\ \frac{\partial f}{\partial x}(x(s;t); y(s;t)) + \frac{\partial y}{\partial s}(s;t)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x(s;t); y(s;t))$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(s;t) = \frac{\partial x}{\partial t}(s;t)\ \frac{\partial f}{\partial x}(x(s;t); y(s;t)) + \frac{\partial y}{\partial t}(s;t)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x(s;t); y(s;t))$$

.

<u>Preuve</u> : Prouvons par exemple la première égalité. Fixons $(s_0;t_0) \in D'$. Pour s assez proche de s_0 on a $(s;t_0) \in D'$ de sorte que l'on peut définir des courbes paramétrées $s \in I \to x(s,t_0)$ et $s \in I \to y(s,t_0)$ dont les dérivées sont $\frac{\partial x}{\partial s}(s;t_0)$ et $\frac{\partial y}{\partial s}(s;t_0)$.

L'égalité $\frac{\partial g}{\partial s}(s_0;t_0) = \frac{\partial x}{\partial s}(s_0;t_0)\ \frac{\partial f}{\partial x}(x(s_0;t_0); y(s_0;t_0)) + \frac{\partial y}{\partial s}(s_0;t_0)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x(s_0;t_0); y(s_0;t_0))$ devient alors une conséquence directe de la propriété 2 appliquée avec s_0 à la place de a.

Exemple important :

Les systèmes physiques présentant certaines propriétés de symétrie nous invitent à utiliser les coordonnées polaires. Cela revient à poser $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0;0)$, $D' = \{(r,\theta) \ / \ r > 0,\ \theta \in]-\pi;\pi]\}$, $x(r;\theta) = r\cos(\theta)$ et $x(r;\theta) = r\sin(\theta)$.

Ainsi, étant donnée une fonction f définie sur D, on peut définir une fonction g sur D' par l'expression : $g(r;\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Le corollaire ci-dessus donne alors :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r;\theta) = \frac{\partial x}{\partial r}(r;\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta); r\sin(\theta)) + \frac{\partial y}{\partial r}(r;\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta); r\sin(\theta))$$

ce qui donne plus simplement

(1) $\frac{\partial g}{\partial r}(r;\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$, en écrivant $x = x(r;\theta)$ et $y = y(r;\theta)$.

De la même façon, on trouve :

(2) $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r;\theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$.

Les relations (1) et (2) permettent d'exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$ en fonction de $\frac{\partial g}{\partial r}(r;\theta)$ et de $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r;\theta)$ par résolution d'un système de deux équations à deux inconnues. On obtient alors (faire le calcul !) :

$$\overrightarrow{\nabla} f(x;y) = \begin{cases} \cos(\theta)\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin(\theta)\frac{\partial g}{\partial \theta}(r;\theta) \\ \sin(\theta)\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\theta)\frac{\partial g}{\partial \theta}(r;\theta) \end{cases}.$$

Cette égalité constitue la formule du calcul d'un gradient en coordonnées polaires.

IV.2) Dérivée directionnelle.

Dans ce paragraphe, nous nous concentrons sur un cas particulier de la propriété 2 : Γ est un segment de droite.
Plus précisément, soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction à deux variables définie sur D .On suppose que f est continue et admet des dérivées partielles d'ordre 1 $\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y)$ qui sont continues sur D.
Soit $(x_0\,;y_0)\in D$ et soit $\vec{u}:\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur du plan non nul. On considère la droite passant par le point $M_0:(x_0\,;y_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}$. En considérant que cette droite est constituée par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{M_0M}$ soit de la forme $t\vec{u}$ on obtient un paramétrage de la droite avec les fonctions $x(t)=x_0+at$ et $y(t)=y_0+bt$, le point $M_0:(x_0\,;y_0)$ correspondant à $t=0$.
L'ensemble D étant ouvert, il existe un intervalle I contenant 0 tel que $\forall t\in I\,,\ (x(t)\,;y(t))\in D$. Par application de la propriété 2, on obtient

$$\forall t\in I\,,\ \frac{d}{\mathrm{d}t}\big(f(x(t)\,;y(t))\big)=x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t)\,;y(t))+y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t)\,;y(t))$$

d'où , pour $t = 0$:

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\big(f(x_0+at\,;y_0+bt)\big)_{t=0}=a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0\,;y_0)+b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0\,;y_0)$$

ce qui se réécrit :

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+at\,,y_0+bt)-f(x_0,y_0)}{t}=\overrightarrow{\nabla f}(x_0\,;y_0).\vec{u}\quad .$$

Cela nous amène à poser la :

Définition 9 Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ rapporté à un repère orthonormé et soit f une fonction à deux variables définie sur D .On suppose que f est continue et admet des dérivées partielles d'ordre 1 qui sont continues sur D.
Soit $(x_0\,;y_0)\in D$ et soit $\vec{u}:\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur du plan non nul. Alors la limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+at\,,y_0+bt)-f(x_0,y_0)}{t}$$

existe et est finie. Elle est appelée <u>dérivée de f au point</u> $(x_0\,;y_0)$ <u>selon le vecteur</u> $\vec{u}$ et vaut $\overrightarrow{\nabla f}(x_0\,;y_0).\vec{u}$. C'est ce que l'on appelle une <u>dérivée directionnelle</u> .

Exemple : Avec les hypothèses de la définition ci-dessus, on peut remarquer que $\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y)$ sont les dérivées de f dans les directions donnés par les deux vecteurs de base de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ respectivement.

La notion de dérivée directionnelle est à la base du principe de l'optimisation d'une fonction à deux variables.

IV.3) Points critiques.

Commençons par bien poser le problème d'optimisation évoqué en début de section IV grâce à la définition ci-dessous qui précise la notion d'extremum :

Définition 10 Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction à deux variables définie sur D.
Soit $(x_0;y_0)\in D$. Alors :
(i) On dit que f possède un <u>minimum</u> (resp. <u>maximum</u>) sur D en $(x_0;y_0)$ si
$\forall(x,y)\in D,\ f(x_0;y_0)\leq f(x;y)$ (resp $\forall(x,y)\in D,\ f(x_0;y_0)\geq f(x;y)$).
(ii) On dit que f possède un <u>minimum local</u> (resp. <u>maximum local</u>) en $(x_0;y_0)$) si pour tout $(x;y)\in D$ assez proche de $(x_0;y_0)$, on a $f(x_0;y_0)\leq f(x;y)$ (resp $f(x_0;y_0)\geq f(x;y)$).
(iii) Un minimum ou un maximum (local ou pas) est appelé <u>extremum</u>.

Exemple : on considère la fonction f définie sur le plan $\mathbb{R}^2$ par l'expression $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$.
On a $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0=f(0;0)$
ce qui signifie que f admet un minimum en (0;0). Cela peut se voir aussi par la représentation graphique de f donnée à la suite de la définition 2.

Définition 11 Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction à deux variables définie sur D. On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 1. Soit enfin $(x_0;y_0)\in D$. Alors, on dit que $(x_0;y_0)$ est un <u>point critique pour f</u> si $\overrightarrow{\nabla f}(x_0;y_0)=\vec{0}$.

Cette dernière notion est très importante car elle fournit une condition nécessaire pour un extremum :

Propriété 3 On suppose que la fonction f est continue sur D une partie <u>ouverte</u> de $\mathbb{R}^2$ et admet des dérivées partielles d'ordre 1 continues. Soit $(x_0;y_0)\in D$.
Alors si f admet un extremum en $(x_0;y_0)$, c'est un point critique pour f.

Remarques
(a) Sans l'hypothèse que D est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, la propriété est fausse.
(b) La réciproque est fausse : ce n'est pas parce que $(x_0;y_0)$ est un point critique pour f que cette fonction y admet un extremum.

Exemple, $D=\mathbb{R}^2$, $f(x;y)=x^2-y^2$. On a $\overrightarrow{\nabla f}(x;y)=\begin{pmatrix}2x\\-2y\end{pmatrix}$ donc le point $(0;0)$ est un point critique pour f. Mais on n'a pas d'extremum local pour f en $(0;0)$. En effet
$\forall x\neq 0,\forall y\neq 0,\ f(0;y)=-y^2<f(0;0)=0<x^2=f(x;0)$
ce qui signifie :
(i) qu'on peut trouver des points $(0;y)$ aussi proches qu'on veut de (0 ; 0) et dont l'image est inférieure à $f(0;0)$: $(0;0)$ n'est pas un minimum local.
(ii) qu'on peut trouver des points $(x;0)$ aussi proches qu'on veut de (0 ; 0) et dont l'image est supérieure à $f(0;0)$: $(0;0)$ n'est pas un maximum local.
La fonction f ne possède pas d'extremum local : s'il en existait un, il serait atteint en un point critique pour f, c'est à dire en $(0;0)$, ce qui n'est pas.

<u>Preuve</u> : Supposons que f admet un extremum en $(x_0;y_0)$, par exemple un minimum local. Alors pour t assez petit, on a $f(x_0+t,y_0)\geq f(x_0;y_0)$ donc :
a) pour tout réel t assez petit, $t\geq 0\Rightarrow\dfrac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0;y_0)}{t}\geq 0$ d'où, en faisant $t\to 0^+$,

on obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)\geq 0.$

b) pour tout réel t assez petit, $t\leq 0 \Rightarrow \frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0;y_0)}{t}\leq 0$ d'où, en faisant $t\to 0^-$, on obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)\leq 0.$

Par les points a) et b), on obtient que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)=0.$

En raisonnant de même sur la deuxième variable y, on prouve que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)=0.$ Au final, $(x_0;y_0)$ est donc un point singulier.

Le raisonnement est similaire pour le cas où f admet un maximum local en $(x_0;y_0)$.

Exemple : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par l'expression $f(x;y)=xy^2+x^2+y^2$.

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=y^2+2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=2xy+2y=2y(x+1)$.

Un point critique est donc solution du système : $\begin{cases} y^2+2x=0 \\ 2y(x+1)=0 \end{cases}$.

La deuxième équation donne $x=-1$ ou $y=0$. Le premier cas conduit à $y=\pm\sqrt{2}$ et le deuxième à $x=0$.

Nous avons donc trois points critiques pour f : $(-1;-\sqrt{2}),(-1;\sqrt{2})$ ou $(0;0)$.

La fonction f ne possède au maximum que trois extrema locaux ; elle en possède donc 0, 1 , 2 ou 3.

Nous allons voir dans le paragraphe suivant une condition suffisante pour qu'un point critique soit un point en lequel la fonction admet un extremum.

IV.4) Condition suffisante pour un extremum local.

Ce paragraphe est consacré à l'étude de ce Théorème :

Théorème 3

On suppose que la fonction f est continue sur D une partie <u>ouverte</u> de $\mathbb{R}^2$ et admet des dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 continues. Soit $(x_0;y_0)\in D$ un point critique.

Posons $R=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0;y_0)$, $S=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0;y_0)$ et $T=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0;y_0)$. Alors :

(i) Si $S^2-RT<0$, f admet un extremum local en $(x_0;y_0)$ et on a l'alternative :

a) $R>0$ et $T>0$: cet extremum local est un minimum local.

b) $R<0$ et $T<0$: cet extremum local est un maximum local.

(ii) Si $S^2-RT=0$, on ne peut rien dire

(iii) Si , $S^2-RT>0$ f n' admet pas d' extremum local en $(x_0;y_0)$.

Avant de démontrer ce théorème, appliquons le à la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par l'expression $f(x;y)=xy^2+x^2+y^2$. On a déjà vu qu'on a trois points critiques pour f : $(-1;-\sqrt{2}),(-1;\sqrt{2})$ ou $(0;0)$.

Commençons par calculer la quantité S^2-RT pour chacun de ces trois points critiques.

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=y^2+2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=2y(x+1)$ ce qui donne

$R=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=2,\quad S=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y)=2y$ et $T=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=2(x+1)$
donc $S^2-RT=4y^2-4(x+1)=4(y^2-x-1)$.
Examinons ce que vaut cette quantité pour chacun des trois points critiques.

Pour $(-1;-\sqrt{2})$ ou $(-1;+\sqrt{2})$, on a $S^2-RT=8$: pas d'extremum local en ces points.
Pour $(0;0)$, $S^2-RT=-4$ on a un extremum local. On remarque alors que R et T qui sont tous les deux strictement positifs : on a à faire à un minimum local.

Remarque : ce minimum n'est que local, sinon on aurait $\forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}, f(x;y)\geq f(0;0)=0$ ce qui est contredit (par exemple) par le fait que $f(-3;-3)=-9<f(0;0)$.

Pour démontrer le Théorème 3, on commence par établir une propriété équivalente pour des fonctions à une variable :

Lemme
Soit $a>0$ et $\varphi:]-a;a[\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.
On suppose que $\varphi'(0)=0$ et que $\forall t\in]-a;a[,\ \varphi''(t)\geq 0$ (resp. $\forall t\in]-a;a[,\ \varphi''(t)\leq 0$).
Alors la fonction φ admet un minimum (resp. un maximum) global sur l'intervalle $]-a;a[$ en 0 .

<u>Preuve du Lemme</u> :
Plaçons nous d'abord dans le cas où $\forall t\in]-a;a[,\ \varphi''(t)\geq 0$. Cela signifie que la fonction φ' est croissante sur $]-a;a[$: puisque elle s'annule en 0, c'est donc que
$\forall t\in]-a;0[,\ \varphi'(t)\leq 0$ et $\forall t\in]0;a[,\ \varphi'(t)\geq 0$.
On en déduit que φ est décroissante sur $]-a;0]$ et croissante sur $[0;a[$: elle a donc un minimum en 0.
Plaçons nous ensuite dans le cas où $\forall t\in]-a;a[,\ \varphi''(t)\leq 0$. Cela signifie que la fonction φ' est décroissante sur $]-a;a[$: puisque elle s'annule en 0, c'est donc que
$\forall t\in]-a;0[,\ \varphi'(t)\geq 0$ et $\forall t\in]0;a[,\ \varphi'(t)\leq 0$.
On en déduit que φ est croissante sur $]-a;0]$ et décroissante sur $[0;a[$: elle a donc un maximum en 0.

<u>(*) Preuve du Théorème 3 (i)</u>
On suppose donc que $S^2-RT<0$. Remarquons déjà que cela implique
$RT>S^2\geq 0$, donc nécessairement, R et T sont non nuls et de même signe.

<u>Étape 1.</u>

Puisque les dérivées d'ordre 2 de la fonction f sont continues, la fonction
$$(x;y)\in D\to\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x;y)\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)$$
est continue. En $(x_0;y_0)$ elle prend la valeur $S^2-RT<0$, donc par continuité de cette fonction, on peut supposer que $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x;y)\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)<0$ si $(x;y)$ est assez proche de $(x_0;y_0)$. Pour les mêmes raisons, on peut supposer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)$ restent non nuls et du même signe que R et T si $(x;y)$ est assez proche de $(x_0;y_0)$.

Soit donc D_0 un disque ouvert non vide de centre le point $(x_0 ; y_0)$ et inclus dans *D,* tel que

$$\forall (x ; y) \in D_0,\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x ; y)\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x ; y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x ; y) < 0,$$

et

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x ; y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x ; y)$ sont non nuls et du même signe que R et T.

On appellera ε le rayon de ce disque.

<u>Étape 2.</u>

Soit $\vec{u} : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur de norme 1 quelconque du plan.

Posons $\varphi(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$. Pour *t=0,* on a $(x_0 + at, y_0 + bt) = (x_0 ; y_0)$ qui sont les coordonnées du centre du disque D_0 et quand *t* décrit l'intervalle $]-\varepsilon ; +\varepsilon[$, les points de coordonnées $(x_0 + at, y_0 + bt)$ décrivent le diamètre de D_0 dont la direction est celle de $\vec{u} : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Par la propriété 2, la fonction φ est dérivable sur $]-\varepsilon ; +\varepsilon[$ et

$$\forall t \in]-\varepsilon ; +\varepsilon[,\ \varphi'(t) = a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + at ; y_0 + bt) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + at ; y_0 + bt) \ .$$

Notons déjà que $\varphi'(0) = a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 ; y_0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 ; y_0) = 0$ car $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 ; y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 ; y_0) = 0$ vu que $(x_0 ; y_0)$ est un point critique de *f*.

En ré appliquant la propriété 2 aux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ (les dérivées partielles d'ordre 2 de *f* sont continues) , on obtient que la fonction φ' est aussi dérivable sur $]-\varepsilon ; +\varepsilon[$ et

$$\forall t \in]-\varepsilon ; +\varepsilon[,\ \varphi''(t) = a\left(a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + at ; y_0 + bt) + b\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + at ; y_0 + bt)\right)$$
$$+ b\left(a\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + at ; y_0 + bt) + b\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + at ; y_0 + bt)\right)$$

$$= a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + at ; y_0 + bt) + 2\mathrm{a}\, b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + at ; y_0 + bt) + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + at ; y_0 + bt) \ .$$

On va montrer que cette quantité est toujours du signe de R et T.

<u>Étape 3</u>

Posons

$$R(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + at ; y_0 + bt),\ S(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + at ; y_0 + bt) \text{ et } T(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + at ; y_0 + bt)$$

et notons que $R(0) = R,\ S(0) = S$ et $T(0) = T$.

On a alors :

$$\forall t \in]-\varepsilon ; +\varepsilon[,\ \varphi''(t) = a^2 R(t) + 2\mathrm{a}\, b S(t) + b^2 T(t).$$

Comme d'après l'étape 2, $\forall t \in]-\varepsilon ; +\varepsilon[,\ (x_0 + at, y_0 + bt) \in D_0$, on a d'après l' étape 1 $\forall t \in]-\varepsilon ; +\varepsilon[,\ S(t)^2 - R(t)T(t) < 0$ et $R(t)$ et $T(t)$ sont non nuls et du signe de R et T. On a alors :

$$\forall t\in]-\varepsilon;+\varepsilon[,\ \varphi''(t)=R(t)\left(a^2+2ab\frac{S(t)}{R(t)}+b^2\frac{T(t)}{R(t)}\right)$$
$$=R(t)\left(\left(a+b\frac{S(t)}{R(t)}\right)^2-b^2\frac{S^2(t)}{R^2(t)}+b^2\frac{T(t)}{R(t)}\right)=R(t)\left(\left(a+b\frac{S(t)}{R(t)}\right)^2+b^2\frac{R(t)T(t)-S^2(t)}{R^2(t)}\right).$$

La quantité $R(t)T(t)-S(t)^2$ est toujours positive donc $\varphi''(t)$ est du signe de $R(t)$, donc du signe de R et de T.
On applique alors le lemme à la fonction φ :
Si $R>0$ et $T>0$, la fonction φ admet un minimum local en 0, donc $\forall t\in]-\varepsilon;+\varepsilon[$, on a $\varphi(0)\leq\varphi(t)$
c'est à dire :
$f(x_0;y_0)\leq f(x_0+at,y_0+bt)$.
Cela étant valable pour tout $t\in]-\varepsilon;+\varepsilon[$ et pour tout vecteur $\vec{u}:\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ de norme 1, nous avons
$\forall(x;y)\in D_0,\ f(x_0;y_0)\leq f(x;y)$,
car tout point de D_0 a ses coordonnées sous la forme (x_0+at,y_0+bt) pour un certain $t\in]-\varepsilon;+\varepsilon[$ et un certain vecteur $\vec{u}:\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ de norme 1.
Si $R>0$ et $T>0$, un raisonnement très similaire mène à la conclusion :
$\forall(x;y)\in D_0,\ f(x_0;y_0)\geq f(x;y)$.

Pour expliquer le point (ii) du Théorème, prenons les deux exemples suivants : $f_1(x;y)=x^4+y^4$ et $f_2(x;y)=x^4-y^4$. On choisit $(x_0;y_0)=(0;0)$ qui est clairement un point critique pour chacune de ces deux fonctions. Dans chacun de ces deux cas, on a (par un calcul immédiat) $R=S=T=0$ donc $S^2-RT=0$. Mais, si f_1 possède bien un minimum (global) en $(0;0)$, il n'en est pas de même pour f_2 (ce qui peut se prouver de la même façon que pour l'exemple de la remarque b) qui suit la propriété 3).
On admet le point (iii).

V) Équations aux dérivées partielles .

Certaines équations obtenues en Physique se révèlent particulièrement complexes car elles font intervenir plusieurs variables numériques.
Par exemple, l'équation de Laplace, vérifiée sous certaines conditions par un potentiel électrostatique $V(x;y)$ qui dépend de deux variables d'espace :
(1) $\forall(x;y)\in D,\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x;y)+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x;y)=0$,
où D est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
La relation (1) ressemble à une équation différentielle, à ceci près que la fonction inconnue est une fonction à plusieurs variables et que l'on a des dérivées par rapport à des variables différentes.

Le monde des équations aux dérivées partielles (E.D.P) est très vaste. Ce domaine est d'une importance pratique capitale car les modélisations physiques utilisent grandement les E.D.P.

On sait qu'une fonction <u>d'une variable</u> dérivable et de dérivée identiquement nulle sur un intervalle y est constante. La propriété suivante explique ce qu'il en est pour une fonction à deux variables :

Propriété 4

Soit f une fonction à deux variables définie et admettant des dérivées d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$.

1) On suppose que $\forall(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y)=0$. Alors, f est indépendante de la variable x ce qui signifie qu'il existe une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x\,;y)=\varphi(y)$.

2) On suppose que $\forall(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y)=0$. Alors, f est indépendante de la variable y ce qui signifie qu'il existe une fonction ψ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x\,;y)=\psi(x)$.

3) On suppose que $\forall(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{\nabla} f(x\,;y)=\vec{0}$. Alors, f est constante.

<u>Preuve du 1)</u> (le 2) se démontre exactement de la même façon.)

On fixe un réel $y_0\in\mathbb{R}$ et on définit la fonction $a\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par l'expression $a(x)=f(x\,,y_0)$.

Alors la fonction a est dérivable et $\forall x\in\mathbb{R},\ a'(x)=\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y_0)=0$ ce qui signifie que la fonction a est constante.

Cette constante dépend à priori de y_0, car si l'on change le réel y_0, on peut changer la valeur de la fonction a, puisqu'on change sa définition.

Ainsi, si l'on nomme cette constante $\varphi(y_0)$, on a $a(x)=f(x\,,y_0)=\varphi(y_0)$ ce qui permet alors, en considérant y_0 arbitraire, de définir une fonction φ sur $\mathbb{R}$ telle que

$\forall(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x\,;y)=\varphi(y)$.

Puisque f est supposée être dérivable par rapport à y, cette dernière relation implique que la fonction φ est dérivable.

Le (iii) est un conséquence directe des points (i) et (ii), car une fonction de x et de y qui ne dépend ni de x ni de y est une constante absolue.

Remarque : dans cette propriété, on ne peut pas remplacer $\mathbb{R}^2$ par un ouvert quelconque D, sans rajouter des hypothèses sur ce dernier.

Exemple : Soit f une fonction à deux variables définie et admettant des dérivées d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que f vérifie l'EDP $\forall(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ y\frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y)+f(x\,;y)=0$.

Alors, par la formule de la dérivée d'un produit, cela signifie que $\forall(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial}{\partial y}\big(y\,f(x\,;y)\big)=0$.

En appliquant la propriété 2, on en déduit qu'il existe une fonction ψ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$\forall(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ y\,f(x\,;y)=\psi(x)$. En posant $y=0$ dans cette dernière relation, il vient que

$\forall x\in\mathbb{R},\ 0=\psi(x)$ ce qui signifie que $\forall(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ y\,f(x\,;y)=0$ d'où

$\forall(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ y\neq 0\Rightarrow f(x\,;y)=0$. Maintenant, pour tout réel x, l'application $y\to f(x\,;y)$ est dérivable (car f doit être dérivable par rapport à y) donc continue, donc, pour x fixé, le fait que

$\forall y\neq 0,\ f(x\,;y)=0$ implique $f(x\,;0)=0$.

On en déduit que la fonction f est la fonction nulle.

On termine ce paragraphe par deux exemples d'EDP simples .

Exemple 1

Soit f une fonction à deux variables définie et admettant des dérivées d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que f vérifie l'EDP $\forall(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y)+y\,f(x\,;y)=0$. Cette équation ne fait intervenir qu'une dérivation par rapport à x, ce qui signifie que l'on peut fixer y et considérer l'application partielle

$\varphi_y : x \to f(x;y)$. Cette fonction vérifie l'équation différentielle ordinaire : $\varphi_y'(x) + y\varphi_y(x) = 0$ qui a pour famille de solutions $x \to C e^{-yx}$. On en déduit que pour chaque *y*, la fonction φ_y admet une expression de la forme $\varphi_y(x) = C e^{-xy}$. Mais cette dernière écriture n'est pas correcte car la « constante » C peut dépendre de *y,* même si elle est indépendante de *x.* On écrira donc plutôt $\varphi_y(x) = C(y) e^{-xy}$ pour marquer la dépendance de la constante C par rapport au paramètre *y.* On en déduit qu 'il existe une fonction à une variable : $y \to C(y)$ telle que $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, f(x;y) = C(y) e^{-xy}$. En considérant le cas $x = 0$, on en déduit que nécessairement $\forall y \in \mathbb{R}, C(y) = f(0;y)$ ce qui montre que la fonction $C(y)$ est continûment dérivable.

Inversement, une fonction *f* qui admet une expression de la forme $f(x;y) = C(y) e^{-xy}$, où la fonction $C(y)$ est continûment dérivable, admet des dérivées d'ordre 1 :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = -y C(y) e^{-xy}, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \left(C'(y) - x C(y)\right) e^{-xy},$$

et vérifie l'EDP $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial f}{\partial x}(x;y) + y f(x;y) = 0$ car

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial f}{\partial x}(x;y) + y f(x;y) = -y C(y) e^{-xy} + y C(y) e^{-xy} = 0.$$

Ce type d'EDP n'est rien d'autre qu'une équation différentielle ordinaire « déguisée », ce qui n'est plus le cas pour l'exemple suivant.

Exemple 2

Soit *f* une fonction à deux variables continue et admettant des dérivées d'ordre 1 continues sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que *f* vérifie l' EDP $\forall (s;t) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial f}{\partial s}(s;t) + \frac{\partial f}{\partial t}(s;t) = 0$.

Définissons la fonction *g* sur $\mathbb{R}^2$ en posant $g(s;t) = f(s+t;t)$. En appliquant le corollaire de la propriété 2 avec $x(s;t) = s+t$ et $y(s;t) = t$, $D = D' = \mathbb{R}^2$, on obtient que *g* admet des dérivées d'ordre 1 et que $\forall (s;t) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial g}{\partial t}(s;t) = 1 \frac{\partial f}{\partial s}(s;t) + 1 \frac{\partial f}{\partial t}(s;t) = 0$ en vertu de l'EDP vérifiée par la fonction *f.* Cela prouve donc qu'il existe une fonction φ dérivable telle que

$\forall (s;t) \in \mathbb{R}^2, \ g(s;t) = \varphi(s)$ c'est à dire $\forall (s;t) \in \mathbb{R}^2, \ f(s+t;t) = \varphi(s)$

En remplaçant *s* par *s-t* on obtient :

$\forall (s;t) \in \mathbb{R}^2, \ f(s-t+t;t) = \varphi(s-t)$

donc

$\forall (s;t) \in \mathbb{R}^2, \ f(s;t) = \varphi(s-t)$.

Inversement, si *f* est une fonction de la forme $f(s;t) = \varphi(s-t)$ où φ est une fonction à une variable arbitraire, et dérivable à dérivée continue, alors *f* est continue et dérivable par rapport à chacune de ses variables, avec $\forall (s;t) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial f}{\partial s}(s;t) = \varphi'(s-t)$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(s;t) = -\varphi'(s-t)$. La fonction *f* est donc à dérivées d'ordre 1 continues , et on a bien $\forall (s;t) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial f}{\partial s}(s;t) + \frac{\partial f}{\partial t}(s;t) = 0$.

On a trouvé toutes les fonctions à deux variables, continues et admettant des dérivées d'ordre 1 continues sur $\mathbb{R}^2$, et vérifiant l'EDP $\forall (s;t) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial f}{\partial s}(s;t) + \frac{\partial f}{\partial t}(s;t) = 0$.

On ne peut être que frappé par la taille de l'ensemble des solutions, car la fonction φ est une fonction arbitraire (du moment qu'elle est dérivable à dérivée continue, mais il y en a quand même beaucoup!).
En effet, si l'ensemble des solutions d'une équation différentielle possède un ou deux degrés de liberté (elles

dépendent d'un ou deux paramètres réels), l'ensemble des solutions de cette EDP dépend d'une fonction arbitraire φ, ce qui constitue un ensemble de degrés de liberté infini : une simple « condition intiale » du type $f(0;0)=\alpha$ ne suffit plus. Il faut en fait avoir une connaissance *a priori* de la fonction *f* sur un ensemble de points bien plus grand que le seul point $(0;0)$, par exemple une droite.
Exemple : si l'on sait *a priori* que pour *t* fixé à 0, on a la relation $f(s;0)=e^{-s}$, alors, de par la forme générale des solutions, nous avons : $e^{-s}=f(s;0)=\varphi(s-0)$.
Puisque $f(s;t)=\varphi(s-t)$, on en déduit alors l'expression de *f* de façon unique
$f(s;t)=e^{-(s-t)}=e^{t}e^{-s}$.

VI) Champ de vecteurs.

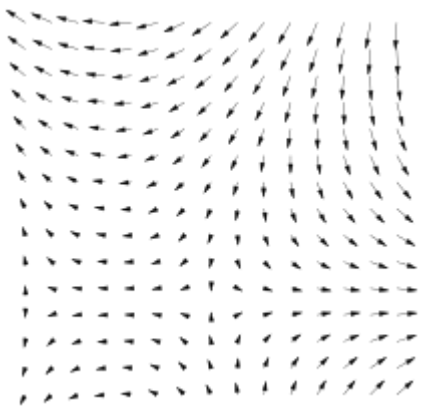
VI.1) Généralités

On travaille toujours dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ que l'on supposera orthonormé (c'est à dire que les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions orthogonales et sont tous les deux de norme 1).

Définition 12
Soit *D* une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. On appelle <u>champ de vecteurs sur *D*</u> une application $\vec{V}$ de *D* dans $\mathbb{R}^2$. Elle peut donc s'écrire sous la forme $\vec{V}:(x;y)\rightarrow\vec{V}(x;y):\begin{pmatrix}V_1(x;y)\\V_2(x;y)\end{pmatrix}$ où les fonctions V_1 et V_2 sont des fonctions à deux variables sur *D*.

Remarque : représenter graphiquement un champ de vecteurs est délicat car il nous faudrait pour cela travailler dans un espace à 4 dimensions.
Une façon plus commode pour représenter un champ de vecteurs consiste à imaginer qu'en chaque point de coordonnées $(x;y)$, on trace le vecteur $\vec{V}(x;y)$ en prenant pour origine le point $(x;y)$.

Exemple de représentation d'un champ de vecteurs



Exemple : définissons sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0;0)$ le champ de vecteurs $\vec{V}:(x;y):\begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$.

On remarque que $\vec{V}(x;y)=\dfrac{1}{\|\overrightarrow{OM}\|}\overrightarrow{OM}$ où M est le point de coordonnées $(x;y)$, ce qui signifie que pour le représenter, on imagine qu' en chaque point M (différent de l'origine du repère) de coordonnées $(x;y)$ on applique un vecteur de norme 1 et de même sens et même direction que $\overrightarrow{OM}$.

La notion de champ de vecteurs est très importante en physique pour modéliser par exemple un champ de forces où en chaque point s'applique une force, c'est à dire un vecteur.
De même en météorologie, on modélise le vent comme un champ de vecteurs : en chaque point de la surface du sol, le vent en ce point est représenté par un vecteur dont la direction et le sens correspond à ceux du vent, et dont la norme représente la vitesse de ce vent.

Il est quelquefois utile d'étudier un champ de vecteur via ses lignes de champ :

Définition 13

Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et $\vec{V}:\begin{pmatrix} V_1(x;y) \\ V_2(x;y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteur sur D.

On considère une courbe paramétrée Γ de paramétrage $t\in I \rightarrow (x(t);y(t))$ telle que les fonctions x et y soient dérivables et que $\forall t\in I,\ (x(t);y(t))\in D$.
On dit que Γ est une <u>ligne de champ</u> pour le champ de vecteur $\vec{V}(x;y)$ si les vecteurs $\begin{pmatrix} V_1(x(t);y(t)) \\ V_2(x(t);y(t)) \end{pmatrix}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}}{dt}(t)=\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ sont colinéaires à chaque instant $t\in I$, c'est à dire si $\forall t\in I,\ x'(t)V_2(x(t);y(t))-y'(t)V_1(x(t);y(t))=0$.

Remarque : ce la signifie qu'à chaque instant *t,* le vecteur tangent $\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$ a la même direction que le champ de vecteur au point $M(t)$.
Par exemple, une poussière emportée par le vent suit une ligne de champ pour le champ de vecteurs formé par les vents.

Exemple : considérons le cas $D=\mathbb{R}^2$ et $\begin{pmatrix} V_1(x;y) \\ V_2(x;y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ .Trouvons les lignes de champ passant par le point $A(1;0)$. Plus exactement, on cherche à savoir quels sont les points du plan que l'on peut relier au point A par une ligne de champ. On cherche donc deux fonctions dérivables x et y sur un intervalle I le plus grand possible telles que $\forall t\in I,\ x'(t)x(t)-y'(t)y(t)=0$. Cela signifie que la fonction $\varphi(t)=x^2(t)-y^2(t)$ a une dérivée identiquement nulle sur I, c'est à dire qu'elle y est constante. Sachant que la ligne de champ doit passer par A, cela signifie qu'il existe $t_0\in I$ tel que $x(t_0)=1$ et $y(t_0)=0$.
On en déduit alors que $\forall t\in I, \varphi(t)=\varphi(t_0)=1$, c'est à dire que $\forall t\in I, x^2(t)-y^2(t)=1$.
Cette relation, qui peut aussi s'écrire $\forall t\in I, x^2(t)=1+y^2(t)$, implique que $\forall t\in I, x^2(t)\geq 1$ donc la fonction $t\in I\rightarrow x(t)$ ne s'annule pas, donc est de signe constant par le Théorème des valeurs intermédiaires ($t\in I\rightarrow x(t)$ est continue puisqu'elle est dérivable). Puisque $x(t_0)=1$, il vient que $\forall t\in I, x(t)\geq 0$, donc on a $\forall t\in I, x(t)=+\sqrt{1+y^2(t)}$.

Réciproquement, définissons maintenant la courbe paramétrée Γ : $t\in\mathbb{R}\rightarrow(x(t);y(t))$ avec

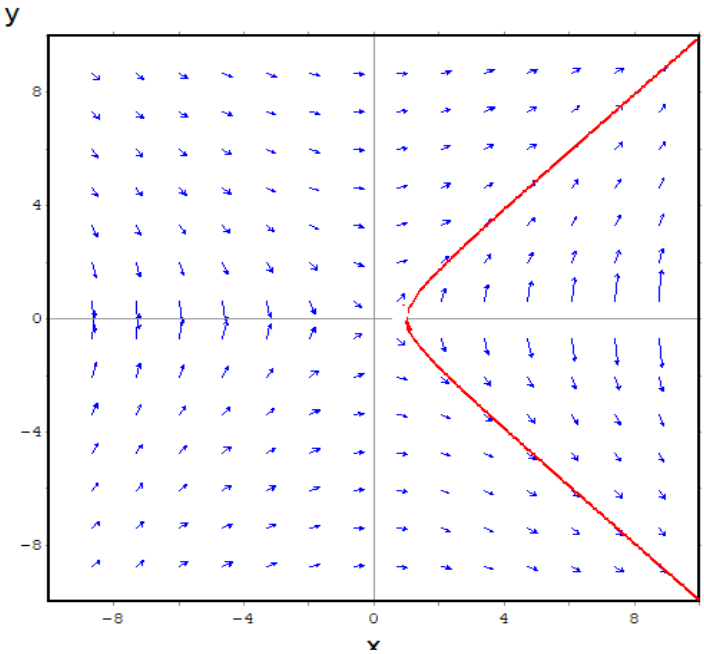
$x(t)=\sqrt{t^2+1}$ et $y(t)=t$. Ce qui précède montre que toute ligne de champ passant par A est incluse dans Γ .

Mais Γ est elle-même un ligne de champ passant par A car, d'une part, $A=(x(0);y(0))$, donc A est le point de paramètre 0, et d'autre part, $t\in\mathbb{R}\rightarrow(x(t);y(t))$ vérifie l'équation de la définition 13 :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ x'(t)x(t)-y'(t)y(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}.\sqrt{t^2+1}-1.t=t-t=0.$$

Ainsi, l'ensemble des points joignables à A par une ligne de champ est Γ tout entier, autrement dit la courbe d'équation $x^2-y^2=1$ avec $x\geq 0$.

Champ de vecteur associé à $\vec{V}(x;y)$ *et tracé de* Γ *en rouge :*



VI.2) Champ de gradient

Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction à deux variables définie sur D .On suppose que f est continue et admet des dérivées partielles d'ordre 1 $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$ qui sont continues sur D .

On remarque alors que l'application $(x;y)\in D \rightarrow \overrightarrow{\nabla f}(x;y):\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x;y)\end{pmatrix}$ est un champ de vecteur sur *D*.

La question réciproque que l'on est amené à se poser est la suivante : étant donné un champ de vecteurs $\vec{V}(x;y)$ définie sur un ouvert *D*, peut on-trouver une fonction f continue et admettant des dérivées partielles d'ordre 1 sur *D* telle que $\forall(x;y)\in D,\ \overrightarrow{\nabla f}(x;y)=\vec{V}(x;y)$?

Définition 14

Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et $\vec{V}:\begin{pmatrix} V_1(x;y) \\ V_2(x;y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteur sur D.

On dit que $\vec{V}$ est un <u>champ de gradient</u> s'il existe une fonction continue à deux variables f et à dérivées partielles d'ordre 1 continues et définies sur D telle que $\forall (x;y)\in D,\ \overrightarrow{\nabla f}(x;y)=\vec{V}(x;y)$.
La fonction f est appelée <u>fonction potentielle</u> associée à $\vec{V}$.

Le problème de savoir si un champ de vecteurs $\vec{V}:\begin{pmatrix} V_1(x;y) \\ V_2(x;y) \end{pmatrix}$ est un champ de gradient est analogue au problème de la recherche de primitives pour une fonction <u>d'une</u> variable réelle. Dans ce dernier cas, il suffit que la fonction soit continue ; pour un champ de vecteur, c'est plus compliqué.

Soit par exemple le champ de vecteurs $\vec{V}:\begin{pmatrix} V_1(x;y) \\ V_2(x;y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$ défini sur $\mathbb{R}^2$. Ce champ de vecteurs n'est pas un champ de gradients ! En effet, s'il existait une fonction continue à deux variables f définie sur D telle que $\forall (x;y)\in D,\ \overrightarrow{\nabla f}(x;y)=\vec{V}(x;y)$, on aurait $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x;y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$.

De l'expression de $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ on déduit que $f(x;y)=\frac{1}{2}x^2-xy+\alpha(y)$ pour une certaine fonction d'une variable $y\to\alpha(y)$. La fonction f devant être dérivable par rapport à y, cela implique que la fonction α est aussi dérivable. En dérivant l'égalité ci-dessus par rapport à y on aurait :

$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=-x+\alpha'(y)=x+y$. En faisant $y=0$, on aurait :

$\forall x\in\mathbb{R},\ 2x=\alpha'(0)$ ce qui est impossible . On en déduit que $\vec{V}$ n'est pas un champ de gradient .

La propriété suivante permet de caractériser les champs de gradients. Avant, on a besoin de la :

Définition 15

Un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ est dit <u>étoilé</u> s'il existe un point $\Omega\in D$ tel que pour tout autre point M de D , le segment $[\Omega M]$ est inclus dans D.

Exemples :

les triangles ou les quadrilatères ouverts sont des ouverts étoilés.

$\mathbb{R}^2\setminus(0;0)$ n'est pas un ouvert étoilé ; s'il l'était, Ω' , le symétrique de Ω par rapport à l'origine, serait aussi dans $\mathbb{R}^2\setminus(0;0)$, donc le milieu du segment $[\Omega\Omega']$ aussi, ce qui impliquerait que $(0;0)\in\mathbb{R}^2\setminus(0;0)$ ce qui est absurde !

Propriété 5 Soit D une partie ouverte étoilée de $\mathbb{R}^2$ et $\vec{V}:\begin{pmatrix} V_1(x;y) \\ V_2(x;y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteur sur D tel que les fonctions V_1 et V_2 soient des fonctions continues et admettant des dérivées partielles d'ordre 1 continues. Alors $\vec{V}$ est un champ de gradients si et seulement si

$\forall (x;y)\in D,\ \frac{\partial V_1}{\partial y}(x;y)=\frac{\partial V_2}{\partial x}(x;y)$ (égalité des dérivées croisées). La fonction potentielle associée à $\vec{V}$ est unique à une constante additive près.

Exemples :

1) Soit le champ de vecteurs $\vec{V} : \begin{pmatrix} V_1(x;y) \\ V_2(x;y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$ défini sur $\mathbb{R}^2$. Ce champ de vecteurs n'est pas un champ de gradients car $\frac{\partial V_1}{\partial y}(x;y) = -1$ alors que $\frac{\partial V_2}{\partial x}(x;y) = +1$.

2) Soit le champ de vecteurs $\vec{V} : \begin{pmatrix} V_1(x;y) \\ V_1(x;y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-3y \end{pmatrix}$ défini sur $\mathbb{R}^2$. Ce champ de vecteurs est un champ de gradients car $\frac{\partial V_1}{\partial y}(x;y) = \frac{\partial V_2}{\partial x}(x;y) = 1$. Pour trouver une fonction potentielle f, on part de l'égalité $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 2x+y$ d'où l'on déduit que $f(x;y) = x^2 + yx + \alpha(y)$ pour une certaine fonction dérivable α. On a donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = x + \alpha'(y)$. Or, puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = V_2(y)$ on en déduit que $x + \alpha'(y) = x - 3y$ donc $\alpha(y) = \frac{-3}{2}y^2 + C$ où C est une constante. On trouve donc $f(x;y) = x^2 + yx - \frac{3}{2}y^2 + C$. On constate que f est unique à une constante additive près.

<u>(*) Idée de la preuve :</u>

Nous nous plaçons dans le cas où $D = \mathbb{R}^2$.

La fonction $s \to V_2(0;s)$ est dérivable, donc continue et pour y fixé, il en est de même de la fonction $t \to V_1(t;y)$ On définit ainsi une fonction f par l'expression pour $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$$(1) \quad f(x;y) = \int_0^x V_1(t;y)\,dt + \int_0^y V_2(0;s)\,ds.$$

Pour y fixé, la quantité $\int_0^y V_2(0;s)\,ds$ est constante et la fonction $x \to \int_0^x V_1(t;y)\,dt$ est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction $t \to V_1(t;y)$. On en déduit que f est dérivable par rapport à x et

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = V_1(x;y) \quad .$$

Pour x fixé, la fonction $y \to \int_0^y V_2(0;s)\,ds$ est dérivable de dérivée $y \to V_2(0;y)$. Si l'on considère maintenant l'intégrale $\int_0^x V_1(t;y)\,dt$, les bornes sont fixes et l'intégrale ne dépend que de y : cette expression définit une fonction de y. En utilisant des propriétés (hors programme) sur les intégrales à paramètres, on pourrait justifier que la fonction $y \to \int_0^x V_1(t;y)\,dt$ est dérivable de dérivée

$$y \to \int_0^x \frac{\partial V_1}{\partial y}(t;y)\,dt \quad .$$

La relation (1) montre alors que la fonction f est aussi dérivable par rapport à y de dérivée :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \int_0^x \frac{\partial V_1}{\partial y}(t;y)\,dt + V_2(0;y) = \int_0^x \frac{\partial V_2}{\partial x}(t;y)\,dt + V_2(0;y)$$

en utilisant l'hypothèse que $\forall (x;y) \in D,\ \frac{\partial V_1}{\partial y}(x;y) = \frac{\partial V_2}{\partial x}(x;y)$.

En remarquant que pour y fixé, la fonction $t \to V_2(t;y)$ est une primitive de la fonction

$t \rightarrow \frac{\partial V_2}{\partial x}(t\,;y)$ on a alors :

(3) $\frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y)=\int_0^x \frac{\partial V_2}{\partial x}(t\,;y)\,dt+V_2(0\,;y)=V_2(x\,;y)-V_2(0\,;y)+V_2(0\,;y)=V_2(x\,;y)$,

et les relations (2) et (3) prouvent que la fonction *f* est bien une fonction potentielle associée à $\vec{V}$.

On prouve maintenant l'unicité à une constante additive près.
Soient f_1 et f_2 deux fonctions potentielles associées à $\vec{V}$.
Alors $\frac{\partial(f_2-f_1)}{\partial x}(x\,;y)=\frac{\partial f_2}{\partial x}(x\,;y)-\frac{\partial f_1}{\partial x}(x\,;y)=V_1(x\,;y)-V_1(x\,;y)=0$ donc la fonction f_2-f_1 ne dépend pas de *x*.
De même $\frac{\partial(f_2-f_1)}{\partial y}(x\,;y)=\frac{\partial f_2}{\partial y}(x\,;y)-\frac{\partial f_1}{\partial y}(x\,;y)=V_2(x\,;y)-V_2(x\,;y)=0$ donc la fonction f_2-f_1 ne dépend pas de *y*.
Cela revient à dire que la fonction f_2-f_1 ne dépend ni de *x* ni de *y*, elle est donc constante.

VII) Annexes

VII.1) Rappels sur le produit scalaire.

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ c'est à dire que $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$ et $\widehat{(\vec{i}\,;\vec{j})}=\frac{\pi}{2}$.

Définition Étant donnés deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on définit leur produit scalaire par $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Remarques :
1) $\vec{v}.\vec{u}=\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos(\widehat{\vec{v},\vec{u}})=\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos(-(\widehat{\vec{u},\vec{v}}))=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos((\widehat{\vec{u},\vec{v}}))=\vec{u}.\vec{v}$: l'ordre entre les vecteurs n'a pas d'importance pour le produit scalaire.
2) $\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2\cos(\widehat{\vec{u},\vec{u}})=\|\vec{u}\|^2\cos(0)=\|\vec{u}\|^2$. La quantité $\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$ n'est donc rien d'autre que la norme du vecteur $\vec{u}$.

Propriété
Si l'on considère les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ où les coordonnées sont exprimées dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, alors nous avons $\vec{u}.\vec{v}=x_1.x_2+y_1.y_2$.

Preuve :
Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour affixes respectives $z_1=x_1+jy_1$ et $z_2=x_2+jy_2$.
Les propriétés bien connues des nombres complexes permettent de dire que :

$$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=|z_1|.|z_1|.\cos\left(\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\right).$$

On a $\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_2\overline{z_1}}{|z_1|^2}$ donc $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2\overline{z_1}}{|z_1|^2}\right)=\mathrm{Arg}(z_2\overline{z_1})$ car $|z_1|^2$ est un réel strictement positif.

On a alors $\cos\left(\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\right)=\cos(\mathrm{Arg}(z_2\overline{z_1}))=\frac{\mathrm{Re}(z_2\overline{z_1})}{|z_2\overline{z_1}|}=\frac{\mathrm{Re}((x_2+jy_2)(x_1-jy_1))}{|z_2||\overline{z_1}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{|z_2||z_1|}$.

On a ainsi $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=|z_1|.|z_1|.\cos\left(\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\right)=|z_1|.|z_1|.\frac{x_1x_2+y_1y_2}{|z_2||z_1|}=x_1x_2+y_1y_2$,

ce qu'il fallait prouver.

VII.2) Preuve du Théorème 2

Théorème 2 Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction à deux variables définie sur D .On suppose que f est continue et admet des dérivées partielles d'ordre 1 $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$ qui sont continues sur D . Soit $(a;b)\in D$. Alors il existe deux fonctions $(h;k)\to\varepsilon_1(h;k)$ et $(h;k)\to\varepsilon_2(h;k)$ qui tendent vers 0 en (0 ; 0) et telles que si h et k sont assez petits on ait :

$$f(a+h,b+k)=f(a;b)+\mathrm{df}_{(a;b)}(h;k)+h\varepsilon_1(h,k)+k\varepsilon_2(h,k).$$

L'application $(h;k)\to f(a;b)+\mathrm{df}_{(a;b)}(h;k)$ s'appelle l'approximation affine de f au point $(a;b)$.

Nous rappelons tout d'abord le très important lemme de la corde, vu dans le chapitre sur la dérivation :

Lemme (de la corde): Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a;b]$.
Alors il existe un réel $\theta\in]a;b[$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\theta)$.

On revient à la preuve du Théorème. Soit $(a;b)\in D$ fixé une fois pour toutes. Puisque D est ouvert, si h et k sont assez petits, on a $(a+h;b+k)\in D$ ce qui permet de considérer $f(a+h;b+k)$.
Écrivons

$$(1)\ :\ f(a+h,b+k)-f(a;b)=(f(a+h,b+k)-f(a+h;b))+(f(a+h,b)-f(a;b))\ .$$

Pour h et k fixés, on considère la fonction φ définie sur $[-|k|;|k|]$ par l'expression $\varphi(t)=f(a+h,b+t)$. Par définition de la dérivation partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$, la fonction φ est dérivable de dérivée $\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+t)$. En appliquant le lemme de la corde à φ entre 0 et k (attention, on ne sait pas si k est positif ou pas) , on peut dire qu'il existe un réel θ_1 entre 0 et k tel que $\varphi(k)-\varphi(0)=k\varphi'(\theta_1)$ c'est à dire que

(2) : $f(a+h,b+k)-f(a+h,b)=k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\theta_1)$,

et θ_1 dépend bien sûr de h et de k .

Pour h fixé, on considère la fonction ψ définie sur $[-|h|;|h|]$ par l'expression $\psi(t)=f(a+t,b)$.
La fonction ψ est dérivable de dérivée $\psi'(t)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a+t,b)$, qui est continue par rapport à t. En appliquant le lemme de la corde à ψ entre 0 et h (attention, on ne sait pas non plus si h est positif ou pas) , on peut dire qu'il existe un réel θ_2 entre 0 et h tel que $\psi(h)-\psi(0)=h\psi'(\theta_2)$ c'est à dire que

(3) : $f(a+h,b)-f(a,b)=h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_2;b)$,

et θ_2 dépend bien sûr de h .
On utilise (2) et (3) pour réécrire (1) de la façon suivante :

(4) : $f(a+h,b+k)-f(a;b)=k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\theta_1)+h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_2;b)$

en gardant toujours à l'esprit que θ_1 et θ_2 dépendent de h et de k .

D'une part, puisque θ_1 est entre 0 et k, si k tend vers 0, il en est de même de θ_1 , donc, par continuité de la fonction $(x;y)\to\dfrac{\partial f}{\partial y}(x;y)$ au point $(a;b)$, on en déduit que

$$\lim_{(h;k)\to(0;0)}\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\theta_1)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \quad ,$$

ce qui permet d'écrire que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\theta_1)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)+\varepsilon_2(h;k)$ avec $\lim\limits_{(h;k)\to(0;0)}\varepsilon_2(h;k)=0.$
De même, puisque θ_2 est entre 0 et h, si h tend vers 0, il en est de même de θ_2 , donc, par continuité de la fonction $(x;y)\to\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ au point $(a;b)$, on en déduit que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_2;b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad ,$$

ce qui permet d'écrire que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_2;b)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)+\varepsilon_1(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_1(h)=0.$
On peut alors réécrire (4) de la façon suivante :

$$f(a+h,b+k)-f(a;b)=k\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+\varepsilon_2(h;k)\right)+h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+\varepsilon_1(h)\right)$$
$$=\mathrm{df}_{(a;b)}(h;k)+h\varepsilon_1(h)+k\,\varepsilon_2(h,k)$$

où l'on a même montré que la fonction ε_1 pouvait être choisie indépendante de k (ce qui n'a pas grand intérêt en pratique) .

VIII) Exercices

Exercice 1
Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 des fonctions suivantes, après avoir précisé leur domaine de définition.

$f_1(x;y)=2x^2+3xy-y^2$

$f_2(x;y)=\ln(x+y)$

$f_3(x;y)=\dfrac{2x+y}{x-y}$

$f_4(x;y)=\arctan(xy)$

$f_5(x;t)=\sin(\omega t-kx)$

$f_6(x;y)=x^y$

Exercice 2

On considère la courbe paramétrée $t\in\mathbb{R}\rightarrow M(t)$ où $M(t)$ est le point de coordonnées $(x(t);y(t))$ avec $x(t)=te^{-2t}$ et $y(t)=e^{-2t}$.

1) Calculer l'expression du vecteur vitesse $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M(t)}}{\mathrm{d}t}$.
2) Existe-t-il une ou plusieurs valeurs de t pour lesquelles le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M(t)}}{\mathrm{d}t}$ est parallèle à l'un des deux axes du repère?
3) Démontrer que si t augmente, le point $M(t)$ se rapproche de l'origine.

Exercice 3 (*fonctions harmoniques*)
Soit f une fonction à deux variables f définie sur un ouvert D et admettant des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2.
On dit que f est harmonique sur D si elle vérifie l'équation dite de Laplace :

$$\forall(x;y)\in D,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=0.$$

1) Démontrer que les fonctions suivantes sont harmoniques :

$f_1(x;y)=x^2-y^2,\ D=\mathbb{R}.$

$f_2(x;y)=\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right),\ D=\{(x;y)\in\mathbb{R},\ x>0\}.$

2) Soit f une fonction harmonique sur un ouvert D et admettant des dérivées partielles à tout ordre et continues. Démontrer que les fonctions suivantes sont aussi harmoniques sur D :

$$g(x;y)=y\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)-x\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$$

$$h(x;y)=x\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$$

Exercice 4

On considère la courbe paramétrée $t \in \mathbb{R} \rightarrow M(t) : (x(t); y(t))$ avec $x(t) = t^2 - 1$ et $y(t) = t + 1$.

Montrer que la droite d'équation $y = \frac{-1}{4}(x+1)$ est tangente à cette courbe paramétrée .

Exercice 5

Déterminer les lignes de niveaux de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^2$ par l'expression $f(x;y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y$. Déterminer en particulier leur nature géométrique.

Exercice 6 (*un problème de contrôle de trajectoire*)

On considère le champ de vecteurs $\vec{V} : (x;y) \rightarrow \vec{V}(x;y) : \begin{pmatrix} V_1(x;y) \\ V_2(x;y) \end{pmatrix}$ défini sur l'ouvert $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2, x > -1 \text{ et } y > -1\}$ avec $V_1(x;y) = 1$ et $V_2(x;y) = \frac{1}{(x+1)(y+1)}$. L'objet de l'exercice est de trouver une courbe paramétrée dérivable $t \in [0; +\infty[\rightarrow M(t) : (x(t); y(t))$ telle que :

(i) $M(0)$ soit sur l'axe des ordonnés

(ii) le point $(1;1)$ soit sur la courbe paramétrée

(iii) la courbe paramétrée soit dirigée par le champ de vecteurs $\vec{V}$, c'est à dire que $\forall t \geq 0, \quad \vec{V}(x(t); y(t)) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

Notre but est donc de déterminer l'endroit où se placer sur l'axe des ordonnées pour arriver au point de coordonnées $(1;1)$ en « suivant » le champ de vecteurs $\vec{V}$.

1) Montrer que $\forall t \geq 0, \; x(t) = t$.

2) a) Montrer que si l'on pose $z(t) = y(t) + 1$, alors $z(t)z'(t) = \frac{1}{t+1}$.

b) En déduire une expression de $y(t)$ en fonction de *t* et de $y(0)$.

3) En déduire la valeur de $y(0)$ sachant que le point $(1;1)$ est sur la courbe paramétrée.

Exercice 7

On considère la fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par l'expression $f(x;y) = 2x^2 + 5y^2 + 4xy - 12x$.

1) Démontrer que la fonction *f* admet un extremum local et préciser s'il s'agit d'un maximum local ou d'un minimum local .

2)

a) Dans cette question, on fixe *x* à une valeur quelconque : l'expression de $f(x;y)$ devient alors un polynôme du second degré en *y*. Trouver la forme canonique de $f(x;y)$ vu comme un polynôme en *y*.

b) Déduire de la question précédente que l'extremum trouvé à la question 1) est global.

3) Dans cette question, on considère un point mobile $M(t)$ de coordonnées $(x(t); y(t))$ dont

la vitesse instantanée est égale au gradient de f au point $M(t)$ c'est à dire que l'on a $\forall t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{\nabla} f(x(t); y(t)) = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)$. On suppose de plus qu'à l'instant $t=0$, le point $M(t)$ se situe à l'origine, c'est à dire que $x(0)=y(0)=0$.

a) Trouver les valeurs de $x'(0)$ et $y'(0)$.
b) Écrire les relations reliant $x'(t)$ et $y'(t)$ à $x(t)$ et $y(t)$.
c) En combinant les deux relations précédentes, prouver que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont deux fois dérivables et que l'on a la relation $y''(t)-14y'(t)+24y(t)=-48$.
d) En déduire les expressions de $x(t)$ et $y(t)$.

(*) Exercice 8 (*Détermination d'une fonction par ses lignes de niveau*)
On considère une fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$,continue, dérivable par rapport à chacune de ses deux variables et telles que chaque ligne de niveau non vide soit une droite, c'est à dire que pour tout réel *k*, l'ensemble $L_k=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / f(x;y)=k\}$ est soit une droite, soit l'ensemble vide.
On dira que la fonction *f* vérifie la propriété *(D)*.

1) On veut montrer dans cette question que toutes les lignes de niveau non vides d'une fonction qui vérifie la propriété *(D)* sont des droites toutes parallèles entre elles.
On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe deux réels k et k' tels que les droites L_k et $L_{k'}$ ne soient pas parallèles.
Démontrer que $k=k'$. En déduire une contradiction.

Si *f* vérifie la propriété *(D)*, on considère $\vec{u}:\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur directeur commun à toutes les droites L_k.
2) On suppose dans cette question que a=0. Que peut-on dire de la fonction *f* ?

3)

a) Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que si $a\neq 0$, alors $f(x;y)=f\left(0;y-\frac{b}{a}x\right)$.

b) En déduire qu'il existe une fonction *u* d'une variable telle que $\forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}, f(x;y)=u(bx-ay)$. Donner une expression de la fonction *u* à l'aide de *f* et des paramètres *a* et *b*.

c) Montrer que si $t\neq t'$, alors $u(t)\neq u(t')$.

d) Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ avec $x<y$. En considérant la fonction définie sur $[0;1]$ par : $t \to u(ty+1-t)-u(tx)$, déduire du c) que $u(y)-u(x)$ est du signe de $u(1)-u(0)$. Quelle information déduit-on sur la fonction *u ?*

e) Déduire des questions précédentes une description précise de l'ensemble des fonctions *f* vérifiant la propriété *(D)*.

(*) Exercice 9 (*EDP sur un quart de plan*)

Soit $a:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable à dérivée continue. On considère la fonction $g:]0;+\infty[\times]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par l'expression $g(x;y)=a\left(\frac{y}{x}\right)$.

1) Expliquer pourquoi g admet des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point $(x;y)\in]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ continues sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ et prouver qu'elle satisfait à l'EDP $x\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=0$.

2) Réciproquement soit $f:]0;+\infty[\times]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$, admettant des dérivées partielles d'ordre 1 continues en tout point $(x;y)\in]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ et vérifiant l'EDP : $x\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=0$.
On fixe $(x;y)\in]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ et on définit la fonction $\varphi:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ par l'expression : $\varphi(t)=f(tx;ty)$.

a) Prouver que la fonction $\varphi:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ est dérivable et constante.

b) En déduire que $\forall x>0,\ \forall y>0,\ f(x;y)=a\left(\frac{y}{x}\right)$ où $a:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ est la fonction définie par $a(t)=f(1;t)$.

3) Dans cette question, on veut cette fois trouver toutes les fonction $f:]0;+\infty[\times]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ continues sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$, admettant des dérivées partielles d'ordre 1 continues en tout point $(x;y)\in]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ et vérifiant l'EDP : $x\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\lambda f(x;y)$, où $\lambda\in\mathbb{R}$. On fixe $(x;y)\in]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ et on définit tout comme dans la question 2) la fonction $\varphi:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ par l'expression : $\varphi(t)=f(tx;ty)$.

a) Prouver que la fonction $\varphi:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ est dérivable et vérifie la relation $\varphi'(t)=\frac{\lambda}{t}\varphi(t)$.

b) En déduire que la fonction $t\to t^{-\lambda}\varphi(t)$ est constante.

c) En considérant les valeurs $t=1$ et $t=\frac{1}{x}$, en déduire que $f(x;y)=x^{\lambda}a\left(\frac{y}{x}\right)$ où $a:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ est la fonction définie par $a(t)=f(1;t)$. Réciproque ?

d) Application : on suppose ici $\lambda=1$. Résoudre l'EDP : $x\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=f(x;y)$, avec la condition sur le quart de cercle unité de centre 0 $f(\cos(\theta);\sin(\theta))=\theta$ et vérifier que $\forall x>0,\ \forall y>0,\ f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}\,.\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

(*) Exercice 10 (*EDP et passage en coordonnées polaires*)

On considère une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, admettant des dérivées partielles d'ordre 1 continues en tout point $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et vérifiant l'EDP :
$x\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)-y\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=f(x;y)$.

1) Dans cette question, on considère une telle fonction f.
Fixons un couple $(x;y)\in\mathbb{R}^2$, $(x;y)\neq(0;0)$, et définissons la fonction $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par l'expression $\varphi(\theta)=f(\sqrt{x^2+y^2}\cos(\theta);\sqrt{x^2+y^2}\sin(\theta))$.

a) Calculer $f(0;0)$.
b) Montrer que que la fonction φ est dérivable et vérifie l'équation différentielle :
$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \varphi'(\theta)=\varphi(\theta)$.
c) Montrer que φ est la fonction nulle. Que peut-on déduire sur f ?

On considère maintenant une fonction $f:]0;+\infty[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue sur $]0;+\infty[\times\mathbb{R}$, admettant des dérivées partielles d'ordre 1 continues en tout point $(x;y)\in]0;+\infty[\times\mathbb{R}$ et vérifiant l'EDP : $x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x;y)-y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y)=f(x;y)$.

2) Dans cette question, on on considère une telle fonction f.
Fixons un couple $(x;y)\in]0;+\infty[\times\mathbb{R}$ et définissons la fonction $\varphi:]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}$ par l'expression
. $\varphi(\theta)=f(\sqrt{x^2+y^2}\cos(\theta);\sqrt{x^2+y^2}\sin(\theta))$

a) Montrer que $\forall\theta\in]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}[,\ \varphi(\theta)=f(\sqrt{x^2+y^2};0)e^{\theta}$.
On pose $\theta_0=\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
b) Vérifier que $\cos(\theta_0)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin(\theta_0)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
d) Calculer $\varphi(\theta_0)$. En déduire que la fonction f admet une expression de la forme
$f(x;y)=h(\sqrt{x^2+y^2})e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$ où h est une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$.

3) Réciproquement, démontrer que toute fonction de la forme $f(x;y)=h(\sqrt{x^2+y^2})e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$ où h est une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ est une solution de l'EDP :
$x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x;y)-y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y)=f(x;y)$.

Exercice 11 (*EDP à coefficients constants*)
On considère une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles d'ordre 1 continues en tout point $(x;t)\in\mathbb{R}^2$ et vérifiant l'EDP : $2\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;t)+3\dfrac{\partial f}{\partial t}(x;t)+f(x;t)=0$.

1) Dans cette question, on suppose l'existence d'une telle fonction f.
On définit la fonction $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par l'expression $g(y,z)=f(y+2z;y+3z)$.

a) Montrer que $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est continue et admet des dérivées partielles d'ordre 1.
b) Justifier que g satisfait à l'EDP $\dfrac{\partial g}{\partial z}(y;z)=-g(y;z)$.
c) En déduire une expression de g.
d) A l'aide d'un changement de variable, montrer que la fonction f admet une expression de la forme :
$f(x;t)=a(3x-2t)e^{x-t}$ où a est une fonction dérivable d'une variable.

2) Démontrer que, réciproquement, toute fonction f admettant une expression de la forme :
$f(x;t)=a(3x-2t)e^{x-t}$ où a est une fonction dérivable d'une variable, est bien une solution de l'EDP :
$2\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;t)+3\dfrac{\partial f}{\partial t}(x;t)+f(x;t)=0$.

(*) 3) Montrer que si $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x,0))^2 dx$ converge, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x,t))^2 dx$ converge et trouver une expression de $E(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x,t))^2 dx$ à l'aide de t et de $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x,0))^2 dx$.

4) Trouver l'expression de la solution de l'EDP : $2\frac{\partial f}{\partial x}(x;t)+3\frac{\partial f}{\partial t}(x;t)+f(x;t)=0$ vérifiant la condition initiale $f(x;0)=\Pi_{-1,1}(x)$. Dessiner pour $t>\frac{3}{2}$ fixé le graphe de la fonction $x \to f(x;t)$. Commenter en interprétant la variable t comme le temps.

(*)Exercice 12

Une expérience aléatoire a la loi de probabilité suivante :

Issues	A	B	C
Probabilité	p	q	r

On répète de façon indépendante 6 fois cette expérience. Quelle est la probabilité maximale d'obtenir la séquence « AAABBC » ? Pour quelles valeurs de *p, q* et *r* cette probabilité maximale est-elle atteinte ?

Exercice 13 (*Optimisation)*

On considère une boîte sans couvercle, c'est à dire un parallélépipède rectangle auquel on a enlevé une face. On suppose que le volume de ce parallélépipède rectangle est égal à 4.
Soit *x, y* et *z* respectivement la longueur, la largeur et la hauteur de ce parallélépipède rectangle.On suppose que la face enlevée est la face supérieure (« le couvercle »)

1) Montrer que la surface totale de ses faces peut s'écrire comme la fonction de *x* et *y* suivante :
$S(x;y)=xy+\frac{8}{x}+\frac{8}{y}$ avec $(x;y)\in]0;+\infty[^2$.

2) Trouver les extrema locaux de la fonction $(x;y)\to xy+\frac{8}{x}+\frac{8}{y}$ avec $(x;y)\in]0;+\infty[^2$. .

3) Dans cette question, on souhaite montrer que l'extremum trouvé à la question précédente est global.

a) En faisant une étude de la fonction $x \to xy+\frac{8}{x}+\frac{8}{y}$ à y fixé, montrer que $\forall x>0,\ \forall y>0,\ xy+\frac{8}{x}+\frac{8}{y}\geq 4\sqrt{2y}+\frac{8}{y}$.

b) A l'aide d'une deuxième étude de fonction, montrer que l'extremum trouvé à la question précédente est global. En déduire les dimensions d'une boîte sans couvercle de volume égale à 4 et de surface minimale.

Exercice 14

Trouver les extrema locaux de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par l'expression $f(x;y)=x^3+y^3-3xy$. Montrer qu'il n'y a pas d'extremum global.

Exercice 15

Trouver les extrema locaux de la fonction définie sur $]0;+\infty[\times\mathbb{R}$ par l'expression $f(x;y)=x\left((\ln(x))^2+y^2\right)$.

Exercice 16 (*champ radial*).
On considère un champ de vecteur radial, c'est à dire de la forme

$$\vec{V}:(x\,;y)\rightarrow\vec{V}(x\,;y):\begin{pmatrix}V_1(x\,;y)\\V_2(x\,;y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(x^2+y^2)x\\a(x^2+y^2)y\end{pmatrix},$$

où a est une fonction d'une variable définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.

1) a) Vérifier que pour tout $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$, les vecteurs $\vec{V}(x\,;y)$ et $\overrightarrow{OM(x\,;y)}$ sont colinéaires (M est le point de coordonnées $(x\,;y)$.
b) Vérifier que $\|\overrightarrow{V(x\,;y)}\|$ ne dépend que de la distance de M à l'origine.

2) Montrer que le champ de vecteurs $\vec{V}(x\,;y)$ dérive d'un potentiel scalaire dont on déterminera une expression en fonction de A, une primitive de la fonction a .

Exercice 17
Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[\times\mathbb{R}$ par l'expression $f(x\,;y)=x^2+\frac{y^2}{4x}-y$.
Montrer que f admet un minimum global.

(*)Exercice 18 (*champ de vecteurs et systèmes différentiels*)
On s'intéresse aux équations différentielles $(E)\,:\,x+y(x)+x\frac{dy}{dx}(x)=0$ et

$(E')\,:\,x+y(x)+2x\frac{dy}{dx}(x)=0$ où $x\in]0\,;+\infty[$.

On considère le champ de vecteurs $\vec{V}:(x\,;y)\rightarrow\vec{V}(x\,;y):\begin{pmatrix}V_1(x\,;y)\\V_2(x\,;y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\x\end{pmatrix}$

1) Montrer que le champ de vecteur $\vec{V}(x\,;y)$ dérive d'un potentiel scalaire $\varphi(x\,;y)$ et déterminer, à une constante additive près, une expression de $\varphi(x\,;y)$.

2) a) Étant donnée une fonction $y:]0\,;+\infty[\rightarrow\mathbb{R}$ dérivable montrer que :
y vérifie *(E)* $\Leftrightarrow$ la fonction $x\rightarrow\varphi(x\,;y(x))$ est constante sur $]0\,;+\infty[$.
b) En déduire qu'il existe une unique solution $y:]0\,;+\infty[\rightarrow\mathbb{R}$ de *(E)* vérifiant la condition initiale $y(1)=1$. Déterminer une expression de $y(x)$.

On considère maintenant le champ de vecteurs $\vec{W}:(x\,;y)\rightarrow\vec{W}(x\,;y):\begin{pmatrix}W_1(x\,;y)\\W_2(x\,;y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\2x\end{pmatrix}$

3) Montrer que le champ de vecteur $\vec{W}(x\,;y)$ ne dérive pas d'un potentiel scalaire.

4) Soit $f:]0\,;+\infty[\rightarrow\mathbb{R}$ une fonction dérivable.
a) Montrer que si $\forall x>0,\ 2xf'(x)+f(x)=0,$ alors le champ de vecteurs $(x\,;y)\rightarrow f(x)\vec{W}(x\,;y)$ dérive d'un potentiel scalaire .
b) Vérifier que la fonction $f:x\in]0\,;+\infty[\rightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}$ vérifie l'équation différentielle $\forall x>0,\ 2xf'(x)+f(x)=0.$
c) Trouver une expression d'un potentiel scalaire $\psi(x,y)$ dont dérive le champ de vecteur

$\frac{1}{\sqrt{x}}\ \vec{W}(x\,;y)$.

5) a) Étant donnée une fonction $y:]0\,;+\infty[\to\mathbb{R}$ dérivable montrer que :
y vérifie *(E')* $\Leftrightarrow$ la fonction $x\to\psi(x\,;y(x))$ est constante sur $]0\,;+\infty[$.

b) En déduire qu'il existe une unique solution $y:]0\,;+\infty[\to\mathbb{R}$ de *(E ')* vérifiant la condition initiale $y(1)=1$. Déterminer une expression de $y(x)$.

Exercice 19 (*Équation des ondes*)

On veut résoudre l'équation dite « des ondes » : $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x\,;t)=c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,;t)$ où :

c est un paramètre strictement positif

la fonction $(x\,;t)\to f(x,t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$, et admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 continues.

1) Soit f une solution de l'équation des ondes.
On procède au changement de variables $(u\,;v)=(x+ct\,;x-ct)$ et on définit la fonction g par $g(u\,;v)=f(x,t)$.

a) Exprimer x et t en fonction de u et v. En déduire une expression de $g(u\,;v)$ en fonction de u et de v .

b) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$, et admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 continues. Exprimer $\frac{\partial g}{\partial u}(u\,;v)$ puis $\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u\,;v)$ en fonction de u et de v. Vérifier que $\forall u\in\mathbb{R},\ \forall v\in\mathbb{R},\ \frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u\,;v)=0.$

c) En déduire que $f(x,t)$ est de la forme $f(x,t)=a(x+ct)+b(x-ct)$ où a et b sont deux fonctions d'une variable deux fois dérivables.

2) Réciproquement, vérifier que toute fonction f de la forme $f(x,t)=a(x+ct)+b(x-ct)$ où a et b sont deux fonctions d'une variable deux fois dérivables, est une solution de l'équation des ondes.

3) Résoudre l'EDP $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x\,;t)=c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,;t)$ avec les conditions initiales :
$f(x\,;0)=x$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(x\,;0)=\cos(x)$.

(*) Exercice 20 (*distance entre deux courbes).*
Soient f et g deux fonctions d'une variable réelle définies sur un intervalle ouvert I. On les suppose deux fois dérivables à dérivées secondes continues sur I. On considère pour $(x\,;y)\in I\times I$ les points $M=M(x)$ et $N=N(y)$ d'abscisses respectives x et y et appartenant respectivement aux courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.
On définit la fonction $\varphi : I\times I\to\mathbb{R}$ par l'expression $\varphi(x\,;y)=MN^2$ où M et N sont les points définis ci-dessus.

1) Montrer que la fonction φ admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 continues sur $I\times I$ et en calculer une expression à l'aide de f et de ses dérivées successives.

2) On suppose que $\forall x \in I,\ f(x) \neq g(x)$. Montrer que si la fonction φ admet un minimum local en un point $(x_0 ; y_0) \in I \times I$, alors les tangentes aux courbes représentatives des fonctions *f* et *g* , respectivement, en les points $M(x_0)$ et $N(y_0)$ sont toutes les deux orthogonales à la droite (MN) .
3) Application. On considère $I = \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^{3x} + 1$ et $g(x) = x$.
a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq g(x)$.
b) Montrer que φ admet un minimum et trouver les coordonnées du point en lequel il est atteint.

Exercice 21

Soit $\alpha > 0$. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par l'expression :
$f(x ; y) = \alpha x y^3 - x^4 - y^4$.

1) On pose $\alpha_0 = 4.3^{\frac{-3}{4}}$
a) Montrer que $\forall \alpha \neq \alpha_0$, le point $(0 ; 0)$ est l'unique point critique pour *f*.
b) Dans le cas où $\forall \alpha = \alpha_0$, trouver l'ensemble des points critiques pour *f*.
2) Expliquer pourquoi le Théorème 3 ne permet pas de conclure s'il y a un extremum local en $(0 ; 0)$.

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction φ par l'expression $\varphi(t) = -t^4 + \alpha t^3 - 1$.

3) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x ; y) = x^4 \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.
4) Étudier les variations de φ en fonction à l'aide du paramètre α. Préciser en particulier la valeur maximale de φ .
5) A l'aide des questions précédentes, étudier en fonction du paramètre α les extrema de *f*. Préciser le cas échéant s'ils sont locaux ou globaux.

(*) Exercice 22 (*Introduction aux fonctions holomorphes*)

1) En appliquant le Théorème 2 aux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par les expressions $f(x ; y) = \mathrm{Re}\left(e^{x+jy}\right)$ et $g(x ; y) = \mathrm{Im}\left(e^{x+jy}\right)$ démontrer que l'on a $\lim\limits_{|h| \to 0,\, h \in \mathbb{C}} \left| \frac{e^h - 1}{h} - 1 \right| = 0$, où *h* est une variable complexe. En déduire que pour tout nombre complexe *z*, $\lim\limits_{|h| \to 0,\, h \in \mathbb{C}} \left| \frac{e^{z+h} - e^z}{h} - e^z \right| = 0$

De manière générale, étant donnée une fonction *f* définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on dira qu'elle est holomorphe sur U si, pour tout $z \in U$, il existe un nombre complexe noté $f'(z)$ tel que $\lim\limits_{|h| \to 0,\, h \in \mathbb{C}} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| = 0$. La fonction f' définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{C}$ sera appelée dérivée de *f*. Ainsi, nous avons démontré à la question 1) que la fonction exponentielle est holomorphe sur $\mathbb{C}$ de dérivée égale à elle même.
Étant donnée une fonction *f* quelconque définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on peut considérer les fonctions à deux variables f_1 et f_2 définies sur U (en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par les expressions : $f_1(x ; y) = \mathrm{Re}\left(f(x+jy)\right)$ et $f_2(x ; y) = \mathrm{Im}\left(f(x+jy)\right)$ de sorte que $\forall (x ; y) \in U,\ f(x+jy) = f_1(x ; y) + j f_2(x ; y)$.

Si les fonctions f_1 et f_2 admettent des dérives partielles, on écrira par exemple, toujours en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+j\frac{\partial f_2}{\partial x}$.

2) Dans cette question, on suppose que *f* est une fonction holomorphe sur U.
Montrer que les fonctions f_1 et f_2 admettent des dérivées partielles d'ordre 1 sur U, et exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$ à l'aide de $f'(x+jy)$. Exprimer aussi $\frac{\partial f_i}{\partial x}(x;y)$ et $\frac{\partial f_i}{\partial y}(x;y)$ pour *i*=1 et *i*=2. Vérifier que $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=j\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$.

3) Réciproquement, on suppose que les fonctions f_1 et f_2 admettent des dérivées partielles d'ordre 1, continues sur U. On suppose de plus que l'on a :
$\forall(x;y)\in U,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=j\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$. A l'aide du Théorème 2, montrer que *f* est une fonction holomorphe sur U. Exprimer sa dérivée.

4) (Logarithme complexe).
Démontrer que la fonction *f* définie sur $U=\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}(z)>0\}$ par l'expression $f(x+jy)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+j\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ est holomorphe. Vérifier que $\forall z\in U,\ e^{f(z)}=z$ et que $\forall z\in U,\ f'(z)=\frac{1}{z}$.

Remarque : les fonctions holomorphes possèdent de nombreuses propriétés fortes :
leur dérivées sont elles-mêmes des fonction holomorphes.
Elles sont développables en série entière
[…..] voir les cours de niveau L3 par exemple

(*) Exercice 23 (*Équation de Laplace*)

Dans cet exercice, on pose $B=(x;y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\leqslant 1$ (le disque fermé de centre 0 et de rayon 1), $D=(x;y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2<1$ (le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1) et . $C=(x;y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2=1$ (le cercle de centre 0 et de rayon 1) . Étant donnée une fonction *f* continue sur *B*, on s'intéresse à l'équation dite de Laplace :
$\forall(x;y)\in D,\ \Delta u(x;u)=f(x;y)$
où *u* est une fonction continue sur B, et admettant un tout point de *D* des dérivées partielles d'ordre 1 et 2, toutes les cinq continues sur *D* , et où l'on a posé :
$\forall(x;y)\in D,\ \Delta u(x;y)\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x;y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x;y)$.
Dans tout l'exercice, on suppose que $\forall(x;y)\in C,\ u(x)=0$ (conditions de Dirichlet) .
On appellera *u* une solution de l'équation $\Delta u=f$ sur B avec conditions de Dirichlet.

1) Dans cette question , on suppose que $\forall(x;y)\in B,\ f(x;y)=1$. On cherche une solution u_0 radiale, c'est à dire de la forme $u_0(x;y)=\varphi(x^2+y^2)$ où $\varphi : [0;1]\to\mathbb{R}$ est deux fois dérivable à dérivée seconde continue.
a) Montrer que φ est nécessairement solution de l'équation différentielle :
$\forall t\in[0;1],\ \varphi'(t)+t\varphi''(t)=\frac{1}{4}$.
b) En déduire que l'on a nécessairement $\forall(x;y)\in B,\ u_0(x;y)=\frac{1}{4}(x^2+y^2-1)$. Vérifier que cette fonction est bien solution de l'équation de Laplace avec condition de Dirichlet.

On admettra à partir de maintenant la propriété suivante (dite du min max) :

Pour toute fonction continue $g : B \to \mathbb{R}$, *il existe deux couples* $(x_0 ; y_0) \in B$ et $(x_1 ; y_1) \in B$ *tels que* $\forall (x ; y) \in B,\ f(x_0 ; y_0) \leqslant f(x ; y) \leqslant f(x_1 ; y_1)$.

2) Dans cette question, on suppose que $\forall (x ; y) \in B,\ f(x ; y) > 0$. On suppose que u est une solution de l'équation $\Delta u = f$ sur D avec condition de Dirichlet

   a) Montrer que si $(x_0 ; y_0) \in D$ est un point critique pour u, il ne peut y avoir de maximum local pour u en ce point (considérer les deux fonctions $t \to u(x_0 + t ; y_0)$ et $t \to u(x_0 ; y_0 + t)$).
   b) Montrer qu' alors $\forall (x ; y) \in B,\ u(x ; y) \leqslant 0$.

3) Dans cette question, on suppose que $\forall (x ; y) \in B,\ f(x ; y) \geqslant 0$. On suppose que u est une solution de l'équation $\Delta u = f$ sur D avec condition de Dirichlet.En considérant la fonction $u(x ; y) + \varepsilon u_0(x ; y)$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit (la fonction u_0 a été définie au 1)), montrer que $\forall (x ; y) \in B,\ u(x ; y) \leqslant 0$.
4) Que peut on dire d'une solution u de l'équation $\Delta u = f$ sur D avec condition de Dirichlet dans le cas où $\forall (x ; y) \in B,\ f(x ; y) \leqslant 0$.
5) Déduire des questions précédentes que pour toute fonction f continue sur B, si u_1 et u_2 sont deux solutions de l'équation $\Delta u = f$ sur D avec condition de Dirichlet, alors elles sont égales.
6) Démontrer que si f est radiale (c'est à dire de la forme $f(x ; y) = a(x^2 + y^2)$ où $a : [0 ; 1] \to \mathbb{R}$ est continue, alors l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation $\Delta u = f$ sur D avec condition de Dirichlet est assurée .

Exercice 24 (*Extremum atteint sur le bord*).
On pose
$B = (x ; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leqslant 1$ (le disque fermé de centre 0 et de rayon 1),
$D = (x ; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1$ (le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1) et .
$C = (x ; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1$ (le cercle de centre 0 et de rayon 1) .
On considère une fonction f, continue sur B et admettant des dérivées partielles d'ordre 1 continues. On suppose que $(x_0 ; y_0) \in C$ est tel que f admet un maximum en ce point , c'est à dire que $\forall (x ; y) \in B,\ f(x ; y) \leqslant f(x_0 ; y_0)$. On pose $(x_0 ; y_0) = (\cos(\theta_0) ; \sin(\theta_0))$

1) En considérant le cas où $f(x ; y) = (x-1)^2 + y^2$, montrer que l'on n'a pas nécessairement $\overrightarrow{\nabla f}(x_0 ; y_0) = \vec{0}$.
2) En considérant la fonction définie sur $[0 ; 2\pi]$ par l'expression $\theta \to f(\cos(\theta) ; \sin(\theta))$ au voisinage de θ_0, montrer que $\overrightarrow{\nabla f}(x_0 ; y_0)$ est colinéaire au vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.
3) En considérant la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par l'expression $t \to f(t\cos(\theta_0) ; t\sin(\theta_0))$ au voisinage de 1, montrer que $\overrightarrow{\nabla f}(x_0 ; y_0) = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ pour un certain réel $\lambda \geqslant 0$.
4) Application :soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) > 0$. . Trouver le minimum et le maximum de la fonction f définie sur B par l'expression $f(x ; y) = \varphi(x - 2y)$ (on admet que ce maximum et ce minimum existent dans B).

Exercice 25

Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}^2$, admettant des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 continues en tout point $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$ et vérifiant la relation :

$$\forall (x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x\,;y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,;y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,;y) \quad .$$

IX) Corrigés

Exercice 1

1) $D=\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=4x+3y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=3x-2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=-2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y)=3$

2) $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ y>-x\}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\frac{1}{x+y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\frac{1}{x+y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=\frac{-1}{(x+y)^2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=\frac{-1}{(x+y)^2}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y)=\frac{-1}{(x+y)^2}$

3) $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x>y\}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\frac{-3y}{(x-y)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\frac{3x}{(x-y)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=\frac{6y}{(x-y)^3}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=\frac{6x}{(x-y)^3}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y)=\frac{-3(x+y)}{(x-y)^3}$

4) $D=\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\frac{y}{1+x^2y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\frac{x}{1+x^2y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=\frac{-2xy^3}{(1+x^2y^2)^2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=\frac{-2yx^3}{(1+x^2y^2)^2}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y)=\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$

5) $D=\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x;t)=-k\cos(\omega t-kx)$, $\frac{\partial f}{\partial t}(x;t)=\omega\cos(\omega t-kx)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;t)=-k^2\sin(\omega t-kx)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x;t)=-\omega^2\sin(\omega t-kx)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x;t)=k\omega\sin(\omega t-kx)$

6) $D=]0;+\infty[\times\mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\ln(x)x^y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=y(y-1)x^{y-2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=\ln^2(x)x^y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y)=(1+y\ln(x))x^{y-1}$

Exercice 2

1) On a $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t):((1-2t)e^{-2t};-2e^{-2t})$.

2) Le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$ est parallèle à l'un des deux axes du repère si et seulement si l'une de ses deux coordonnées vaut 0. Cela ne peut arriver que pour $t=\frac{1}{2}$.

3) On calcule que $OM^2(t)=(1+t^2)e^{-4t}$ donc

$\frac{d}{dt}\left(OM^2(t)\right)=-2(2t^2-t+2)e^{-4t}=-4\left(\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\right)e^{-4t}<0$ .La fonction $t \to OM(t)$ est donc strictement décroissante.

Exercice 3

1) Démontrer que les fonctions suivantes sont harmoniques :

$f_1(x;y)=x^2-y^2$, $D=\mathbb{R}$.

$\forall(x;y)\in D$, $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x;y)+\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x;y)=2-2=0$.

$f_2(x;y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}\ ,\ x>0\}$.

On a $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x;y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x;y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x;y)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$,

$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x;y)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$ d'où l'on déduit facilement que f_2 est harmonique.

2)

Posons $\Delta f(x;y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)$. On remarque que, par le Théorème de Schwartz, on a sur U : $\frac{\partial}{\partial x}\Delta f(x;y)=\Delta\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\Delta f(x;y)=\Delta\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$.

On remarque aussi que $\Delta\left(x f(x;y)\right)=x.\Delta\left(f(x;y)\right)+2\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ et

$\Delta\left(y f(x;y)\right)=y.\Delta\left(f(x;y)\right)+2\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$.

On a donc

$$\Delta g=\Delta\left(y\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\Delta\left(x\frac{\partial f}{\partial y}\right)=y.\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}-x.\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

$$=y.\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)-x.\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\text{ (Théorème de Schwartz)}$$

$$=y.\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\Delta f)-x.\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)(\Delta f)=0 \quad \text{car } f \text{ est harmonique.}$$

On a aussi

$$\Delta h=\Delta\left(x\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\Delta\left(y\frac{\partial f}{\partial y}\right)=x.\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y.\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$=x.\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+y.\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+2\Delta f$$

$$=x.\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\Delta f)+y.\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)(\Delta f)+2\Delta f=0 \quad \text{car } f \text{ est harmonique.}$$

Exercice 4

Il faut chercher un point de la droite d'équation $y=\frac{-1}{4}(x+1)$ qui appartienne à la courbe paramétrée et où le vecteur vitesse est un vecteur directeur de la droite. Autrement dit, on cherche d'abord $t\in\mathbb{R}$ tel que $y(t)=\frac{-1}{4}(x(t)+1)$. On trouve que cela équivaut à $t=-2$. On a $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t):(2t\,;1)$ donc $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(-2):(-4\,;1)$. Un vecteur directeur de la droite d'équation $y=\frac{-1}{4}(x+1)$ est $\vec{u}:\left(1\,;-\frac{1}{4}\right)$ et on a $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(2)=-4\vec{u}$.

La droite d'équation $y=\frac{-1}{4}(x+1)$ est tangente à la courbe paramétrée $t\in\mathbb{R}\rightarrow M(t)$ au point de coordonnées $(x(-2);y(-2))=(3\,;-1)$.

Exercice 5

Soit $k\in\mathbb{R}$. On a :

$f(x\,;y)=k\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y=k$

$\Leftrightarrow(x-2)^2-4+(y-1)^2-1=k$

$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-1)^2=k+5$.

Donc :

si $k<-5$, la ligne de niveau est vide

si $k=-5$, la ligne de niveau est réduite au seul point $(2\,;1)$

si $k>-5$, la ligne de niveau est le cercle de centre $(2\,;1)$ et de rayon $\sqrt{k+5}$.

Exercice 6

1) On doit avoir pour tout réel *t* positif $V_1(x(t);y(t))=x'(t)$ c'est à dire $x'(t)=1$. On en déduit que ,pour une certaine constante C, on a $\forall t\geq 0,\ x(t)=t+C$.

La condition (i) signifie que $x(0)=0$ donc $C=0$.

2) a) On doit avoir pour tout réel *t* positif $V_2(x(t);y(t))=y'(t)$ c'est à dire :

$\forall t\geqslant 0,\ y'(t)=\frac{1}{(x(t)+1)(y(t)+1)}=\frac{1}{(t+1)(y(t)+1)}$.

Cela se réécrit :

$\forall t\geqslant 0,\ z'(t)=\frac{1}{(t+1)z(t)}$,

donc

$z(t)z'(t)=\frac{1}{t+1}$.

b) En intégrant la relation trouvée ci-dessus entre 0 et *t*, on a :

$\frac{1}{2}z^2(t)-\frac{1}{2}z^2(0)=\ln(t+1)$, c'est à dire $z^2(t)=z^2(0)+2\ln(t+1)$.

La relation $\forall t\geqslant 0,\ z(t)z'(t)=\frac{1}{t+1}$ montre que la fonction $t\rightarrow z(t)$ ne s'annule pas : étant continue, elle est de signe constant. Par le point (ii), $y(1)=1$ donc $z(1)=2>0$. Donc,

$\forall t\geqslant 0,\ z(t)>0$ d'où $z(0)>0$ et $z(t)=+\sqrt{z^2(0)+2\ln(t+1)}$.

On a donc $\forall t\geqslant 0,\ y(t)=-1+\sqrt{(1+y(0))^2+2\ln(t+1)}$

3) On a $y(1)=1$ donc $1=-1+\sqrt{(1+y(0))^2+2\ln(2)}$ ce qui donne, en tenant compte du

fait que $1+y(0)>0$:
$y(0)=\sqrt{4-2\ln(2)}-1$.

Exercice 7

1) On a $\overrightarrow{\nabla f}(x;y):\begin{pmatrix}4x+4y-12\\10y+4x\end{pmatrix}$ d' où l'on déduit l'unique point critique : $(x;y)=(5;-2)$.
On a pour ce point $R=4, S=4$ et $T=10$ d'où $S^2-RT<0$. Puisque $R>0$, il s'agit d'un minimum local. La fonction *f* admet un minimum égal à $f(5;-2)=-30$.

2) a) On a :

$$f(x;y)=5y^2+4xy+2x^2-12x=5\left(y^2+\frac{4}{5}xy+\frac{2}{5}x^2-\frac{12}{5}x\right)=5\left(\left(y+\frac{2}{5}x\right)^2+\frac{6}{25}x^2-\frac{12}{5}x\right)$$
$$=5\left(y+\frac{2}{5}x\right)^2+\frac{6}{5}(x^2-10x)$$

b) On continue l'idée du calcul précédent :

$$f(x;y)=5\left(y+\frac{2}{5}x\right)^2+\frac{6}{5}(x^2-10x)=5\left(y+\frac{2}{5}x\right)^2+\frac{6}{5}((x-5)^2-25)$$
$$=5\left(y+\frac{2}{5}x\right)^2+\frac{6}{5}(x-5)^2-30.$$

On a alors : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x;y)-f(5;-2)=5\left(y+\frac{2}{5}x\right)^2+\frac{6}{5}(x-5)^2\geqslant 0$
ce qui prouve que le minimum trouvé est bien global

3)
a) De la relation $\overrightarrow{\nabla}\mathrm{f}(x(0);y(0))=\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(0)$, on déduit que $\begin{pmatrix}4x(0)+4y(0)-12\\10y(0)+4x(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'(0)\\y'(0)\end{pmatrix}$
d'où $x'(0)=-12$ et $y'(0)=0$.

b) La relation $\forall t\in\mathbb{R}, \overrightarrow{\nabla}\mathrm{f}(x(t);y(t))=\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(t)$ donne
$\forall t\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x(t)+4y(t)-12\\10y(t)+4x(t)\end{pmatrix}$

c) Les fonctions $x'(t)$ et $y'(t)$ s'écrivent comme combinaison linéaire de fonctions dérivables : elles sont donc dérivables, d'où l'on déduit que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont deux fois dérivables.
On déduit de la deuxième équation que $\forall t\in\mathbb{R},\ x(t)=\frac{1}{4}(y'(t)-10y(t))$ et
$\forall t\in\mathbb{R},\ x'(t)=\frac{1}{4}(y''(t)-10y'(t))$, relations que l'on injecte dans la première équation pour obtenir la relation $y''(t)-14y'(t)+24y(t)=-48$.

d) La résolution de l'équation différentielle $y''(t)-14y'(t)+24y(t)=-48$ donne
$y(t)=-2+Ae^{2t}+Be^{12t}$, ce qui, avec les conditions initiales $y(0)=y'(0)=0$, aboutit à

$y(t)=\frac{2}{5}\left(-5+6e^{2t}-e^{12t}\right)$. La relation $\forall t\in\mathbb{R},\ x(t)=\frac{1}{4}\left(y'(t)-10\,y(t)\right)$ permet d'obtenir l'expression: $x(t)=5-\frac{24}{5}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{12t}$.

Exercice 8

1) Si les deux droites L_k et $L_{k'}$ ne sont pas parallèles, elles ont un point d'intersection $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$. On a alors $f(x\,;y)=k=k'$ donc les deux droites L_k et $L_{k'}$ sont égales, donc parallèles : contradiction.

2) Cela signifie que les lignes de niveau sont des droites verticales. On en déduit que pour tout réel *x,* la fonction $y\to f(x\,;y)$ est constante. Autrement dit, $\forall(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y)=0$. La fonction $(x\,;y)\to f(x\,;y)$ ne dépend que de *x*.

3) a)La ligne de niveau associée à $k=f(x\,;y)$ est la droite passant par $(x\,;y)$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}:\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. On en déduit que $\forall t\in\mathbb{R},\ f(x\,;y)=f(x+ta\,;y+tb)$. En posant $t=-\frac{x}{a}$, on obtient que $f(x\,;y)=f\left(0\,;y-\frac{b}{a}x\right)$.

b) Supposons $a\neq 0$. On pose $u(t)=f\left(0\,;-\frac{t}{a}\right)$. On a $u(bx-ay)=f\left(0\,;\frac{ay-bx}{a}\right)=f\left(0\,;y-\frac{b}{a}x\right)=f(x\,;y)$.

Supposons $a=0$. Alors d'après le 2), $f(x\,;y)=f(x\,;0)=u(bx)$ avec $u(t)=f\left(\frac{t}{b}\,;0\right)$.

c) On raisonne par l'absurde et l'on suppose que $t\neq t'$ et $u(t)=u(t')=c$. Alors, pour tous les points $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$ appartenant aux droites d'équations $bx-ay=t$ et $bx-ay=t'$ sont tels que $f(x\,;y)=u(t)=u(t')=c$. On en déduit que les deux droites, strictement parallèles donc distinctes, d'équations $bx-ay=t$ et $bx-ay=t'$ sont contenues dans L_c qui est sensé être soit une seule droite, soit l'ensemble vide. On en déduit alors que si $t\neq t'$, alors $u(t)\neq u(t')$.

d) Si $t\in[0\,;1[$, on a $ty\geqslant tx$ et $1-t>0$ donc $ty+1-t>tx$. Cette inégalité stricte reste vraie si $t=1$ car $x<y$. On en déduit que $\forall t\in[0\,;1],\ ty+1-t\neq tx$. Cela implique d'après le c) que la fonction $t\to u(ty+1-t)-u(tx)$ ne s'annule pas. L'expression de *u* obtenue à la question 3)b) montre que la fonction *u* est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $t\to u(ty+1-t)-u(tx)$ est continue. Puisque elle ne s'annule pas sur l'intervalle $[0\,;1]$, elle y est de signe constant. Donc, en considérant les valeurs $t=0$ et $t=1$, on en déduit que $u(y)-u(x)$ est du signe de $u(1)-u(0)$. On a donc prouvé que la fonction *u* est strictement monotone.

e) Soit *f* une fonction vérifiant la propriété *(D)*. On déduit des questions précédentes qu'il existe un couple $(a\,;b)\neq(0\,;0)$ et une fonction *u* strictement monotone sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ f(x\,;y)=u(b\,x-a\,y)$. L'expression de *u* obtenue à la question 3)b) montre que la fonction *u* est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque *f* est dérivable par rapport à chacune de ses deux variables .

Réciproquement, si il existe une fonction *u* strictement monotone et dérivable sur $\mathbb{R}$ et un couple

$(a\,;b)\neq(0\,;0)$ tels que $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ f(x\,;y)=u(b\,x-a\,y)$, alors la fonction *f* est continue et dérivable par rapport à chacune de ses deux variables.
Soit $k\in\mathbb{R}$. Alors, soit l'équation $u(t)=k$ n'a aucune solution sur $\mathbb{R}$ et la relation $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ f(x\,;y)=u(b\,x-a\,y)$ montre que $L_k=\emptyset$, soit l'équation $u(t)=k$ admet une unique solution $t=t_0$ et L_k est égal à l'ensemble des couples $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $bx-ay=t_0$ qui constitue une droite. La fonction *f* vérifie donc la propriété *(D)*.

Exercice 9

1) Par composition de deux fonctions, la fonction *g* est continue car $a:]0\,;+\infty[\to\mathbb{R}$ est dérivable donc continue , et *g* admet des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point car les fonctions *a*, $x\to\frac{y}{x}$ et $y\to\frac{y}{x}$ sont dérivables pour $(x\,;y)\in]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$. On a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x\,;y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)a'\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{-y}{x^2}a'\left(\frac{y}{x}\right)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x\,;y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)a'\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}a'\left(\frac{y}{x}\right)$$

d'où $x\frac{\partial g}{\partial x}(x\,;y)+y\frac{\partial g}{\partial y}(x\,;y)=0$.

2)

a) La fonction *f* est continue sur la partie ouverte $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$ et y admet des dérivées partielles d'ordre 1 continues. Les fonctions $t\to tx$ et s $t\to ty$ ont dérivables de dérivées constantes égales à *x* et y respectivement.
Alors, on déduit de la propriété 2 que la fonction $\varphi:]0\,;+\infty[\to\mathbb{R}$ est dérivable et

$$\forall t>0,\varphi'(t)=x\frac{\partial f}{\partial x}(t\,x\,;ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(t\,x\,;ty)=\frac{1}{t}\left(tx\frac{\partial f}{\partial x}(t\,x\,;ty)+t\,y\frac{\partial f}{\partial y}(t\,x\,;ty)\right)=0$$

car *f* vérifie l'EDP : $x\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y)=0.$

b) On déduit alors que $\varphi(1)=\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $f(x\,;y)=f\left(1\,;\frac{y}{x}\right)=a\left(\frac{y}{x}\right)$. La fonction *a* est bien dérivable car la fonction *f* admet des dérivées partielles par rapport à *y* en tout point $(1\,;y)$ avec $y>0$. On a donc prouvé la réciproque de la question 1).

3)

a) Par le même raisonnement que pour le 2)a), la fonction $\varphi:]0\,;+\infty[\to\mathbb{R}$ est dérivable et on a :

$$\forall t>0,\varphi'(t)=\frac{1}{t}\left(tx\frac{\partial f}{\partial x}(t\,x\,;ty)+t\,y\frac{\partial f}{\partial y}(t\,x\,;ty)\right)=\frac{\lambda}{t}f(tx\,;ty)=\frac{\lambda}{t}.\varphi(t).$$

b) On a, en utilisant le résultat du a) :

$$\forall t>0,\ \frac{d}{dt}\left(t^{-\lambda}\varphi(t)\right)=-\lambda t^{\lambda-1}\varphi(t)+t^{-\lambda}\varphi'(t)=-\lambda t^{\lambda-1}\varphi(t)+t^{-\lambda}.\left(\frac{\lambda}{t}\right)\varphi(t)=0$$

c) On déduit alors que $\varphi(1)=x^{\lambda}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $f(x\,;y)=x^{\lambda}f\left(1\,;\frac{y}{x}\right)=x^{\lambda}a\left(\frac{y}{x}\right)$. La fonction *a* est bien dérivable à dérivée continue car la fonction *f* admet des dérivées partielles par rapport à *y* continues en tout point $(1\,;y)$ avec $y>0$.

Réciproquement, si $a:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ est une fonction dérivable à dérivée continue , la fonction $f(x;y)\overset{\text{def}}{=}x^{\lambda}a\left(\frac{y}{x}\right)$ est bien continue sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ (produit et composée de fonctions continues) et admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\lambda x^{\lambda-1}a\left(\frac{y}{x}\right)-y\,x^{\lambda-2}a'\left(\frac{y}{x}\right)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=x^{\lambda-1}a'\left(\frac{y}{x}\right)$, qui sont bien continues par rapport à x et y et vérifient

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\lambda x^{\lambda}a\left(\frac{y}{x}\right)-y\,x^{\lambda-1}a'\left(\frac{y}{x}\right)+y\,x^{\lambda-1}a'\left(\frac{y}{x}\right)=\lambda f(x;y).$$

d) D'après la question précédente, on a $f(x;y)=x\,a\left(\frac{y}{x}\right)$ pour une certaine fonction $a:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ dérivable à dérivée continue .

La condition $\forall\theta\in[0;\frac{\pi}{2}[,\ f(\cos(\theta);\sin(\theta))=\theta$ donne $\forall\theta\in[0;\frac{\pi}{2}[,\ \theta=\cos(\theta).a(\tan(\theta))$ donc en posant $t=\tan(\theta)$, on a $\forall t\geqslant 0,\arctan(t)=\cos(\arctan(t))a(t)$.

On remarque que $\cos(\arctan(t))=\cos(\mathrm{Arg}(1+jt))=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ d'où l'expression

$$\forall t\geqslant 0,\ a(t)=\sqrt{1+t^2}\arctan(t).$$

On en déduit que

$$\forall x>0,\ \forall y>0,\ f(x;y)=x\,a\left(\frac{y}{x}\right)=x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\sqrt{x^2+y^2}\,.\arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Exercice 10

1)

a) On a $f(0;0)=0$ en utilisant la relation $f(x;y)=x\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)-y\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=f(x;y)$ pour $x=y=0$.

b) Les fonctions $\theta\to\sqrt{x^2+y^2}\cos(\theta)$ et $\theta\to\sqrt{x^2+y^2}\sin(\theta)$ sont dérivables à dérivées continues et l'application $\theta\to\left(\sqrt{x^2+y^2}\cos(\theta);\sqrt{x^2+y^2}\sin(\theta)\right)$ va bien de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. On peut donc utiliser la propriété 2 pour dire que φ est dérivable et

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \varphi'(\theta)=-\sqrt{x^2+y^2}\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{x^2+y^2}\cos(\theta);\sqrt{x^2+y^2}\sin(\theta))$$
$$+\sqrt{x^2+y^2}\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{x^2+y^2}\cos(\theta);\sqrt{x^2+y^2}\sin(\theta)).$$

Si l'on pose $X=\sqrt{x^2+y^2}\cos(\theta)$ et $Y=\sqrt{x^2+y^2}\sin(\theta)$ cela donne :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \varphi'(\theta)=-Y\frac{\partial f}{\partial x}(X;Y)+X\frac{\partial f}{\partial y}(X;Y)=f(X;Y)=\varphi(\theta)$$

en utilisant l'EDP vérifiée par *f*.

c) On en déduit qu'il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $\forall\theta\in\mathbb{R},\ \varphi(\theta)=C\,e^{\theta}$. On a $\varphi(0)=\varphi(2\pi)$ donc $C=C\,.e^{2\pi}$ d'où C=0 . La fonction φ est nulle.

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2\setminus(0;0)$. Alors, en posant $\theta=\mathrm{Arg}(x+jy)$ on a

$$\cos(\theta)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\text{ et }\sin(\theta)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\text{ et donc }0=\varphi(\theta)=f(x;y)\ .$$

On en déduit que f nulle. C'est la seule solution.

2)
a) Il faut montrer que $\varphi :]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est bien définie, ce qui résulte du fait que si $(x;y)\in]0;+\infty[\times\mathbb{R}$, alors $x>0$ donc $\sqrt{x^2+y^2}>0$ d'où $\sqrt{x^2+y^2}\cos(\theta)>0$ car $\theta\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. On a alors $(\sqrt{x^2+y^2}\cos(\theta);\sqrt{x^2+y^2}\sin(\theta))$ qui appartient au domaine de définition de *f*.
Le même raisonnement qu'au 1)b) permet de dire que φ est dérivable et vérifie l'équation différentielle $\forall\theta\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[,\ \varphi'(\theta)=\varphi(\theta)$ d'où l'on déduit qu'il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $\forall\theta\in]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}[,\ \varphi(\theta)=Ce^{\theta}$. On a $C=\varphi(0)=f(\sqrt{x^2+y^2};0)$ donc $\forall\theta\in]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}[,\ \varphi(\theta)=f(\sqrt{x^2+y^2};0)e^{\theta}$.

b) On a $\theta_0=\mathrm{Arg}(x+jy)$ car $x>0$ d'où l'on déduit que :
$\cos(\theta_0)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin(\theta_0)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

c) D'après les propriétés de la fonction arctangente, on a bien $\theta_0=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. On a $\varphi(\theta_0)=f(x;y)$. On en déduit que

$$f(x;y)=\varphi(\theta_0)=f(\sqrt{x^2+y^2};0)e^{\theta_0}=f(\sqrt{x^2+y^2};0)e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$$

ce qui répond à la question avec $h(t)=f(t;0)$ qui est bien une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$.

3) Courage !!
On a $\frac{\partial}{\partial x}\left(h(x^2+y^2)\right)=2x\,h'(x^2+y^2)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(h(x^2+y^2)\right)=2y\,h'(x^2+y^2)$,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{-y}{y^2+x^2} \quad\text{et}\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x}{y^2+x^2}.$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=2y\,h'(x^2+y^2)e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}+h(x^2+y^2)\frac{x}{y^2+x^2}e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$$
$$=\left(\frac{x.h(x^2+y^2)}{y^2+x^2}+2y\,h'(x^2+y^2)\right)e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=2x\,h'(x^2+y^2)e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}-h(x^2+y^2)\frac{y}{y^2+x^2}e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$$
$$=\left(\frac{-y\,h(x^2+y^2)}{y^2+x^2}+2x\,h'(x^2+y^2)\right)e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

On en déduit après factorisations que

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)-y\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\left(\frac{(x^2+y^2).h(x^2+y^2)}{y^2+x^2}+2xyh'(x^2+y^2)-2yxh'(x^2+y^2)\right)e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$$
$$=h(x^2+y^2)e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}=f(x;y).$$

Exercice 11

1)

a) La fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre 1 continues en tout point $(x;t)\in\mathbb{R}^2$, la relation $f=-2\frac{\partial f}{\partial x}-3\frac{\partial f}{\partial t}$ montre que f est continue.
Les fonctions $(y;z)\to y+2z$ et $(y;z)\to y+3z$ étant continues et à dérivées partielles d'ordre 1 continues, on peut appliquer le corollaire de la propriété 2 qui assure que $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est continue et admet des dérivées partielles d'ordre 1.

b) Toujours par le corollaire de la propriété 2, on a
$$\frac{\partial g}{\partial z}(y;z)=2\frac{\partial f}{\partial x}(y+2z;y+3z)+3\frac{\partial f}{\partial y}(y+2z;y+3z)=-f(y+2z;y+3z)$$
grâce à l'EDP vérifiée par f, ce qui donne $\forall y\in\mathbb{R},\forall z\in\mathbb{R},\ \frac{\partial g}{\partial z}(y;z)=-g(y;z)$.

c) On a donc $\forall y\in\mathbb{R},\forall z\in\mathbb{R},\ g(y;z)=a(y)e^{-z}$ pour une certaine fonction $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Puisque la fonction g est dérivable par rapport, cela implique que la fonction a est dérivable.

d) On déduit de la question précédente que
$\forall y\in\mathbb{R},\forall z\in\mathbb{R},\ f(y+2z;y+3z)=a(y)e^{-z}$.
En posant $y=3x-2t$ et $z=t-x$, il vient que $\forall x\in\mathbb{R},\forall t\in\mathbb{R},\ f(x;t)=a(3x-2t)e^{x-t}$.

2) On a, par dérivation d'un produit :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;t)=3a'(3x-2t)e^{x-t}+a(3x-2t)e^{x-t}$$
et
$$\frac{\partial f}{\partial t}(x;t)=-2a'(3x-2t)e^{x-t}-a(3x-2t)e^{x-t}$$
donc
$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x;t)+3\frac{\partial f}{\partial t}(x;t)+f(x;t)$$
$$=2\left(3a'(3x-2t)e^{x-t}+a(3x-2t)e^{x-t}\right)+3\left(-2a'(3x-2t)e^{x-t}-a(3x-2t)e^{x-t}\right)+a(3x-2t)e^{x-t}$$
$$=0.$$

3) La convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x,0))^2dx$ signifie que $\int_{-\infty}^{+\infty}a^2(3x)e^{2x}dx$ converge et
$$\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x,0))^2dx=\int_{-\infty}^{+\infty}a^2(3x)e^{2x}dx.$$
La positivité de $x\to(f(x,t))^2$ fait que, pour montrer la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x,t))^2dx$, il suffit de montrer que pour tout réel t on a : $\lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^{X}(f(x,t))^2dx\in\mathbb{R}$.

On a pour tout réel positif X : $\int_{-X}^{X} (f(x,t))^2 dx = \int_{-X}^{X} a^2(3x-2t)e^{2x-2t} dx.$

On fait le changement de variable $y = x - \frac{2}{3}t$ qui donne

$$\int_{-X}^{X} (f(x,t))^2 dx = \int_{-X+\frac{2}{3}t}^{X-\frac{2}{3}t} a^2(3y)e^{2y-\frac{2}{3}t} dy = e^{-\frac{2}{3}t}.\int_{-X+\frac{2}{3}t}^{X-\frac{2}{3}t} a^2(3y)e^{2y} dy = e^{-\frac{2}{3}t}.\int_{-X+\frac{2}{3}t}^{X-\frac{2}{3}t} (f(y;0))^2 dy \quad .$$

Si l'on fait tendre X vers l'infini, cela prouve la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x,t))^2 dx$ et la relation $E(t) = e^{-\frac{2}{3}t}.\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x;0))^2 dx$ .On peut interpréter cela en disant que l'énergie de la fonction $x \to f(x;t)$ décroît de façon exponentielle.

4) On a une expression de la forme : $f(x;t) = a(3x-2t)e^{x-t}$ où a est une fonction dérivable d'une variable. La condition initiale $f(x;0) = \Pi_{-1,1}(x)$ se traduit par $a(3x)e^x = \Pi_{-1,1}(x)$ c'est à dire que

$\forall x \in \mathbb{R},\ a(x) = e^{\frac{-x}{3}} \Pi_{-1,1}\left(\frac{x}{3}\right)$ d'où l'expression

$$f(x;t) = a(3x-2t)e^{x-t} = e^{-x+\frac{2t}{3}} \Pi_{-1,1}\left(x - \frac{2}{3}t\right)e^{x-t} = \Pi_{-1,1}\left(x - \frac{2}{3}t\right)e^{\frac{-t}{3}} \quad .$$

Le graphe est la fonction porte $\Pi_{-1,1}$ qui se translate horizontalement vers $+\infty$ lorsque t augmente, et ce, à une vitesse de $\frac{2}{3}$ unité d'abscisse par unité de temps, et la fonction porte est atténuée en ordonnée par le facteur $e^{\frac{-t}{3}}$.

Exercice 12

La probabilité d'obtenir la séquence « AAABBC » vaut $p^3 q^2 r$. Puisque $p+q+r=1$, cette probabilité s'écrit $p^3 q^2 (1-p-q)$.

On a les conditions $p \geqslant 0, q \geqslant 0$ et $p+q \leqslant 1$. On peut en fait considérer ces inégalités comme strictes, car dans le cas contraire, la probabilité d'obtenir la séquence « AAABBC » est nulle, ce qui est inintéressant vu qu'on cherche à maximiser cette probabilité.

On définit la fonction $f:(p;q) \to p^3 q^2 (1-p-q)$ sur l'ouvert :

$U = \{(p;q) \in]0;+\infty[^2 \ / \ p+q < 1\}$

qui correspondant au triangle ouvert dont les sommets sont les points O, $(1;0)$ et $(0;1)$. On cherche le maximum de f sur U.

On a après calculs

$$\frac{\partial f}{\partial p}(p;q) = p^2 q^2 (3-4p-3q)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q}(p;q) = p^3 q (2-2p-3q)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}(p;q) = 6pq^2(1-2p-q)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}(p;q) = 2p^3(1-p-3q)$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}(p;q)=p^2 q(6-8\text{p}-9\text{q})$

Un point $(p;q)\in U$ est critique si et seulement si $4p+3q=3$ et $2p+3q=2$ ce qui donne la seule possibilité :

$(p;q)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)\in U$. On a $R=\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{9}$, $S=\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{12}$ et $T=\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{8}$ donc $S^2-RT=\frac{-1}{144}<0$ on a donc un extremum local en $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$. Il s'agit d'un maximum car $R<0$. Ce maximum local vaut $f\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2^4 3^3}$.

Pour être complet, il faut montrer que ce maximum est global.

Fixons $q\in]0;1[$ et regardons l'application $]0;1-q[\to\mathbb{R}$ définie par $p\to f(p;q)$. Sa dérivée est $\frac{\partial f}{\partial p}(p;q)=p^2q^2(3-4\text{p}-3\text{q})=4p^2q^2\left(\frac{3}{4}(1-q)-p\right)$ qui est du signe de $\left(\frac{3}{4}(1-q)-p\right)$: l'application $p\to f(p;q)$ admet un maximum global sur $]0;1-q[$ atteint en $\frac{3}{4}(1-q)$ et égal à $f\left(\frac{3}{4}(1-q);q\right)=\frac{3^3}{4^4}q^2(1-q)^4$. On en déduit que

$\forall(p;q)\in U,\ f(p;q)\leqslant\frac{3^3}{4^4}q^2(1-q)^4=\frac{3^3}{4^4}(\varphi(q))^2$ où l'on a défini l'application φ sur $]0;1[$ par l'expression $\varphi(q)=q(1-q)^2$. Une étude facile des variations de φ montre qu'elle atteint un maximum global en $q=\frac{1}{3}$ donc $\forall q\in]0;1[,\ \varphi(q)\leqslant\frac{4}{27}$ d'où l'on déduit que

$\forall(p;q)\in U,\ f(p;q)\leqslant\frac{3^3}{4^4}\left(\frac{2^2}{3^3}\right)^2=\frac{1}{2^4 3^3}=f\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$.

Conclusion : la probabilité maximale d'obtenir la séquence « AAABBC » vaut $\frac{1}{432}$ si $(p;q;r)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{6}\right)$.

Exercice 13

1) Il y a une face de surface xy et deux de surfaces xz et yz donc la surface totale vaut $xy+2\text{yz}+2\text{xz}$. Sachant que $xyz=4$, on a $z=\frac{4}{xy}$ ce qui donne une surface égale à $S(x;y)=xy+\frac{8}{x}+\frac{8}{y}$.

2) On a $\overrightarrow{\nabla S}(x;y)=\begin{pmatrix} y-\frac{8}{x^2} \\ x-\frac{8}{y^2}\end{pmatrix}$. On trouve un unique point singulier $(x;y)=(2;2)$ (la relation $x^2y=xy^2=8$ donne $x=y$ ce qui fournit $x^3=y^3=8$).

On a $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x;y)=\frac{16}{x^3}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}(x;y)=\frac{16}{y^3}$ et $\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x}(x;y)=1$ donc

$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x}(x;y)\right)^2-\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x;y)\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}(x;y)=1-\frac{2^8}{x^3 y^3}$ ce qui donne pour le point critique :

$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x}(x;y)\right)^2-\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x;y)\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}(x;y)=-3<0$.

Puisque $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(2;2)=2>0$, on en déduit qu'il y a un unique extremum local en $(x;y)=(2;2)$ et qu'il s'agit d'un minimum.

3)

a) Définissons pour y strictement positif fixé la fonction $\varphi(x)=S(x;y)$ définie sur $]0;+\infty[$. On a $\varphi'(x)=y-\frac{8}{x^2}=\frac{y}{x^2}\left(x^2-\frac{8}{y}\right)=\frac{y}{x^2}\left(x-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{y}}\right)\left(x+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{y}}\right)$ qui est du signe de $x-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{y}}$. On en déduit que φ admet un minimum global sur $]0;+\infty[$ en $x=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{y}}$ d'où $\forall x>0, \varphi(x)\geqslant\varphi\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{y}}\right)=2\sqrt{2y}+2\sqrt{2y}+\frac{8}{y}=4\sqrt{2y}+\frac{8}{y}$.

Puisque y est un réel strictement positif quelconque, on a bien :

$\forall x>0,\ \forall y>0,\ \ xy+\frac{8}{x}+\frac{8}{y}\geq 4\sqrt{2y}+\frac{8}{y}$.

b) On considère la fonction ψ sur $]0;+\infty[$ par l'expression $\psi(y)=4\sqrt{2y}+\frac{8}{y}$. On a $\psi'(y)=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{y}}-\frac{8}{y^2}=\frac{2\sqrt{2}(y\sqrt{y}-2\sqrt{2})}{y^2}$ qui est du signe de $y-2$. La fonction admet donc un minimum global sur $]0;+\infty[$ égal à $\psi(2)=12$. On a donc $\forall y>0,\ 4\sqrt{2y}+\frac{8}{y}\geqslant 12$.

On déduit du a) que $\forall x>0,\ \forall y>0,\ \ xy+\frac{8}{x}+\frac{8}{y}\geqslant 12=S(2;2)$.

La boîte sans couvercle de volume égale à 4 et de surface minimale a pour dimensions $x=2, y=2$ et $z=1$.

Exercice 14

On a $\overrightarrow{\nabla}\mathrm{f}(x;y)=\begin{pmatrix}3\mathrm{x}^2-3\mathrm{y}\\3\mathrm{y}^2-3\mathrm{x}\end{pmatrix}$. On trouve deux points singuliers $(x;y)=(0;0)$ et $(x;y)=(1;1)$.

On a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=6\mathrm{x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=6\mathrm{y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y)=-3$ donc

$\Delta=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y)\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=9(1-4xy)$ ce qui donne :

(i) pour le point critique $(x;y)=(0;0)$, $\Delta=9>0$: il n'y a pas d'extremum local en ce point.

(ii) pour le point critique $(x;y)=(1;1)$, $\Delta=-27<0$: il y a un extremum local en ce point, qui est un minimum local car $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=6>0$. Ce minimum local vaut $f(1;1)=-1$. Il n'est pas global car $f(-1;-1)=-5<f(1;1)$.

Exercice 15

On a $\overrightarrow{\nabla}\mathrm{f}(x;y)=\begin{pmatrix}(\ln(x))^2+2\ln(x)+y^2\\ 2\mathrm{xy}\end{pmatrix}$. Si un point $(x;y)$ est singulier, on a nécessairement y=0. On trouve alors les deux seuls points singuliers $(x;y)=(1;0)$ et $(x;y)=(e^{-2};1)$.

On a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=\frac{2}{x}(1+\ln(x))$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=2\mathrm{x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x;y)=2\mathrm{y}$ donc

$\Delta=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x;y)\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=4\left(y^2-1-\ln(x)\right)$ ce qui donne :

(i) pour le point critique $(x;y)=(e^{-2};0)$, $\Delta=4>0$: il n'y a pas d'extremum local en ce point.

(ii) pour le point critique $(x;y)=(1;0)$, $\Delta=-4<0$: il y a un extremum local en ce point, qui est un minimum local car $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=2>0$. Ce minimum local vaut $f(1;0)=0$. Il est global car $\forall x>0,\ \forall y\in\mathbb{R},\ f(x;y)\geqslant 0=f(1;0)$. .

Exercice 16

1) a) On a $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ \vec{V}(x;y)=a(x^2+y^2)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=a(x^2+y^2)\overrightarrow{OM}(x;y)$

b) $\left\|\overrightarrow{V(x;y)}\right\|^2=(x^2+y^2)a^2(x^2+y^2)$ ne dépend que de la quantité x^2+y^2 qui est la carré de la distance de M à l'origine.

2) On remarque que $\frac{\partial V_1}{\partial y}(x;y)=\frac{\partial V_2}{\partial x}(x;y)=2\mathrm{xy}\,a'(x^2+y^2)$. Puisque $\mathbb{R}^2$ est étoilé, la propriété 5 permet de dire que le champ de vecteurs $\vec{V}(x;y)$ dérive d'un potentiel scalaire.

Si l'on définit $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par $\varphi(x;y)=\frac{1}{2}A(x^2+y^2)$ où A est une primitive de la fonction *a,*

alors $\overrightarrow{\nabla}\varphi(x;y)=\begin{pmatrix}x\,a(x^2+y^2)\\ y\,a(x^2+y^2)\end{pmatrix}=\overrightarrow{V(x;y)}$.

Exercice 17

On a

$$f(x;y)=\frac{1}{4\mathrm{x}}\left(y^2-4xy+4\mathrm{x}^3\right)=\frac{1}{4\mathrm{x}}\left((y-2\mathrm{x})^2+4\mathrm{x}^3-4\mathrm{x}^2\right)$$

$$=\frac{(y-2x)^2}{4\mathrm{x}}+x^2-x=\frac{(y-2x)^2}{4\mathrm{x}}+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

ce qui montre que $\forall(x;y)\in]0;+\infty[\times\mathbb{R}$, $f(x;y)+\frac{1}{4}=\frac{(y-2x)^2}{4\mathrm{x}}+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $y=2\mathrm{x}$ et $x=\frac{1}{2}$, ce qui montre que *f* admet un minimum <u>global</u> en $\left(1;\frac{1}{2}\right)$ égal à $\frac{-1}{4}$.

Exercice 18

1) On remarque que $\frac{\partial V_1}{\partial y}(x;y)=\frac{\partial V_2}{\partial x}(x;y)=1$. Puisque $\mathbb{R}^2$ est étoilé, la propriété 5 permet de dire que le champ de vecteurs $\vec{V}(x;y)$ dérive d'un potentiel scalaire φ et on trouve $\varphi(x;y)=\frac{1}{2}x^2+xy+\text{Cste}$.

2) a) La fonction $x\to\varphi(x;y(x))$ est constante sur $]0;+\infty[$ signifie que $x\to\frac{1}{2}x^2+xy(x)$ est de dérivée nulle, c'est à dire que $\forall x\geqslant 0,\ x+y(x)+x\frac{dy}{dx}(x)=0$

b) La fonction $x\to\varphi(x;y(x))$ est constante sur $]0;+\infty[$ signifie aussi que $\exists C:\forall x\in[0;+\infty[,\ \frac{1}{2}x^2+xy(x)=C$ c'est à dire que $y(x)=\frac{C}{x}-\frac{1}{2}x$. La condition $y(1)=1$ équivaut à $C=\frac{3}{2}$. On a $y(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}-x\right)$, unique solution de *(E)* vérifiant la condition initiale $y(1)=1$.

3) On remarque que $\frac{\partial W_1}{\partial y}(x;y)=1$ et $\frac{\partial W_2}{\partial x}(x;y)=2$ donc le champ de vecteur $\vec{W}(x;y)$ ne dérive pas d'un potentiel scalaire.

4)

a) On a $\frac{\partial}{\partial y}\left(f(x)W_1(x;y)\right)(x;y)=f(x)$ et $\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x)W_2(x;y)\right)(x;y)=\left(2x\,f(x)\right)'=2f(x)+2xf'(x)$

donc le champ de vecteurs $(x;y)\to f(x)\vec{W}(x;y)$ dérive d'un potentiel scalaire car on a bien $\forall x>0,\ 2f(x)+2xf'(x)=f(x)$.

b) $\forall x>0,\ 2xf'(x)+f(x)=2x\left(\frac{-1}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{-1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$

c) On trouve $\psi(x,y)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2y\sqrt{x}$.

5) a) La fonction $x\to\psi(x;y(x))$ est constante sur $]0;+\infty[$ signifie que $x\to\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2y(x)\sqrt{x}$ est de dérivée nulle, c'est à dire que

$\forall x\geqslant 0,\ \sqrt{x}+\frac{y(x)}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}\frac{dy}{dx}(x)=0$ .Comme $x\neq 0$ cela équivaut à

$\forall x\geqslant 0,\ x+y(x)+2x\frac{dy}{dx}(x)=0$ ce qui est bien l'équation *(E')*.

b) On a y qui vérifie *(E')* si et seulement si la fonction $x\to\psi(x;y(x))$ est constante sur $]0;+\infty[$ ce qui signifie aussi que $\exists C:\forall x\in[0;+\infty[,\ x\to\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2y(x)\sqrt{x}=C$ c'est à dire que $y(x)=\frac{C}{2\sqrt{x}}-\frac{x}{3}$. La condition $y(1)=1$ équivaut à ce que $C=\frac{8}{3}$ ce qui donne l'unique

solution $y(x)=\frac{4}{3\sqrt{x}}-\frac{x}{3}$.

Exercice 19

1)

a) On a $x=\frac{u+v}{2}$ et $t=\frac{u-v}{2c}$ donc $g(u;v)=f\left(\frac{u+v}{2};\frac{u-v}{2c}\right)$.

b) On déduit du corollaire de la propriété 2 que g est continue sur $\mathbb{R}^2$, et admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 continues. On a d'après ce même corollaire :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u;v)=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2};\frac{u-v}{2c}\right)+\frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{u+v}{2};\frac{u-v}{2c}\right) .$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2};\frac{u-v}{2c}\right)\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u+v}{2};\frac{u-v}{2c}\right)-\frac{1}{2c}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}\left(\frac{u+v}{2};\frac{u-v}{2c}\right)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2};\frac{u-v}{2c}\right)\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}\left(\frac{u+v}{2};\frac{u-v}{2c}\right)-\frac{1}{2c}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\left(\frac{u+v}{2};\frac{u-v}{2c}\right)$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}(u;v)=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u+v}{2};\frac{u-v}{2c}\right)-\frac{1}{4c}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}\left(\frac{u+v}{2};\frac{u-v}{2c}\right)$$
$$+\frac{1}{4c}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}\left(\frac{u+v}{2};\frac{u-v}{2c}\right)-\frac{1}{4c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\left(\frac{u+v}{2};\frac{u-v}{2c}\right)$$
$$=\frac{1}{4c^2}\left(c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u+v}{2};\frac{u-v}{2c}\right)-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\left(\frac{u+v}{2};\frac{u-v}{2c}\right)\right)$$
$$=0 \quad \text{car} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x;t)=c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;t) .$$

c) On déduit de la question précédente que $g(u;v)$ a une expression de la forme $g(u;v)=a(u)+b(v)$ où a et b sont deux fonctions d'une variable, deux fois dérivables puisque g admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2. On a alors

$\forall x\in\mathbb{R}, \forall t\in\mathbb{R}, f(x,t)=a(x+ct)+b(x-ct)$ d'après le 1)a).

2) On obtient facilement que la fonction $(x;t)\rightarrow f(x,t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$, et admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 continues. On a

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;t)=a''(x+ct)+b''(x-ct)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x;t)=c^2\left(a''(x+ct)+b''(x-ct)\right)$ donc f est solution de $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x;t)=c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;t)$.

3) On a f de la forme $f(x,t)=a(x+ct)+b(x-ct)$ où a et b sont deux fonctions d'une variable deux fois dérivables, et les conditions initiales donnent :

$\forall x\in\mathbb{R},\ a(x)+b(x)=x$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ c(a'(x)-b'(x))=\cos(x)$.

La dernière relation donne $a(x)-b(x)=\frac{1}{c}\sin(x)+A$ où A est une constante réelle.

On a alors

$$a(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2c}\sin(x)+\frac{A}{2}$$

$$b(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2c}\sin(x)-\frac{A}{2}\quad .$$

On obtient alors

$$f(x,t)=\frac{1}{2}(x+ct)+\frac{1}{2c}\sin(x+ct)+\frac{A}{2}+\frac{1}{2}(x-ct)-\frac{1}{2c}\sin(x-ct)-\frac{A}{2}$$

$$=x+\frac{1}{c}\cos(x)\sin(ct).$$

Exercice 20

1) On a $\varphi(x;y)=(x-y)^2+(f(x)-g(y))^2$. Puisque f et g sont deux fois dérivables à dérivées secondes continues sur I, φ admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 continues sur $I\times I$ et

on a :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x;y)=2(x-y)+2f'(x)(f(x)-g(y))\quad ,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x;y)=-2(x-y)-2g'(y)(f(x)-g(y))$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x;y)=2+2(f'(x))^2+2f''(x)(f(x)-g(y))$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x;y)=2+2(g'(y))^2-2g''(y)(f(x)-g(y))$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x;y)=-2-2f'(x).g'(y)\quad .$$

2) Si la fonction φ admet un minimum local en un point $(x_0;y_0)\in I\times I$, nécessairement

$$\overrightarrow{\nabla\varphi}(x_0;y_0)=\begin{pmatrix}2(x_0-y_0)+2f'(x_0)(f(x_0)-g(y_0))\\-2(x_0-y_0)-2g'(y_0)(f(x_0)-g(y_0))\end{pmatrix}=\vec{0}\quad .$$

En ajoutant les deux composantes du gradient, on obtient :

$$(f'(x_0)-g'(y_0)).(f(x_0)-g(y_0))=0\quad .$$

On a alors deux cas :

soit $f(x_0)-g(y_0)=0$ auquel cas, la relation $\overrightarrow{\nabla\varphi}(x_0;y_0)=\vec{0}$ donne $x_0=y_0$ ce qui est impossible vu que les courbes représentatives de f et g ne se croisent pas (en effet $\forall x\in I,\ f(x)\neq g(x).$)

soit $f'(x_0)-g'(y_0)=0$ ce qui veut dire que les tangentes aux courbes représentatives des fonctions f et g , respectivement, en les points $M(x_0)$ et $N(y_0)$ sont toutes les deux parallèles.

On a $\overrightarrow{M(x_0)N(y_0)}=\begin{pmatrix}y_0-x_0\\g(y_0)-f(x_0)\end{pmatrix}$ Posons $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\f'(x_0)\end{pmatrix}$: c'est un vecteur directeur commun aux tangentes aux courbes représentatives des fonctions f et g , respectivement, en les points $M(x_0)$ et $N(y_0)$. On calcule le produit scalaire

$\vec{u}.\overrightarrow{M(x_0)N(y_0)}=\frac{-1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0;y_0)=0$ ce qui montre que les tangentes aux courbes représentatives des fonctions f et g , respectivement, en les points $M(x_0)$ et $N(y_0)$ sont toutes les deux orthogonales à la droite (MN) .

3)

a) Si l'on pose $h(x)=2e^{3x}+1-x$, on a $h'(x)=6e^{3x}-1$ d'où l'on déduit que h admet un minimum en $x=\frac{-1}{3}\ln(6)$. On en déduit que $\text{Min}(h)=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\ln(6)$ ce qui prouve que h est une fonction strictement positive. On a donc $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)>g(x)$.

b) Si $(x_0;y_0)\in\mathbb{R}^2$, alors nécessairement $f'(x_0)=g'(y_0)=1$ c'est à dire que $x_0=\frac{-1}{3}\ln(6)$.

En considérant la relation $-2(x_0-y_0)-2g'(y_0)(f(x_0)-g(y_0))=0$ il vient :

$$y_0=x_0+g'(y_0)(f(x_0)-g(y_0))=x_0+(\frac{4}{3}-y_0)$$

d 'où $y_0=\frac{1}{2}x_0+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\ln(6)$.

Réciproquement, on vérifie que pour les valeurs trouvées ci-dessus, on a

$$\overrightarrow{\nabla}\varphi(x_0;y_0)=\begin{pmatrix}2(x_0-y_0)+12e^{3x_0}(2e^{3x_0}+1-y_0)\\-2(x_0-y_0)-2(2e^{3x_0}+1-y_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-4}{3}-\frac{1}{3}\ln(6)+2(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\ln(6))\\\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\ln(6)-2(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\ln(6))\end{pmatrix}=\vec{0}\ .$$

On calcule

$$R=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x_0;y_0)=2+2\left(f'(x_0)\right)^2+6(f(x_0)-g(y_0))=2+2+6\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\ln(6)\right)=8+\ln(6)$$

$$S=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x_0;y_0)=-2-2f'(x_0).g'(y_0)=-4$$

$$T=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x_0;y_0)=2+2\left(g'(y_0)\right)^2-2g''(y_0)(f(x_0)-g(y_0))=4$$

de sorte que $S^2-RT=14-4(8+\ln(6))=-18-4\ln(6)<0$: on a un extremum local en $(x_0;y_0)$ et puisque $R>0$ et $T>0$ il s'agit d'un minimum local.

Exercice 21

a) On a $\overrightarrow{\nabla}f(x;y)=\begin{pmatrix}\alpha y^3-4x^3\\3\alpha xy^2-4y^3\end{pmatrix}$.

Il est clair que le point $(0;0)$ est point critique pour *f*.

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ un point critique. Si $y=0$, alors la relation $\alpha y^3-4x^3=0$ montre que $x=0$ et on se ramène au cas $(0;0)$.

Si $y\neq 0$, on a alors $\overrightarrow{\nabla}f(x;y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha y^3-4x^3\\3\alpha x-4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(\frac{4}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}x\\\frac{3}{4}\alpha x\end{pmatrix}$.

Cela n'est possible avec $y\neq 0$ que si $\left(\frac{4}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}\alpha$ c'est à dire si $\alpha=\alpha_0$.

b) Le calcul fait au a) montre que l'ensemble des points critiques est la droite d'équation $y=\frac{3}{4}\alpha_0 x=3^{\frac{1}{4}}x$.

1) On trouve facilement que pour $(0;0)$, $R=S=T=0$ donc $S^2-RT=0$ ce qui est justement le cas où l'on ne peut rien conclure.

2) Calcul immédiat. Remarquer que l'expression n'a de sens que si x est non nul. Sinon, $\forall y\in\mathbb{R},\ f(0;y)=-y^4$.

3) On trouve facilement que φ admet un maximum en $t=\frac{3}{4}\alpha$ valant $\varphi\left(\frac{3}{4}\alpha\right)=\frac{3^3}{4^4}\alpha^4-1$.

4) Si $\alpha\in]0;\alpha_0[$, on a $\varphi\left(\frac{3}{4}\alpha\right)=\frac{3^3}{4^4}\alpha^4-1<0$, donc la fonction φ est toujours négative.

On a alors $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \forall y\in\mathbb{R},\ f(x;y)=x^4\varphi\left(\frac{y}{x}\right)<0$ et $\forall y\in\mathbb{R}^*,\ f(0;y)=-y^4<0$ donc on a un maximum global en $(0;0)$. Il n'y a pas d'autre point critique donc pas d'autre extremum à chercher.

Si $\alpha=\alpha_0$, , on a $\varphi\left(\frac{3}{4}\alpha_0\right)=0$, donc la fonction φ est toujours négative sauf en $\frac{3}{4}\alpha_0$ où elle y est nulle. Si $(x;y)$ est un point critique différent de $(0;0)$, on a $y=\frac{3}{4}\alpha_0 x$ donc $f(x;y)=x^4\varphi\left(\frac{3}{4}\alpha_0\right)=0$ .On obtient alors comme dans le cas précédent que f admet un maximum global en tous les points de la droite d'équation $y=\frac{3}{4}\alpha_0 x$.

Si $\alpha>\alpha_0$, on a $\varphi\left(\frac{3}{4}\alpha\right)>0$ d'où on déduit que $\forall x\neq 0,\ f\left(x;\frac{3}{4}\alpha x\right)=x^4\varphi\left(\frac{3}{4}\alpha\right)>0$ alors que $\forall y\in\mathbb{R}^*,\ f(0;y)=-y^4<0$. On peut trouver des points aussi proches de (0;0) que l'on veut pour lesquels f prend des valeurs strictement positives (les points de la forme $\left(x;\frac{3}{4}\alpha x\right)$) ou pour lesquels f prend des valeurs strictement négatives (les points de la forme $(0;y)$)). On en déduit qu'il n'y a pas d'extremum local pour f dans ce cas.

Exercice 22

1) On a $f(x;y)=\mathrm{Re}\left(e^{x+jy}\right)=e^x\cos(y)$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et admet deux dérivées partielles d'ordre 1 continues.On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=e^x\cos(y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=-e^x\sin(y)$. L'application du Théorème 2 au point (0;0) donne l'existence de deux fonctions $(h;k)\to\varepsilon_1(h;k)$ et $(h;k)\to\varepsilon_2(h;k)$ qui tendent vers 0 en (0 ; 0) et telles que si h et k sont assez petits on ait :

$$f(h,k)=f(0;0)+\mathrm{df}_{(0;0)}(h;k)+h\,\varepsilon_1(h,k)+k\,\varepsilon_2(h,k)$$

c'est à dire , en remarquant que $\mathrm{df}_{(0;0)}(h;k)=\frac{\partial f}{\partial x}(0;0)h+\frac{\partial f}{\partial y}y(0;0)k=h$:

$$e^h\cos(k)=1+h+h\,\varepsilon_1(h,k)+k\,\varepsilon_2(h,k)\ .$$

Un raisonnement similaire pour la fonction g donne l'existence de deux fonctions $(h;k)\to\varepsilon_3(h;k)$ et $(h;k)\to\varepsilon_4(h;k)$ qui tendent vers 0 en (0 ; 0) et telles que si h et k sont assez petits on ait :

$e^h \sin(k) = 1 + k + h\varepsilon_3(h,k) + k\varepsilon_4(h,k)$.

On en déduit que si h et k sont assez petits on a :

$e^{h+jk} = 1 + h + jk + h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k) + jh\varepsilon_3(h,k) + jk\varepsilon_4(h,k)$.

On en déduit que

$$\frac{e^{h+jk}-1}{h+jk} - 1 = \frac{h}{h+jk}\varepsilon_1(h,k) + \frac{k}{h+jk}\varepsilon_2(h,k) + j\frac{h}{h+jk}\varepsilon_3(h,k) + j\frac{k}{h+jk}\varepsilon_4(h,k).$$

En remarquant que $\left|\frac{h}{h+jk}\right| \leqslant 1$ et $\left|\frac{k}{h+jk}\right| \leqslant 1$ on en déduit que, toujours pour h et k assez petits :

$$\left|\frac{e^{h+jk}-1}{h+jk} - 1\right| \leqslant |\varepsilon_1(h,k)| + |\varepsilon_2(h,k)| + |\varepsilon_3(h,k)| + |\varepsilon_4(h,k)|$$

Cela signifie que $\lim\limits_{|z|\to 0,\, z\in\mathbb{C}} \left|\frac{e^z-1}{z} - 1\right| = 0$

De façon générale, si $z \in \mathbb{C}$ et $h \in \mathbb{C}^*$, on a

$\left|\frac{e^{z+h}-e^z}{h} - e^z\right| = \left|e^z\left(\frac{e^h-1}{h} - 1\right)\right| = |e^z|.\left|\frac{e^h-1}{h} - 1\right|$ d'où l'on déduit que

$$\lim_{|h|\to 0,\, h\in\mathbb{C}} \left|\frac{e^{z+h}-e^z}{h} - e^z\right| = 0 \quad .$$

2) Puisque pour tout nombre complexe $z = x + jy$ on a

$\lim\limits_{|h|\to 0,\, h\in\mathbb{C}} \left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z)\right| = 0$, en considérant $h = t \in \mathbb{R}$, il vient

$$\lim_{t\to 0,\, t\in\mathbb{R}} \left|\frac{f_1(x+t\,;y) + jf_2(x+t\,;y) - f_1(x\,;y) - jf_2(x\,;y)}{t} - \mathrm{Re}(f'(z)) - j\,\mathrm{Im}(f'(z))\right| = 0$$

d'où , en considérant séparément les parties réelles et imaginaires :

$$\lim_{t\to 0,\, t\in\mathbb{R}} \left|\frac{f_1(x+t\,;y) - f_1(x\,;y)}{t} - \mathrm{Re}(f'(x+jy))\right| = 0$$

et

$$\lim_{t\to 0,\, t\in\mathbb{R}} \left|\frac{f_2(x+t\,;y) - f_2(x\,;y)}{t} - \mathrm{Im}(f'(x+jy))\right| = 0 \quad ,$$

ce qui montre que les fonctions f_1 et f_2 admettent des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x sur U et $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x\,;y) = \mathrm{Re}(f'(x+jy))$, $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x\,;y) = \mathrm{Im}(f'(x+jy))$.

Maintenant, en considérant $h = tj$ avec $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{t\to 0,\, t\in\mathbb{R}} \left|\frac{f_1(x\,;y+t) + jf_2(x\,;y+t) - f_1(x\,;y) - jf_2(x\,;y)}{jt} - \mathrm{Re}(f'(z)) - j\,\mathrm{Im}(f'(z))\right| = 0$$

$$\lim_{t\to 0,\, t\in\mathbb{R}} \left|\frac{f_2(x\,;y+t) - jf_1(x\,;y+t) - f_2(x\,;y) + jf_1(x\,;y)}{t} - \mathrm{Re}(f'(z)) - j\,\mathrm{Im}(f'(z))\right| = 0$$

d'où , en considérant séparément les parties réelles et imaginaires :

$$\lim_{t\to 0,\, t\in\mathbb{R}} \left|\frac{f_2(x\,;y+t) - f_2(x\,;y)}{t} - \mathrm{Re}(f'(x+jy))\right| = 0$$

et

$$\lim_{t\to 0,\, t\in\mathbb{R}} \left|\frac{f_1(x\,;y+t) - f_1(x\,;y)}{t} + \mathrm{Im}(f'(x+jy))\right| = 0 \quad ,$$

ce qui montre que les fonctions f_1 et f_2 admettent des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport

à y sur U et $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x;y)=-\mathrm{Im}(f'(x+jy))$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x;y)=\mathrm{Re}(f'(x+jy))$.

On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\frac{\partial f_1}{\partial x}(x;y)+j\frac{\partial f_2}{\partial x}(x;y)=\mathrm{Re}(f'(x+jy))+j\,\mathrm{Im}(f'(x+jy))=f'(x+jy)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\frac{\partial f_1}{\partial y}(x;y)+j\frac{\partial f_2}{\partial y}(x;y)=-\mathrm{Im}(f'(x+jy))+j\,\mathrm{Re}(f'(x+jy))$$
$$=j^2\,\mathrm{Im}(f'(x+jy))+j\,\mathrm{Re}(f'(x+jy))=j\,f'(x+jy),$$

d'où l'on déduit la relation $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=j\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=j\,f'(x+jy)$.

3) Fixons $(x;y)\in U$. L'application du Théorème 2 au point $(x;y)\in U$ pour les fonctions f_1 et f_2 donne l'existence de deux fonctions $(h;k)\to\varepsilon_1(h;k)$ et $(h;k)\to\varepsilon_2(h;k)$ définies sur $\mathbb{R}^2$, au voisinage de $(0;0)$, à valeurs complexes , qui tendent vers 0 en $(0;0)$, et telles que si h et k sont assez petits on ait :

$$f(x+jy+h+jk)=f(x+jy)+df_{(x;y)}(h;k)+h\,\varepsilon_1(h,k)+k\,\varepsilon_2(h,k)\quad,$$

où l'on a naturellement posé :

$$df_{(x;y)}(h;k)=h.\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)+k.\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$$
$$=h\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x;y)+j\frac{\partial f_2}{\partial x}(x;y)\right)+k\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(x;y)+j\frac{\partial f_2}{\partial y}(x;y)\right)\quad.$$

L'hypothèse sur f implique que $df_{(x;y)}(h;k)=(h+jk)\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$. On a donc pour h et k assez petits avec $(h;k)\neq(0;0)$:

$$\frac{f(x+jy+h+jk)-f(x+jy)}{h+kj}=\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)+\frac{h}{h+kj}\varepsilon_1(h,k)+\frac{k}{h+kj}\varepsilon_2(h,k)$$

d'où $\left|\frac{f(x+jy+h+jk)-f(x+jy)}{h+kj}-\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)\right|\leqslant|\varepsilon_1(h,k)|+|\varepsilon_1(h,k)|$

ce qui montre que si $z=x+jy$, alors $\lim\limits_{|l|\to 0,\ l\in\mathbb{C}}\left|\frac{f(z+l)-f(z)}{l}-f'(z)\right|=0$ avec $f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$. Cela étant vrai pour tout $(x;y)\in U$, la fonction f est donc holomorphe sur U, de dérivée $f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$.

4) (Logarithme complexe).

Démontrer que la fonction f définie sur $U=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)>0\}$ par l'expression $f(x+jy)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ est holomorphe. Vérifier que $\forall z\in U,\ e^{f(z)}=z$ et que $\forall z\in U,\ f'(z)=\frac{1}{z}$.

On a ici $f_1(x;y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ et $f_2(x;y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ si $x>0$.

Il vient que f_1 et f_2 admettent des dérivées partielles d'ordre 1 sur U, et on a :

$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x;y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x;y)=\frac{y}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x;y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x;y)=\frac{x}{x^2+y^2}$

qui constituent toutes les 4 des fonctions continues sur U.

On a alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\frac{x-jy}{x^2+y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\frac{y+jx}{x^2+y^2}$

ce qui permet de vérifier facilement que $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=j\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$.

On déduit alors du 3) que f est holomorphe sur U, et $f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\frac{x-jy}{x^2+y^2}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{1}{z}$ et

$\forall z\in U,\ e^{f(z)}=e^{\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+j\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}=e^{\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)}.e^{j\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}=\sqrt{x^2+y^2}\,e^{j\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$,

ce qui est la forme exponentielle de $z=x+jy$, qui a bien pour module $\sqrt{x^2+y^2}$ et argument $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Exercice 23 Équation de Laplace

1)

a) On a :

$\forall(x;y)\in D,\ \frac{\partial u_0}{\partial x}(x;y)=2x\varphi'(x^2+y^2)$

donc

$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x;y)=2\varphi'(x^2+y^2)+4x^2\varphi''(x^2+y^2)$, et, de même :

$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}(x;y)=2\varphi'(x^2+y^2)+4y^2\varphi''(x^2+y^2)$.

On en déduit que $\Delta u_0(x;y)=4\varphi'(x^2+y^2)+4(x^2+y^2)\varphi''(x^2+y^2)$ .Il vient que $\Delta u_0=1$ si et seulement si $\forall(x;y)\in B,\ 4\varphi'(x^2+y^2)+4(x^2+y^2)\varphi'(x^2+y^2)=1$. Puisque pour $t\in[0;1]$, $(\sqrt{t};0)\in B$, on en déduit que $\forall t\in[0;1],\ 4\varphi'(t)+4t\varphi''(t)=1$.

b) L'égalité $\forall t\in[0;1],\ \varphi'(t)+t\varphi''(t)=\frac{1}{4}$ équivaut à $\forall t\in[0;1],\ (t\varphi'(t))'=\frac{1}{4}$

d'où l'on déduit :

$\exists A\in\mathbb{R}\ :\ \forall t\in[0;1],\ t\varphi'(t)=\frac{t}{4}+A$

$\exists A\in\mathbb{R}\ :\ \forall t\in]0;1],\ \varphi'(t)=\frac{1}{4}+\frac{A}{t}$

$\exists A\in\mathbb{R},\exists B\in\mathbb{R}\ :\ \forall t\in]0;1],\ \varphi(t)=\frac{t}{4}+A\ln(t)+B$.

La fonction φ étant *a minima* continue en 0, on a $A=0$ donc

$\exists B\in\mathbb{R}\ :\ \forall t\in]0;1],\ \varphi(t)=\frac{t}{4}+B$, d'où

$\forall(x;y)\in B,\ u_0(x;y)=\varphi(x^2+y^2)=\frac{1}{4}(x^2+y^2)+B$.

La condition de Dirichlet signifie alors que $\varphi(1)=0$ d'où $B=-\frac{1}{4}$ et

$\forall(x;y)\in B,\ u_0(x;y)=\frac{1}{4}\left(x^2+y^2-1\right)$. La vérification que cette fonction est bien solution de l'équation de Laplace avec condition de Dirichlet est immédiate.

2)

a) La fonction $a : t \to u(x_0+t;y_0)$ est définie et deux fois dérivable sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. On a $a'(0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0;y_0)=0$ car $(x_0;y_0)$ est un point critique pour *u,* et

$a''(0)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0;y_0)$.

De même, la fonction $b : t \to u(x_0;y_0+t)$ est définie et deux fois dérivable sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. On a $b'(0)=\frac{\partial u}{\partial y}(x_0;y_0)=0$ car $(x_0;y_0)$ est un point critique pour *u,* et

$b''(0)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0;y_0)$.

Puisque $a''(0)+b''(0)=\Delta u(x_0;y_0)=f(x_0;y_0)>0$, c'est qu'au moins un des deux réels $a''(0)$ ou $b''(0)$ est strictement positif. Supposons que ce soit $a''(0)$ par exemple.
On en déduit que la fonction $t \to a(t)$, définie sur un voisinage de 0, est telle que $a'(0)=0$ et $a''(0)>0$. Puisque la fonction $t \to a''(t)$ étant continue, il existe $\varepsilon>0$ tel que $\forall t\in]-\varepsilon;\varepsilon[,\ a''(t)>0$. On en déduit que la fonction $t \to a'(t)$ est strictement croissante sur $]-\varepsilon;\varepsilon[$ donc , puisque $a'(0)=0$, on a $\forall t\in]-\varepsilon;0[,\ a'(t)<0$ et $\forall t\in]0;\varepsilon[,\ a'(t)>0$. On en déduit que la fonction $t \to a(t)$ admet un minimum en 0 pour $t\in]-\varepsilon;\varepsilon[$. Cela signifie que $\forall t\in]-\varepsilon;\varepsilon[, u(x_0+t;y_0)>u(x_0;y_0)$ ce qui contredit le fait qu'il y ait un maximum local pour *u* en $(x_0;y_0)$.
Raisonnement similaire si on a $b''(0)>0$.

b) On raisonne par l'absurde en supposant $\exists(x;y)\in B$ t.q $u(x;y)>0$.
Par le principe du min max, $\exists(x_0;y_0)\in B$, tq $\forall(x;y)\in B,\ u(x_0;y_0)\geqslant u(x;y)$. On a alors de par notre hypothèse, $u(x_0;y_0)>0$. Puisque $\forall(x;y)\in C,\ u(x;y)=0$, on en déduit que $(x_0;y_0)\in D$. La fonction *u* admettant un maximum sur *D* en $(x_0;y_0)$, il s'agit d'un point critique pour *u*, ce qui contredit le a).
On a donc $\forall(x;y)\in B,\ u(x;y)\leqslant 0$.

3) Soit $\varepsilon>0$. Posons $v(x;y)=u(x;y)+\varepsilon u_0(x;y)$. Alors on vérifie que *v* est solution de l'équation $\Delta v=f+\varepsilon$ avec condition de Dirichlet. Puisque $\forall(x;y)\in B,\ f(x;y)\geqslant 0$, $\forall(x;y)\in B,\ f(x;y)+\varepsilon>0$ donc le 2)b) implique que $\forall(x;y)\in B,\ v(x;y)\leqslant 0$. On en déduit $\forall(x;y)\in B,\ u(x;y)\leqslant -\varepsilon u_0(x;y)$. En faisant tendre ε tendre vers 0, on obtient que $\forall(x;y)\in B,\ u(x;y)\leqslant 0$.

4) La fonction $-u$ est solution vérifie $\Delta(-u)=-f$ sur *D* avec condition de Dirichlet. Puisque $\forall(x;y)\in B,\ -f(x;y)\geqslant 0$, on déduit de la question 3) que $\forall(x;y)\in B,\ -u(x;y)\leqslant 0$ d'où $\forall(x;y)\in B,\ u(x;y)\geqslant 0$.

5) La fonction $v=u_1-u_2$ est solution de $\Delta v=0$ sur *D* avec condition de Dirichlet. On déduit des questions 3) et 4) qu'on a à la fois $\forall(x;y)\in B,\ v(x;y)\geqslant 0$ et

$\forall(x;y)\in B,\quad v(x;y)\leqslant 0$ c'est à dire $\forall(x;y)\in B,\quad v(x;y)=0$. On en déduit $u_1=u_2$. Il y a donc au plus qu'une seule solution de l'équation $\Delta u=f$ sur D avec condition de Dirichlet.

6) L'unicité est assurée par la question 5).

Pour l'existence, on cherche une solution u radiale, c'est à dire de la forme :

$u(x;y)=\varphi(x^2+y^2)$,

où $\varphi:[0;1]\to\mathbb{R}$ est deux fois dérivable à dérivée seconde continue.

Comme pour la question 1)a, $\Delta u=f$ avec condition de Dirichlet équivaut à ce que

$\forall t\in[0;1],\ 4\varphi'(t)+4t\varphi''(t)=a(t)$ et $\varphi(1)=0$,

c'est à dire :

$\forall t\in[0;1],\ (t\varphi'(t))'=\frac{1}{4}a(t)$ avec la condition $\varphi(1)=0$.

Il nous faut trouver une telle fonction φ. Soient $F:[0;1]\to\mathbb{R}$ et $G:[0;1]\to\mathbb{R}$ définies par

$F(t)=\int_0^t a(s)ds$ et $G(t)=\begin{cases}\frac{F(t)}{t} & \text{si } t>0\\ a(0) & \text{si } t=0.\end{cases}$. La fonction F étant la primitive sur $[0;1]$ de a qui s'annule en 0, on obtient que G est continue en 0.

Si l'on définit $\varphi:[0;1]\to\mathbb{R}$ par l'expression $\varphi(t)=\frac{1}{4}\int_1^t G(s)ds$, on obtient que 4φ est la primitive sur $[0;1]$ de G qui s'annule en 1 et $\forall t\in[0;1],\ 4t\varphi'(t)=F(t)$ d'où l'on déduit que la fonction $t\in[0;1]\to t\varphi'(t)$ est dérivable et $\forall t\in[0;1],\ (t\varphi'(t))'=\frac{1}{4}a(t)$. On achève la preuve en remarquant que $\varphi(1)=\frac{1}{4}\int_1^1 G(s)ds=0$.

<u>Remarque</u> : rigoureusement, nous n'avons pas prouvé que la fonction $\varphi:[0;1]\to\mathbb{R}$ admettait une dérivée seconde en $t=0$. Néanmoins la relation $\Delta u=f$ est prouvée en tout point $(x;y)\neq 0$.

Si l'on veut regarder en détail ce qui se passe en $(0;0)$, on part de la relation

$\forall x\in]-1;1[,\ \frac{\partial u}{\partial x}(x;0)=2x\varphi'(x^2)$ donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x;0)-\frac{\partial u}{\partial x}(0;0)}{x}=\lim_{x\to 0}2\varphi'(x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x^2)}{2x^2}=\frac{1}{2}F'(0)=\frac{1}{2}a(0).$$

On en déduit que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0;0)$ existe et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0;0)=\frac{1}{2}a(0)$.

On obtient de la même façon que $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0;0)$ existe et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0;0)=\frac{1}{2}a(0)$. On a alors $\Delta u(0:0)=a(0;0)=f(0:0)$.

Exercice 24

1) La quantité $f(x;y)=(x-1)^2+y^2$ représente le carré de la distance entre les points $(x;y)$ et $(1;0)$ (on suppose que le repère est orthonormé). Géométriquement, on voit alors que f est maximale sur B pour $(-1;0)$ et $\forall(x;y)\in B,\quad f(x;y)\leqslant f(-1;0)=4$.

Cependant, $\overrightarrow{\nabla f}(-1;0)=\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}\neq\vec{0}$.

2) La fonction $\theta\in[0;2\pi]\to f(\cos(\theta);\sin(\theta))$ est dérivable, et admet un maximum en θ_0, donc sa dérivée y est nulle. On a alors :

$$\frac{d}{d\theta}(f(\cos(\theta);\sin(\theta)))_{\theta_0}=-\sin(\theta_0)\frac{\partial f}{\partial x}(\cos(\theta_0);\sin(\theta_0))+\cos(\theta_0)\frac{\partial f}{\partial y}(\cos(\theta_0);\sin(\theta_0))=0$$

c'est à dire $\sin(\theta_0)\frac{\partial f}{\partial x}(\cos(\theta_0);\sin(\theta_0))=\cos(\theta_0)\frac{\partial f}{\partial y}(\cos(\theta_0);\sin(\theta_0))=0$

donc $\begin{pmatrix}\cos(\theta_0)\\\sin(\theta_0)\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\nabla f}(\cos(\theta_0);\sin(\theta_0))$.

3) On raisonne par l'absurde et l'on suppose que $\overrightarrow{\nabla f}(x_0;y_0)=\lambda\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ pour un certain réel $\lambda<0$. La fonction $t\in[0;1]\to\varphi(t)=f(t\cos(\theta_0);t\sin(\theta_0))$ admet un maximum en $t=1$. Elle est dérivable de dérivée

$\varphi'(t)=\cos(\theta_0)\frac{\partial f}{\partial x}(t\cos(\theta_0);t\sin(\theta_0))+\sin(\theta_0)\frac{\partial f}{\partial y}(t\cos(\theta_0);t\sin(\theta_0))$ et la fonction $t\to\varphi'(t)$ est continue car f admet des dérivées partielles d'ordre 1 continues. On a

$$\varphi'(t)=\cos(\theta_0)\frac{\partial f}{\partial x}(\cos(\theta_0);\sin(\theta_0))+\sin(\theta_0)\frac{\partial f}{\partial y}(\cos(\theta_0);\sin(\theta_0))=\overrightarrow{\nabla f}(x_0;y_0).\overrightarrow{OM_0}$$
$$=\lambda OM_0^2=\lambda<0,$$

donc par continuité de $t\to\varphi'(t)$ il existe $\varepsilon>0$ de sorte que $\forall t\in]1-\varepsilon;1]$, $\varphi'(t)<0$ ce qui implique que la fonction $t\to\varphi(t)$ est strictement décroissante sur $]1-\varepsilon;1]$. On a donc $\forall t\in]1-\varepsilon;1],\varphi(t)>\varphi(1)$, ce qui signifie :

$\forall t\in]1-\varepsilon;1], f(t\cos(\theta_0);t\sin(\theta_0))>f(\cos(\theta_0);\sin(\theta_0))$,

ce qui contredit clairement l'assertion

$\forall(x;y)\in B,\quad f(x;y)\leqslant f(x_0;y_0)$.

On en déduit que $\overrightarrow{\nabla f}(x_0;y_0)=\lambda\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ pour un certain réel $\lambda\geqslant 0$.

4) Avant de commencer, il faut remarquer que le résultat obtenu dans les questions précédentes s'adapte dans le cas d'un minimum atteint sur C (travailler sur $-f$ au lieu de f) ; dans ce cas, on a $\lambda\leqslant 0$.

Le maximum et le minimum sur B (dont on a admis l'existence dans l'énoncé) sont à chercher :

soit en un point $(x_0;y_0)\in D$, dans ce cas $\overrightarrow{\nabla f}(x_0;y_0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

soit en un point $(x_0;y_0)\in C$, dans ce cas on a $\overrightarrow{\nabla f}(x_0;y_0)=\lambda\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ pour un certain réel λ.

(i) Soit $(x;y)\in D$ Alors, c' est un point critique pour f si et seulement si on a $\begin{pmatrix}\varphi'(x-2y)\\-2\varphi'(x-2y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, ce qui est impossible par la condition $\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi'(t)>0$.

(ii) Soit $(x;y)\in C$ tel que $\overrightarrow{\nabla f}(x;y)=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ pour un certain réel λ.

Cela équivaut à ce que $\begin{pmatrix} \varphi'(x-2y) \\ -2\varphi'(x-2y) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ soient colinéaires,
d'où $y\varphi'(x-2y)=-2x\varphi'(x-2y)$ que l'on réécrit : $(y+2x)\varphi'(x-2y)=0$.

Par la condition $\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi'(t)>0$, cela équivaut à ce que $y+2x$ soit nul.
On chercher donc l'ensemble des points $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant le système : $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$.
On trouve les deux points $(x;y)=\left(\frac{\sqrt{5}}{5};-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ et $(x;y)=\left(\frac{-\sqrt{5}}{5};+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

Le minimum et le maximum, dont on a admis l'existence, sont à chercher parmi ces deux points.
On a $f\left(\frac{\sqrt{5}}{5};-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\varphi(\sqrt{5})$ et $f\left(\frac{-\sqrt{5}}{5};+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\varphi(-\sqrt{5})$. Puisque la fonction φ est strictement croissante, on a $\varphi(\sqrt{5})>\varphi(-\sqrt{5})$ donc on peut conclure que :

$\mathrm{Min}_{(x;y)\in B} f(x;y)=\varphi(-\sqrt{5})$ et est atteint en l'unique point $(x;y)=\left(\frac{-\sqrt{5}}{5};+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

$\mathrm{Max}_{(x;y)\in B} f(x;y)=\varphi(\sqrt{5})$ et est atteint en l'unique point $(x;y)=\left(\frac{\sqrt{5}}{5};-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

Exercice 25

(i) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ vérifiant les conditions de l'énoncé. On a
$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x;y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x;y)=0$ donc la fonction
$(x;y)\to\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$ ne dépend que de *y*. On a aussi
$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x;y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x;y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)$
$=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x;y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)$ (par le Théorème de Schwartz)
$=0$,
donc la fonction $(x;y)\to\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$ ne dépend que de *x*.
On en déduit que la fonction $(x;y)\to\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$ est égale à une constante $k\in\mathbb{R}$.
Fixons $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et définissons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi:t\to f(x+t,y-t)$.
La fonction φ est dérivable et $\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x+t;y-t)-\frac{\partial f}{\partial y}(x+t;y-t)=k$ donc
$\exists a\in\mathbb{R}:\varphi(t)=kt+a$ c'est à dire que $\forall t\in\mathbb{R},\ f(x+t,y-t)=a+kt$. En posant $t=0$, on obtient $a=f(x;y)$ donc $\forall t\in\mathbb{R},\ f(x+t,y-t)=f(x;y)+kt$. En considérant cette fois $t=y$, on a $f(x+y,0)=f(x;y)+ky=f(x;y)+k\frac{x+y}{2}-k\frac{x-y}{2}$, donc
$f(x;y)=f(x+y,0)-k\frac{x+y}{2}+k\frac{x-y}{2}$,
et ce, pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ car *k* est indépendant de *x* et de *y*. En posant $u(t)=f(t;0)-k\frac{t}{2}$,

et $c=\frac{k}{2}$, on obtient une fonction u deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x;y)=u(x+y)+(x-y)c$.

(ii) Réciproquement, si f admet une expression de la forme $f(x;y)=u(x+y)+(x-y).c$ où $c\in\mathbb{R}$ et u est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, il est facile de voir que $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x;y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)$.

I - SÉRIES ENTIÈRES

Nous avons eu l'occasion dans un chapitre précédent d'étudier les fonctions polynomiales et de voir qu'elles possèdent de nombreuses propriétés qui rendent leur emploi intéressant. Malheureusement, la classe des fonctions polynômes est bien trop restreinte , et la plupart des fonctions usuelles ne sont pas polynomiales. L'objet de ce chapitre est de définir la notion de série entière qui va généraliser celle de fonction polynomiale, puisque ce sont en fait des polynômes de « degré infini ». Nous aurons l'occasion de voir que beaucoup de fonctions que l'on rencontre habituellement peuvent s'écrire comme la somme d'une série entière.
De plus, la notion de série entière est à la base de la transformation en Z, transformation fondamentale pour l'étude de signaux discrets et qui fera l'objet d'un chapitre ultérieur.

I) Notion de série entière.

Nous allons nous intéresser à des séries de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ où le terme général $u_n(x)$ dépend d'un paramètre x réel ou complexe (c'est à dire que c'est une fonction de x). Pour x fixé, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ devient une série numérique qui peut converger ou diverger. Ainsi, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ peut converger pour tout x, pour certains x uniquement ou aucun x. On appellera la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ une <u>série de fonctions</u> et l'ensemble des x tels que la série converge sera appelé <u>domaine de convergence de</u> $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
Dans ce chapitre, nous nous restreindrons au cas où $u_n(x)$ est un monôme de degré n.

Définition 1 Étant donnée une suite (u_n) (complexe ou seulement réelle), la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ sera appelée <u>série entière</u> de coefficients la suite (u_n) .

Exemple important : cas où $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$.
Dans ce cas, la série entière associée est $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, où $x \in \mathbb{C}$. Nous reconnaissons une série géométrique (voir chapitre sur les séries numériques), donc nous savons déjà que cette série converge si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas la somme de cette série vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
Il faut déjà remarquer deux choses importantes sur cet exemple :

(i) D'une part, le domaine de convergence de cette série entière est l'ensemble des nombres complexes de module strictement inférieur à 1, ce qui représente géométriquement un disque de centre O dans le plan complexe. Ce qui est remarquable, c'est que si l'on choisissait une autre suite (u_n) , le domaine de convergence serait aussi un disque de centre O, pas forcément de rayon 1. Dans les cas extrêmes, ce disque peut dans certains cas être réduit au point O (disque de rayon nul) ou être égal au plan complexe tout entier (disque de « rayon infini ». Nous préciserons cela au paragraphe II dans le Théorème 1.

(ii) D'autre part, il faut aussi noter que le domaine de définition de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, autrement dit son domaine de convergence, ne correspond pas au domaine de définition de la fonction $x \to \frac{1}{1-x}$ qui est $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Par exemple, si $x=-1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ diverge (le terme général ne tend pas vers 0) alors que la fonction $x \to \frac{1}{1-x}$ est bien définie pour cette valeur et vaut $\frac{1}{2}$. En fait, le domaine de convergence est ici le plus grand disque de centre O inclus dans le domaine de définition de la fonction $x \to \frac{1}{1-x}$.

Remarques :
a) Un polynôme est une série entière particulière où la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang.
b) 0 fait toujours partie du domaine de convergence car dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = u_0$ est bien une série convergente.

II) Disque de convergence.

Le résultat suivant décrit assez précisément le domaine de convergence d'une série entière.

Théorème 1 On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Alors, on est dans un et un seul des trois cas suivants :
(i) Soit la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ converge absolument pour tout complexe *x*.
(ii) Soit la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ converge uniquement pour $x=0$.
(iii) Soit il existe un unique $R>0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{C},\ |x| < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \text{ converge absolument}$$

$$\forall x \in \mathbb{C},\ |x| > R \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \text{ diverge} \quad .$$

Dans le cas (iii), le réel R est appelé <u>rayon de convergence</u> de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.
Dans le cas (ii), on dira que le rayon de convergence est nul.
Dans le cas (i), on dira que le rayon de convergence est infini.

Remarque : dans le cas (iii), si $|x| = R$, on ne peut absolument rien dire sur la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$: on peut tout aussi bien avoir une série absolument convergente, ou seulement convergente, ou bien une série divergente. Nous verrons des exemples un peu plus loin.

On notera aussi que ce théorème ne permet pas forcément de décrire exactement le domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$: dans le cas (iii), le domaine de convergence de la série est constitué par l'ensemble des nombres complexes de module strictement inférieur à R, plus <u>éventuellement</u> une partie ou la totalité du cercle de entre O et de rayon R.

Preuve :

On se place dans le cas où la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ ne converge pas seulement pour $x=0$ et qu'il existe au moins un $x_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x_0^n$ ne converge pas absolument, autrement dit, on écarte les cas (i) et (ii). On va montrer qu'on est nécessairement dans le cas (iii).

Posons $D=\{x\in\mathbb{C} / \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n x^n| \text{ converge }\}$ et $D^+=\{t>0 / \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n t^n| \text{ converge }\}$. Remarquer que D^+ est l'intersection de D avec la demi-droite constituée des réels strictement positifs.

Étape 1 :

Si $x\in\mathbb{C}$ est tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ converge absolument, alors :

$\forall y\in\mathbb{C},\ (|y|=|x|)\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n y^n$ converge absolument.

En effet, si y est un nombre complexe de même module que x, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n y^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n||y|^n = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n||x|^n$ converge puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ converge absolument. On en déduit que $x\in D \Leftrightarrow |x|\in D^+$ ce qui signifie que $D=\{x\in\mathbb{C} / |x|\in D^+\}$.

Étape 2 : Si $t\in D^+$, alors $\forall s\in[0;t],\ s\in D^+$.

En effet, si $t\in D^+$ et $s\in[0;t]$, alors $0\le |u_n s^n| = |u_n||s|^n \le |u_n||t|^n$ et puisque $t\in D^+$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n||t|^n$ converge ce qui signifie que par le théorème de comparaison pour la convergence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n||s|^n$ converge donc $s\in D^+$.

Étape 3 : De l'étape 2, on déduit que D^+ est un intervalle de la forme $[0;R[$, $[0;R]$ ou $[0;+\infty[$.

Puisque on n'est pas dans le cas (i), il existe au moins un $x_0\in\mathbb{C}$ tel que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x_0^n$ ne converge pas absolument, donc par l'étape 1 $|x_0|\notin D^+$: nécessairement D^+ est de la forme $[0;R[$ ou $[0;R]$. Et puisque l'on n'est pas dans le cas (ii), on a $R>0$.

Par l'étape 1, on en déduit que $x\in D\Leftrightarrow |x|<R$ si $D^+=[0;R[$ (ou $x\in D\Leftrightarrow |x|\le R$ si $D^+=[0;R]$) ce qui signifie que D est un disque (ouvert ou fermé) de centre O et de rayon R.

Étape 4 : Il nous reste à prouver que $\forall x\in\mathbb{C},\ |x|>R\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ diverge où R est le réel défini à l'étape 3. Soit donc $x\in\mathbb{C}$ tel que $|x|>R$. Remarquons qu'ainsi, $x\notin D$. Nous allons faire un raisonnement par l'absurde et supposer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ converge , la convergence ne pouvant pas être absolue puisque $x\notin D$.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n x^n = 0$ donc que la suite $(u_n x^n)_n$ est bornée : il existe une constante $M>0$ telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n x^n|\le M$.

L'idée est de choisir un réel t tel que $t\in\left]\frac{R}{|x|};1\right[$ (cet intervalle est non vide car $|x|>R$.)

Alors, $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n.(tx)^n| = t^n|u_n x^n| \le Mt^n$, et la série $\sum_{n=0}^{+\infty} Mt^n$ converge car c'est une série

géométrique de raison $t\in]0;1[$ vu que $t\in]\frac{R}{|x|};1[$. Le théorème de comparaison pour la convergence des séries à termes positifs implique donc que $\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n.(tx)^n|$ converge donc $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n.(tx)^n$ converge absolument ce qui signifie que $tx\in D$. On en déduit que $|tx|\leq R$ c'est à dire $t|x|\leq R$ d'où $t\leq\frac{R}{|x|}$ ce qui est en contradiction avec le fait que $t\in]\frac{R}{|x|};1[$. Cela prouve par l'absurde que $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n$ diverge, ce qui termine la preuve du théorème.

Avant de donner quelques exemples, Établissons la propriété suivante, bien pratique pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière.

Propriété 1 On considère une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n$ telle que $u_n\neq 0$ pour n assez grand et telle que $l=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ existe. Alors,

(i) si $l=0$, le rayon de convergence de la série est infini

(ii) si $l=+\infty$, le rayon de convergence de la série est nul

(iii) si $l\in]0;+\infty[$, le rayon de convergence de la série vaut $R=\frac{1}{l}$.

<u>Preuve :</u>

Soit $x\in\mathbb{C}\neq 0$. Posons $a_n=|u_n x^n|$. Ainsi la série $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n$ converge absolument si et seulement si la série numérique à termes positifs $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ converge. On a $a_n\neq 0$ pour n assez grand donc on peut appliquer le critère de d'Alembert.

(i) si $l=0$, alors on a pour n assez grand $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left|\frac{x^{n+1}u_{n+1}}{x^n u_n}\right|=|x|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$. Le critère de d'Alembert permet alors d'affirmer que $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ converge donc $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n$ converge absolument. Cela étant vrai quel que soit x , cela prouve que le rayon de convergence de la série entière est infini.

(ii) si $l=+\infty$, alors on a pour n assez grand $\frac{a_{n+1}}{a_n}=|x|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$ dès que x est non nul. Le critère de d'Alembert permet alors d'affirmer que $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ diverge donc $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n$ ne converge pas absolument dès que dès que x est non nul. Cela signifie que le rayon de convergence de la série entière est nul.

(iii) si $l\in]0;+\infty[$, alors on a pour n assez grand $\frac{a_{n+1}}{a_n}=|x|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l.|x|$. Le critère de d'Alembert permet alors de dire que si $l.|x|<1$ (c'est à dire $|x|<\frac{1}{l}$) la série $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ converge et si $l.|x|>1$ (c'est à dire $|x|>\frac{1}{l}$) la série $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ diverge. Cela signifie que le rayon de convergence de la série entière vaut $R=\frac{1}{l}$.

Quelques exemples :

1) La série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ a pour rayon de convergence le nombre $R=1$. Dans ce cas, si $|x|=R=1$, la série diverge : le domaine de convergence de la série est constitué par l'ensemble des nombres complexes de module strictement inférieur à 1.

2) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n$ a pour rayon de convergence le nombre $R=1$. En effet, on a $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. La série diverge pour $x=1$ (on a alors une série de Riemann) mais on pourrait prouver que si $|x|=1$ et si $x\neq 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n$ converge (dans ce cas, la convergence n'est pas une convergence absolue). Le domaine de convergence de la série est constitué par l'ensemble des nombres complexes de module strictement inférieur à 1, plus le cercle de entre O et de rayon 1 privé de $\{1\}$.

3) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} x^n$ a encore pour rayon de convergence le nombre $R=1$. En effet, on a $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$. Mais cette fois, si $|x|=1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} x^n$ converge absolument : le domaine de convergence de la série est constitué par l'ensemble des nombres complexes de module strictement inférieur à 1, plus la totalité du cercle de entre O et de rayon 1.

Terminons par une propriété d'utilisation assez pratique pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière (ou, tout au moins, avoir des informations sur ce rayon).

Propriété 2 On considère deux séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$.

(i) Si $|u_n| \sim |v_n|$ quand $n \to +\infty$, alors les deux séries ont le même rayon de convergence.

(ii) Si $|u_n| \leq |v_n|$ pour n assez grand, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$.

<u>Preuve :</u>

(i) $\forall x \in \mathbb{C}^*$, $|u_n| \sim |v_n|$ quand $n \to +\infty$ donc $|u_n x^n| \sim |v_n x^n|$: par le critère d'équivalence pour les séries numériques à termes positifs, l'absolue convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ équivaut à celle de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ donc ces deux séries ont le même rayon de convergence.

(ii) De façon similaire, si $x\neq 0$, par le critère de comparaison pour les séries numériques à termes positifs, l'absolue convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ implique celle de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Ainsi, le domaine de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ est inclus dans celui de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$.

Exemple : considérons la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) x^n$. On a $\left|\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right| \sim \frac{\pi}{2^n}$ si $n \to +\infty$ car $\sin(X) \sim X$ quand $x \to 0$. On en déduit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) x^n$ a le même rayon de convergence que $\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^n$ qui est une série géométrique de raison $\frac{x}{2}$. Elle converge si et seulement si $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ ce qui montre que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) x^n$ est égal à 2.

III) Opérations sur les séries entières.

Commençons par le plus simple : la somme de deux séries entières. Le résultat suivant découle de la propriété de linéarité pour les séries numériques :

Propriété 3 On considère deux séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2. Alors, quels que soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) x^n$ converge dès que $|x| \leq \mathrm{Min}(R_1, R_2)$ et dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) x^n = \lambda \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \right) + \mu \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n \right).$$

Notons que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) x^n$ est en général supérieur ou égal à $\mathrm{Min}(R_1, R_2)$, mais pas nécessairement égal à $\mathrm{Min}(R_1, R_2)$.

Un cas plus problématique est celui du **produit** de deux séries entières.
Examinons d'abord le cas simple du produit de deux polynômes, qui, on le rappelle, sont des séries entières particulières. Par soucis de cohérence avec les notations introduites précédemment, nous allons les écrire par puissances croissantes :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_N x^N$$
$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_M x^M$$

où N et M sont les degrés respectifs des polynômes P et Q.

Toujours par soucis de cohérence avec les notations introduites sur les séries entières, on pose $a_n = 0, \forall n > N$ et $b_n = 0, \forall n > M$ ce qui permet d'écrire $P(x)$ et $Q(x)$ comme des séries entières : $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $Q(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

Effectuons le produit $P(x).Q(x)$:

$$P(x)Q(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_N x^N)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_M x^M)$$
$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \ldots\ldots + a_N b_M x^{N+M}.$$

En utilisant la convention que $a_n = 0, \forall n > N$ et $b_n = 0, \forall n > M$, on remarque que dans l'égalité ci-dessus, le coefficient de x^n peut s'écrire $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$ pour tout entier naturel n : il s'agit de la somme de tous les produits possibles $a_i . b_j$ tels que $i + j = n$. Remarquons aussi que si $n > N + M$, on a $c_n = 0$. En effet, le terme c_n est lui même constitué comme une somme de

termes de la forme $a_i b_{n-i}$. Si $i > N$ c'est a_i qui est nul, et si $i \leq N$, alors $n-i \geq n-N > (N+M)-N = M$ et alors, c'est b_{n-i} qui devient nul. C'est pourquoi si $n > N+M$, c_n est constitué d'une somme de termes nuls donc est lui même nul.

On peut donc écrire $P(x)Q(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, cette série représentant en fait une somme finie de $N+M+1$ termes car si $n > N+M$, on a $c_n = 0$.

On a dans ce cas la relation $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ avec

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{k=n} a_k b_{n-k} \quad .$$

C'est cette dernière relation qui va se généraliser dans le cas où les suites (a_n) et (b_n) ne sont pas nulles à partir d'un certain rang, c'est à dire que les séries entières considérées ne sont plus des polynômes.

Nous allons d'abord nous intéresser à la suite (c_n) construite ci-dessus :

Définition 2 On considère deux suites (u_n) et (v_n). On définit leur <u>produit de convolution</u> comme étant la suite $([u*v]_n)_n$ de terme général $[u*v]_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$

Remarques :

1) Si les suites (u_n) et (v_n) sont nulles à partir d'un certain rang, on peut reformuler cette définition en disant que $[u*v]_n$ est le coefficient de x^n dans l'écriture développée du polynôme $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n\right)$.

2) Remarquer l'analogie entre la définition du produit de convolution de deux signaux causaux $(x*y)(t) = \int_0^t x(s)y(t-s)\,ds$ (voir le chapitre sur la transformation de Laplace)

et celle du produit de convolution de deux suites $[u*v]_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

En effet, la variable t est changée en n, la variable d'intégration s est changée en variable de sommation k et l'intégrale $\int_0^t ds$ est formellement changée en somme $\sum_{k=0}^{n}$.

Exemple : considérons $(u_n) = (2^n)$ et $(v_n) = (3^n)$. Alors,

$$[u*v]_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^n 3^{-k}$$

$$= 3^n \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{-k}$$ (mise en facteur du terme 3^n qui est indépendant de la variable *k)*

$$= 3^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3^n \left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right)$$ (formule de sommation d'une suite géométrique)

$$=\frac{3^n-3^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{3^n-3^n\left(\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\right)}{\frac{1}{3}}=3\left(3^n-\frac{1}{3}2^{n+1}\right)$$

d'où $\forall n\in\mathbb{N},\ [u*v]_n=3^{n+1}-2^{n+1}$.

On arrive au résultat principal concernant le produit de deux séries entières :

Propriété 4 (produit de Cauchy) On considère deux séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2. Alors, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}[u*v]_n x^n$ a un rayon de convergence au minimum égal à $\mathrm{Min}(R_1, R_2)$ et pour tout complexe x tel que $|x|<\mathrm{Min}(R_1, R_2)$ on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}[u*v]_n x^n$$

Avant d'en donner une preuve générale, vérifions la validité de cette propriétés avec l'exemple précédent.

Si $(u_n)=(2^n)$ et $(v_n)=(3^n)$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n$ sont de rayons de convergence respectifs $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ (conséquence directe de la propriété 1 par exemple).

On a, en utilisant la formule de la somme d'une série géométrique : $|x|<\frac{1}{2}\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n=\frac{1}{1-2x}$ et $|x|<\frac{1}{3}\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n=\frac{1}{1-3x}$ donc $|x|<\frac{1}{3}\Rightarrow\left(\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n\right)=\frac{1}{(1-2x)(1-3x)}$.

Maintenant, on remarque que, dans l'exemple qui nous intéresse,

$\forall n\in\mathbb{N},\ [u*v]_n=3^{n+1}-2^{n+1}=3v_n-2u_n$ donc d'après la propriété 3, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}[u*v]_n x^n$ converge dès que $|x|<\frac{1}{3}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}[u*v]_n x^n=3\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n-2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n=\frac{3}{1-3x}-\frac{2}{1-2x}$. Or par un calcul direct (faites le!), on a $\frac{3}{1-3x}-\frac{2}{1-2x}=\frac{1}{(1-2x)(1-3x)}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n\right)$ ce qui prouve dans cet exemple l'égalité $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}[u*v]_n x^n$ pour $|x|<\frac{1}{3}$.

<u>(*) Preuve de la propriété 4</u>

Soit un nombre complexe x tel que $|x|<\mathrm{Min}(R_1, R_2)$ et soit $n\in\mathbb{N}$. Considérons les polynômes $A_n(x)=\sum_{k=0}^{n} u_k x^k$ et $B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$. Ce sont deux polynômes de degré *n*, donc $A_n(x)B_n(x)$ est un polynôme de degré *2n* .

Comme on l'a vu plus haut, nous avons alors

$A_n(x)B_n(x)=\sum_{k=0}^{2n}[\tilde{u}*\tilde{v}]_k x^k$ où $\tilde{u}_k=\begin{cases} u_k & \text{si } k\le n \\ 0 & \text{si } k>n\end{cases}$ et $\tilde{v}_k=\begin{cases} v_k & \text{si } k\le n \\ 0 & \text{si } k>n\end{cases}$. Si $0\le k\le n$, on a $[\tilde{u}*\tilde{v}]_k=\sum_{i=0}^{k}\tilde{u}_i\tilde{v}_{k-i}=\sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i}=[u*v]_k$ car dans cette somme, tous les indices i et $k-i$ sont inférieurs

ou égaux à n. On a ainsi

$$A_n(x)B_n(x)=\sum_{k=0}^{2n}[\tilde{u}*\tilde{v}]_k x^k=\sum_{k=0}^{n}[\tilde{u}*\tilde{v}]_k x^k+\sum_{k=n+1}^{2n}[\tilde{u}*\tilde{v}]_k x^k=\sum_{k=0}^{n}[u*v]_k x^k+\sum_{k=n+1}^{2n}[\tilde{u}*\tilde{v}]_k x^k$$

ce qui donne

$$(1)\quad A_n(x)B_n(x)-\sum_{k=0}^{n}[u*v]_k x^k=\sum_{k=n+1}^{2n}[\tilde{u}*\tilde{v}]_k x^k$$

Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}[\tilde{u}*\tilde{v}]_k x^k\right)=0.$

On a pour tout entier k l' inégalité $|[\tilde{u}*\tilde{v}]_k|=\left|\sum_{i=0}^{k}\tilde{u}_i\tilde{v}_{k-i}\right|\leq\sum_{i=0}^{k}|\tilde{u}_i||\tilde{v}_{k-i}|$ par inégalité triangulaire.

En remarquant que par définition de $\tilde{u}_k$ et $\tilde{v}_k$ on a $|\tilde{u}_i|\leq|u_i|$ et $|\tilde{v}_{k-i}|\leq|v_{k-i}|$ donc

$$|[\tilde{u}*\tilde{v}]_k|\leq\sum_{i=0}^{k}|u_i||v_{k-i}|=[|u|*|v|]_k\ .$$

On en déduit que

$$(2)\quad\left|\sum_{k=n+1}^{2n}[\tilde{u}*\tilde{v}]_k x^k\right|\leq\sum_{k=n+1}^{2n}|[\tilde{u}*\tilde{v}]_k||x|^k\leq\sum_{k=n+1}^{2n}[|u|*|v|]_k|x|^k\ ,$$

le première inégalité correspondant à l'inégalité triangulaire sur le module d'une somme.

Par (1) et (2) on a donc

$$(3)\quad\left|A_n(x)B_n(x)-\sum_{k=0}^{n}[u*v]_k x^k\right|\leq\sum_{k=n+1}^{2n}[|u|*|v|]_k|x|^k\ .$$

Montrons maintenant que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}[|u|*|v|]_k|x|^k\right)=0$.

Posons $S_n=\sum_{k=0}^{n}[|u|*|v|]_k|x|^k$ (attention aux bornes de la somme).

La suite (S_n) est croissante car $\forall n\in\mathbb{N},\ S_{n+1}-S_n=[|u|*|v|]_n|x|^n=|x|^n.\sum_{k=0}^{n}|u_k||v_{n-k}|\geq0$.

Nous allons montrer maintenant que cette suite est majorée.

Développons le produit $\left(\sum_{i=0}^{n}|u_i||x|^i\right).\left(\sum_{j=0}^{n}|v_j||x|^j\right)$: pour $k\leq n$, le coefficient du terme en $|x|^k$ est $\sum_{i=0}^{k}|u_i||v_{k-i}|=[|u|*|v|]_k$. Ainsi, S_n est égale à la partie du développement de $\left(\sum_{i=0}^{n}|u_i||x|^i\right).\left(\sum_{j=0}^{n}|v_j||x|^j\right)$ constituée des monômes de degré inférieur ou égal à n . Puisque tous les autres termes de ce développement sont positifs, on a donc $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n\leq\left(\sum_{i=0}^{n}|u_i||x|^i\right).\left(\sum_{j=0}^{n}|v_j||x|^j\right)$.

Or, puisque $|x|<\mathrm{Min}(R_1,R_2)$, les séries $\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n||x|^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}|v_n||x|^n$ convergent donc, puisqu'elles sont à termes positifs, on a $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n\leq\left(\sum_{i=0}^{n}|u_i||x|^i\right).\left(\sum_{j=0}^{n}|v_j||x|^j\right)\leq\left(\sum_{i=0}^{+\infty}|u_i||x|^i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}|v_j||x|^j\right)$ donc (S_n) est majorée.

On en déduit que (S_n) converge vers un réel S. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}[|u|*|v|]_k|x|^k\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{2n}[|u|*|v|]_k|x|^k-\sum_{k=0}^{n}[|u|*|v|]_k|x|^k\right)=S-S=0.$$

On déduit de (3) que

$$(4)\quad \lim_{n\to+\infty}\left(A_n(x)B_n(x)-\sum_{k=0}^{n}[u*v]_k x^k\right)=0.$$

La convergence des séries $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n\right)$ et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n x^n\right)$ signifie que $\lim_{n\to+\infty}A_n(x)B_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n.\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n$.

On déduit de (4) que :

1) la série $\sum_{n=0}^{+\infty}[u*v]_n x^n$ converge

2) on a l'égalité $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}[u*v]_n x^n$.

Cela étant vrai pour tout x tel que $|x|<\mathrm{Min}(R_1, R_2)$, cela achève la preuve.

IV) Régularité d'une fonction définie par une série entière.

Considérons une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n$ de rayon de convergence $R>0$ ou $R=+\infty$ (on exclut donc dans ce paragraphe le cas $R=0$.)

Soit $x\to S(x)$ la fonction définie sur l'intervalle $]-R;R[$ par l'expression $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n$.

Nous allons dans cette partie du cours étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $x\to S(x)$.

On définit la série entière $S_1(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}n u_n x^{n-1}$. En remarquant que $n=0\Rightarrow n u_n x^{n-1}=0$ on peut aussi écrire : $S_1(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n u_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n$ en faisant le changement d'indices $n\to n-1$.

Dans le cas où la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang (ce qui veut exactement dire que la fonction $x\to S(x)$ est un polynôme), on peut remarquer que $S_1(x)=S'(x)$. Nous montrerons un peu plus tard que cette relation est valable dans le cas général.

Ce qui précède justifie la

Définition 3 La série $S_1(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}n u_n x^{n-1}$ est appelée <u>série entière dérivée</u> de $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n$.

Remarque : nous n'avons pas encore démontré que, pour $x\in\mathbb{R}$, la série entière dérivée de $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n$ était la dérivée de $S(x)$. Mais, on a déjà la

Propriété 5 La série dérivée de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n$ a le même rayon de convergence que cette dernière .

Preuve :

Soit R' le rayon de convergence de la série dérivée $S_1(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} n u_n x^{n-1}$.

On a $\forall n\geq 1,\ |u_n|\leq |n u_n|$ ce qui signifie que $R'\leq R$ (voir le (ii) de la propriété 2).

Il nous reste à montrer que $R'\geq R$ ce qui démontrera que $R'=R$.

Nous allons procéder de façon détournée en montrant en fait que $[0\,;R[\subset[0\,;R']$: cela prouvera que $R'\geq R$.

Soit donc $t\in[0\,;R[$. Montrons que $t\in[0\,;R'[$ c'est à dire que $\sum_{n=0}^{+\infty} n u_n t^{n-1}$ converge absolument.

Nous avons $0\leq t<\frac{t+R}{2}<R$ ($\frac{t+R}{2}$ est la moyenne arithmétique de t et de R et $t<R$) donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\left(\frac{t+R}{2}\right)^n$ converge absolument, c'est à dire que $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\left(\frac{t+R}{2}\right)^n$ converge.

Remarquons que si n est assez grand, on a $nt^{n-1}\leq\left(\frac{t+R}{2}\right)^{n.}$. En effet, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{nt^{n-1}}{\left(\frac{t+R}{2}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty} n\frac{t^{n-1}}{\left(\frac{t+R}{2}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{t}\left(\frac{t}{\frac{t+R}{2}}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{t}\left(\frac{2t}{t+R}\right)^n=0$$ par les croissances

comparées puisque $0<\frac{2t}{t+R}<1$. On en déduit que pour n assez grand, $\frac{nt^{n-1}}{\left(\frac{t+R}{2}\right)^n}\leq 1$ donc

$nt^{n-1}\leq\left(\frac{t+R}{2}\right)^{n.}$.

On a donc , toujours pour n assez grand, $n|u_n|t^{n-1}\leq|u_n|\left(\frac{t+R}{2}\right)^{n.}$ et on a vu que $\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|\left(\frac{t+R}{2}\right)^n$ converge, donc par le critère de convergence par comparaison des séries positives, on en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} n|u_n|t^{n-1}$ converge donc $\sum_{n=0}^{+\infty} n u_n t^{n-1}$ converge absolument. Cela signifie que t appartient au domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n u_n x^{n-1}$ donc $t\leq R'$. On a donc $[0\,;R[\subset[0\,;R']$ d'où $R\leq R'$.

On arrive à un premier résultat de régularité de la fonction $x\to S(x)$:

Propriété 6 La fonction $x\to S(x)$ définie sur l' ensemble $\{x\in\mathbb{C}\,/\,|x|<R\}$ par l'expression $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est continue, c'est à dire que :

$\forall x\in\{z\in\mathbb{C}\,/\,|z|<R\},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ tq $\forall h\in\mathbb{C},\ |h|<\delta\Rightarrow|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon$.

Remarque : bien noter qu'il s'agit d'une propriété de continuité sur $\mathbb{C}$ (qui implique la continuité sur $\mathbb{R}$.)

Preuve :

Soit $x\in\mathbb{C}$ tel que $|x|<R$. La première idée est de « séparer » x du bord du disque de centre O : il existe un réel $\rho\in]0\,;+R[$ tel que $|x|<\rho$; de plus, l'intervalle $]-\rho\,;\rho[$ étant ouvert, on a alors $|x+h|<\rho$ pour tout nombre complexe h de module strictement inférieur à $\rho-|x|$.

Soit donc h tel que $|h|<\rho-|x|$.

Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $|(x+h)^n - x^n| \leq n|h|\rho^{n-1}$.
Pour *n=1,* l'inégalité à montrer correspond à $|h| \leq |h|$.
Si l'inégalité est vraie pour un entier *n,* alors, par inégalité triangulaire :

$$|(x+h)^{n+1} - x^{n+1}| = |(x+h)((x+h)^n - x^n) + h x^n| \leqslant |(x+h)||(x+h)^n - x^n| + |h||x|^n$$
$$\leqslant |h|(n\rho^{n-1}|x+h| + |x|^n) \leqslant |h|(n\rho^n + \rho^n) = (n+1)|h|\rho^n$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence et les inégalités $|x+h| < \rho$ et $|x| < \rho$.

On a alors par la propriété 3 $|S(x+h) - S(x)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n((x+h)^n - x^n)\right|$, les séries $S(x+h)$ et $S(x)$ étant toutes les deux absolument convergentes puisque $|x| < R$ et $|x+h| < R$.
On a ainsi :

$$|S(x+h) - S(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n||(x+h)^n - x^n| \quad \text{(inégalité triangulaire)}$$
$$|S(x+h) - S(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} n|u_n||h|\rho^{n-1} = |h|\sum_{n=0}^{+\infty} n|u_n|\rho^{n-1} .$$

Or, puisque $\rho \in]0;+R[$ et que le rayon de convergence de la série dérivée $S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n u_n x^{n-1}$ est aussi égal à R (propriété 5) , la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n|u_n|\rho^{n-1}$ converge. En posant $M = \sum_{n=0}^{+\infty} n|u_n|\rho^{n-1}$, il vient que M est fini et l'inégalité ci-dessus se réécrit :

$$|S(x+h) - S(x)| \leq M|h| ,$$

et ce pour tout réel *h* assez petit.
Soit $\varepsilon > 0$. Si $|h| < \text{Min}\left(\rho - |x|, \frac{\varepsilon}{M}\right)$, alors $|S(x+h) - S(x)| < \varepsilon$. La fonction *S* est continue en *x*.

On a en fait mieux que cela si l'on se restreint à $\mathbb{R}$:

Propriété 7 La fonction $x \to S(x)$ définie sur l'intervalle $]-R;R[$ par l'expression $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est dérivable de dérivée $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n u_n x^{n-1}$. Ainsi, la série entière dérivée de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est la dérivée de $S(x)$.

Remarque : l'idée de cette propriété est que pour obtenir la dérivée d'une série entière, on dérive terme à terme.

<u>Preuve :</u>
Soit $x \in]-R;R[$. On fixe pour l'instant un entier $N \in \mathbb{N}^*$. On a ainsi :

$$(1) \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{N} u_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n x^n .$$

On a

$$\left[\sum_{n=0}^{N} u_n t^n\right]_0^x = \int_0^x \frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{N} u_n t^n\right) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{N} n u_n t^{n-1}\right) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} n u_n t^{n-1}\right) dt$$

(le terme pour $n=0$ est nul)
donc

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{N} u_n x^n - u_0 = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} n u_n t^{n-1}\right) dt$$

Puisque $x\in]-R\,;R[$ et que R est aussi le rayon de convergence de la série dérivée S_1, on a $\sum_{n=0}^{N} n u_n x^{n-1}=S_1(x)-\sum_{n=N+1}^{+\infty} n u_n x^{n-1}$. D'après la propriété 6 appliquée à la série dérivée $S_1(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} n u_n x^{n-1}$, on en déduit que la fonction $x\to\sum_{n=N+1}^{+\infty} n u_n x^{n-1}$ est également continue sur $]-R\,;R[$, donc entre 0 et x si $x\geq 0$ (ou entre x et 0 si $x\leq 0$) car $x\in]-R\,;R[$. On peut donc réécrire (2) sous la forme :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n x^n-u_0=\int_0^x S_1(t)\,dt-\int_0^x\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} n u_n t^{n-1}\right)dt$$

et ainsi, (1) se réécrit de la façon suivante :

$$(3)\quad S(x)=u_0+\int_0^x S_1(t)\,dt+\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n x^n-\int_0^x\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} n u_n t^{n-1}\right)dt\quad .$$

Puisque la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ converge, $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n x^n=0$. D'autre part, pour tout réel t entre 0 et x si $x\geq 0$ (ou entre x et 0 si $x\leq 0$) on a $|t|\leq|x|$ donc

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} n u_n t^{n-1}\right|\leq\sum_{n=N+1}^{+\infty} n|u_n||t|^{n-1}\leq\sum_{n=N+1}^{+\infty} n|u_n||x|^{n-1}\quad .$$

On en déduit

$$(4)\quad\left|\int_0^x\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} n u_n t^{n-1}\right)dt\right|\leq\int_{\mathrm{Min}(0,x)}^{\mathrm{Max}(0,x)}\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} n u_n t^{n-1}\,dt\right|\leq|x|\sum_{n=N+1}^{+\infty} n|u_n||x|^{n-1}.$$

La convergence absolue de $\sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1}$ implique que $\lim_{N\to 0}\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} n|u_n||x|^{n-1}\right)=0$ donc (4) implique que $\lim_{N\to+\infty}\int_0^x\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} n u_n t^{n-1}\right)dt=0.$

En faisant maintenant $N\to+\infty$ dans (3) on déduit que

$$(5)\quad S(x)=u_0+\int_0^x S_1(t)\,dt\quad .$$

La relation (5) est valable pour tout $x\in]-R\,;R[$. La continuité de la fonction $x\to S_1(x)$ sur l'intervalle $]-R\,;R[$ et la relation (5) prouve que la fonction $x\to S(x)$ est dérivable sur $]-R\,;R[$ de dérivée $x\to S_1(x)$.

Exemple

La fonction $x\to S(x)$ définie sur l'intervalle $]-1\,;1[$ par l'expression $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est dérivable de dérivée $S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$. Or, on sait que $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$: on en déduit que $S'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ d'où la relation : $\forall x\in]-1\,;1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$.

Corollaire 1 La fonction $x\to S(x)$ définie sur l'intervalle $]-R\,;R[$ par l'expression $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ admet pour primitive la fonction $\int S(x)\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_{n-1}}{n}x^n$, cette dernière série ayant un rayon de convergence égal à R.

Remarque : en faisant le changement d'indice de sommation $n \to n+1$, on obtient que $\int S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n+1} x^{n+1}$: on remarque ainsi que pour intégrer la fonction $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, il suffit de l'intégrer « terme à terme ».

<u>Preuve</u> : Posons $v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ \frac{u_{n-1}}{n} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$ et considérons la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Son rayon de convergence et non nul. En effet, pour tout entier n non nul on a $|v_n| = \left|\frac{u_{n-1}}{n}\right| \leq |u_{n-1}|$ donc par la propriété 2 (ii), la rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1} x^n$. Or pour tout nombre complexe de module strictement inférieur à R on a $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1} x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1} x^{n-1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ est au moins égal à R, donc est strictement positif.

On peut alors appliquer la propriété 7 à la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ qui est donc dérivable de dérivée $\sum_{n=0}^{+\infty} n v_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n v_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) v_{n+1} x^n$, par changement d'indice de sommation $n \to n+1$ $= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ par définition de v_n.

Cela prouve que $\int S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_{n-1}}{n} x^n$, ce qu'il fallait démontrer.

Le fait que le rayon de convergence de cette dernière série est égal à R découle alors directement de la propriété 5.

Exemple : Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.2^n}$.

Considérons la fonction $x \to S(x)$ définie sur l'intervalle $]-1\,;1[$ par la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Son rayon de convergence vaut $R=1$ et $\forall x \in]-1\,;1[,\ S(x) = \frac{1}{1-x}$. On en déduit d'après le corollaire de la propriété 7 :

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$$

d'où :

$$\forall x \in]-1\,;1[,\ -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$$

d'où, pour $x = \frac{1}{2}$:

$$-\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c'est à dire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.2^n} = \ln(2)$.

Nous allons voir dans le paragraphe suivant d'autres applications des propriétés vues ci-dessus.

Corollaire 2 La fonction $x \to S(x)$ définie sur l'intervalle $]-R\,;R[$ par l'expression $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est indéfiniment dérivable, et sa dérivée d'ordre p vaut :

$S^{(p)}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1)u_n x^{n-p}$, cette dernière expression pouvant aussi s'écrire :

$$S^{(p)}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+p)(n+p-1)\ldots(n+1)u_{n+p}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+p)!}{n!}u_{n+p}x^n$$

Ce corollaire se prouve assez facilement par récurrence à partir de la propriété 7.

Exemple : Calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

En considérant encore une fois la série entière $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ nous avons

$$\forall x\in]-1\,;1[,\ \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ .$$

En dérivant une fois, on obtient $\forall x\in]-1\,;1[,\ \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1}$, et en dérivant encore une fois ,

$$\forall x\in]-1\,;1[,\ \frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} \ .$$

On en déduit que $\forall x\in]-1\,;1[,\ \frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ et $\forall x\in]-1\,;1[,\ \frac{2x^2}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n$ d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(n(n-1)+n)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n+\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{x+x^2}{(1-x)^3} \ ,$$

d'où $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}=6$ en posant $x=\frac{1}{2}$.

V) Développement d'une fonction en série entière.

On a vu qu'une série entière de rayon de convergence non nul définit une fonction indéfiniment dérivable.
La question que l'on se pose dans ce dernier paragraphe est la suivante : étant donnée une fonction f indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0, peut-on trouver une série entière qui est égale à f au voisinage de 0 (c'est à dire « développer f en série entière ») ? La réponse est souvent positive, mais pas toujours. Toutefois, beaucoup de fonctions usuelles sont développables en série entière, comme on va le voir dans cette partie du cours.

V.1) Interprétation des coefficients d'une série entière.

Considérons une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ de rayon de convergence $R>0$ ou $R=+\infty$ (on exclut encore dans ce paragraphe le cas $R=0$.)

Soit $x \to S(x)$ la fonction définie sur l'intervalle $]-R\,;R[$ par l'expression $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

Alors $S(0)=u_0$ et, plus généralement, d'après le corollaire 2 de la propriété 7, on a

$S^{(p)}(0)=\frac{p!}{0!}u_p=p!\,u_p$ (on rappelle que $0!=1$.)

On en déduit la formule $u_p=\frac{S^{(p)}(0)}{p!}$ d'où la relation : $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{S^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Définition 4 Étant donnée une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0, on appelle <u>série de Maclaurin</u> associée à f la série entière : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Le raisonnement qui précède permet d'établir la propriété suivante :

Propriété 8
Si une fonction f peut s'écrire sous la forme d'une série entière de rayon de convergence non nul sur un intervalle $]-R;R[$, alors elle est égale à sa série de Maclaurin. En particulier, les coefficients du développement en série entière sur $\mathbb{R}$ (donc sur $\mathbb{C}$) sont définis de façon unique (*).
On pourra donc dire : « <u>le</u> développement en série entière de f au voisinage de 0 »
(*) Cela signifie que s'il existe $\varepsilon>0$ tel que $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ pour tout $x\in]-\varepsilon;\varepsilon[$, alors $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=b_n$.

Remarque : une série de Maclaurin associée à une fonction f peut très bien avoir un rayon de convergence non nul sans pour autant coïncider avec f sur un voisinage de 0 (dans ce cas, bien entendu, f n'est pas développable en série entière).

Exemple : on peut démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ est indéfiniment dérivable et $\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(n)}(0)=0$ ce qui implique que sa série de Maclaurin est nulle, donc a un rayon de convergence infini. Et pourtant, f n'est nulle qu'en 0, donc ne peut pas coïncider avec sa série de Maclaurin sur un voisinage de 0 !

Ainsi, étant donnée une fonction indéfiniment dérivable sur un voisinage de 0, pour démontrer qu'elle peut s'écrire sous la forme d'une série entière au voisinage de 0, il suffit de montrer qu'elle est égale à sa série de Maclaurin sur un voisinage de 0. C'est ce principe qu'il faut garder en tête pour la suite de ce paragraphe.

Avant de passer en revue les développements en série entière de certaines fonctions, voici un corollaire important de la propriété 8 :

Corollaire (formule du binôme de Newton)
$\forall x\in\mathbb{C},\forall y\in\mathbb{C},\forall p\in\mathbb{N}^*,\ (x+y)^p=\sum_{k=0}^{p}\frac{p!}{k!(p-k)!}x^k y^{p-k}$.

<u>Preuve :</u> Fixons $y\in\mathbb{C}$ et considérons le polynôme $f(x)=(x+y)^p$. Il s'agit d'un polynôme de degré p. Sa forme développée est une série entière finie, qui est donc égale à sa série de Maclaurin :

(1) $f(x)=\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.

On a $f'(x)=p(x+y)^{p-1}$, $f''(x)=p(p-1)(x+y)^{p-2}$, et de façon générale :

$$f^{(k)}(x)=p(p-1)\dots(p-k+1)(x+y)^{p-k}=\frac{p!}{(p-k)!}(x+y)^{p-k}$$

pour tout entier k compris entre 0 et p.

On a donc $f^{(k)}(0)=\frac{p!}{(p-k)!}y^{p-k}$ donc la relation (1) donne :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{p}\frac{\frac{p!}{(p-k)!}y^{p-k}}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{p}\frac{p!}{k!(p-k)!}x^k y^{p-k}$$, ce qu'il fallait démontrer.

Exemple (qui devrait être bien connu de tout le monde !) :

$$(x+y)^2=\sum_{k=0}^{2}\frac{2!}{k!(2-k)!}x^k y^{k-2}=\frac{2!}{0!.2!}x^0 y^2+\frac{2!}{1!.1!}x^1 y^1+\frac{2!}{2!.0!}x^2 y^0=y^2+2xy+x^2 \quad .$$

Le binôme de Newton est bien sûr plus utile pour de plus grandes valeurs de p .

V.2) Fonction exponentielle.

Considérons la fonction $f(x)=e^x$ pour $x\in\mathbb{R}$. On a $\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(n)}(x)=e^x$ donc $\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(0)}(x)=1$. Sa série de Maclaurin est donc $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$.

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$ a pour rayon de convergence $R=+\infty$.

En effet, si l'on applique la propriété 1, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1).(n!)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)}=0 \quad .$$

On a d'après la propriété 7,la fonction $x\to S(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n.\frac{1}{n!}x^{n-1}$.

On applique le changement d'indice $n\to n+1$ pour obtenir que

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1).\frac{1}{(n+1)!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1).\frac{1}{(n+1).n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n=S(x).$$

D'autre part, $S(0)=0$ donc la fonction $x\to S(x)$ est **l'unique** solution de l'équation différentielle $y'=y$ avec la condition initiale $y(0)=0$: c'est la fonction exponentielle. On a donc prouvé la

Propriété 9 $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$.

Exemple : $e=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$.

Remarque : la propriété 9 reste valable pour tout $x\in\mathbb{C}$ (avec la définition de l'exponentielle d'un nombre complexe donnée dans le chapitre sur les nombres complexes), mais la démonstration donnée ci-dessus n'est plus valable dans ce cas .

V.3) Fonctions sin et cos.

Considérons cette fois la fonction $f(x)=\cos(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$. On a
$f(x)=\cos(x)$, $f'(x)=-\sin(x)$, $f''(x)=-\cos(x)$, $f^{(3)}(x)=\sin(x)$ et $f^{(4)}(x)=f(x)$.
Cela signifie que $\left(f^{(n)}(0)\right)_{n\in\mathbb{N}}=(1;0;-1;0;1;0;-1;0;1;0;-1;0;...)$.

On en déduit que la série de Maclaurin de f vaut : $S(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+....$ ce qui s'écrit avec le symbole $\sum$: $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

On peut ainsi écrire $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$ où (u_n) est la suite de période 4 :
$(u_n)=(1;0;-1;0;1;-1;0;1;0;-1;0;....)$.

En remarquant que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|\frac{u_n}{n!}\right|\leq\frac{1}{n!}$ et que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$ a un rayon de convergence infini, la propriété 2 (ii) prouve que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$ a un rayon de convergence infini.

En partant de l'expression
$$S(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+....$$
on a, on obtient grâce à la propriété 7 que $S(x)$ est indéfiniment dérivable et
$$S'(x)=-2\frac{x}{2!}+4\frac{x^3}{4!}-6\frac{x^5}{6!}+....=-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}$$
d'où
$$S''(x)=\frac{d}{dx}\left(-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}-....\right)=-1+3\frac{x^2}{3!}-5\frac{x^4}{5!}+7\frac{x^6}{7!}-....$$
$$S''(x)=-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-....=-S(x).$$
On a $S(0)=1$ et $S'(0)=0$ donc la fonction $S(x)$ est **l'unique** solution de l'équation différentielle $y''(x)=-y(x)$ avec les conditions initiales $y(0)=1$ et $y'(0)=0$. On en déduit la

Propriété 10 $\forall x\in\mathbb{R}$, $\cos(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+.....$.

Par utilisation de la propriété 7, en remarquant que $\sin(x)=-(\cos(x))'$, on en déduit la

Propriété 11 $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+.....$.

Exemple : la fonction « sinus cardinal » définie par $\mathrm{SC}(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ peut s écrire sous la forme d'une série entière : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{SC}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+.....$.
On en déduit que la fonction sinus cardinal est indéfiniment dérivable.

Ces deux dernières propriétés permettent de donner une autre définition de l'exponentielle complexe, qui généralise la propriété 9. On rappelle que si $z\in\mathbb{C}$ s'écrit sous forme algébrique $z=a+bj$, avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$, alors $\exp(z)$ est le nombre complexe défini par la forme trigonométrique : $\exp(z)=e^a(\cos(b)+j\sin(b))$.

Théorème 2 $\forall x\in\mathbb{C},\ \exp(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n.$

(*) Preuve :

Considérons la série entière $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$: on a vu dans le V)2 que son rayon de convergence est infini.

On remarque que d'après la propriété 9, le Théorème est vrai pour $x\in\mathbb{R}$.

Commençons par démontrer le théorème pour un nombre imaginaire pur $x=jb,\ b\in\mathbb{R}$.

On a d'après les propriétés 10 et 11 :

$$\exp(jb)\overset{\text{def}}{=}\cos(b)+j\sin(b)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{b^{2n}}{(2n)!}+j\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=1-\frac{b^2}{2!}+\frac{b^4}{4!}-\frac{b^6}{6!}+\ldots\ldots+\left(jb-j\frac{b^3}{3!}+j\frac{b^5}{5!}-j\frac{b^7}{7!}+\ldots\right)$$

$$=1+jb-\frac{b^2}{2!}-j\frac{b^3}{3!}+\frac{b^4}{4!}+j\frac{b^5}{5!}-\frac{b^6}{6!}-j\frac{b^7}{7!}+\ldots$$ en « entrelaçant » les deux séries.

En remarquant que $j^2=-1,\ j^3=-j,\ j^4=1,\ j^5=j,\ j^6=-1,\ j^7=-j$ etc....on déduit de l'égalité ci-dessus que :

$$\exp(jb)=1+jb+\frac{(jb^2)}{2!}+\frac{(jb)^3}{3!}+\frac{(jb)^4}{4!}+\frac{(jb)^5}{5!}+\frac{(jb)^6}{6!}+\frac{(jb)^7}{7!}+\ldots$$

c'est à dire :

$$\exp(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n \quad \text{pour} \quad x=jb,\ b\in\mathbb{R}.$$

Soit maintenant $t\in\mathbb{R}$ fixé.

On a pour tout nombre réel x :

$\exp(x+txj)=\exp(x).\exp(jtx)=S(x).S(jtx)$ car on a montré que $\exp(z)=S(z)$ pour tout z réel ou imaginaire pur. Ainsi, $\exp(x+txj)$ est égal au produit des séries entières

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(tjx^n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(tj)^n x^n .$$

D'après la propriété 4, on a pour tout x réel l'égalité

$$(1)\quad \exp(x+txj)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n x^n$$

où (c_n) est égal au produit de convolution des suites $\left(\frac{1}{n!}\right)_n$ et $\left(\frac{(tj)^n}{n!}\right)_n$.

Calculons le terme c_n par la formule de la définition 2 :

$$(2)\quad c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{(tj)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Par la formule du binôme de Newton, on a :

$\frac{1}{n!}(1+tj)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}1^k(tj)^{n-k}=c_n$ grâce à (2). En reportant dans (1) cela donne :

$$\exp(x+txj)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(1+tj)^n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(x+tjx)^n=S(x+tjx).$$

Si $x \neq 0$, et si $y \in \mathbb{R}$, posons $t = \frac{y}{x}$. L'égalité ci-dessus donne :
$\exp(x + jy) = S(x + jy)$.
Si $x = 0$, alors $x + jy$ est imaginaire pur et l'égalité $\exp(txj) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(x + tjx)^n = S(x + tjx)$ a alors été démontrée ci-dessus.
On en déduit que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = S(z)$.

Exemple : développement en série entière de la fonction $f(x) = e^{-x}\sin(x)$.

En utilisant les formules d'Euler, on a
$$f(x) = e^{-x}\frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{(-1+j)x} - e^{-(-1-j)x}\right) .$$
Par le Théorème 2, il vient :
$$f(x) = \frac{1}{2j}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(-1+j)^n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(-1-j)^n x^n\right) = \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left((-1+j)^n - (-1-j)^n\right)x^n .$$
En remarquant que $(-1+j)^n - (-1-j)^n = \sqrt{2}^n e^{3jn\frac{\pi}{4}} - \sqrt{2}^n e^{-3jn\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}^n j\sin\left(3n\frac{\pi}{4}\right)$, l'expression ci-dessus se simplifie et devient :
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{2}^n}{n!}\sin\left(3n\frac{\pi}{4}\right)x^n .$$

V.4) Autres fonctions

D'autres fonctions importantes se développent en série entière.

Propriété 12 Si $x \to f(x)$ est une fonction rationnelle sur $\mathbb{C}$ telle que 0 ne soit pas un pôle, alors $f(x)$ peut s'écrire comme la somme d'une série entière pour $|x| < R$ où R est le plus petit module des pôles de $f(x)$.

<u>Preuve :</u>
<u>Étape</u> 1 :
On commence par considérer le cas où $f(x)$ est de la forme $f_p(x) = \frac{1}{(1-x)^p}$ où $p \in \mathbb{N}^*$.
On a pour tout nombre complexe de module strictement inférieur à 1 la relation $f_1(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ donc $f_1(x)$ peut s'écrire comme la somme d'une série entière pour $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$. D'après la propriété 4 il en est de même pour
$$f_2(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = f_1(x).f_1(x), \quad f_3(x) = \frac{1}{(1-x)^3} = f_1(x).f_2(x) \text{ , etc....}$$
et on montrerait facilement par récurrence que pour tout entier naturel non nul *p*, $f_p(x)$ peut s'écrire comme la somme d'une série entière pour $|x| < 1$.

<u>Étape 2 :</u>
Pour tout nombre complexe $a \neq 0$ et pour tout entier naturel non nul p , la fonction $f(x) = \frac{1}{(x-a)^p}$ peut s'écrire comme la somme d'une série entière pour $|x| < |a|$.

En effet, soit $f_p(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ le développement en série entière de $f_p(x)$ pour $|x|<1$.

On a $f(x)=\frac{1}{(x-a)^p}=\frac{1}{\left(a\left(\frac{x}{a}-1\right)\right)^p}=\left(\frac{-1}{a}\right)^p\frac{1}{\left(1-\frac{x}{a}\right)^p}=\left(\frac{-1}{a}\right)^p f_p\left(\frac{x}{a}\right)$.

Or puisque $\left|\frac{x}{a}\right|<1$ (car $|x|<|a|$) on a $f_p\left(\frac{x}{a}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.\left(\frac{x}{a}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{a^n}x^n$ donc

$f(x)=\left(\frac{-1}{a}\right)^p\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{a^n}x^n$ dès que $|x|<|a|$: on en déduit que $f(x)$ peut s'écrire comme la somme d'une série entière pour tout nombre complexe *x* tels que $|x|<|a|$.

<u>Étape 3 :</u>
Soit $x \to f(x)$ une fonction rationnelle telle que 0 n'en soit pas un pôle. Alors, par le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ (dans ce cas, les éléments simples sont tous de première espèce), la fonction $x \to f(x)$ s'écrit comme la somme d'un polynôme (la partie entière, qui est éventuellement nulle) et de fonctions rationnelles de la forme $\frac{A}{(x-a)^p}$ qui sont développables en série entière pour $|x|<|a|$.
D'après la propriété 3, la fonction $f(x)$ peut s'écrire comme la somme d'une série entière pour $|x|<R$ où R est le plus petit module des pôles de $f(x)$.

Remarque :
Pour calculer en pratique les coefficients du développement en série entière de *f,* la preuve ci-dessus montre qu'il suffit de calculer le développement en série entière de $f_p(x)=\frac{1}{(1-x)^p}$ soit $f_p(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ pour $|x|<1$. Celui ci pourra être obtenu par le corollaire 2 de la propriété 7 , ce qui donne $u_n=\frac{(p+n-1)!}{(p-1)!\,n!}$ (exercice à faire !).

(*) Exemple : Développons en série entière la fonction $f(x)=\frac{2\mathrm{x}}{(x-1)(x^2-2\mathrm{x}+2)}$.
On cherche une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ de la fraction rationnelle :

$$\frac{2\mathrm{x}}{(x-1)(x^2-2\mathrm{x}+2)}=\frac{2\mathrm{x}}{(x-1)(x-1-j)(x-1+j)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-1-j}+\frac{C}{x-1+j}\quad .$$

On a

$$A=\left[\frac{2\mathrm{x}}{x^2-2\mathrm{x}+2}\right]_{x=1}=2$$
$$B=\left[\frac{2\mathrm{x}}{(x-1)(x-1+j)}\right]_{x=1+j}=\frac{2+2\mathrm{j}}{j(2\mathrm{j})}=-1-j$$
$$C=\left[\frac{2\mathrm{x}}{(x-1)(x-1-j)}\right]_{x=1-j}=\frac{2-2\mathrm{j}}{-j(-2\mathrm{j})}=-1+j$$

donc $\frac{2\mathrm{x}}{(x-1)(x^2-2\mathrm{x}+2)}=\frac{2}{x-1}-\frac{1+j}{x-1-j}-\frac{1-j}{x-1+j}$.
On a

$$\frac{2}{x-1}=-2.\frac{1}{1-x}=-2\sum_{n=0}^{+\infty}x^n \quad ,$$

$$\frac{1+j}{x-1-j}=\frac{-1}{1-\frac{x}{1+j}}=\frac{-1}{1-\frac{1-j}{2}x}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-j}{2}\right)^n x^n$$

et

$$\frac{1-j}{x-1+j}=\frac{-1}{1-\frac{x}{1-j}}=\frac{-1}{1-\frac{1+j}{2}x}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+j}{2}\right)^n x^n \quad .$$

On en déduit que

$$\frac{2\mathrm{x}}{(x-1)(x^2-2\mathrm{x}+2)}=\frac{2}{x-1}-\frac{1+j}{x-1-j}-\frac{1-j}{x-1+j}$$

$$=-2\sum_{n=0}^{+\infty}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-j}{2}\right)^n x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+j}{2}\right)^n x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{1+j}{2}\right)^n+\left(\frac{1-j}{2}\right)^n-2\right)x^n .$$

On remarque que

$$\left(\frac{1+j}{2}\right)^n+\left(\frac{1-j}{2}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}{2}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2}\right)^n=\frac{1}{\sqrt{2}^n}\left(e^{jn\frac{\pi}{4}}+e^{-jn\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}^n}\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$

d'où :

$$\frac{2\mathrm{x}}{(x-1)(x^2-2\mathrm{x}+2)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{1+j}{2}\right)^n+\left(\frac{1-j}{2}\right)^n-2\right)x^n=2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}^n}-1\right)x^n .$$

Terminons par le développement en série entière de deux fonctions très courantes.

Propriété 13

On a pour tout nombre réel $x\in]-1\,;1[$:

$$\arctan(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\mathrm{n}+1}x^{2\mathrm{n}+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots .$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots .$$

Remarques :

(i) Le rayon de convergence de ces deux séries est égal à 1.

(ii) On pourrait démontrer que les égalités ci-dessus et la convergence des séries entières sont encore vraies si $x = 1$.

<u>Preuve :</u>

On part de l'égalité $\forall t\in]-1\,;+1[,\ \frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^n$. En remplaçant t par $-t$, on obtient

$\forall t\in]-1\,;+1[,\ \frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n$. En utilisant le corollaire 1 de la propriété7, il vient que

$$\forall x\in]-1\,;+1[,\ \int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

d'où

$$\forall x \in]-1\,;1[,\ \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ .$$

Si on repart de l'égalité :

$$\forall t \in]-1\,;+1[,\ \frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n$$

en remplaçant t par t^2 , on obtient :

$$\forall t \in]-1\,;+1[,\ \frac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}$$

(en effet, $t^2 \in]-1\,;1[\Leftrightarrow t \in]-1\,;1[$)

et le corollaire 1 de la propriété7 implique alors que

$$\forall x \in]-1\,;+1[,\ \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

c'est à dire

$$\forall x \in]-1\,;1[,\ \arctan(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\ .$$

Exemple :

On a $\ln(3)=-\ln\left(\frac{1}{3}\right)=-\ln\left(1-\frac{2}{3}\right)$.

En utilisant l'égalité $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ avec $x=-\frac{2}{3}$, ($-\frac{-2}{3}\in]-1\,;1[$)on obtient :

$$\ln(3)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{-2}{3}\right)^n=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{n}.\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

d'où

$$\ln(3)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}.\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

VI) Exercices

Exercice 1
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1) $\sum_{n=0}^{+\infty}(2^n+n)x^n$ On a
2) $\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n+1}\,x^n$
3) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{2+3^n}x^n$
4) $\sum_{n=1}^{+\infty}n^n x^n$
5) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$
6) $\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)x^n$
7) $\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(\frac{2^n+3^n+4^n}{3^n+4^n}\right)x^n$
8) $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n$ où $u_n=\begin{cases}1 & \text{si } \sqrt{n}\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.
9) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{\ln(n)}}x^n$
10) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$.

Exercice 2
Déterminer le rayon de convergence R de chacune des séries entières suivantes, et trouver une expression de leur somme sur l'intervalle $]-R\,;R[$

1) $\sum_{n=0}^{+\infty}(1+2^n)x^n$
2) $\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^n$
3) $\sum_{n=3}^{+\infty}x^n$
4) $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n$ où $u_n=\begin{cases}1 & \text{si } n \text{ est impair}\\ 2 & \text{sinon}\end{cases}$.

Exercice 3
On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n$ où $\theta\in[0\,;2\pi[$.

1) Dans cette question, on veut prouver que la suite $(\cos(n\theta))_n$ ne converge pas vers 0. On raisonne par l'absurde : supposons que $\lim_{n\to+\infty}\cos(n\theta)=0$.

a) A l'aide de la formule $\cos(2x)=1-2\sin^2(x)$, prouver que $\lim_{n\to+\infty}\sin^2(n\theta)=\frac{1}{2}$.

b) A quelle contradiction aboutit-on ?

2) Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n$ (on pourra s'aider du résultat de la question 1).

3) Déterminer une expression sur $]-R\,;R[$ de la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n$ (on pourra s'aider des formules d'Euler).

Exercice 4

1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, et trouver une expression de sa somme sur l'intervalle $]-R\,;R[$.

2) Même question avec les deux séries entières $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n-1}x^n$ et $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n-2}x^n$.

3) En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)(n-2)}x^n$, et trouver une expression de sa somme sur l'intervalle $]-R\,;R[$.

Exercice 5

1) A l'aide d'un développement en série entière, déterminer $\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan(x)}{x^3}$.

2) Même question pour $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$.

(*) Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;1[$ par l'expression $f(x)=\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

1) a) Développer en série entière la fonction $x\to\ln(1-x)$ sur l'intervalle $]-1\,;1[$.

b) En écrivant $f(x)=\ln(1-x)\times\frac{1}{1-x}$, montrer que f est développable en série entière sur l'intervalle $]-1\,;1[$.

2) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n$ le développement en série entière de f sur l'intervalle $]-1\,;1[$.

Montrer que $u_0=0$ et que $\forall n\geq 1,\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

3) Soit g la fonction définie sur $]-1\,;1[$ par l'expression $g(x)=(\ln(1-x))^2$.

a) Vérifier que $g'(x)=-2f(x)$. En déduire que g est développable en série entière sur l'intervalle $]-1\,;1[$.

b) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty}v_n x^n$ le développement en série entière de g sur l'intervalle $]-1\,;1[$.

Montrer que $v_0=v_1=0$ et que $\forall n\geq 2,\ v_n=\frac{-2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

4) Soit $R>0$ et soit h une fonction développable en série entière sur l'intervalle $]-R\,;R[$.

a) Rappeler la propriété du cours qui permet d'affirmer que h est dérivable et que h' est une fonction développable en série entière sur l'intervalle $]-R\,;R[$.

b) Montrer que la fonction $x \to h^2(x)$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-R\,;R[$.

c) Montrer plus généralement que pour tout entier naturel k , la fonction $x \to h^k(x)$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-R\,;R[$.

Exercice 7

Soit la suite (u_n) définie par son terme général $u_n=\dfrac{1}{n!}$. (on rappelle que $0!=1$ et que $\forall n\geq 1,\ n!=1\times 2\ldots\times n$.

Calculer une expression du produit de convolution $[u*u]_n$ par les deux méthodes ci-dessous :

a) En utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières bien choisies.
b) En développant $(1+1)^n$ par la formule du binôme de Newton.

Exercice 8

Développer les fonctions suivantes en série entière au voisinage de 0. Ne pas oublier de préciser l'intervalle sur lequel l'égalité a lieu.

1) $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$.

2) $f(x)=\dfrac{3x}{(x-1)(x+2)}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x-1)^2}$.

4) $f(x)=\dfrac{2}{x^2+4}$.

Exercice 9

On considère une fonction définie par l'expression $f(x)=\ln(x^2-5x+6)$.
1) Quel est le domaine de définition de cette fonction ?
2) Factoriser le polynôme x^2-5x+6.
3) En déduire le développement en série entière de la fonction f au voisinage de 0.

Exercice 10

Soit y l'unique solution sur $]-\infty\,;1[$ de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'(x)+y(x)=\dfrac{1}{1-x} \\ y(0)=0 \end{cases} .$$

1) a) Vérifier que $\forall x\in]-\infty\,;1[,\ y(x)=e^{-x}\displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{1-t}dt$.

b) A l'aide de propriétés du cours, en déduire que la fonction y est développable en série entière sur $]-1\,;1[$ (on ne cherchera pas dans cette question à déterminer explicitement ce développement en série entière).

2) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ le développement en série entière de y sur l'intervalle $]-1\,;1[$.

a) Montrer en utilisant la relation $\begin{cases} y'(x)+y(x)=\dfrac{1}{1-x} \\ y(0)=0 \end{cases}$ que $u_0=0$ et que pour tout entier naturel n on a $u_{n+1}=\dfrac{1-u_n}{n+1}$.

b) En déduire une expression de la somme partielle $u_0+u_1x+\ldots+u_6x^6$

Exercice 11

Soit la suite (u_n) définie par les relations $\begin{cases} u_{n+2}=\dfrac{2}{3}u_{n+1}+\dfrac{1}{3}u_n \\ u_0=0,\ u_1=1 \end{cases}$.

1) a) Calculer u_2, u_3 et u_4.

b) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_n\leq 1$.

2) On considère la série entière $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

a) Prouver à l'aide de la question 1) que cette série entière possède un rayon de convergence au moins égal à 1.

b) Montrer que $\forall x\in]-1\,;1[,\ (x^2+2x-3)S(x)=-3x$.

c) Déterminer directement le développement en série entière de $\dfrac{-3x}{x^2+2x-3}$ pour $x\in]-1\,;1[$.

d) En déduire une expression de u_n en fonction de n .

(*)Exercice 12

Soit f une fonction définie et indéfiniment sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ -1\leq f^{(n)}(x)\leq 1$.

Pour tout entier naturel n on pose $u_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ et on pose $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

1) Démontrer que le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est infini.

Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé. On pose pour tout entier naturel n $I_n=\int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$.

2) a) Vérifier que $I_0=f(x)-u_0$.

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ I_{n+1}=I_n-u_{n+1}x^{n+1}$.

c) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n=f(x)-u_0-\ldots-u_nx^n=f(x)-\sum_{k=0}^{n} u_k x^k$.

3) En considérant la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, montrer que $\forall x\in\mathbb{C},\ \lim_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0$.

4) a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |I_n|\leq\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$ puis que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(*) Exercice 13

Dans cet exercice, on souhaite trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la relation

$(R)\ f(0)=1$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n , si f vérifie la relation (R), alors elle est n fois dérivable (autrement dit, elle est indéfiniment dérivable).

2) Supposons que f vérifie la relation (R).

a) Calculer les valeurs numériques de $f'(0)$ et $f''(0)$.

b) Démontrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n)}(x)=\dfrac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^{\frac{n^2-3n}{2}}}$.

c) En déduire une expression de $f^{(n)}(0)$.

3) Pour tout entier naturel n on pose $u_n=\dfrac{1}{n!}\cdot\dfrac{1}{2^{\frac{n^2-3n}{2}}}$ et on considère la série entière $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n$.

Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n$ est infini et prouver que la fonction $x\to S(x)$ vérifie la relation (R).

L'objet des questions suivantes est de prouver que la fonction $x\to S(x)$ définie ci-dessus est la seule à vérifier la relation (R). Pour cela, on considère une fonction f qui vérifie aussi la relation (R), et on définit la fonction g par l'expression $g(x)=f(x)-S(x)$: nous allons prouver que g est la fonction nulle.

4) a) Vérifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie la relation

$(R_0)\ g(0)=0$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=2g\left(\frac{x}{2}\right)$.

b) En effectuant le changement de variable $s=2t$ dans l'intégrale, vérifier que

$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=4\int_0^{\frac{x}{2}}g(t)\,dt$.

5) Première méthode

a) Déduire du 4)b) que $\forall x\geq 0,\ |g(x)|\leq 4\int_0^x|g(t)|\,dt$.

b) On définit sur $[0;+\infty[$ la fonction h par l'expression $h(x)=e^{-4x}\int_0^x|g(t)|\,dt$.

(i) Justifier que la fonction h est dérivable sur $[0;+\infty[$.
(ii) Prouver à l'aide du a) que h est décroissante sur $[0;+\infty[$.
(iii) En déduire que $\forall x\geq 0,\ g(x)=0$.

c) Déduire du 4)b) que $\forall x\leq 0,\ |g(x)|\leq 4\int_x^0|g(t)|\,dt$.

d) On définit sur $]-\infty;0]$ la fonction h par l'expression $h(x)=e^{4x}\int_x^0 |g(t)|\,dt$.

(i) Justifier que la fonction h est dérivable sur $]-\infty;0]$.
(ii) Prouver à l'aide du a) que h est croissante sur $]-\infty;0]$.
(iii) En déduire que $\forall x\leq 0,\ g(x)=0.$

6) Autre méthode

a) En utilisant le Théorème 3 du chapitre sur les fonctions élémentaires, prouver à l'aide du 4)b) que $\forall x\in\left[\frac{-1}{3};\frac{1}{3}\right],\ g(x)=0.$

b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, prouver que :

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\left[\frac{-2^n}{3};\frac{2^n}{3}\right],\ g(x)=0.$ Conclusion ?

(*)Exercice 14

On considère une fonction f développable en série entière au voisinage de 0, c'est à dire qu'il existe un réel $R>0$ et une série entière de rayon de convergence au moins égal à R tel que $f(z)$ soit définie et égale à $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n.}$ pour tout nombre complexe z de module strictement plus petit que R. On suppose que $f(0)\neq 0$. On veut démontrer que la fonction g définie par l'expression $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ est aussi développable en série entière au voisinage de 0.

1) Démontrer qu'il existe un réel $\alpha\in]0;R[$ tel que $\forall z\in\mathbb{C},\ |z|<\alpha\Rightarrow f(z)\neq 0.$

2) On travaille par analyse-synthèse : on suppose dans cette question que g est développable en série entière et que $\forall z\in\mathbb{C},\ |z|<\rho\Rightarrow g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ pour un certain réel $\rho\in]0;\alpha[$.

Montrer que $b_0=\frac{1}{f(0)}$ et que pour tout entier naturel $n\geqslant 1,\ b_n=\frac{-1}{f(0)}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$.

On est donc amené à définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0=\frac{1}{f(0)}$ et la relation de récurrence $n\geqslant 1,\ u_n=\frac{-1}{f(0)}\sum_{k=1}^{n} a_k u_{n-k}$. Nous allons démontrer que :

la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ possède un rayon de convergence non nul et que :

$\forall z\in\mathbb{C},\ |z|<\rho\Rightarrow g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ pour un certain réel $\rho\in]0;\alpha[$.

3) Étude d'un exemple : $f(z)=2+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}z^n.$.

a) Déterminer R et montrer que l'on peut prendre $\alpha=1$ pour le réel introduit à la question 1).
b) Déterminer la valeur de u_0 et écrire la relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
c) Montrer que la fonction g définie par l'expression $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ est développable en série entière sur le disque complexe de centre 0 et de rayon 1, et déterminer l'expression de son développement en série entière.
d) En déduire une expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On revient au cas général.

4) En raisonnant sur le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n.}$, montrer qu'il existe un réel $t > 0$ et une constante $M > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant M\, t^n$.

5) Montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant \frac{1}{|f(0)|}\left(1 + \frac{M}{|f(0)|}\right)^n t^{n.}$ où t et M sont les réels définis ci-dessus.

6) En déduire que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ possède un rayon de convergence ρ non nul.

7) Montrer que pour tout nombre complexe de module assez petit, on a : $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$.

8) Démontrer que le quotient de deux fonctions développables en série entière est développable en série entière dès que le dénominateur ne s'annule pas pour $z = 0$.

VII) Corrigés

Exercice 1

Pour toutes les séries entières de cet exercice, on note u_n le coefficient de x^n et R le rayon de convergence de la série.

1) On a $\forall n \geqslant 1,\ u_n \neq 0$ et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2+\frac{n+1}{2^n}}{1+\frac{n}{2^n}} \to 2$ si $n \to +\infty$ donc la propriété 1 montre que $R = \frac{1}{2}$.

2) On a $\forall n \geqslant 0,\ u_n \neq 0$ et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \to 1$ si $n \to +\infty$ donc la propriété 1 montre que R=1.

3) On a $\forall n \geqslant 0,\ u_n \neq 0$ et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\frac{2^{n+1}}{2+3^{n+1}}}{\frac{2^n}{2+3^n}} = 2.\frac{1+2.3^{-n}}{3+2.3^{-n}} \to \frac{2}{3}$ si $n \to +\infty$ donc la propriété 1 montre que $R = \frac{3}{2}$. .

4) On a $\forall n \geqslant 1,\ u_n \neq 0$ et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} > \frac{n^{n+1}}{n^n} = n$ donc $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to +\infty$ si $n \to +\infty$ donc la propriété 1 montre que $R = 0$.

5) On a $\forall n \geqslant 0,\ u_n \neq 0$ et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!}.\frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \to 4$ si $n \to +\infty$ donc la propriété 1 montre que $R = \frac{1}{4}$.

6) On a $|u_n| \sim \frac{1}{n+1}$ si $n \to +\infty$ et la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n$ a pour rayon de convergence 1 (voir exemple 2) de la propriété 1) donc par le (i) de la propriété 2, on a $R = 1$.

7) On a $|u_n| = \left|\ln\left(1+\frac{2^n}{3^n+4^n}\right)\right| \sim \frac{2^n}{3^n+4^n} \sim \left(\frac{2}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. La série entière géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^n$ a pour rayon de convergence 2 (à justifier par la propriété 1 si besoin) donc par la propriété 2, $R = 2$.

8) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ où On a $|u_n| \leqslant 1$ et la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ a pour rayon de convergence 1, donc par le (ii) de la propriété 2, on a $R \geqslant 1$.

On voit que si x=1, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ diverge car la suite $(u_n)_n$ ne tend pas vers 0 puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n^2} = 1$, donc on a $R \leqslant 1$. Au final, $R = 1$.

9) On a $\forall n \geqslant 1,\ u_n \neq 0$ et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln(n+1)-\ln(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \to 1$ si $n \to +\infty$ donc la propriété 1 montre que R=1.

10) On a $\forall n \geqslant 1,\ u_n > 0$ et $\ln(u_n) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim 1$ donc $(\ln(u_n)) \to 1$ d'où $(u_n) \to e$, c'est à dire que $|u_n| \sim e.$ La série $\sum_{n=0}^{+\infty} e\,x^n = e\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ ayant pour rayon de convergence 1, on déduit du (i) de la propriété 2 que R=1.

Exercice 2

Pour toutes les séries entières de cet exercice, on note u_n le coefficient de x^n .

1) On a $\forall n \geqslant 0,\ u_n \neq 0$ et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2+2^{-n}}{1+2^{-n}} \to 2$ si $n \to +\infty$ donc la propriété 1 montre que $R = \frac{1}{2}$.

Par la propriété 3, on a pour tout nombre réel x de module strictement inférieur à R la relation

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(1+2^n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} = \frac{2-3x}{2x^2-3x+1}.$$

2) On a $\forall n \geqslant 0,\ u_n \neq 0$ et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2n+3}{2n+1} \to 1$ si $n \to +\infty$ donc la propriété 1 montre que $R = 1$.

On a par la propriété 3, $\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 2x\sum_{n=0}^{+\infty} n\,x^{n-1}$

$\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 2x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$ par la propriété 7, ce qui donne au final :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^n = \frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

3) On a $\sum_{n=3}^{+\infty} x^n = x^3\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ donc R=1 et $\sum_{n=3}^{+\infty} x^n = \frac{x^3}{1-x}$.

4) Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et puisque les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} 2x^n$ ont pour rayon de convergence 1, une double utilisation de la propriété 2(ii) montre que R=1.

On a par la propriété 3 $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = (x+2)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{x+2}{1-x^2}$

Exercice 3

1) a) On a $\lim_{n\to+\infty}\cos(n\theta) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\cos(2n\theta) = 0$ d'où

$0 = \lim_{n\to+\infty}\cos(2n\theta) = 1 - 2\sin^2(n\theta)$ d'où $\lim_{n\to+\infty}\sin^2(n\theta) = \frac{1}{2}$.

b) On sait que pour tout entier naturel n on a $\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta) = 1$ donc le résultat de la question précédente implique que $\lim_{n\to+\infty}\cos^2(n\theta) = \frac{1}{2}$ ce qui contredit le fait que $\lim_{n\to+\infty}\cos(n\theta) = 0.$

Conclusion : il est toujours faux de dire que $\lim_{n\to+\infty}\cos(n\theta) = 0.$

2) Puisque $|\cos(n\theta)| \leqslant 1$ et que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ a un rayon de convergence égal à 1, on en déduit que $R \geqslant 1$.

D'un autre côté, pour $x = 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\cos(n\theta)$ ne peut converger car cela impliquerait

que $\lim_{n\to+\infty}\cos(n\theta)=0$, ce qui est exclu par le résultat de la question 1), donc $R\leqslant 1$. On en déduit que $R = 1$.

3) On a :

$$\forall x\in]-1\,;1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{jn\theta}+e^{-jn\theta}\right)x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{j\theta}x\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-j\theta}x\right)^n$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{j\theta}x}+\frac{1}{1-e^{-j\theta}x}\right)=\frac{1-\cos(\theta)x}{x^2-2\cos(\theta)x+1}$$

Exercice 4

1) Une application directe de la propriété 1 montre que R=1.

L'application du corollaire 1 de la propriété 7 à la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ montre que la fonction $x\to\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ est une primitive sur $]-1\,;1[$ de la fonction $x\to\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, c'est à dire qu'il existe une constante C telle que $\forall x\in]-1\,;1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=-\ln(1-x)+C$.

En considérant x =0, on trouve que C=0 donc $\forall x\in]-1\,;1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=-\ln(1-x)$.

2) Une application directe de la propriété 1 montre que R=1 dans les deux cas. D'autre part,

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n-1}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+2}=x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}-x\right)$$

$$=-x(\ln(1-x)+x),$$

et de même, $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n-2}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+3}=x^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=-x^2\ln(1-x)$.

3) Une application directe de la propriété 1 montre que R=1. On a, par une décomposition en éléments simples, $\forall n\geq 3,\ \frac{1}{(n-1)(n-2)}=\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}$ d'où

$$\forall x\in]-1\,;1[,\ \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)(n-2)}x^n=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n-2}x^n-\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n-1}x^n=(x-x^2)\ln(1-x)+x^2.$$

Exercice 5

1) Par la propriété 13, on a $\forall x\in]-1\,;1[,\ \arctan(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$ donc

$\forall x\in]-1\,;0[\cup]0\,;1[,\ \frac{x-\arctan(x)}{x^3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{7}x^4-\ldots$ avec convergence de la série.

La série entière $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{7}x^4-\ldots$ ayant un rayon de convergence au moins égal à 1, la propriété 6 nous dit que $\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan(x)}{x^3}=\frac{1}{3}$.

2) La même méthode en utilisant le deuxième développement en série donnée par la propriété 13 permettent d'établir que $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$.

Exercice 6

1)

a) On a par la propriété 13 $\forall x\in]-1;1[,\ \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$

donc en faisant le changement de x en $-x$, il vient :

$\forall x\in]-1;1[,\ \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\dots$

b) Les fonctions $x\to\ln(1-x)$ et $x\to\frac{1}{1-x}$ sont développables en série entière sur $]-1;1[$. Par la propriété 4, la fonction $f(x)=\ln(1-x)\times\frac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1;1[$.

2) On a $\forall x\in]-1;1[,\ \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ et $\forall x\in]-1;1[,\ \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$

$\forall x\in]-1;1[,\ \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$. D'après la propriété 4, u_n est le produit de Cauchy des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(1;1;1;\dots)$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}=(0;1;-\frac{1}{2};\frac{1}{3};\dots)$, c'est à dire que $u_0=a_0.b_0$ et si $n\geqslant 1$, $u_n=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}.b_k=\sum_{k=0}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

3)

a) Par la formule de dérivation de u^2, on a

$g'(x)=2\ln(1-x)\frac{d}{dx}(\ln(1-x))=-2\ln(1-x)\times\frac{1}{1-x}=-2f(x).$

b) La fonction $g:x\to\sum_{n=0}^{+\infty}v_nx^n$ est une primitive sur $]-1;1[$ de la fonction $x\to-2\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$. On en déduit que $\forall x\in]-1;1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}v_nx^n=C-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_{n-1}}{n}x^n$ pour une certaine constante C.

On a $0=g(0)=C$ donc $\forall x\in]-1;1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}v_nx^n=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_{n-1}}{n}x^n$. On en déduit par identification des termes des séries entière que $v_0=0$, $v_1=-2u_0=0$ et que

$\forall n\geqslant 2,\ v_n=-2\frac{u_{n-1}}{n}=\frac{-2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

4)

a) Ce sont les propriété 5 et 7 du cours

b) C'est la propriété 4 qui permet de dire que la fonction $x\to h^2(x)$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-R;R[$ (a minima).

c) On procède par un raisonnement par récurrence, en utilisant toujours la propriété 4.

Exercice 7

a) On considère les séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ de rayons de convergence $+\infty$ (ce sont les développements en série entière de la fonction exponentielle (propriété 9). Alors, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} [u*u]_n x^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$ et pour tout complexe x

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty} [u*u]_n x^n$$

c'est à dire, par la propriété 9,

$$\exp(x).\exp(x)=\exp(2\mathrm{x})=\sum_{n=0}^{+\infty} [u*u]_n x^n$$

donc, en réutilisant la propriété 9 :

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n=\sum_{n=0}^{+\infty} [u*u]_n x^n$, et ce pour tout nombre complexe x. Par identification des coefficients des séries entières , on a $\forall n\in\mathbb{N},\ [u*u]_n=\frac{2^n}{n!}$.

b) On a, par définition du produit de convolution, $[u*u]_n=\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}=\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!}$.

Or, si l'on développe par la formule du binôme de Newton, on obtient : $(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}$ c'est à dire $2^n=n!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}$.

On en déduit que $2^n=n![u*u]_n$ d'où $\forall n\in\mathbb{N},\ [u*u]_n=\frac{2^n}{n!}$.

Exercice 8

1) D'après la propriété 12, la fraction rationnelle *f* est développable en série entière de rayon de convergence R, où R est le plus petit module des pôles de *f,* c'est à dire $\frac{1}{2}$.

On a pour tout nombre complexe de module inférieur à $\frac{1}{2}$:

$$f(x)=x.\frac{1}{1+2\mathrm{x}}=x.\sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^n x^{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-2)^{n-1} x^n \quad .$$

2) D'après la propriété 12, la fraction rationnelle *f* est développable en série entière de rayon de convergence R, où R est le plus petit module des pôles de *f,* c'est à dire 1.

Par une décomposition en éléments simples, on a $f(x)=\frac{3\mathrm{x}}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}$. On a pour tout nombre complexe de module inférieur à 1:

$$f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}=-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty} x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)x^{n.}$$

3) D'après la propriété 12, la fraction rationnelle *f* est développable en série entière de rayon de convergence R, où R est le plus petit module des pôles de *f,* c'est à dire 1.

Par une décomposition en éléments simples, on a $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{\frac{1}{4}}{x+1}-\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}$.

On a pour tout nombre complexe de module inférieur à 1:

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{\frac{1}{4}}{1-x}+\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n-2\mathrm{n}-1\right)x^n \quad \text{(propriété 7)}.$$

4) D'après la propriété 12, la fraction rationnelle f est développable en série entière de rayon de convergence R, où R est le plus petit module des pôles de f, c'est à dire 2. On a pour tout nombre complexe de module inférieur à 2: $f(x)=\frac{2}{x^2+4}=\frac{1}{2}.\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{.1}{4^n}x^{2\mathrm{n}}$.

Exercice 9

1) $D_f=]-\infty;2[\cup]3;+\infty[$. Elle est donc définie au voisinage de 0.

2) On a $x^2-5\mathrm{x}+6=(x-2)(x-3)$.

3) On a $\forall x\in]-2;2[,\ f(x)=\ln((x-2)(x-3))=\ln(2-x)+\ln(3-x)$.

On en déduit que f est dérivable sur cet intervalle et

$$\forall x\in]-2;2[,\ f'(x)=\frac{-1}{2-x}-\frac{1}{3-x}=\frac{-1}{2}.\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{1}{3}.\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)x^n$$

donc par le corollaire 1 de la propriété 7, on a $\forall x\in]-2;2[,\ f(x)=C-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)x^n$. En considérant la valeur $x=0$, on trouve $C=\ln(6)$ d'où

$$\forall x\in]-2;2[,\ f(x)=\ln(6)-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)x^n$$

Exercice 10

1) a) La fonction $t\to\frac{e^t}{1-t}$ est continue sur $]-\infty;1[$ donc la fonction $x\to\int_0^x\frac{e^t}{1-t}\,dt$ est dérivable sur , $]-\infty;1[$ donc la fonction $f(x)\overset{\text{def}}{=}e^{-x}\int_0^x\frac{e^t}{1-t}dt$ est dérivable sur $]-\infty;1[$ et par dérivation d'un produit on a $f'(x)=-e^{-x}\int_0^x\frac{e^t}{1-t}dt+e^{-x}\frac{e^x}{1-x}=-f(x)+\frac{1}{1-x}$ ce qui montre que f est solution de l'équation différentielle avec la condition initiale imposée puisque $f(0)=0$.

b) Les fonctions $x\to\frac{1}{1-x}$ et $x\to e^x$ sont développables en série entière, de rayon de convergence égal à 1, donc par la propriété 4, il en est de même de $x\to\frac{e^x}{1-x}$.

On utilise le corollaire 1 de la propriété 7 pour dire que la fonction $x\to\int_0^x\frac{e^t}{1-t}\,dt$ développable est en

série entière sur $]-1\,;1[$, donc, par la propriété 4, il en est de même de $x \to e^{-x}\int_0^x \frac{e^t}{1-t}dt$.

2)

a) Le développement en série entière de y' sur l'intervalle $]-1\,;1[$ est $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n$

donc on en déduit par la propriété 3 que $\forall x\in]-1\,;1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_n+(n+1)u_{n+1}\right)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$.

Par la propriété 8, on en déduit que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n+(n+1)u_{n+1}=1$ donc $u_{n+1}=\frac{1-u_n}{n+1}$.

b) On a $u_1=\frac{1-u_0}{1}=1,\quad u_2=\frac{1-u_1}{2}=0,\quad u_3=\frac{1}{3}\ ,\quad u_4=\frac{1}{6}\ ,\quad u_5=\frac{1}{6}\quad u_6=\frac{5}{36}$ donc

$u_0+u_1x+\ldots.+u_6x^6=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{6}x^5+\frac{5}{36}x^6.$

Cela signifie que pour tout x « pas trop loin de 0 », on a $y(x)\sim x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{6}x^5+\frac{5}{36}x^6.$

Exercice 11

1) a) On a $u_2=\frac{2}{3}\ ,u_3=\frac{7}{9}$ et $u_4=\frac{20}{27.}$.

b) Posons (P_n) : $\forall k\in\mathbb{N},\ 0\leqslant k\leqslant n\Rightarrow 0\leqslant u_k\leqslant 1$.

On a (P_1) qui est vraie car $0\leqslant u_0\leqslant 1$ et $0\leqslant u_1\leqslant 1$.

Soit $n\geqslant 1$ tel que (P_n) soit vraie.

Alors, en particulier, $0\leqslant u_{n-1}\leqslant 1$ et $0\leqslant u_n\leqslant 1$ donc $0\leqslant\frac{1}{3}u_{n-1}\leqslant\frac{1}{3}$ et $0\leqslant\frac{2}{3}u_n\leqslant\frac{2}{3}$ d'où

$0\leqslant\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}u_{n-1}\leqslant 1$ c'est à dire $0\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$. On a donc $\forall k\in\{0,\ldots,n\},\ 0\leqslant u_k\leqslant 1$ (c'est (P_n)) et $0\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$. Pour résumer $\forall k\in\{0,\ldots,n+1\},\ 0\leqslant u_k\leqslant 1$ ce qui veut dire que (P_{n+1}) est vraie.

On en déduit que pour tout $n\geqslant 1$, (P_n) est vraie.

2)

a) Puisque $\forall n\in\mathbb{N},0\leq u_n\leq 1$, on a $|u_n|\leq 1$. Puisque la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ a un rayon de convergence égal à 1, le (ii) de la propriété 2 prouve que cette série entière possède un rayon de convergence au moins égal à 1.

b) On a

$$\forall x\in]-1\,;1[,\ (x^2+2\mathrm{x}-3)S(x)=(x^2+2\mathrm{x}-3)\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^{n+2}+2\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^{n+1}-3\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$$

$$=\sum_{n=2}^{+\infty}u_{n-2}x^n+2\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n-1}x^n-3\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n \quad \text{par changement d'indices}$$

$$=\sum_{n=2}^{+\infty}u_{n-2}x^n+2\left(u_0x+\sum_{n=2}^{+\infty}u_{n-1}x^n\right)-3\left(u_0+u_1x+\sum_{n=2}^{+\infty}u_nx^n\right)$$

$$=\sum_{n=2}^{+\infty}u_{n-2}x^n+2\left(\sum_{n=2}^{+\infty}u_{n-1}x^n\right)-3\left(x+\sum_{n=2}^{+\infty}u_nx^n\right)=-3\mathrm{x}+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(u_{n-2}+2u_{n-1}-3u_n\right)x^n$$

$=-3x$ car $\forall n\geqslant 2,\ u_{n-2}+2u_{n-1}-3u_n=0$.

c) Par une décomposition en éléments simples, on a :

$$\frac{-3x}{x^2+2x-3}=\frac{-3x}{(x-1)(x+3)}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{x+3}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+\frac{x}{3}}\right)$$

$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\left(\frac{-1}{3}\right)^n\right)x^n.$$

d) D'après le 2)b), on a $\forall x\in]-1\,;1[,\ S(x)=\dfrac{-3x}{x^2+2x-3}$ (car $\forall x\in]-1\,;1[,\ x^2+2x-3\neq 0$) donc par unicité du développement en série entière d'une fonction, il vient que :

$$S(x)=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\left(\frac{-1}{3}\right)^n\right)x^n \quad\text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{3}{4}\left(1-\left(\frac{-1}{3}\right)^n\right).$$

Exercice 12

1) Pour tout nombre complexe x on a $|u_n x^n|\leqslant\dfrac{|x|^n}{n!}$ et la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|x|^n}{n!}$ converge vers $e^{|x|}$ (propriété 9). Donc la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n$ converge absolument pour tout nombre complexe x : son rayon de convergence est infini.

2) a) On a $I_0=\displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt=f(x)-f(0)=f(x)-u_0$.

b) On procède par intégration par parties :

$$I_{n+1}=\int_0^x\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\,dt=\left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\right]_0^x-\int_0^x(-n-1)\frac{(x-t)^n}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$=0-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$=0-\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}+I_n=I_n-u_{n+1}x^{n+1}$$

c) Pour $n=0$, cette relation n'est rien d'autre que la relation établie au 2)a.
Supposons $n\geqslant 1$.
On a $\forall k\in\mathbb{N},\ I_{k+1}-I_k=-u_{k+1}x^{k+1}$
En additionnant ces égalités pour k allant de 0 à $n-1$ on obtient :

$$I_n-I_0=-u_1x-u_2x^2-\ldots-u_nx^n$$

d'où par le 2)a)

$$I_n-f(x)+u_0=-u_1x-u_2x^2-\ldots-u_nx^n$$

c'est à dire

$$I_n=f(x)-u_0-\ldots-u_nx^n=f(x)-\sum_{k=0}^{n}u_kx^k.$$

3) La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ converge vers e^x (Théorème 2) donc son terme général tend vers 0, c'est à dire que

$\forall x\in\mathbb{C},\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0.$

4) a) On considère un réel x fixé.

Si x=0, on a $I_n=0$ et l'inégalité à démontrer est évidente.

Si $x\neq 0$, on fait le changement de variables $t=x(1-u)$. On a donc

$$I_n=\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt=\int_1^0 x^n\frac{u^n}{n!}f^{(n+1)}(x(1-u)).(-x)\,du=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x(1-u))\,du$$

donc $|I_n|=\dfrac{|x|^{n+1}}{n!}\left|\displaystyle\int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x(1-u))\,du\right|\leqslant\dfrac{|x|^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1 u^n\left|f^{(n+1)}(x(1-u))\right|du\leqslant\dfrac{|x|^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1 u^n\,du$

car $\left|f^{(n+1)}(x(1-u))\right|\leqslant 1$.

On en déduit $|I_n|\leqslant\dfrac{|x|^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1 u^n\,du=\dfrac{|x|^{n+1}}{n!}.\dfrac{1}{(n+1)}=\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

b) On déduit du 3) et du 4)a) que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0.$ On déduit alors du 2)c) que

$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}u_k x^k=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}u_k x^k$: f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 13

1) On prouve par récurrence sur $n\geqslant 1$ que f est n fois dérivable .

La propriété est vraie au rang n=1 par hypothèse.

Si f est n fois dérivable, alors la relation $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=2f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ montre que f' est n fois dérivable donc f est n+1 fois dérivable , ce qui montre la propriété au rang n+1.

2)

a) On a par la relation (R) avec x =0, $f'(0)=2f(0)=2$. En dérivant la relation (R), on a $\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)=f'\left(\dfrac{x}{2}\right)$ donc $f''(0)=f'(0)=2.$

b) Posons (P_n) la propriété $\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n)}(x)=\dfrac{f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{2^{\frac{n^2-3n}{2}}}$.

Pour n =0, cette propriété se ramène à l'identité tautologique $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f(x).$

Soit n tel que (P_n) soit vraie.

On a alors, par dérivation $\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{2^{\frac{n^2-3n}{2}}}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{2^n}f'\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{2^{\frac{n^2-3n}{2}}}$.

Par la relation (R), on a $f'\left(\dfrac{x}{2^n}\right)=2f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$ d'où l'on déduit :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^{\frac{n^2-3n}{2}}}\right)=\frac{\frac{1}{2^n}2f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^{\frac{n^2-3n}{2}}}=\frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^{\frac{n^2-3n+2n-2}{2}}}=\frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^{\frac{n^2-n-2}{2}}}=\frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^{\frac{(n+1)^2-3(n+1)}{2}}},$$

ce qui montre que (P_{n+1}) est vraie.

On en déduit donc par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n)}(x)=\dfrac{f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{2^{\frac{n^2-3n}{2}}}$

c) En posant x=0 dans la question précédente, on obtient $\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(n)}(0)=\dfrac{f(0)}{2^{\frac{n^2-3n}{2}}}=\dfrac{1}{2^{\frac{n^2-3n}{2}}}$.

3) La question 2) montre que si une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ vérifie la relation (R), alors elle est égale à sa série de Mac-Laurin c'est à dire à $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. L'objet de cette question est de prouver une réciproque à cela.

On a $\forall n,\ u_n\neq 0$ et $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\dfrac{n!\,2^{\frac{n^2-3n}{2}}}{(n+1)!\,2^{\frac{(n+1)^2-3(n+1)}{2}}}=\dfrac{1}{(n+1)2^{n-1}}\to 0$ si $n\to+\infty$ donc la propriété 1 montre que $R=+\infty$.

On a $S(0)=u_0=1$ et

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n$$

$$2S\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{2^{n-1}}x^n \quad .$$

La fonction $x\to S(x)$ vérifie la relation (R) si et seulement si $(n+1)u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2^{n-1}}$ c'est à dire si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{(n+1)2^{n-1}}$, ce que l'on a prouvé ci-dessus.

4) a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions dérivables.

On a $g(0)=f(0)-S(0)=1-u_0=0$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=f'(x)-S'(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)-2S\left(\frac{x}{2}\right)=2g\left(\frac{x}{2}\right).$$

Cette relation montre aussi que g' est continue.

b) On a $\forall x\in\mathbb{R},\ 4\int_0^{\frac{x}{2}} g(t)\,dt=4\int_0^x g\left(\frac{s}{2}\right)\frac{1}{2}.ds=2\int_0^x g\left(\frac{s}{2}\right)ds$

$=\int_0^x g'(s)\,ds$ en utilisant la relation (R_0) ,

$=g(x)-g(0)=g(x)$.

5) a) On a $\forall x\geq 0,\ |g(x)|=4\left|\int_0^{\frac{x}{2}} g(t)\,dt\right|\leqslant 4\int_0^{\frac{x}{2}}|g(t)|\,dt\leqslant 4\int_0^x |g(t)|\,dt$ car $x\geqslant 0$.

b)

(i) La fonction g est continue, donc la fonction $|g|$ aussi par composée de fonctions continues, donc la fonction $x\to\int_0^x |g(t)|\,dt$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$. Par produit de fonctions dérivables, la fonction h l'est aussi.

(ii) On a

$$\forall x \geqslant 0,\ h'(x) = -4e^{-4x}\int_0^x |g(t)|\,dt + e^{-4x}|g(x)| = e^{-4x}\left(|g(x)| - 4\int_0^x |g(t)|\,dt\right)$$

Par le 4)a), la parenthèse est négative, donc $\forall x \geqslant 0,\ h'(x) \leqslant 0$: h est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

(iii) La fonction h est positive sur $[0\,;+\infty[$, décroissante et nulle en 0 : elle est donc constante égale à 0 sur $[0\,;+\infty[$.

c) $\forall x \leqslant 0,\ |g(x)| = 4\left|\int_0^{\frac{x}{2}} g(t)\,dt\right| \leqslant 4\int_{\frac{x}{2}}^0 |g(t)|\,dt \leqslant 4\int_x^0 |g(t)|\,dt$ car $x \leqslant 0$.

d)

(i) La fonction g est continue, donc la fonction $|g|$ aussi par composée de fonctions continues, donc la fonction $x \to \int_x^0 |g(t)|\,dt$ est dérivable sur $[-\infty\,;0[$ de dérivée $-|g(x)|$. Par produit de fonctions dérivables, la fonction h l'est aussi.

(ii) On a , par dérivation d'un produit, en remarquant que la dérivée de la fonction $x \to \int_x^0 |g(t)|\,dt$ est cette fois $-|g(x)|$:

$$\forall x \leqslant 0,\ h'(x) = 4e^{4x}\int_x^0 |g(t)|\,dt - e^{4x}|g(x)| = e^{4x}\left(4\int_x^0 |g(t)|\,dt - |g(x)|\right)$$

Par le 4)a), on a $\forall x \leqslant 0,\ |g(x)| \leqslant 4\int_x^0 |g(t)|\,dt$ la parenthèse ci-dessus est positive, donc $\forall x \leqslant 0,\ h'(x) \geqslant 0$: h est croissante sur . $]-\infty\,;0]$

(iii) La fonction h est positive sur , $]-\infty\,;0]$ croissante et nulle en 0 : elle est donc constante égale à 0 sur $]-\infty\,;0]$.

On en déduit que g est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = S(x)$.

La conclusion est que la fonction $f : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!\,2^{\frac{n^2-3n}{2}}}$ est la seule à vérifier la relation

(R) $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$.

6)

a) Sur l'intervalle $\left[\frac{-1}{3}\,;\frac{1}{3}\right]$, la fonction $t \to |g(t)|$ est continue, donc par le Théorème 3 du chapitre sur les fonctions élémentaires, il existe $t_0 \in \left[\frac{-1}{3}\,;\frac{1}{3}\right]$, tel que

$\forall t \in \left[\frac{-1}{3}\,;\frac{1}{3}\right],\ |g(t)| \leqslant |g(t_0)|$.

On a deux cas :

(i) $t_0 \geqslant 0$.

On a alors par le 4)b) : $g(t_0) = 4\int_0^{\frac{t_0}{2}} g(t)\,dt$ donc :

$$|g(t_0)|=4\left|\int_0^{\frac{t_0}{2}} g(t)\,dt\right|\leqslant 4\int_0^{\frac{t_0}{2}} |g(t)|\,dt\leqslant 4\int_0^{\frac{t_0}{2}} |g(t_0)|\,dt=2t_0|g(t_0)|$$

c'est à dire

$|g(t_0)|\leqslant 2t_0|g(t_0)|$.

On a $|g(t_0)|=0$, sinon, en divisant l'inégalité ci-dessus par $|g(t_0)|>0$ on aurait $1\leqslant 2t_0$, c'est à dire $t_0\geqslant\frac{1}{2}$ ce qui contredit $t_0\in\left[\frac{-1}{3};\frac{1}{3}\right]$.

(ii) $t_0\leqslant 0$.

On a toujours $g(t_0)=4\int_0^{\frac{t_0}{2}} g(t)\,dt$ donc :

$$|g(t_0)|=4\left|\int_0^{\frac{t_0}{2}} g(t)\,dt\right|\leqslant 4\int_{\frac{t_0}{2}}^{0} |g(t)|\,dt\leqslant 4\int_{\frac{t_0}{2}}^{0} |g(t_0)|\,dt=-2t_0|g(t_0)|$$

c'est à dire

$|g(t_0)|\leqslant -2t_0|g(t_0)|$.

On a $|g(t_0)|=0$, sinon, en divisant l'inégalité ci-dessus par $|g(t_0)|$ on aurait $1\leqslant -2t_0$, c'est à dire $t_0\leqslant\frac{-1}{2}$ ce qui contredit $t_0\in\left[\frac{-1}{3};\frac{1}{3}\right]$.

Dans tous les cas, $|g(t_0)|=0$, donc $\forall x\in\left[\frac{-1}{3};\frac{1}{3}\right]$, $g(x)=0$.

b) On vient de prouver la propriété pour $n=0$.

Supposons que n soit un entier naturel tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\left[\frac{-2^n}{3};\frac{2^n}{3}\right]$, $g(x)=0$. Alors, si $x\in\left[\frac{-2^{n+1}}{3};\frac{2^{n+1}}{3}\right]$, alors $g(x)=4\int_0^{\frac{x}{2}} g(t)\,dt=0$ car puisque 0 et $\frac{x}{2}$ appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{-2^n}{3};\frac{2^n}{3}\right]$, la fonction g est nulle entre les bornes de l'intégrale, donc cette dernière est nulle, c'est à dire que $g(x)=0$. Cela prouve la propriété au rang $n+1$.

Puisque tout réel est dans un intervalle de la forme $\left[\frac{-2^n}{3};\frac{2^n}{3}\right]$, pour n assez grand, cela prouve que g est identiquement nulle.

Exercice 14

1) D'après la propriété 6, la fonction f est continue en 0, donc il existe un réel $\alpha\in]0;R[$ tel que $\forall z\in\mathbb{C}$, $|z|<\alpha\Rightarrow|f(z)-f(0)|<|f(0)|$ puisque $f(0)\neq 0$.

Par inégalité triangulaire, on a

$|f(0)|\leqslant|f(z)-f(0)|+|f(z)|$

d'où pour $|z|<\alpha$, :

$|f(z)|\geqslant|f(0)|-|f(z)-f(0)|>0$

d'où

$f(z)\neq 0$.

2) Pour tout nombre complexe z assez proche de 0 on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n . \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = 1$$

c'est à dire, par la propriété 4 $\sum_{n=0}^{+\infty} [a*b]_n x^n = 1$ d'où, par unicité du développement en série entière $a*b=(1;0;0;\ldots)$.

En considérant le terme d'indice n=0, on a $a_0 b_0 = 1$ c'est à dire $f(0).b_0 = 1$ d'où $b_0 = \frac{1}{f(0)}$.

En considérant un terme d'indice $n \geqslant 1$, il vient $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$ d'où $a_0 b_n + \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = 0$, c'est à dire $f(0) b_n + \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = 0$ d'où $b_n = \frac{-1}{f(0)} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$.

3)

a) On obtient $R=2$, $a_0=3$ et $\forall n \geqslant 1,\ a_n = \frac{1}{2^n}$. En reconnaissant une série géométrique, il vient que $f(z) = 2 + \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{3-z}{1-\frac{z}{2}}$ d'où $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \Rightarrow f(z) \neq 0$.

b) On a $u_0 = \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{3}$ et $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{-1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} u_{n-k}$. On a ainsi $u_1 = \frac{-1}{3} . \frac{1}{2} u_0 = \frac{-1}{18}$,

$u_2 = \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} u_0\right) = \frac{-1}{54}$ et $u_3 = \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{2} u_2 + \frac{1}{4} u_1 + \frac{1}{8} u_0\right) = \frac{-1}{162}$.

c) On a $g(z) = \frac{1-\frac{z}{2}}{3-z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} . \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} z^n$.

d) Par le 2), on a $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d'où, par le développement trouvé ci-dessus :

$u_0 = \frac{1}{3}$ et $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{-1}{6 \times 3^n}$.

4) Puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n.}$ est non nul, il existe un réel $t > 0$ tel que la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{t^n}$ converge. Cela implique que la suite $\left(\frac{a_n}{t^n}\right)$ converge vers 0 donc est bornée : $\exists M > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant M t^n$.

5) On définit pour tout entier naturel n la propriété

$$(P_n)\ :\ \forall k \leqslant n,\ |u_k| \leqslant \frac{1}{|f(0)|}\left(1 + \frac{M}{|f(0)|}\right)^k t^{k.}$$

(P_0) est vraie car $|u_0| = \frac{1}{|f(0)|} = \frac{1}{|f(0)|}\left(1 + \frac{M}{|f(0)|}\right)^0 t^0$

Supposons que n soit tel que (P_n) est vraie. Alors :

$$|u_{n+1}|=\frac{1}{|f(0)|}\left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k u_{n+1-k}\right|\leqslant\frac{1}{|f(0)|}\sum_{k=1}^{n+1}|a_k||u_{n+1-k}|$$

$$\leqslant\frac{1}{|f(0)|^2}\sum_{k=1}^{n+1} M t^k\left(1+\frac{M}{|f(0)|}\right)^{n+1-k} t^{n+1-k}\leqslant\frac{M\left(1+\frac{M}{|f(0)|}\right)^{n+1} t^{n+1}}{|f(0)|^2}\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1}{1+\frac{M}{|f(0)|}}\right)^k,$$

en utilisant la propriété (P_n) et la majoration $\forall k\in\mathbb{N},\ |a_k|\leqslant M t^k$.
On a donc

$$|u_{n+1}|\leqslant\frac{M\left(1+\frac{M}{|f(0)|}\right)^{n+1} t^{n+1}}{|f(0)|^2}\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1}{1+\frac{M}{|f(0)|}}\right)^k$$

$$\leqslant\frac{M\left(1+\frac{M}{|f(0)|}\right)^{n+1} t^{n+1}}{|f(0)|^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{M}{|f(0)|}}\right)^k$$

la dernière série étant convergente vu que $0\leqslant\frac{1}{1+\frac{M}{|f(0)|}}<1$.
La formule de sommation d'une série géométrique donne alors

$$|u_{n+1}|\leqslant\frac{M\left(1+\frac{M}{|f(0)|}\right)^{n+1} t^{n+1}}{|f(0)|^2}\frac{\frac{1}{1+\frac{M}{|f(0)|}}}{1-\frac{1}{1+\frac{M}{|f(0)|}}}=\frac{1}{|f(0)|}.\left(1+\frac{M}{|f(0)|}\right)^{n+1} t^{n+1}$$

ce qui prouve (P_{n+1}) .

6) Puisque $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leqslant\frac{1}{|f(0)|}\left(1+\frac{M}{|f(0)|}\right)^n t^n$ et que la série entière $z\to\sum_{n\geqslant 0}\left(1+\frac{M}{|f(0)|}\right)^n t^n z^n$ est de rayon de convergence $R=\left(t+t\frac{M}{|f(0)|}\right)^{-1}$, on en déduit (propriété 2)(ii)) que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ possède un rayon de convergence $\rho\geqslant R>0$.

7) Les deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. ont un rayon de convergence non nul , donc par la propriété 4, on a $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n\right) f(z)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}[u*a]_n z^n$ pour tout nombre complexe z de module assez petit.

On remarque que $[u*a]_0=u_0 a_0=u_0 f(0)=1$ et que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$[u*a]_n=u_n f(0)+\sum_{k=1}^{n} a_k u_{n-k}=0$ par la relation de récurrence qui définit la suite u.

On a donc, toujours pour tout nombre complexe z de module assez petit $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n\right) f(z)=1$ donc

$g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$. La fonction $\frac{1}{f(z)}$ est développable en série entière.

8) Si u et v sont deux fonctions de la variable $z\in\mathbb{C}$ développables en série entière avec $v(0)\neq 0$, alors, par ce qui précède, la fonction $\frac{1}{v(z)}$ l'est aussi. On déduit de la propriété 4 que $\frac{u(z)}{v(z)}$ est développable en série entière.