



HAL
open science

Note sur le signe des masse et charge dans l'équation de Dirac en algèbre vectorielle.

Vincent Morin

► **To cite this version:**

Vincent Morin. Note sur le signe des masse et charge dans l'équation de Dirac en algèbre vectorielle.. 2022. hal-03763556

HAL Id: hal-03763556

<https://hal.science/hal-03763556v1>

Preprint submitted on 29 Aug 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Vincent Morin

Laboratoire de Biostatistique et Informatique Médicales
 Faculté de Médecine
 Université de Bretagne Occidentale
 vincent.morin@univ-brest.fr

Brest, le 25/08/2022,

Note sur le signe des masse et charge dans l'équation de Dirac en algèbre vectorielle.

Si l'on se pose la question de savoir où l'on peut rencontrer des masses négatives en physique, il vient à l'esprit d'examiner l'équation de Dirac pour laquelle il a été évoqué des solutions à énergies négatives. Indépendamment de toute discussion sur la nature et les propriétés des masses négatives, regardons ce que la formulation de l'équation de Dirac en algèbre vectorielle nous présente.

Dans la suite, nous supposons que la valeur de la charge électrique notée « q » est positive ainsi que celle de la masse notée « m_0 ». Un signe moins explicite sera utilisé pour signifier une charge électrique ou une masse négatives.

L'équation de Dirac reformulée par D.Hestenes¹ dans l'algèbre d'espace-temps $Cl(1,3)$ et présentée par G.Casanova² peut être écrite :

$$[1] \quad \hbar \square \Psi = (\pm q \mathbf{A} \Psi \pm m_0 c \Psi \boldsymbol{\gamma}_0) \boldsymbol{\gamma}_{12}$$

avec :

$$\square = \boldsymbol{\gamma}_0 \partial_0 - \boldsymbol{\gamma}_k \partial_k$$

En algèbre vectorielle, l'équation de Dirac est une équation à laquelle doit satisfaire un champ spatio-temporel $\Psi(\mathbf{r})$ de termes gauches d'opérations de transformation d'une base de directeurs $\{\boldsymbol{\gamma}_\mu\}$ en une base $\{\mathbf{e}_\mu\}$. C'est à dire que :

$$\mathbf{e}_\mu = \Psi \boldsymbol{\gamma}_\mu \tilde{\Psi}$$

Les vecteurs transformés étant exprimés dans la base initiale :

$$\mathbf{e}_\mu = \omega_\mu^\nu \boldsymbol{\gamma}_\nu$$

Le dernier terme $\boldsymbol{\gamma}_{12}$ est simple affaire de convention, nous le préférons à son opposé simplement parce que c'est le terme opérateur gauche de la rotation de $\boldsymbol{\gamma}_1$ vers $\boldsymbol{\gamma}_2$.

Compte tenu des deux signes possibles devant q et m_0 , il y a en fait quatre équations dont nous allons donner certaines solutions qui nous paraissent intéressantes, dans le cas particulier où le fermion décrit par l'équation a une vitesse nulle et se trouve plongé dans un potentiel uniquement électrostatique constant dans tout l'espace.

¹ D. Hestenes, Space-time algebra, New-York, Gordon & Breach, 1966

² G. Casanova, L'algèbre vectorielle, P.U.F., 1976

Dans ce cas de figure, nous pouvons simplifier l'équation [1] en :

$$[2] \quad \hbar \Psi_{,t} = (\pm qV \Psi \pm m_0 c^2 \gamma_0 \Psi \gamma_0) \gamma_{12}$$

Nous allons nous placer dans l'algèbre $Cl(2,3)$ qui contient $Cl(1,3)$ afin d'utiliser toutes les possibilités offertes par les 32 paramètres du système matriciel $\mathbb{C}(4)$ de Dirac. $Cl(2,3)$ utilise 5 directeurs $\{\gamma_\mu\}$ $\mu=0,1,2,3,4$ dont le premier et le dernier ont un carré +1.

Nous avons quatre solutions présentant un intérêt particulier :

Signe q	Signe m_0	Solution d'intérêt
+	+	$\Psi_{+e} = e^{\frac{Et}{\hbar} \gamma_{12}}$
-	+	$\Psi_{-e} = \gamma_{04} e^{\frac{Et}{\hbar} \gamma_{21}}$
+	-	$\Psi_{+eJ} = \gamma_{04} e^{\frac{Et}{\hbar} \gamma_{12}}$
-	-	$\Psi_{-eJ} = e^{\frac{Et}{\hbar} \gamma_{21}}$

Pour vérifier leur exactitude, il suffit de les reporter dans l'équation [2] pourvue des signes appropriés devant q et m_0 , et de simplifier jusqu'à obtenir à chaque fois la même condition :

$$E = qV + m_0 c^2$$

où, rappelons le, q et m_0 sont tous deux positifs par convention. Le terme d'énergie E ne pourrait donc changer de signe et devenir négatif que par l'entremise d'un potentiel V suffisamment négatif.

Notons :

1) pour la masse négative $-m_0$ il y a bien deux solutions (pour des charges électriques opposées).

2) la solution pour q et m_0 $\Psi_{+e} = e^{\frac{Et}{\hbar} \gamma_{12}}$ est le terme gauche d'une rotation d'angle $\frac{Et}{\hbar}$ dans le plan de γ_{12} ; c'est une rotation rapide en fonction du temps dans le sens amenant à petit angle γ_1 vers γ_2 et dont la vitesse de rotation est en proportion de l'énergie.

3) le simple renversement de ce sens de rotation en utilisant le terme gauche

$\Psi_{-eJ} = e^{\frac{Et}{\hbar} \gamma_{21}}$ fait passer de la solution pour q et m_0 à la solution pour -q et $-m_0$, tous deux négatifs ; donc la charge est opposée ainsi que la masse.

4) la multiplication par γ_{04} à gauche de l'opérateur de rotation rapide sur (12) fait passer d'une solution à celle correspondant à une masse opposée.

5) enfin, et c'est là l'intérêt particulier de ces solutions, γ_{04} est un terme gauche d'opérateur de rotation de 180° dans le plan (04) ; c'est à dire qu'il est possible d'écrire une équation acceptant une solution $\Psi = \left(\cos\left(\frac{\eta}{2}\right) + \gamma_{04} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \right) e^{\frac{Et}{\hbar} \gamma_{12}}$ où η est un angle permettant d'amener une solution à masse positive sur une solution à masse négative :

$$[3] \quad \hbar \square \Psi = (\pm q \mathbf{A} \Psi + e^{\eta \gamma_{04}} m_0 c \Psi \gamma_0) \gamma_{12}$$

qui ressemble à l'équation de C. Daviau³ dans laquelle γ_{0123} prend la place de γ_{04} .

Autres solutions.

Il n'y a pas que γ_{04} qui agisse comme ci-dessus. Si on le remplace par l'un des 3 $\gamma_{k0} = \sigma_k$, la solution $\Psi = \sigma_k e^{\frac{Et}{\hbar} \gamma_{12}}$ est de masse opposée à celle pour $\Psi_{+e} = e^{\frac{Et}{\hbar} \gamma_{12}}$. Mais σ_k est un opérateur qui intervient dans les pseudo rotations hyperboliques des changements de repère inertiel (boosts) : $\mathbf{L} = ch\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sigma_k sh\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; en particulier dans les solutions ondes planes, ce qui montre qu'assez curieusement, une solution onde plane pour un fermion de masse positive est un mélange hyperbolique d'une partie ch solution à masse positive et d'une partie sh solution à masse négative d'amplitude inférieure à la première.

Les 6 autres bivecteurs de Cl(2,3) (les 3 éléments de boost $\gamma_{k4} = \eta_k$ et les 3 opérateurs de rotation γ_{jk}) n'ont pas d'action sur le signe de la masse.

Les solutions utilisant γ_{04} ne sont normalement pas accessibles dans l'habituelle algèbre d'espace-temps Cl(1,3) faute de γ_4 , mais on voit apparaître dans la décomposition canonique des rotations le pseudo-scalaire $\gamma_{0123} = \mathbf{i}_4$ noté « i » par Casanova (qui l'appelle aussi γ_5) ou Daviau.

Ce pseudo-scalaire de Cl(1,3) est l'un des 5 quadrivecteurs de Cl(2,3), il y est le dual de γ_4 (car $\gamma_{0123} = i \gamma_4$ puisque $i = \gamma_{01234}$), et on peut le considérer dans le terme opérateur gauche comme la succession des opérateurs γ_{23} puis γ_{01} . Or on vient de dire que mis à la place de γ_{04} , γ_{23} ne fait pas passer à une masse opposée, mais γ_{01} le fait.

Donc, γ_{0123} utilisé à la place de γ_{04} fait passer $\Psi_{+e} = e^{\frac{Et}{\hbar} \gamma_{12}}$ à une solution de masse opposée $\Psi = \gamma_{0123} e^{\frac{Et}{\hbar} \gamma_{12}}$, comme γ_{04} .

De plus, le quadrivecteur γ_{0123} est de carré négatif et identique à son tilde γ_{3210} , de sorte que $e^{\frac{\beta}{2} \gamma_{0123}} = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \gamma_{0123} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$.

C'est le facteur de Takabayasi noté habituellement $e^{\frac{1}{2} i \beta}$. C'est le seul moyen clair de passer à une solution de masse opposée dans Cl(1,3). Et comme pour le cas de γ_{04} , une équation unique (qui est la non linéaire homogène de Daviau) peut être écrite :

$$[4] \quad \hbar \square \Psi = (\pm q \mathbf{A} \Psi + e^{\beta \gamma_{0123}} m_0 c \Psi \gamma_0) \gamma_{12}$$

3 C. Daviau, Invariant quantum wave equations and double space-time, 2013, p28 équ. 137.

Mais la « rotation » de Yvon-Takabayasi qui utilise un quadrivecteur de $Cl(2,3)$ se distingue des opérations de rotation ou pseudo-rotation utilisant un ou plusieurs des 10 bivecteurs de $Cl(2,3)$.

En effet les opérations de rotation à bivecteurs opèrent dans un plan de directeurs gammas et ne concernent que deux d'entre eux pour faire un mélange trigonométrique standard (rotation) ou hyperbolique (changement de repère inertiel). Tandis que les quadrivecteurs opèrent en déplaçant des bivecteurs entiers sur d'autres.

Ainsi, la « rotation » de Takabayasi effectue une poursuite circulaire de chaque σ_i avec l'un des γ_{jk} (i,j,k tous différents et en permutation circulaire), et concerne donc 6 bivecteurs d'un seul coup en effectuant une sorte de transformation étoile (les σ_i partagent γ_0) tétraèdre (les γ_{kl} partagent chacun leurs vecteurs directeurs avec leurs voisins).

Remarquons aussi que dans $Cl(2,3)$, γ_{1234} produit une rotation « Takabayasi jumelle » entre les $\gamma_{k4}=\eta_k$ et les γ_{kl} .

Conclusion.

Il ne fait aucun doute que, du point de vue strictement mathématique, l'équation de Dirac en algèbre vectorielle possède des solutions correspondant à des fermions de masse négative. La question restant en suspens étant de savoir ce que signifie physiquement une masse négative, puisque l'expérience ne semble pas en avoir montré jusqu'à présent. Toutefois, un modèle d'univers jumeaux couplés (nommé Janus par son auteur J.P. Petit) en fait un élément central en affirmant que ces masses négatives forment un univers jumeau du nôtre et interagissent par gravitation avec les masses positives en les repoussant alors qu'entre elles les masses de même signe s'attirent.

Au demeurant, il existe aussi une difficulté de signe avec l'équivalence masse-énergie puisque si l'on en reste à la formule scalaire $E=mc^2$, l'énergie devrait changer de signe elle aussi. Or en algèbre vectorielle on peut reporter le signe de l'énergie sur le sens de rotation dans le plan (1,2), c'est à dire que l'on peut considérer l'énergie comme une quantité toujours positive qui donne la vitesse de rotation du fermion dans le plan de γ_{12} .

C'est d'ailleurs ce que montre la forme de la condition sur l'énergie ($E=qV+m_0c^2$) en laquelle se simplifie l'équation de Dirac sur une solution dans les conditions précédemment admises : l'énergie a le signe de m_0 , supposé positif par convention, quelle que soit la masse particulaire $\pm m_0$ dans l'équation ; tant que le terme qV ne renverse pas le signe par une éventuelle grande amplitude négative.

La situation est plus étrange encore si l'on admet, comme dans [3] ou [4], des termes de masse $e^{\eta\gamma_{04}}m_0$ ou $e^{\beta\gamma_{0123}}m_0$ qui peuvent avoir une « partie imaginaire » si l'on se permet d'appeler imaginaires γ_{04} ou γ_{0123} dont le carré vaut -1.