



**HAL**  
open science

## Analyse des effets de taille : Comparaison entre le modèle TLS (Thick Level Set) et le Critère Couplé

Jihed Zghal, Nicolas Moes, Dominique Leguillon, Claude Stolz

### ► To cite this version:

Jihed Zghal, Nicolas Moes, Dominique Leguillon, Claude Stolz. Analyse des effets de taille : Comparaison entre le modèle TLS (Thick Level Set) et le Critère Couplé. 25ème Congrès Français de Mécanique, Centrale Nantes; Université de Nantes; ENSAM Angers; Ecole Navale de Brest; Université de La Rochelle, Aug 2022, Nantes, France. hal-03764617

**HAL Id: hal-03764617**

**<https://hal.science/hal-03764617v1>**

Submitted on 30 Aug 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyse des effets de taille : Comparaison entre le modèle TLS (Thick Level Set) et le Critère Couplé

J. ZGHAL<sup>a</sup>, N. Moës<sup>b</sup>, D. Leguillon<sup>c</sup>, C. Stolz<sup>b,d</sup>

a. Laboratoire LEME-EA4416, Université Paris Nanterre, 50 rue de sèvre, 92410 ville d'Avray, France, jzghal@parisnanterre.fr

b. GeM, UMR CNRS 6183, Ecole Centrale de Nantes, 1 rue de la Noë Nantes, 44321 Nantes, France, nicolas.moes@ec-nantes.fr

c. Institut Jean Le Rond d'Alembert, Sorbonne Université, Centre National de la Recherche Scientifique, UMR 7190, 75005 Paris, France, dominique.leguillon@upmc.fr

d. IMSIA, EdF-CEA-CNRS-ENSTA Paristech UMR9219, Université Paris Saclay, 828 Boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau, France, claude.stolz@ec-nantes.fr

## Résumé :

*La prédiction de la charge critique d'une structure présentant un défaut reste à ce jour un grand challenge. Dans cette étude, nous proposons de mettre en évidence la nocivité d'une entaille aigüe en V à travers une étude comparative de la contrainte à la rupture obtenue par le modèle TLS et par le critère couplé. En effet, la nocivité de l'entaille est plus importante quand sa taille est supérieure à la longueur caractéristique du matériau. Nous avons montré que les prédictions de la contrainte à la rupture par le critère couplé sont surestimées quand la taille de l'entaille devient plus petite par rapport à la longueur caractéristique du matériau.*

## Abstract :

*The prediction of the load of a structure with a defect remains to this day a great challenge. In this study, we propose to highlight the harmfulness of a sharp V-notch through a comparative study of the stress to failure obtained by the TLS model and by the coupled criterion. Indeed, the harmfulness of the notch is more important when its size is higher than the characteristic length of the material. Moreover, we showed that the prediction of the stress to failure by the coupled criterion is overestimated when the size of the notch becomes smaller than the characteristic length of the material.*

**Mots clefs : Endommagement, Thick-Level-Set, Critère couplé, Les effets de taille.**

## 1 Introduction

Prédire la charge maximale qu'une structure avec un comportement (quasi-)fragile peut supporter est une problématique scientifique importante. Plusieurs approches existent pour résoudre

ce problème, la plus naturelle consiste à rechercher un critère. Les critères de résistance et de ténacité sont bien adaptés à des échantillons simples, sans défaut ou avec une fissure pré-existante. Lorsque des défauts (entailles, cavités, ...) sont présents, le critère peut être plus complexe à mettre en place.

Dans le cadre de ce travail, nous avons adopté deux approches. La première est une application du critère couplé qui a été introduit par [8]. Ce dernier pourrait être qualifié de semi-analytique puisqu'il part d'une considération analytique finalisée par un traitement numérique.

La seconde approche est purement numérique. Elle nous permet de déterminer la contrainte à la rupture en sollicitant la structure à une chargement monotone croissant [13]. La contrainte de rupture est définie comme la charge maximale au-dessus de laquelle aucune solution quasi-statique ne peut être trouvée (et la structure entre en dynamique). Puisque le matériaux étudié a un comportement quasi-fragile, un modèle d'endommagement est adopté. Il est bien connu qu'une régularisation est nécessaire lorsqu'on aborde la rupture avec un tel comportement, sinon la rupture peut être atteinte pour une charge infiniment petite. Pour cette raison, nous considérons ici l'approche TLS (Thick Level Set) pour la modélisation de l'endommagement. Une longueur caractéristique est explicitement introduite.

Dans ce travail, la charge à la rupture est déterminée en utilisant les deux approches. Ensuite, l'influence de l'effet de taille est étudiée. Plus précisément, nous analysons le rôle joué par le rapport de longueur (taille du défaut sur la longueur caractéristique) sur la charge à la rupture prédite.

## 2 Modèle Thick Level Set (TLS)

Nous proposons dans un premier temps de décrire le modèle d'endommagement local qui sera par la suite transformé en un modèle non local par l'approche TLS.

### 2.1 Modèle d'endommagement local

Considérons l'énergie libre  $\varphi$  décrite ci-dessous. L'endommagement est décrit par la variable scalaire  $d$ , la déformation par  $\varepsilon$  et le tenseur de Hooke  $\mathbf{E}$  :

$$\varphi(\varepsilon, d) = \frac{1}{2}(1-d)\varepsilon : \mathbf{E} : \varepsilon \quad (1)$$

L'équation d'état est donnée par :

$$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = (1-d)\mathbf{E} : \varepsilon, \quad Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial d} = \frac{1}{2}\varepsilon : \mathbf{E} : \varepsilon \quad (2)$$

L'endommagement est décrit par le critère suivant :

$$f(Y, d) = Y - Y_c h(d) \leq 0 \quad (3)$$

La fonction d'érouissage  $h(d)$  est choisie tel que  $h(0) = 1$  et  $h'(d) \geq 0$  afin d'éviter le phénomène du «snap-back» au niveau du matériau sous tension uni-axiale.  $Y_c$  représente le taux de restitution d'énergie critique à partir duquel l'endommagement est initié. L'évolution de l'endommagement est ainsi décrite par :

$$\dot{d} \geq 0, \quad f \leq 0, \quad f\dot{d} = 0 \quad (4)$$

En considérant ce modèle local, la courbe contrainte déformation, dans le cas d'un chargement monotone 1D, est décrite par la figure 1 et sur laquelle est également représentée la trajectoire de déchargement élastique.

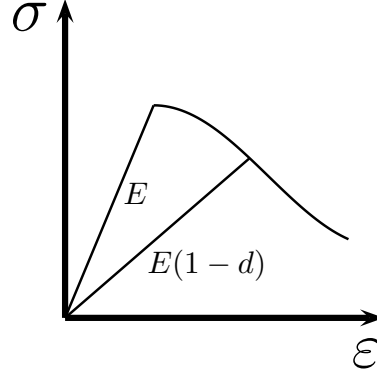


FIGURE 1 – Courbe contrainte déformation sous chargement monotone obtenue avec un modèle d'élasticité endommageable

## 2.2 Le modèle Thick Level-Set

Le modèle local décrit précédemment, décrit l'évolution de l'endommagement à un point donnée uniquement en fonction de l'histoire de déformations. En effet, il est bien connue que ce modèle est mal posé et induit une localisation [1]. Pour y remédier, une modification est apportée au modèle local. Pour ce faire une contrainte sur l'évolution de l'endommagement est imposée [10, 2, 11]. L'idée est de contraindre la norme du gradient d'endommagement à travers l'opérateur Hamilton-Jacobi :

$$H(d, \nabla d) = \|\nabla d\| - \frac{g(d)}{l_c} \leq 0 \quad (5)$$

où  $l_c$  est la longueur caractéristique et  $g(d)$  est une fonction adimensionnelle bornée positive et concave. En forçant la condition de normalisation sur  $g(d)$  (équation (6)), on obtient une signification claire de la longueur caractéristique comme étant la plus petite distance entre le point où l'endommagement est nulle est celui où il vaut 1.

$$\int_0^1 \frac{1}{g(d)} dd = 1 \quad (6)$$

L'équation (5) sépare ainsi le domaine en deux zones selon que la contrainte est active ou non.

$$\Omega^- = \{\mathbf{x} \in \Omega : H < 0\}, \quad \Omega^+ = \{\mathbf{x} \in \Omega : H = 0\} \quad (7)$$

Au-delà de  $\Omega^-$ , l'approche TLS utilise les équations (4) d'évolution des endommagements locaux. Au niveau de  $\Omega^+$ , la contrainte  $H = 0$  est active et l'inégalité ci-dessous doit être respectée :

$$\dot{H} \leq 0 \quad (8)$$

L'évolution locale de l'endommagement n'est plus appropriée puisqu'elle peut contrevenir à ce qui précède. Dans l'approche TLS, la condition de l'équation (8) est toujours considérée comme

une égalité, ce qui restreint spatialement le taux d'endommagement. En contraignant  $\dot{H} = 0$ , lorsque  $H = 0$ , nous obtenons [13] :

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \frac{\nabla d \cdot \nabla \dot{d}}{\|\nabla d\|} - \frac{g'(d)}{l_c} \dot{d} \\ &= l_c \nabla d \cdot \left( \frac{\nabla \dot{d}}{g(d)} - g'(d) \dot{d} \frac{\nabla d}{g(d)^2} \right) = l_c \nabla d \cdot \nabla \left( \frac{\dot{d}}{g(d)} \right) = 0\end{aligned}\quad (9)$$

La condition ci-dessus définit un ensemble admissible  $\mathcal{A}^+$  pour l'évolution de l'endommagement :

$$\frac{\dot{d}}{g(d)} \in \mathcal{A}^+ = \{a \in L^\infty(\Omega^+) : \nabla d \cdot \nabla a = 0 \text{ over } \Omega^+\} \quad (10)$$

L'équation (9) montre que  $\dot{d}/g(d)$  est uniforme le long du gradient de  $d$ . L'espace  $\mathcal{A}^+$  est ensuite utilisé pour définir les opérateurs de projection de  $f$  vers  $\bar{f}$  et de  $\dot{d}$  vers  $\bar{\dot{d}}$  :

$$\bar{f} \in \mathcal{A}^+, \quad \int_{\Omega^+} \bar{f} g(d) a \, d\Omega = \int_{\Omega^+} f g(d) a \, d\Omega, \quad \forall a \in \mathcal{A}^+ \quad (11)$$

$$\bar{\dot{d}} \in \mathcal{A}^+, \quad \int_{\Omega^+} \bar{\dot{d}} a \, d\Omega = \int_{\Omega^+} \dot{d} a \, d\Omega, \quad \forall a \in \mathcal{A}^+ \quad (12)$$

Finalement, l'évolution de l'endommagement TLS sur  $\Omega^+$  est donnée par [2] :

$$\bar{\dot{d}} \geq 0, \quad \bar{f} \leq 0, \quad \bar{f} \bar{\dot{d}} = 0 \quad (13)$$

### 3 Le critère couplé

Dans cette section, nous rappelons les principaux résultats pour le critère couplé proposé dans [8, 9] pour prédire la rupture au niveau des entailles. Nous considérons ainsi une entaille aiguë en V avec un angle d'ouverture  $\omega$  ( $0 \leq \omega \leq \pi$ ) sous déformation plane en élasticité linéaire (figure 2). Le matériau est caractérisé par un module d'Young  $E$  (MPa) et un coefficient de Poisson  $\nu$ . La rupture en traction uni-axiale d'une barre homogène définit la résistance à la traction  $\sigma_c$  (MPa) et la propagation d'une fissure définit la ténacité  $G_c$  (MPa m). Seul le cas de chargement symétrique est considéré dans cet article. Les développements de William [12] des champs de déplacement et de contrainte  $\mathbf{U}$  et  $\sigma$  au voisinage d'une entaille en V aiguë sont donnés par :

$$\begin{cases} \mathbf{U}(x_1, x_2) = \mathbf{c} + k_{CC} r^\lambda \mathbf{u}(\theta) + \dots \\ \sigma(x_1, x_2) = k_{CC} r^{\lambda-1} \mathbf{s}(\theta) + \dots \end{cases} \quad (14)$$

où  $\mathbf{c}$  est une constante non pertinente (mouvement rigide) et  $k_{CC}$  est le facteur d'intensité de contrainte généralisé (GSIF) avec la dimension  $(\text{MPa m}^{1-\lambda})$ . Pour les faces sans contraintes de l'entaille, l'exposant  $\lambda$  dépend de l'ouverture  $\omega$ , en tant que solution d'un problème de valeur propre ;  $\mathbf{u}$  est le mode propre associé et  $\mathbf{s}$  dérive de  $\mathbf{U}$  par la loi de Hooke. La dépendance de  $\lambda$  par rapport à l'angle d'ouverture  $\omega$  est donnée par [13].

Lorsque  $\omega = 0$ ,  $\lambda = 1/2$ , l'entaille est une fissure et nous désignons son facteur d'intensité de contrainte par  $K_I$ . La valeur critique  $K_c$  est la valeur de  $K_I$  pour laquelle la fissure commence à se propager en mode I pur. Le facteur d'intensité de contrainte critique  $K_c$  est relié à la ténacité  $G_c$  par la relation d'Irwin ([7]) :

$$K_c = \sqrt{\frac{EG_c}{(1-\nu^2)}} \quad (15)$$

alors que la longueur caractéristique issue d'une analyse dimensionnelle est :

$$l_{ch} = \frac{EG_c}{\sigma_c^2} \quad (16)$$

Dans le cas d'une entaille aigüe, le facteur de concentration de contrainte généralisé critique (GSIF)  $k_{CC}$  donné par le critère couplé est exprimé par [8, 13] :

$$k_{CC}(\omega) = \left( \frac{EG_c}{A^*(\omega)(1-\nu^2)} \right)^{1-\lambda} \sigma_c^{2\lambda-1} \quad (17)$$

Nous notons que la valeur critique dépend de l'angle d'ouverture  $\omega$ . Une fois le GSIF calculé, la contrainte à la rupture est donnée par :

$$\sigma_{CC} = \frac{k_{CC}}{\kappa a^{1-\lambda}} \quad (18)$$

Les détails de calcul des coefficients  $A^*$ ,  $\kappa$  et  $\lambda$  peuvent être trouvés dans [13].

## 4 Comparaison entre le critère couplé et le modèle TLS

Dans cette partie, nous allons comparer la contrainte à la rupture obtenue par le modèle TLS et celle obtenue par le critère couplé. La contrainte à la rupture TLS correspond à la plus grande charge atteinte durant la simulation, quand à celle du critère couplé est obtenue par l'équation (18). Le matériau utilisé dans cette étude est le PMMA. Les paramètres matériaux sont résumés dans le tableau 1.

E [MPa]	$\nu$	$\sigma_c$ [MPa]	$G_c$ [MPa.m]	$l_{ch}$ [m]
3500	0.3	70	$3.5 \times 10^{-4}$	$2.5 \times 10^{-4}$

TABLE 1 – Propriétés mécanique du PMMA[13]

A travers cette comparaison, nous allons étudier l'influence de la taille de l'entaille aigüe (définie par un angle d'ouverture  $\omega$  et une profondeur  $a$  comme illustré dans figure 2) sur la contrainte à la rupture. Toutes les valeurs de résistance obtenues par le critère couplé ou TLS sont normalisées par la résistance d'une structure saine (sans défauts)  $\sigma_c^{tr}$  définie, sous l'hypothèse des contraintes planes par :

$$\sigma_c^{tr} = \frac{\sigma_c}{\sqrt{1-\nu^2}} \quad (19)$$

On définit aussi la profondeur caractéristique de l'entaille qui correspond au ratio entre la taille de l'entaille et la longueur caractéristique  $\eta = a/l_{ch}$ . Nous caractériserons la taille de l'entaille à travers ce ratio.

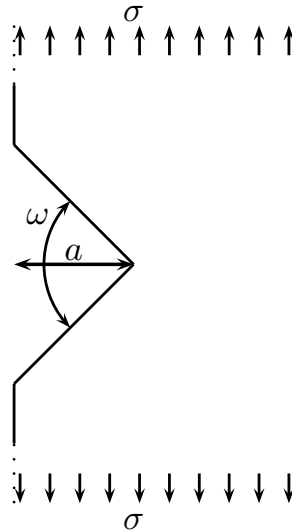


FIGURE 2 – Entaille aigüe d'ouverture  $\omega$  et profondeur  $a$ .

On analyse dans un premier temps l'évolution du rapport entre la résistance apparente issue de l'approche TLS et celle du critère couplé ( $\sigma_{TLS}/\sigma_{CC}$ ) en fonction de la profondeur d'entaille relative  $\eta$  pour des angles  $\omega = 30, 60, 90, 120$  et  $150$  degrés est présenté dans la figure 3.

La comparaison montre que plus le rapport  $\eta = a/l_{ch}$  est grand, plus les prédictions de TLS et de CC sont proches. D'autre part, lorsque la profondeur relative de l'entaille  $\eta$  devient plus petite, la résistance apparente prédite avec le CC surestime celles obtenues par TLS (Figure 3). Ce résultat est attendu puisque le CC est une approche asymptotique qui n'est valable que pour de grandes profondeurs d'entailles par rapport à la longueur caractéristique du matériau.

Selon la Figure 4, lorsque la profondeur relative de l'entaille est faible, la résistance apparente TLS ( $\sigma_{TLS}/\sigma_c^{tr}$ ) se rapproche de plus en plus de la contrainte critique de la structure non entaillée. Cela signifie que lorsque la profondeur de l'entaille en V aiguë est faible par rapport à la longueur caractéristique du matériau, elle n'altère plus la résistance structurelle. Au contraire, lorsque la profondeur relative de l'entaille devient importante (c'est-à-dire que la profondeur de l'entaille est plus grande que la longueur caractéristique du matériau), la résistance apparente devient plus faible par rapport à la résistance apparente du matériau sain.

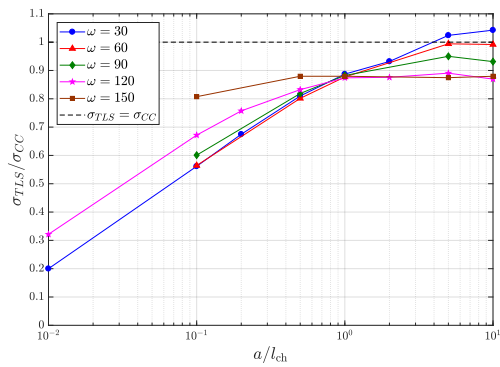


FIGURE 3 – Rapport des contraintes apparentes ( $\sigma_{TLS}/\sigma_{CC}$ ) pour une entaille en V aiguë en utilisant l’approche TLS et prédite par le critère couplé par rapport à la profondeur relative de l’entaille  $\eta$ .

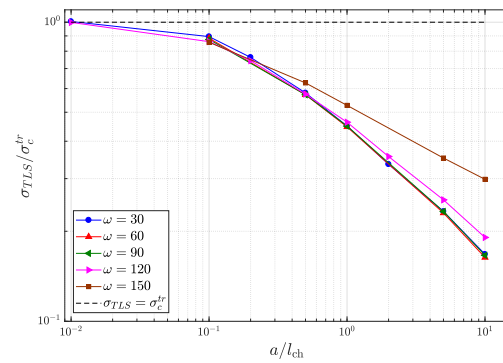


FIGURE 4 – Rapport entre la résistance apparente TLS d’une entaille en V aiguë et la contrainte critique sans entaille en fonction de la profondeur relative de l’entaille.

## 5 Conclusions

A travers cette étude nous avons pu démontrer l’influence de la taille d’une entaille sur la résistance d’une structure. En effet, comparer la taille de l’entaille en V par rapport à la longueur caractéristique du matériau peut être un bon critère pour prédire sa nocivité. L’étude comparative entre le modèle TLS et le critère couplé a pu montrer quand à elle les limites de ce dernier quand la taille de l’entaille devient plus faible que la longueur caractéristique du matériau. Des observations similaires pour des défauts de type entaille émoussée et cavité ont été constaté dans [13].

## Références

- [1] Z. Bazant, T. Belytschko, and T. Chang. Continuum theory for strain-softening. *Journal of Engineering Mechanics - ASCE*, 110(12) :1666–1692, 1 1984.
- [2] P.-E. Bernard, N. Moës, and N. Chevaugeon. Damage growth modeling using the Thick Level Set (TLS) approach : Efficient discretization for quasi-static loadings. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 233-236 :11–27, aug 2012.
- [3] M. L. Dunn, W. Suwito, S. Cunningham, and C. W. May. Fracture initiation at sharp notches under mode I, mode II, and mild mixed mode loading. *International Journal of Fracture*, 84(4) :367–381, 1997.
- [4] A.-P. Gómez, N. Moës, and C. Stolz. Comparison between thick level set (TLS) and cohesive zone models. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 2(1) :18, 2015.
- [5] F. Gómez and M. Elices. A fracture criterion for blunted V-notched samples. *International Journal of Fracture*, 127(3) :239–264, 2004.
- [6] F. J. Gómez and M. Elices. A fracture criterion for sharp V-notched samples. *International Journal of Fracture*, 123(3) :163–175, 2003.
- [7] G. R. Irwin. Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control. *Engineering Fracture Mechanics*, 1(2) :241 – 257, 1968.



- [8] D. Leguillon. Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 21(1) :61–72, jan 2002.
- [9] D. Leguillon and Z. Yosibash. Crack onset at a v-notch. Influence of the notch tip radius. *International Journal of Fracture*, 122(1/2) :1–21, jul 2003.
- [10] N. Moës, C. Stolz, P.-E. Bernard, and N. Chevaugeon. A level set based model for damage growth : the thick level set approach. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 86 :358–380, 2011.
- [11] N. Moës, C. Stolz, and N. Chevaugeon. Coupling local and non-local damage evolution with The Thick Level Set model. *Advanced Modelling and Simulation in Engineering Sciences*, 2(16) :21, 2014.
- [12] M. Williams. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *Journal of applied mechanics transactions of the ASME*, 19 :526–528, 1952.
- [13] J. Zghal, K. Moreau, N. Moës, D. Leguillon, and C. Stolz. Analysis of the failure at notches and cavities in quasi-brittle media using the Thick Level Set damage model and comparison with the coupled criterion. *International Journal of Fracture*, 211(1-2) :253–280, 2018.