



HAL
open science

Notes sur l'étude des fonctions polynômiales de troisième degré

Josoa Michel Tovoherly, André Totohasina

► **To cite this version:**

Josoa Michel Tovoherly, André Totohasina. Notes sur l'étude des fonctions polynômiales de troisième degré. 2022. <hal-03763827v2>

HAL Id: hal-03763827

<https://hal.science/hal-03763827v2>

Preprint submitted on 20 Sep 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Notes sur l'étude des fonctions polynômiales de troisième degré

Josoa Michel TOVOHERY* et André TOTOHASINA**

* Université d'Antsiranana josoamicheltovohery@.com

**Université d'Antsiranana andre.totohasina@gmail.com

Résumé : Depuis quelques dizaines d'années, dans certains pays comme Madagascar et France, l'étude des polynômes de troisième degré est introduit en classe de seconde de Lycée par l'étude de ladite "fonction de référence" $f : x \mapsto f(x) = x^3$ et de ses diverses fonctions associées en classe de première. À ce propos, basé sur une étude mathématique du discriminant d'un polynôme cubique, cet article montre toutes les classes des polynômes de degré 3 existantes, démontre que l'étude de la fonction $f : x \mapsto f(x) = x^3$ et de ses diverses fonctions associées telle que $g : x \mapsto g(x) = k.f(x - a) + b$ ne suffit pas pour découvrir toutes les classes des cubiques existantes, et propose une approche pédagogique plus réaliste et exhaustive.

Mots clés : Polynôme de troisième degré, discriminant, classification

Abstract : In recent decades, in some countries like Madagascar and France, the study of third degree polynomials is introduced in the the 10th grade by studying the said "reference function" $f : x \mapsto f(x) = x^3$ and its various associated functions in 11th grade. In this regard, based on a mathematical study of the discriminant of a cubic polynomial function, this article shows all classes of existing degree 3 polynomials, demonstrates that the study of the function $f : x \mapsto f(x) = x^3$ and its various associated functions such as $g : x \mapsto g(x) = k.f(x - a) + b$ is not sufficient to discover all the existing classes of cubics, and proposes a more realistic and exhaustive pedagogical approach.

Keywords : Third degree polynomial, discriminant, classification

1 Introduction

Afin d'enrichir la bibliothèque d'images mentales des élèves, il est important de leur montrer toutes les courbes et toutes les classes possibles des polynômes de degré 3. Toutefois, l'étude de la fonction $f : x \mapsto f(x) = x^3$ et de ses diverses fonctions associées suffise- t- elle pour découvrir l'étude de toutes les fonctions polynômiales de degré 3 ? Pour bien répondre à cette question, nous allons voir

dans la section 2 la définition et les propriétés du discriminant d'un polynôme à coefficients réels. Ensuite, nous mettrons en évidence dans la section 3 les différentes classes des polynômes de degré 3 normés de référence. Par la suite, la section 4 expose les différentes classes des fonctions polynomiales normées de degré 3 associées à la dite fonction de référence $f : x \mapsto f(x) = x^3$, afin de démontrer qu'il existe des polynômes cubiques non associées à f . Après, une discussion sera lancée dans la section 5, afin de proposer une approche pédagogique plus efficace, plus réaliste et plus exhaustive. Enfin, nous allons terminer par une conclusion avec une recommandation pédagogique qui s'impose eu égard aux propriétés des cubiques réels.

2 Discriminant et Résultant d'un polynôme à coefficients réels

2.1 Discriminant d'un polynôme normé

Soit $P(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0$ un polynôme unitaire de degré m à coefficients réels. On sait que P admet m racines complexes en les comptant avec leurs degrés de multiplicités. On pose : x_1, x_2, \dots, x_m les racines de P dans \mathbb{C} .

Définition 1

Le discriminant de P , noté $Disc(P)$, est le nombre défini par :

$$Disc(P) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i - x_j)^2.$$

Exemple : Le discriminant d'un polynôme $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ est :

$$Disc(P) = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2.$$

Remarque 1 Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de P , alors son conjugué \bar{z} l'est aussi.

Proposition 1

Soit P un polynôme unitaire de degré m à coefficients réels possédant ses m racines dans \mathbb{C} . On note par r le nombre de racines réelles de P .

Selon le théorème de Descartes, on a :

* $Disc(P) > 0 \iff r \equiv m \pmod{4}$;

* $Disc(P) < 0 \iff r \equiv (m - 2) \pmod{4}$;

* $Disc(P) = 0 \iff P$ admet une racine réelle multiple [5, p. 102].

Preuve : En effet, le discriminant du polynôme P à m racines dans \mathbb{C} est :
 $Disc(P) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (z_i - z_j)^2$. Soient r le nombre des racines réelles de P et c le nombre de racines complexes non réelles de P .

On a : $m = r + c$.

Rappelons que $\forall z \in \mathbb{C}$, $z - \bar{z} = i.2Im(z)$, où $Im(z)$ désigne la partie imaginaire de z .

Donc on a : $signe[(z - \bar{z})^2] = -1$.

Soient $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_n, \bar{z}_n$ les racines de P dans \mathbb{C} .

Alors $signe \left[\prod_{i=1}^n (z_i - \bar{z}_i)^2 \right] = (-1)^n$.

Cependant, on a :

$$\begin{cases} (z_i - z_j)^2 > 0, & 1 \leq i < j \leq n, \\ (z_i - z_j)^2 (z_i - \bar{z}_j)^2 (\bar{z}_i - z_j)^2 (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^2 > 0, & 1 \leq i < j \leq n, \\ (z_i - z_j)^2 (z_i - \bar{z}_i)^2 > 0, & 1 \leq i < j \leq n. \end{cases} \quad [5, \text{p. } 102]$$

Donc le signe de $Disc(P)$ dépend de la parité de n : $Disc(P) > 0$ si n est paire, et $Disc(P) < 0$, si n est impaire.

Or, d'après la remarque 1, on a : $c = 2n$. Alors, il existe un réel k , tel que :

$$\begin{cases} c = 2(2k) = 4k, & \text{si } n \text{ est paire;} \\ c = 2(2k + 1) = 4k + 2, & \text{si } n \text{ est impaire.} \end{cases}$$

Donc on a :

$$\begin{cases} Disc(P) > 0 \iff m = r + 4k; \\ Disc(P) < 0 \iff m = r + 4k + 2. \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} Disc(P) > 0 \iff r = m - 4k; \\ Disc(P) < 0 \iff r = m - 4k - 2. \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \begin{cases} Disc(P) > 0 \iff r \equiv m \pmod{4}; \\ Disc(P) < 0 \iff r \equiv (m - 2) \pmod{4}. \end{cases}$$

Ensuite, d'après la définition du discriminant, il est évident que $Disc(P) = 0$ si, et seulement si, P admet au moins une racine multiple.

C'est ce qu'il fallait démontrer.

2.2 Résultant d'un polynôme

Définition 2

Soient $P = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$ et $Q = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré respectivement m et n . On définit le résultant de P et Q , noté $R(P, Q)$, par [2, p.] :

$$Res(P, Q) = \begin{vmatrix} a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_m & a_{m-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_m & \dots & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

qui est un déterminant d'ordre $(m+n) \times (m+n)$ (c'est-à-dire, une matrice dite de Sylvester) [2, p. 2].

Exemple : Soient $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$ et $Q(x) = 3x^2 - 2x + 1$. On a :

$$Res(P, Q) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

qui est un déterminant d'ordre $(3+2) \times (3+2) = 5 \times 5$. On a : $Res(P, Q) = 33$.

Théorème 1 [2, p. 9]

Soient $P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ un polynôme à coefficients réels de degré n et P' sa dérivée. On a :

$$Disc(P) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2} Res(P, P')}{a_n}$$

Deux exemples fondamentaux :

a) **Pour** $n = 2$, $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $P'(x) = 2ax + b$. On a : $\deg(P) + \deg(P') = 2 + 1 = 3$. Alors, on a un discriminant d'ordre 3×3 :

$$Res(P, P') = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix} = ab^2 + 4a^2c - 2ab^2 = -ab^2 + 4a^2c.$$

Ce qui donne : $Disc(P) = \frac{(-1)^{2(2-1)/2} \cdot Res(P, P')}{a} = \frac{-(-ab^2 + 4a^2c)}{a} = b^2 - 4ac$.

Nous trouvons ici la quantité habituellement notée Δ (delta).

b) **Pour** $n = 3$, $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ et $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

On a : $\deg(P) + \deg(P') = 3 + 2 = 5$. Alors, on a un discriminant d'ordre 5×5 :

$$Res(P, P') = \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ 3a & 2b & c & 0 & 0 \\ 0 & 3a & 2b & c & 0 \\ 0 & 0 & 3a & 2b & c \end{vmatrix} = -ab^2c^2 + 4a^2c^3 + 4ab^3d - 18a^2bcd + 27a^3d^2$$

Donc, le discriminant d'un polynôme de degré 3 est :

$$Disc(P) = \frac{(-1)^{3(3-1)/2} \cdot R(P, P')}{a} = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d + 18abcd - 27a^2d^2 \quad [6, p. 15]$$

Remarque 2 Si $P(x) = x^3 + px + q$, alors on a : $a = 1$, $b = 0$, $c = p$ et $d = q$. Ainsi, le discriminant de P est : $Disc(P) = -4ac^3 - 27a^2d^2 = -4p^3 - 27q^2$

3 Classification des polynômes de degré 3

3.1 Nombre de racines réelles d'un polynôme de degré 3

Soient $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme à coefficients réels de degré 3 et r le nombre des racines réelles de P . D'après la proposition précédente, on a les cas exhaustifs suivants :

1. Si $Disc(P) > 0$, alors on a : $r \equiv 3 \pmod{4}$, donc $r = 3$ et alors P admet 3 racines réelles distinctes : Donc $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.
2. Si $Disc(P) < 0$, alors on a : $r \equiv (3 - 2) \pmod{4}$. Donc, $r \equiv 1 \pmod{4}$. Alors, P admet une racine réelles et deux racines complexes conjuguées. Dans ce cas : $P(x) = (x - x_1)(x^2 + ax + b)$, avec $a^2 - 4b < 0$.
3. Si $Disc(P) = 0$, alors P admet au moins une racine réelle double. Donc, de deux choses l'une :
 - (a) soit deux racines réelles dont l'une est double : $P(x) = (x - x_1)^2(x - x_2)$ avec $x_1 \neq x_2$;
 - (b) soit une racine réelle triple et $P(x) = (x - x_0)^3$.

3.2 Les différentes classes des polynômes de degré 3 normés de référence

En principe, comme le montre la théorie de l'apprentissage, il s'avère plus motivant et plus facile de partir du connu supposé simple vers le plus complexe.

L'étude de l'existence des racines réelles d'un trinôme du second degré normé $P(x) = x^2 + bx + c$ est apprise en classe de seconde selon le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4c$. Graphiquement, cela se visualise dans la Figure 1 ci-dessous.

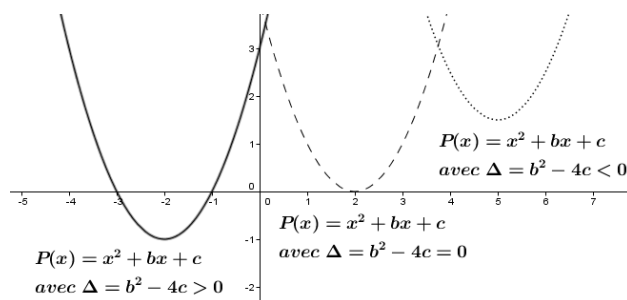


FIGURE 1 – Les classes des polynômes de second degré normés

Ainsi, il semble logique et plus pédagogique d'étudier séparément les trois classes des cubiques normées dans l'ordre suivant :

1. les polynômes cubiques normées à discriminant nul :

- (a) à une racine réelle triple : il s'agit des cubiques de type $P(x) = (x - a)^3$,
et dont la référence est $P_0 : x \mapsto x^3$
(ou $P(x) = (x - a)^3$ pour le cas général) ;

(b) à deux racines réelles dont l'une est double :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x) = (x - x_1)(x^2 + bx + c) \\ \text{avec } b^2 - 4c = 0. \end{array} \right. \quad \text{ou } P(x) = (x - x_1)(x - x_2)^2 \text{ avec } x_1 \neq x_2$$

2. Les cubiques normées à discriminant positif :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x) = (x - x_1)(x^2 + bx + c) \\ \text{avec } b^2 - 4c > 0. \end{array} \right. \quad \text{ou } P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \text{ avec } x_i \neq x_j, 1 \leq i < j \leq 3$$

3. Les cubiques normées à discriminant négatif :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x) = (x - x_1)(x^2 + bx + c) \\ \text{avec } b^2 - 4c < 0. \end{array} \right.$$

Ces quatre classes des cubiques normées sont représentables graphiquement dans la Figure 2.

La classification effectuée et la figure 2 montrent bien que ladite "fonction polynôme de référence" $P : x \mapsto P(x) = x^3$ ne peut pas représenter toutes les quatre classes des cubiques normées existantes. Elle ne représente qu'une seule classe celle des "polynômes de degré 3 à une racine réelle triple".

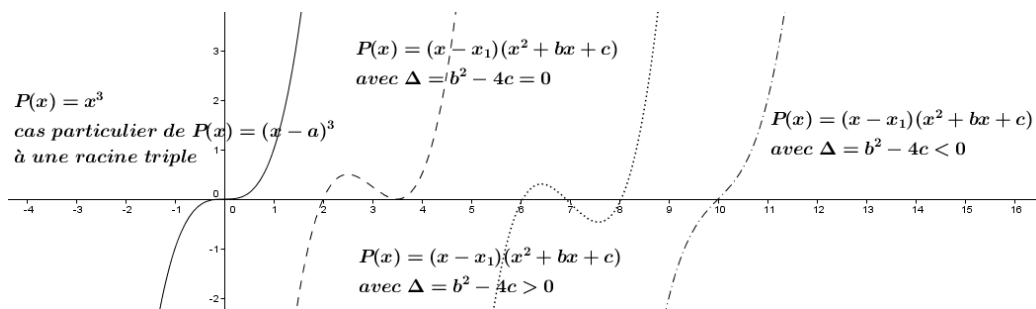


FIGURE 2 – Les quatre classes des cubiques normées

4 Classification des fonctions associées à $P : x \mapsto x^3$

Dans cette partie, nous allons voir si l'étude des fonctions associées à $P : x \mapsto P(x) = x^3$ nous permet de représenter les trois autres classes des cubiques restantes.

Définition 3 (Fonction associée)

On appelle fonction associée à $f : x \mapsto x^3$ toute fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\exists(k, a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = kf(x - a) + b$.

Remarque 3

1. Pour $k = 1$, la courbe de g s'obtient facilement par une simple translation de vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
2. Pour $k \neq 1$, on doit composer avec l'affinité de rapport k .

4.1 Translation suivant l'axe des abscisses

La translation de l'image de $P : x \mapsto x^3$ suivant l'axe des abscisses de a unité(s) est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_1(x) = P(x - a) = (x - a)^3.$$

On voit bien que g_1 appartient seulement à la classe des cubiques à une racine réelle triple.

4.2 Translation suivant l'axe des ordonnées

La translation de l'image de $P : x \mapsto x^3$ suivant l'axe des ordonnées de b unité(s) est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_2(x) = P(x) + b = x^3 + b.$$

On pose $k = \sqrt[3]{|b|}$.

Premier cas : pour $b > 0$.

$$\text{On a : } g_2(x) = x^3 + k^3 = (x+k)(x^2 - kx + k^2) = (x+k) \cdot p_1(x).$$

Le discriminant de $p_1(x) = x^2 - kx + k^2$ est $\text{Disc}(p_1) = k^2 - 4k^2 = -3k^2 < 0$.

Deuxième cas : pour $b < 0$.

$$\text{On a : } g_2(x) = x^3 - k^3 = (x-k)(x^2 + kx + k^2) = (x-k) \cdot p_2(x).$$

Le discriminant de $p_2(x) = x^2 + kx + k^2$ est $\text{Disc}(p_2) = k^2 - 4k^2 = -3k^2 < 0$.

Donc, g_2 appartient à la classe des cubiques à une racine réelle et deux racines complexes de type $P(x) = (x - x_1)(x^2 + bx + c)$, tel que $b^2 - 4c < 0$.

4.3 Translation suivant les deux axes du repère : translation oblique.

La translation de l'image de $P : x \mapsto x^3$ de a unité(s) suivant l'axe des abscisses et de b unité(s) suivant l'axe des ordonnées est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_3(x) = P(x-a) + b = (x-a)^3 + b$$

En effet, posons $k = \sqrt[3]{|b|}$.

Premier cas : pour $b > 0$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } g_3(x) &= (x-a)^3 + k^3 = (x-a+k)[(x-a)^2 - k(x-a) + k^2] \\ &= (x-a+k)[x^2 - (2a+k)x + a^2 + ka + k^2] \end{aligned}$$

Donc $g_3(x) = (x-a-k) \cdot p_3(x)$, avec $p_3(x) = x^2 - (2a+k)x + a^2 + ka + k^2$.

Le discriminant de $p_3(x) = x^2 - (2a+k)x + a^2 + ka + k^2$ est :

$$\text{Disc}(p_3) = (2a+k)^2 - 4(a^2 + ka + k^2) = -3k^2 < 0.$$

Deuxième cas : pour $b < 0$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } g_3(x) &= (x-a)^3 + k^3 = (x-a-k)[(x-a)^2 + k(x-a) + k^2] \\ &= (x-a+k)[x^2 - (2a-k)x + a^2 - ka + k^2] = (x-a-k) \cdot p_4(x) \end{aligned}$$

Ainsi : $g_3(x) = (x - a - k).p_4(x)$, tel que $p_3(x) = x^2 - (2a - k)x + a^2 - ka + k^2$.

Le discriminant de $p_4(x) = x^2 - (2a - k)x + a^2 - ka + k^2$ est :

$$\text{Disc}(p_3) = (2a - k)^2 - 4(a^2 - ka + k^2) = -3k^2 < 0.$$

Donc g_3 appartient aussi à la même classe que g_2 : $P(x) = (x - x_1)(x^2 + bx + c)$, telle que $b^2 - 4c < 0$.

Remarque 4 Les fonctions associées à $P : x \mapsto x^3$ non unitaire de type :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_4(x) = q.P(x - a) + b = q \left[P(x - a) + \frac{b}{q} \right],$$

avec $q \neq 0$, appartient à la même classe que g_3 et g_2 . Pour démontrer cela, il suffit de poser $k = \sqrt[3]{|b/q|}$, puis refaire la démonstration ci-dessus.

Proposition 2

Il existe des polynômes cubiques normés $g : x \mapsto x^3 + bx^2 + cx + d$ qui ne sont pas associées à la cubique normée $f : x \mapsto x^3$.

Preuve :

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tel que $g(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme cubique normé.

Si g est associée à $f : x \mapsto x^3$, alors $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x - \alpha) + \beta$.

Donc, on a : $x^3 + bx^2 + cx + d = (x - \alpha)^3 + \beta = x^3 - 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x - \alpha^3 + \beta$.

Par identification des coefficients, on a :

$$\begin{cases} b = -3\alpha & (1) \\ c = 3\alpha^2 & (2) \\ d = -\alpha^3 + \beta & (3) \end{cases}$$

(1) et (2) donne $b^2 = 3c$.

Condition nécessaire : pour qu'une cubique normée $g : x \mapsto x^3 + bx^2 + cx + d$ soit associée à $f : x \mapsto x^3$, alors $b^2 = 3c$.

Ainsi, pour trouver un polynôme cubique non associé à $f : x \mapsto x^3$, il suffit de prendre $g : x \mapsto x^3 + bx^2 + cx + d$ tel que $b^2 \neq 3c$. Exemple $g : x \mapsto x^3 + x^2 + x + 2$ est une fonction cubique non associée à $f : x \mapsto x^3$. On a : $1^2 \neq 3 \times 1$.

5 Discussion et recommandations

Les résultats précédents montrent que l'étude de la fonction polynômiale de degré 3 dite de référence, à tort, $P(x) = x^3$ et ses diverses fonctions associées ne nous permet de découvrir que 2 classes des cubiques normées à savoir :

1. les cubiques normées à discriminant nul à une racine réelle triple dont la référence est $P(x) = x^3$, c'est-à-dire les $P(x) = (x - a)^3$ pour le cas général ;

2. Les cubiques normés à discriminant négatif :

$$\begin{cases} P(x) = (x - x_1)(x^2 + bx + c) \\ \text{avec } b^2 - 4c < 0. \end{cases}$$

Ainsi, il reste encore deux classes non atteintes par la fonction associée :

1. les polynômes cubiques normés à discriminant nul à deux racines réelles dont l'une est double :

$$\begin{cases} P(x) = (x - x_1)(x^2 + bx + c) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \text{ avec } x_j \neq x_k \\ \text{avec } b^2 - 4c = 0. \end{cases}$$

2. Les cubiques normés à discriminant positif :

$$\begin{cases} P(x) = (x - x_1)(x^2 + bx + c) \\ \text{avec } b^2 - 4c > 0. \end{cases}$$

Comme la méthode de recherche des racines d'un polynôme de degré 3 de Cardan ([7, p. 2], [3, p. 2] et [4, p. 299]) semble très compliquée pour les lycéens de classe de seconde, alors il s'avère plus pédagogique de proposer aux élèves :

1. soit une étude de fonction polynômiale de degré 3 dont une racine réelle est connue d'avance (seulement à vérifier) ;
2. soit une étude de fonction polynômiale de degré 3 dont une racine réelle est rationnelle, et on demande aux élèves de la déterminer. Pour bien développer cette partie, on peut consulter [1] pour voir les techniques simples permettant d'identifier qu'une cubique a une racine entière simple.

Pour se convaincre, considérons un exemple suivant :

Exemple d'exercice pour la classe de seconde

On considère le polynôme de degré 3 : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

1. Montrer que $x = 1$ est une racine de P .
2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$. Déterminer les coefficients a , b et c .
3. Dédurre de 2 les autres racines de P .

4. Tracer la courbe (C) de $P(x)$ sur l'intervalle $[0, 4]$.
5. En déduire le tableau de variation de P sur $[0, 4]$, puis interpréter-le.

Commentaire : Cet exercice permet aux enseignants de la classe de seconde de (d') :

- vérifier si l'élève maîtrise bien la notion d'un zéro d'un polynôme ;
- évaluer si l'élève arrive à s'approprier la méthode de division euclidienne ou celle d'identification des coefficients lors de la recherche des coefficients a , b et c ;
- vérifier si l'élève comprend la méthode de recherche des racines d'un polynôme de second degré ;
- montrer aux élèves l'allure de la courbe d'une fonction polynomiale de degré 3 d'une autre classe que $P : x \mapsto x^3$.

6 Conclusion

Au terme de cette analyse, nous pouvons conclure que l'étude de la "fonction de référence" des polynômes de troisième degré $P : x \mapsto x^3$ et de ses diverses fonctions associées ne suffit pas pour atteindre toutes les quatre classes de cubiques normées de référence.

Cependant, la découverte de toutes les classes de cubiques peut être faite en classe de seconde en donnant une racine réelle au préalable. Le reste est encore un entraînement sur la recherche des racines d'un polynôme de second degré.

Enfin, l'appellation "fonction de référence" à $P : x \mapsto x^3$ doit être relativisée, ou alors il convient plutôt de préciser comme ceci : étude de $x \mapsto x^3$, $x \mapsto (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ et $x \mapsto (x - \alpha)(x^2 + ax + b)$ avec $a^2 - 4b < 0$.

7 Références bibliographiques

Références

- [1] KONSTANTINE ZELATOR, "Integer roots of quadratic and cubic polynomials with integer coefficients", 2011.
- [2] MICHEL COSTE, "Elimination, résultant, Discriminant", Université de Rennes I - Préparation à l'agrégation de mathématiques, 2001.
- [3] PAUL MILAN, "L'équation du troisième degré", Lycée adulte - Terminale S, [https : // ...](https://...)

[//www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/documents/math/mathTermS/09_nombres_complexes/09_equation_troisieme_degre.pdf](http://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/documents/math/mathTermS/09_nombres_complexes/09_equation_troisieme_degre.pdf), consulté le 09/10/2019.

- [4] ROGER ALEXANDRE, “*Méthode et formule pour la résolution des équations du troisième degré*”, *Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9*, p. 293-302, 1870.
- [5] SAUGATA BASU, RICHARD POLLACK, MARIE-FRANÇOISE ROY, “*Algorithms in Real Algebraic Geometry*”, Springer, 2008.
- [6] SVANTE JANSON, “*Resultant and discriminant of polynomials*” <http://www2.math.uu.se/~svante/papers/sjN5.pdf>, consulté le 09/10/2019.
- [7] YAN-BIN JIA, “*Roots of Polynomials*”, *Com S 477/577 Notes 2018*, <http://web.cs.iastate.edu/~cs577/handouts/polyroots.pdf>, consulté le 09/10/2019.