HAL
open science

Dispositions discrètes : transferts entre botanique et cristallographie dans les travaux d'Auguste Bravais

Jenny Boucard, Catherine Goldstein, Valéry Malécot

To cite this version:

Jenny Boucard, Catherine Goldstein, Valéry Malécot. Dispositions discrètes : transferts entre botanique et cristallographie dans les travaux d'Auguste Bravais. Jenny Boucard; Christophe Eckes. Arranger, disposer, combiner : Théories de l'ordre dans les sciences, les arts d'ornement et la philosophie (1770-1910), Hermann, pp.161-208, 2024. hal-03762322

HAL Id: hal-03762322

https://hal.science/hal-03762322

Submitted on 27 Aug 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Dispositions discrètes : transferts entre botanique et cristallographie dans les travaux d'Auguste Bravais

Jenny Boucard, Catherine Goldstein & Valéry Malécot

> « Ces déductions ont mis en lumière, dans les organes des végétaux, d'une manière assez inattendue peut-être pour beaucoup de personnes, une régularité de disposition, qui, sans être précisément analogue aux lois de la cristallographie, est tout aussi précise et aussi admirable. »
> Extrait de l'*Éloge historique d'Auguste Bravais* par Léonce Élie de Beaumont (Beaumont, 1865, p. 11)

Auguste Bravais occupe une place quelque peu paradoxale dans l'histoire d'une théorie de l'ordre. La citation de Léonce Élie de Beaumont renvoie à son intérêt, depuis les années 1830, pour l'analyse de dispositions d'éléments végétaux puis minéraux. Dans les deux cas, l'objectif est de rendre compte d'un ordre naturel à partir d'un ordre mathématique fondé sur des lois générales et simples. Cet ordre naturel, alors régulièrement associé à la notion de symétrie, est au centre de nombreuses recherches des savants naturalistes dans le premier XIXe siècle [1]. C'est par exemple le cas du botaniste Augustin Pyramus de Candolle qui, se référant aux travaux cristallographiques de René-Just Haüy, souhaite déterminer « l'ordre régulier d'après lequel [l]es organes sont disposés » (Candolle, 1813, p. 187-188) en organographie [2] et promeut une classification végétale fondée sur la morphologie comparée (Hocquette, 1954, p. 124-125 ;

1. Ces recherches font écho aux grands projets de classification du vivant développés à la fin du siècle précédent, sur la base de caractéristiques externes. Sur la question des classifications en science, voir par exemple (Knight, 1981 ; Tort, 1989 ; Kaufman, 1993) et les numéros spéciaux sur ce sujet de la *Revue de synthèse* en 1994 et des *Cahiers François Viète* en 2016, en particulier les introductions éditoriales (Rey, 1994 ; Lê & Paumier, 2016).

2. L'organographie est un domaine analysant notamment les dispositions des différentes parties végétales relativement les unes aux autres, sans nécessairement en déterminer les causes physiologiques.

Drouin, 1994) ; c'est aussi celui de Gabriel Delafosse qui consacre ses thèses à l'étude de la symétrie en minéralogie, botanique et zoologie, la symétrie étant ici entendue comme « la disposition relative des parties d'un tout », déterminée « par la loi qui règle la répétition et l'ordre de ces parties, relativement à un centre et à des axes » (Delafosse, 1840b, p. 48) [3]. Ces écrits postulent souvent une unité primitive du monde végétal et du monde minéral, et l'existence de formes primitives ou élémentaires qui, par agrégation ou arrangement, produisent les composés existant à l'état naturel.

C'est dans ce contexte que s'inscrivent les recherches d'Auguste Bravais, d'abord en collaboration avec son frère Louis sur la « symétrie des feuilles curvisériées et rectisériées », dans les années 1830 [4], puis, seul, sur les éléments cristallins une décennie plus tard. Que ce soit en botanique ou en cristallographie, y sont articulées de très nombreuses données expérimentales et une modélisation des insertions de feuilles ou des molécules cristallines par des réseaux (plans) ou des assemblages (solides) de points. L'étude mathématique de ces réseaux et assemblages discrets et de leurs symétries, à l'aide de techniques de géométrie analytique, d'analyse diophantienne et de fractions continues, ouvre la voie à des classifications des éléments naturels concernés et même à une explication d'irrégularités apparentes de leurs propriétés physiques.

Si le lien entre règnes végétal et minéral, souvent associé aux notions de disposition ou de symétrie, n'est pas original, le transfert de la botanique à la cristallographie d'un concept mathématique spécifique — les assemblages discrets — et de certains diagrammes associés, afin d'étudier systématiquement à la fois un ordre végétal et un ordre cristallographique, est beaucoup plus novateur. Or, Auguste Bravais revendique cette continuité dans ses recherches dès la fin des années 1830 (Bravais & Bravais, 1839c) et la souligne encore par ses références à l'organographie quand il se tourne vers les cristaux dix ans plus tard.

Pourtant les liens entre ses travaux sur la phyllotaxie et ceux sur les cristaux ne sont pas détaillés dans la littérature historique [5] : les recherches de Bravais sont analysées le plus souvent dans des histoires disciplinaires séparées, qu'elles concernent la botanique ou la cristallographie, et les pratiques mathématiques en jeu sont soit laissées de côté (Mauskopf, 1976, p. 55) (Maitte, 2014), soit relues dans le cadre rétrospectif de la théorie des groupes, qui se normalise dès fin

3. Sur la notion de symétrie au début du xixesiècle, nous renvoyons à (Stevens, 1984 ; Katzir, 2004 ; Hon & Goldstein, 2008 ; Chomarat, 2010).

4. Mémoire présenté à l'Académie des sciences le 23 février 1835 : *Procès-verbaux des séances de l'Académie*, tome X (Années 1832-1835), p. 665. Édition utilisée : Hendaye, Imprimerie de l'Observatoire d'Abbadia, 1922. Adolphe Brongniart et Pierre Jean-François Turpin présentent un rapport élogieux de ce mémoire le 24 avril 1837.

5. Ils sont parfois évoqués brièvement. Par exemple, Henry Doffin (1959, p. 4) indique que c'est l'étude des réseaux végétaux qui aurait conduit Bravais à imaginer les réseaux cristallins, sans plus de précisions. Dans (Adler, Barabé & Jean, 1997, p. 241), la notion de réseau cristallin est présentée comme un langage commun pour étudier cristaux et végétaux : « Auguste Bravais discovered the crystal lattice and created the reticular langage to express crystal structures and phyllotactic patterns ». François Chomarat (2010, p. 78) mentionne que Bravais, comme Delafosse, publie des recherches sur les végétaux puis sur les cristaux. Egbert Brieskorn a toutefois souligné ces liens dans un cours d'algèbre linéaire, publié de manière posthume (Brieskorn, 2019).

du XIXesiècle (Scholz, 1989a ; Bru, 2019).

Bravais parle de mettre en ordre des données, ou évoque occasionnellement une notion d'ordre pour parler de la disposition des objets variés qu'il étudie. Mais il n'inscrit pas son travail dans une théorie ou une science de l'ordre et ne se réfère pas à la distinction entre ordre et mesures chère à Louis Poinsot. S'il nous a semblé utile d'examiner ses recherches dans ce cadre, c'est qu'elles apparaissent comme une source d'inspiration pour des auteurs clés se réclamant explicitement d'une théorie de l'ordre, à partir des années 1860. C'est par exemple le cas de Camille Jordan, pour ses travaux sur les réseaux (1866), les polyèdres et les groupes de mouvements (1867 ; 1868-1869), ou encore celui de Pierre Curie qui s'appuie également sur les travaux de Bravais dans ses recherches sur la symétrie, l'ordre et les répétitions dans les sciences physiques (Curie, 1884b ; Curie, 1884a, par exemple). Édouard Lucas et Jules Bourgoin mobilisent à la fois les travaux botaniques et cristallographiques de Bravais dans le cadre d'une « géométrie de l'ordre et de la situation » pour le premier, en lien avec les assemblages, ou dans la définition d'une théorie ornementale fondée sur les notions d'ordre et de forme pour le second. Cette postérité suggère que Bravais a contribué à dessiner et élargir de manière substantielle les thématiques de recherche qui seront à la fin du XIXesiècle associées à l'ordre, en particulier celles des réseaux de points ; son approche apporte en particulier un point d'articulation entre les études sur la répartition d'un nombre fini de points, comme les sommets d'un polygone ou polyèdre régulier, et celles sur les dispositions infinies, mais discrètes, comme les réseaux.

L'objectif de ce chapitre est donc d'analyser le traitement des dispositions d'éléments végétaux et cristallographiques par les Bravais, dans le cadre théorique commun qu'Auguste a élaboré, celui des réseaux et assemblages de points. Ces rencontres entre mathématiques, botanique et cristallographie permettent de restituer certains aspects originaux de ces travaux, en particulier leurs liens avec une géométrie de situation, que l'historiographie a occultés, et donc de mieux comprendre comment ceux-ci ont pu être récupérés dans le cadre d'une mathématique de l'ordre.

1 Les frères Bravais et la botanique, 1837-1839 : vers l'élaboration d'une géométrie végétale

1.1 L'organographie dans les années 1830 : mathématique végétale, ordre circulaire et ordre par réseaux

À la fin des années 1820, les congrès annuels de la *Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aertze*, fondée en 1822, sont l'occasion pour plusieurs savants allemands de présenter et diffuser leurs travaux sur la disposition des éléments végétaux (feuilles, inflorescences, écailles. . .), qu'ils inscrivent souvent dans le cadre épistémologique de la théorie des métamorphoses de Goethe. Publié en 1790, le *Versuch die Metamorphose der Pflanzen zu erklären* [Essai pour expliquer la métamorphose des plantes] a pour objectif, en cohérence avec la *Naturphilosophie* de son auteur, de déterminer une organisation fondamentale unique pour toutes les parties végétales. Goethe y postule en particulier que les parties florales sont des feuilles métamorphosées (Guédès, 1969). C'est dans ce contexte que Carl Friedrich Philipp von Martius (1794-1868) présente ses recherches sur les arrangements des feuilles à Munich en 1827. Comme le botaniste Lorenz Oken (1779-1851), von Martius s'intéresse à la mise en évidence fréquente d'une organisation en spirales dans certains végétaux [6] et à l'apparition récurrente de petits nombres entiers dans leur structure (Montgomery, 1970). Georg Wilhelm Schimper (1804-1878) et Alexander Karl Heinrich Braun (1805-1877), amis depuis leurs études de médecine à l'université de Heidelberg, viennent alors d'arriver à Munich, notamment pour suivre les enseignements d'Oken (Montgomery, 1970 ; Tobien, 1975). Ils présentent quant à eux leurs recherches sur la disposition des feuilles autour d'une tige au congrès de Heidelberg en 1829, avant de les publier, respectivement, en 1830 et 1831 (Schimper, 1830 ; Braun, 1831).

Dans son mémoire sur les positions des feuilles et des inflorescences des *Asperifoliae*, Schimper s'intéresse notamment aux cas où les insertions des feuilles sur une tige, régulièrement réparties, paraissent disposées en une seule spirale, la spirale génératrice ; pour lui, à une insertion donnée correspond toujours une insertion située à la verticale de la première après un certain nombre entier de tours autour de la tige. Cela lui suggère que les angles formés par les directions des feuilles, si on les projette sur un plan perpendiculaire à la tige, sont rationnels, dans le sens qu'ils peuvent être exprimés comme des fractions de la circonférence de la tige. Ces angles, appelés angles de divergence, supplantent, comme caractéristiques végétales, les mesures de longueur entre deux insertions (Adler, Barabé & Jean, 1997 ; Montgomery, 1970). L'hypothèse de rationalité, fondée sur le postulat d'une tendance de la nature à la simplicité, est justifiée à partir de nombreuses observations et conduit à la formulation de lois, présentées

6. La disposition spiralée de feuilles que leur apparence avait fait classer auparavant comme dispersées avait été reconnue dès 1754 par Charles Bonnet dans ses *Recherches sur l'usage des feuilles dans les plantes*, publiées à Leiden chez l'éditeur Elie Luzac.

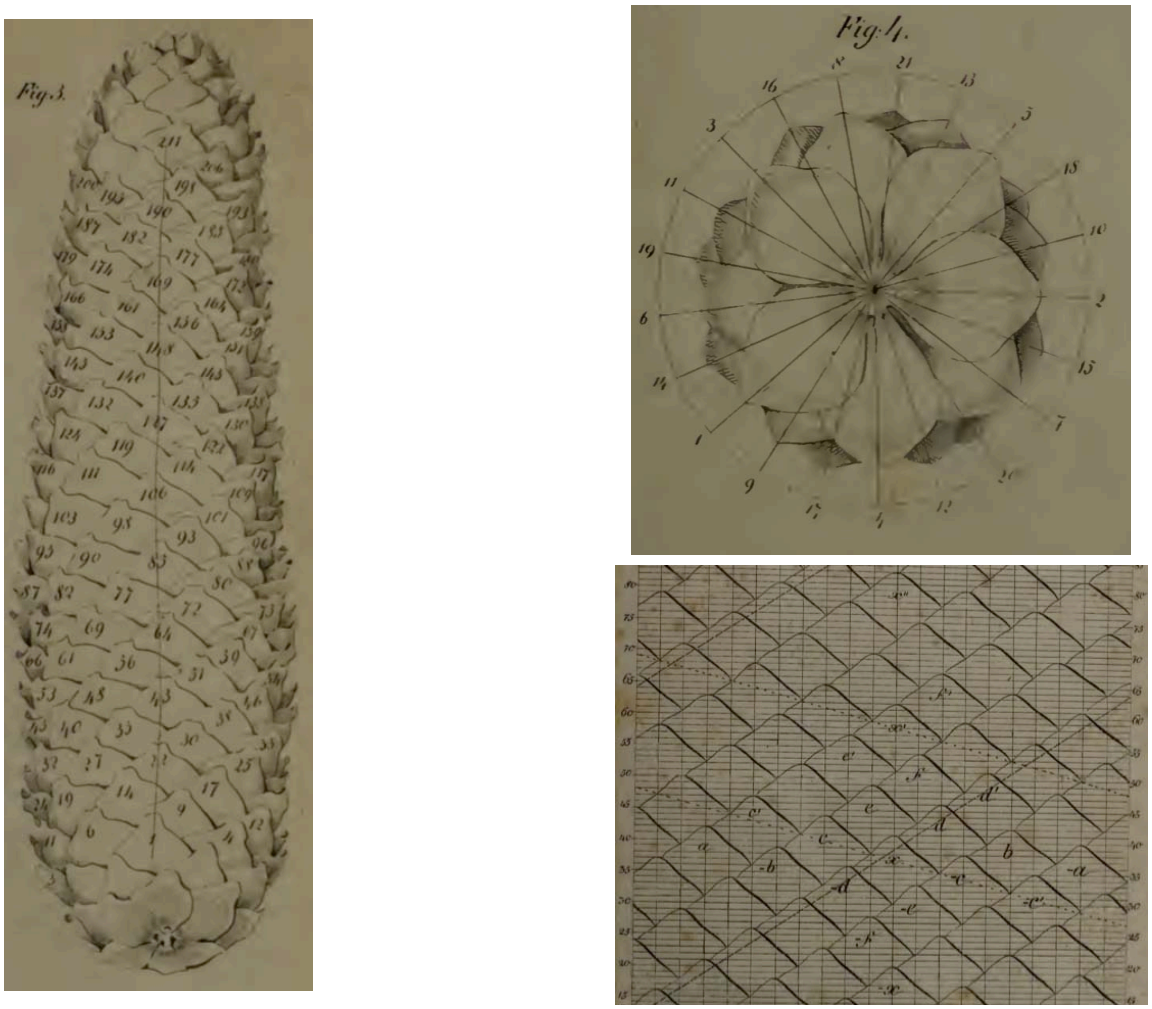


Figure 1 – L'illustration de gauche (Fig. 3 dans l'article original) permet de repérer différents types de spirales secondaires : les vingt-et-une spirales verticales allant de 21 en 21 (nº d'écailles 1, 22, 43. . . ou 9, 30, 51. . .), les treize spirales de 13 en 13 qui tournent vers la gauche (nº 1, 14, 27. . .), les huit spirales de 8 en 8 vers la droite (nº 1, 9, 17. . .) ou encore les cinq allant de 5 en 5 vers la gauche (nº 1, 6, 11. . .). L'ensemble des spires secondaires d'un type donné (toutes celles allant de 5 en 5 par exemple) contient toutes les écailles. L'extrait de la planche XX (à droite, en bas) est un développement partiel de la pomme de pin, les lignes horizontales du quadrillage représentant les différentes hauteurs d'insertions des spires. Par rapport à l'écaille x, x' est l'écaille suivante sur la spire allant de 21 en 21, d est la suivante sur la spire allant de 5 en 5, etc. Braun en déduit que a est l'écaille qui suit x dans la spire génératrice (Braun, 1831, p. 220-221). L'illustration en haut à droite (Fig. 4 dans l'original) est une vue de dessous de la disposition des 21 premières écailles de la pomme de pin et permet de déterminer facilement la divergence de $\frac{8}{21}$ puisque 8 tours sont nécessaires pour passer de l'écaille nº 1 à l'écaille nº 22.
(Braun, 1831, Pl. XIX, Fig. 3, 4 & Extrait de la Pl. XX)

sous forme tabulaire (Schimper, 1830, p. 22-23). Ces lois donnent les différentes divergences possibles sous forme de fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des termes de séries récurrentes. La plus fréquente de ces séries est la série de Fibonacci, où chaque terme est la somme des deux précédents, $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$; elle fournit ainsi les couples $(2, 5)$, $(3, 8)$, $(5, 13)$, $(8, 21)\ldots$ correspondant aux fractions $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{8}{21}\ldots$ des angles de divergence (Schimper, 1830, p. 26-29).

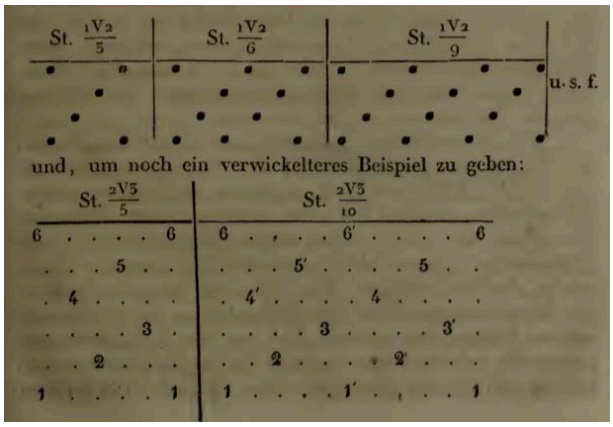


FIGURE 2 – (BRAUN, 1831, p. 371) — Représentation sur un plan de la disposition des insertions des feuilles selon diverses possibilités. La partie gauche de chaque rangée donne, déplié sur un plan, le cas où il y a une seule feuille par noeud (verticille à une feuille), donc des feuilles isolées, alternes le long de la tige. Dans ce cas, selon qu'on tourne à gauche ou à droite, on a deux nombres au numérateur pour les divergences, leur somme donnant le nombre de tours (dénominateur). Les autres croquis sur la même rangée, en se décalant vers la droite, représentent des cas avec deux, trois, etc., feuilles par noeud (verticilles à deux, trois, etc., feuilles). Il y a alors autant de spirales génératrices que de feuilles sur le verticille. Par exemple, en bas à droite, chaque noeud porte deux feuilles numérotées : sur le premier noeud, il s'agit des feuilles 1 et 1' ; les emplacements marqués ' correspondent à des feuilles de l'autre côté de la tige.

Braun poursuit le travail de Schimper dans son article *Vergleichende Untersuchung über die Ordnung der Schuppen an den Tannenzapfen als Einleitung zur Untersuchung der Blattstellung überhaupt* [Étude comparative de l'ordre des écailles sur les pommes de pin comme introduction à l'étude de la position des feuilles en général] (1831). Il y ajoute la question délicate de la détermination pratique de l'angle de divergence. Les mesures directes étant généralement impossibles, il propose de compter le nombre d'écailles des pommes de pins et de tours (sur la spirale génératrice correspondante) entre deux écailles situées sur la même verticale. Pour ce faire, il explique longuement à partir d'un exemple comment numéroter les écailles d'une pomme de pin dans leur ordre de croissance (BRAUN, 1831, 213 et suiv.) : à partir de manipulations concrètes de pommes de pins, issues de pins blancs et rouges, et de plusieurs figurations graphiques, Braun montre qu'il est possible de repérer différents types de spires, qu'il qualifie de secondaires et fictives [7] ; à partir de celles-ci, il est possible de trouver la spire génératrice et la divergence entre deux écailles de cette spire (voir Figure 1). Il discute longuement les rapports arithmétiques existant entre ces spires, rapports qu'il relie à la série de Fibonacci. À partir d'observations de nombreuses espèces végétales, il montre que cette série est celle qui intervient le plus souvent, en comparant les divergences observées et les divergences calculées comme des

7. Cette possibilité, comme le feront d'ailleurs remarquer les Bravais, avait été reconnue dès le siècle précédent, en particulier par Charles Bonnet, puis de Candolle. Bonnet avait par exemple identifié un cas où les insertions pouvaient être considérées comme disposées sur trois spirales parallèles, chacune faisant un tour entier en sept pas, la huitième insertion sur chaque spirale revenant à la verticale de la première.

réduites de la fraction continue associée $\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}$ (Braun, 1831, p. 260). Une réduite donnée ne caractérise cependant pas une unique espèce et, réciproquement, une espèce n'est pas associée à une unique divergence [8]. Dans certains cas, plusieurs divergences peuvent même être identifiées sur un même spécimen végétal [9]. À côté de tableaux organisant les différentes divergences observées et calculées à l'aide de la série de Fibonacci (ainsi que d'autres séries récurrentes, intervenant cependant plus rarement) (Braun, 1831, p. 306), Braun utilise également des réseaux de points obtenus à partir d'un déroulement de la tige et montrant les analogies de distribution des feuilles dans le cas où il y a une seule ou plusieurs feuilles sur le même noeud (Figure 2). Dans son travail, Braun mobilise ainsi des diagrammes circulaires et plans mettant en lumière l'ordre qu'il repère dans les dispositions d'éléments végétaux.

À la suite de de Candolle notamment, plusieurs botanistes français travaillent à la même époque sur l'organographie et suggèrent également des régularités arithmétiques dans le monde végétal. En 1828, Pierre Jean-François Turpin (1775-1840) publie par exemple un « aperçu organographique sur le nombre deux » dans lequel il expose une composition par multiples de 2 à partir d'individus simples pour certains types de végétaux et évoque « une sorte de réseau, dont la forme et la grandeur des mailles diffèrent selon les diverses espèces de végétaux » (Turpin, 1828, p. 339) pour décrire la structure interne d'une membrane végétale. Il indique par ailleurs que « trois [est] une règle constante [dans les organes qui composent les fleurs et les fruits de végétaux monocotylés] », comme 5 l'est pour les dicotylés, postulant un ordonnancement arithmétique dans les végétaux (Turpin, 1828, p. 297).

Les travaux de Braun et Schimper, en particulier leur cadre mathématique, sont aussi rapidement connus en France comme le suggère un commentaire dans un rapport sur un mémoire de botanique d'Alfred Moquin-Tandon (1804-1863) présenté à l'Académie des sciences le 23 juillet 1832 : « MM. Schimper, Alex. Braun et Dunal ont découvert que cette position [des feuilles et des germes] pouvait être calculée à l'aide des fractions continues et formulées d'une manière algébrique. » Charles Martins (1806-1889), germanophone et ami des frères Bravais, publie en 1833 un premier compte rendu de (Braun, 1831), dans lequel il résume les concepts introduits par Braun et les résultats obtenus, illustrés par quelques figures reprises de Braun (Figure 3). Martins souligne la dimension mathématique — cependant parfois obscure — de la méthode du botaniste allemand, tout en regrettant que Braun n'ait pas identifié un « lien commun » (Martins, 1833, p. 326) entre toutes les séries végétales analysées. Le compte rendu de Martins permet de faire connaître à plusieurs naturalistes français les travaux de Braun : Henri Dutrochet (1776-1847) s'appuie sur le texte de Martins pour son étude de la disposition des feuilles sur les

8. Braun, 1831, p. 250-251 par exemple : *Pinus sylvestris* est associé à 13/34 et 8/20, *Pinus strobus* à 13/34 [rare], 8/21 [plus rare] et 5/13 [normal], voir aussi p. 339 le cas de "*Salix triandra*.

9. Schimper, 1830, p. 54-58 par exemple. Schimper indique ainsi (p. 54) : "Verbasc. phoenic. (auch 3/8)" [=*Verbascum phoenicum* (aussi 3/8)], ou ajoute des mentions "*variet* !" pour *Sedum Telephium* (p. 54) ou "*Variat. fol. oppos. decussatis*" pour *Helianthus tuberosus* (p. 55) ou "*variat. fol. ternis*" pour *Lycopodium Phlegmaria* (p. 58).

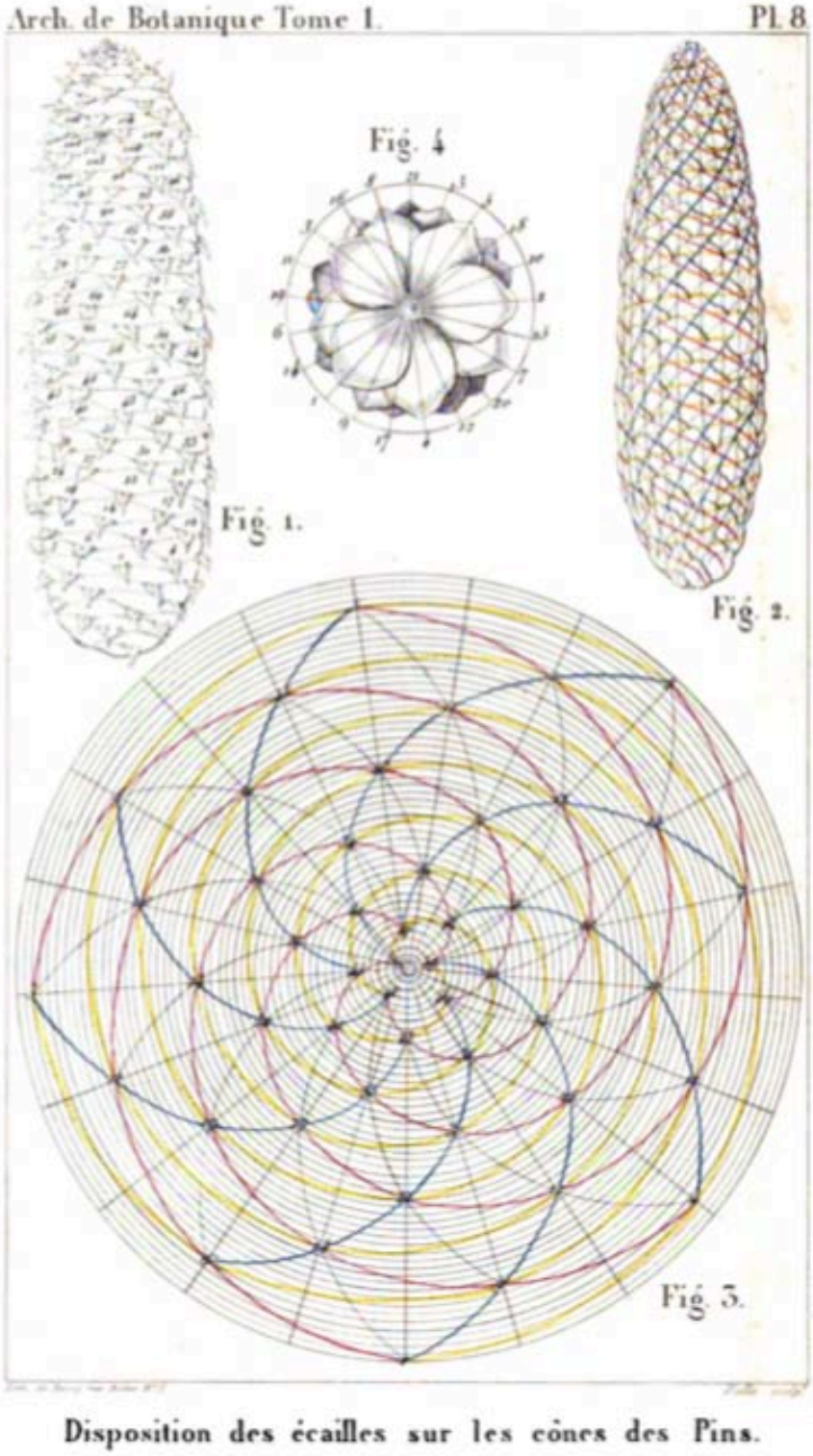


FIGURE 3 – Extraits des figures issues de (BRAUN, 1831), reproduites dans (MARTINS, 1833, pl. VIII).

tiges de jeunes pins en spirales et intègre des représentations graphiques semblables à celles de Braun, quoique plus formalisées (Figure 4). Il intègre aussi les travaux de Turpin, avec l'idée d'une « arithmétique des végétaux (. . .) généralement fondée sur les premiers nombres 2, 3 et 5 » (Dutrochet, 1834, p. 198). Les frères Bravais sont ceux qui approfondiront le plus le traitement mathématique des dispositions végétales de Braun et Schimper, tout en proposant une théorie distincte.

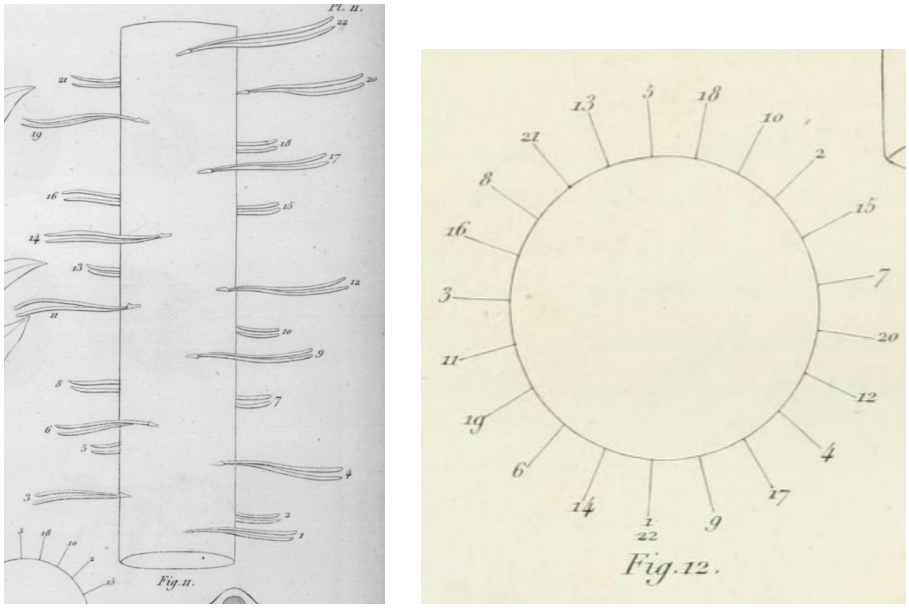


Figure 4 – Disposition des feuilles sur la tige du pin sylvestre. La figure de gauche montre leur « disposition rendue sensible par l'amplification de la tige » et celle de droite représente une « coupe horizontale de la tige », « les numéros des feuilles [étant] placés sur les verticales que ces feuilles occupent » (Dutrochet, 1834, p. 186–189, pl. 11).

Il faut souligner que ces recherches, qui font écho les unes aux autres, ont en toile de fond les grands débats des années 1830 sur l'organisation de la nature, débats auxquels Goethe participe d'ailleurs encore (Massonnaud, 2019). Leur proximité intellectuelle et scientifique est bien perçue par les contemporains : Martins, qui traduit aussi des textes scientifiques de Goethe, rapproche par exemple en 1843 le point de vue de l'auteur allemand de la loi de symétrie de de Candolle (Martins, 1843) et, dans la deuxième moitié du xix^e^siècle, Ernest Faivre, professeur à la Faculté des sciences de Lyon, évoque dans son analyse de l'œuvre scientifique de Goethe les recherches de de Candolle, de Dutrochet, de Turpin, de Martins, des Bravais, aussi bien que celles de Schimper et Braun (Faivre, 1862).

1.2 Les Bravais et la botanique : une chronologie

C'est dans les années 1830 que Louis François et Auguste Bravais commencent leurs activités professionnelles. Leur père, François Victor (1764–1852), est médecin à Annonay et naturaliste amateur ; de son mariage avec Adélaïde Aurélie Thomé (1774-1814), naissent dix enfants, dont

cinq survivent à l'âge adulte : Louis François (1801-1843) suit les traces de son père et soutient une thèse de médecine sur l'épilepsie le 31 mai 1827 ; Camille (1806-1866), licencié en sciences naturelles, devient prêtre et chanoine, tout en continuant de collaborer à certaines expériences de ses frères [10]. Auguste, né le 23 août 1811, le plus jeune enfant survivant du couple, est admis à l'École polytechnique en 1829 et, à sa sortie en novembre 1831, intègre la marine. Entre 1832 et 1837, il alterne missions embarquées, en particulier dans les campagnes de cartographie des côtes d'Algérie, et séjours à terre, à Toulon ou à Annonay, où il se livre à des excursions et observations naturalistes, souvent avec ses frères [11].

Bien que cela puisse paraître quelque peu fastidieux, nous avons fait le choix de reconstituer d'abord une chronologie détaillée des publications des Bravais, d'une part pour mettre en valeur l'intensité de leurs travaux, d'autre part pour souligner l'imbrication de leurs réflexions naturalistes et mathématiques, plus visible au jour le jour que dans les mémoires de synthèse disciplinés. Le 23 février 1835, Louis et Auguste soumettent à l'Académie des sciences de Paris un mémoire « géométrique sur la symétrie des feuilles curvisériées et rectiséries » [12]. Leur terminologie est originale [13] : les Bravais appellent feuilles (ou insertions) curvisériées celles disposées en spirale sur la tige, chacune étant seule sur la verticale qui la contient ; ils appellent feuilles (ou insertions) rectisériées celles organisées en séries verticales parallèles à l'axe de la tige (Bravais & Bravais, 1837c, p. 44). Cette classification est en fait cruciale car, comme nous le verrons, elle marque leur distance par rapport au point de vue de Braun et Schimper pour qui existent toujours des séries verticales. Les commissaires désignés par l'Académie pour examiner le mémoire, Adolphe Brongniart et Turpin, ne rendent leur rapport, très positif, que deux ans plus tard, lors de la séance du 24 avril 1837 (Brongniart & Turpin, 1837) : ils louent l'unification apportée par les deux frères sur laquelle nous reviendrons, le nombre et la précision « des faits qui ont servi de base à leur travail » et la clarification apportée par l'usage « de connaissances mathématiques étendues de l'un d'eux » et concluent qu'ils proposeraient l'insertion du texte

10. Notons que le deuxième frère, François Jules (1802-1854), devient un industriel. Quant à la seule fille, Marie Adélaïde (1810-1908), elle épouse assez tardivement, en novembre 1854, le polytechnicien Henry Tabarin, physicien doyen de la Faculté des sciences de Lyon, cofondateur de la société linnéenne de Lyon et pédagogue réformateur, qui a participé en 1837 au jury de la thèse d'Auguste Bravais.

11. Pour la biographie d'Auguste Bravais, nous renvoyons à (Beaumont, 1865 ; Reynaud, 1991), et pour ses travaux de cartographie à (Bru, 2019).

12. Voir la mention de ce dépôt dans *Procès-verbaux des séances de l'Académie*, tome X (années 1832-1835), p. 665 dans l'édition de 1922, Imprimerie de l'Observatoire d'Abbadia, Hendaye. Un seul auteur (sans prénom indiqué) est alors mentionné. Nous ne connaissons ce mémoire que par le rapport et les versions publiées en 1837-1839, comme expliqué ci-après ; les deux frères, Louis et Auguste y sont alors indiqués comme auteurs.

13. La terminologie usuelle utilisée à leur époque distingue des parties végétales opposées, verticillées et alternées : deux éléments situés d'un côté et de l'autre d'un axe sur un même plan horizontal sont dits opposés ; les éléments sont verticillés, s'ils sont plus de deux autour d'un axe et sur un même plan ; ils sont alternés dans les autres situations (Candolle, 1813, p. 434-435). De Candolle définit également des éléments *en quinconce*, lorsqu'ils sont disposés en spirale de manière à ce que le cinquième élément soit situé à la verticale du premier, et *en spirale*, lorsqu'il faut plus de cinq éléments végétaux pour revenir à la verticale du premier.

dans les mémoires des *Savans étrangers* s'il n'était déjà prêt à paraître ailleurs. De fait, la partie concernant les feuilles curvisériées est publiée dans les cahiers de janvier et février 1837 de la partie « Botanique » des *Annales des sciences naturelles*, revue dont Brongniart est d'ailleurs cofondateur et rédacteur [14]. La deuxième partie, sur les feuilles rectisériées, sera quant à elle, publiée dans la même revue dans les livraisons de juillet et août 1839 (Bravais & Bravais, 1839a).

Signalons deux éléments intéressants pour la chronologie de ces travaux. Tout d'abord, dès l'introduction du mémoire publié, les frères Bravais indiquent qu'ils venaient de « mettre la dernière main à un mémoire sur la symétrie de nœuds-vitaux des plantes » lorsqu'ils ont eu « connaissance des travaux analogues de MM. Schimper et Braun ». Cette information est répétée dans le rapport de l'Académie. La première source citée par les Bravais pour les travaux de Schimper et Braun est le résumé qu'en avait rédigé Martins (Martins, 1833). Ensuite, à la fin du mémoire publié, page 107, est donnée sa date de composition, le 7 février 1835 (avec une note additionnelle d'une page datée du 27 avril 1835, page 108). Cela suggère donc que les frères Bravais auraient travaillé sur la disposition des feuilles avant 1833, aboutissant en 1835 à une version sensiblement refondue présentée à l'Académie et soumise quelques mois plus tard aux *Annales des sciences naturelles*.

Parallèlement, les 28 janvier et 4 février 1837, les Bravais présentent un mémoire sur l'inflorescence, cette fois à la Société philomathique de Paris. Dans ce mémoire, ils font état des résultats de Braun (1835) sur les différents types d'inflorescences, et mentionnent leur « Mémoire encore inédit sur les spirales des feuilles » (Bravais & Bravais, 1837c, p. 12), autrement dit (Bravais & Bravais, 1837a). Tant pour Schimper et Braun que pour les frères Bravais, les réflexions sur la disposition des feuilles le long de la tige sont directement liées à la disposition des fleurs dans les inflorescences. Ce lien est aujourd'hui biologiquement explicable par le fait que les fleurs ne sont généralement que le développement de bourgeons positionnés à l'aisselle de feuilles modifiées, les bractées [15]. La disposition des fleurs dans une inflorescence, qui est basée sur la disposition des bractées sur l'axe de l'inflorescence, est ainsi directement comparable à la disposition des feuilles sur une tige. Nous ne connaissons de la version initiale de ce mémoire sur les inflorescences que le résumé qui en est fait dans les procès-verbaux de la Société, qui montre une observation très précise de la position des pièces foliaires (bractées en particulier) sur un axe, ou sur des axes successifs, et de l'ordre d'ouverture des fleurs. Le résumé précise aussi que les frères Bravais ont alors tenté d'observer dans la partie feuillée d'une plante ce qu'ils avaient observé sur les inflorescences (en particulier s'il y a ou non alternance du sens de

14. (Bravais & Bravais, 1837a), indication du mois en pages 33 et 49 [pour janvier], 81 et 97 [pour février].

15. Les frères Bravais explicitent d'ailleurs l'intérêt d'utiliser le terme générique d'insertion : « Quoique la feuille et le noeud-vital protégé par elle soient deux organes bien distincts, nous ne les séparerons point ici, et nous emploierons souvent le mot vague d'insertion qui offre l'avantage de s'appliquer également bien d'une part à la feuille et aux divers organes foliacés, tels qu'écaille, bractée, phyllode, sépale, pétale, etc. ; d'autre part au noeud-vital et aux bourgeons, rameaux, rayons, pédoncules qui en dérivent » (Bravais & Bravais, 1837a, p. 44).

la spire reliant les pièces foliaires entre elles). La version définitive du mémoire est elle aussi publiée cette même année 1837 dans les *Annales des sciences naturelles* (Bravais & Bravais, 1837b) [16].

Auguste, seul cette fois, présente par ailleurs le 20 mai 1837 à la Société philomathique un mémoire purement mathématique sur les points du plan à coordonnées entières (dans un système convenable de coordonnées), et dans la foulée soumet ces recherches sur le même sujet le 3 juillet à l'Académie des sciences, qui les confie à l'expertise de Siméon-Denis Poisson et de Charles-François Sturm. De ce mémoire, nous ne connaissons une fois encore que le résumé dans les procès-verbaux de la Société philomathique et le rapport des commissaires de l'Académie publié le 12 décembre 1837(Bravais, 1837 ; Sturm, 1837) : l'objectif semble ici de représenter géométriquement des problèmes diophantiens, par l'intersection de courbes planes avec « une sorte de réseau ou de canevas » formé par les points à coordonnées entières (Bravais, 1837, p. 88), et de retrouver par exemple certains développements périodiques en fraction continue liés aux solutions d'équations quadratiques ; le lien avec la « disposition des organes foliacés autour de la tige d'une plante » n'est que signalé brièvement (Sturm, 1837, p. 869). Notons enfin qu'en septembre 1837, Auguste Bravais fait paraître avec Martins dans les *Annales de sciences naturelles* une présentation résumée des travaux de Schimper et Braun et que le 5 octobre de la même année, il soutient une thèse de mathématiques à la Faculté des sciences de Lyon — comme il est obligatoire à l'époque, elle contient une partie mécanique et une partie astronomique, en l'occurrence inspirées par des questions de navigation et sans lien direct avec les thèmes traités ici, nous n'y reviendrons donc pas.

Comme en témoignent en particulier leurs interventions à la Société philomathique, dont ils sont devenus membres correspondants, les Bravais sont dès cette époque bien intégrés dans les cercles savants, au niveau national. Un témoignage supplémentaire en est donné par l'attribution par de Candolle, dès 1838, du nom *Bravaisia* à un genre de plantes à fleurs de la famille des Acanthaceae. En septembre 1838, les Bravais élargissent d'ailleurs encore leur public [17] en présentant leurs travaux au Congrès scientifique de France qui se tient cette année-là à Clermont-Ferrand [18].

16. Selon les indications d'impression, la première partie est imprimée dans le cahier d'avril 1837 (mois donné page 193), la deuxième partie en mai 1837 du même tome (mois donné page 289) et la dernière partie dans le cahier de juillet, dans le volume suivant (mois donné page 17). Les planches, numérotés de VII à XI sont associés au volume 7 de la revue mais expliquées dans le volume 8 (pages 37-42).

17. Leurs mémoires des *Annales*, y compris le résumé avec Martins, sont réimprimés ensemble, en volume séparé, chez Paul Renouard, à Paris, cette même année 1838.

18. Louis Bravais résume leurs recherches le 4 septembre, à la séance d'ouverture des sections réunies d'histoire naturelle et des sciences physiques et mathématiques (Bravais & Bravais, 1839c), la communication étant ensuite insérée dans les procès verbaux du Congrès (Bravais & Bravais, 1839b).

1.3 Les mathématiques pour comprendre les dispositions végétales : vers l'élaboration de systèmes unifiés pour les feuilles curvisériées

Les travaux des frères Bravais ont pour objectif de rendre compte d'un ordre naturel en analysant géométriquement la « symétrie des plantes » (Bravais & Bravais, 1839b, p. 278-279). Ils partagent d'ailleurs cette recherche d'une harmonie mathématique de la nature avec les travaux organographiques cités précédemment, postulant une unité végétale (jusqu'à un certain point) et essayant de déterminer un ensemble unique de lois pour décrire l'arrangement des parties végétales, tout particulièrement la disposition des feuilles autour de la tige. Leurs objectifs sont multiples : donner l'explication la plus uniforme possible des différents systèmes de feuilles connus, proposer une classification de ces systèmes et prévoir l'existence possible de systèmes dont aucun spécimen n'a été observé jusque là.

L'analyse du premier mémoire, publié en 1837, l'« Essai sur la disposition des feuilles curvisériées » (Bravais & Bravais, 1837a), permet de comprendre la méthode et la théorie organographique des Bravais : plutôt que d'adopter, comme Braun et Schimper, l'hypothèse de rationalité des divergences (ce qui conduit, comme nous l'avons dit, à obtenir plusieurs divergences pour un même spécimen végétal), les Bravais argumentent au contraire en faveur d'une divergence unique, irrationnelle : les fractions diverses exprimant les divergences selon Braun et Schimper ne seraient en fait que des approximations de cette divergence unique. Nous nous concentrerons ici sur ce mémoire, qui comprend d'ailleurs l'essentiel des réflexions et démonstrations mathématiques appliquées ensuite aux questions botaniques. Un détail de la rédaction, l'utilisation de la première personne du singulier en pages 51 (« l'insertion $n+n'$ que je nommerai n'' ») et 57 (« Je finirai ce paragraphe par la solution de l'objection suivante »), suggère qu'un seul des deux frères (Auguste, probablement) serait l'auteur principal des pages mathématiques.

Les Bravais introduisent d'abord la terminologie nécessaire à leur argumentation. À la spire génératrice (qui, rappelons-le, est une spire fictive qui passe par toutes les insertions) est associée δ_1, la divergence génératrice [19]. Les spires secondaires sont des spires (fictives) qui passent par un sous-ensemble des insertions (1 insertion sur 5, 1 sur 13, etc., selon le cas, ce qui définit leur type) ; les spires de même type forment ainsi des familles finies de spires parallèles dont la réunion contient toutes les insertions. En numérotant, à partir d'une insertion arbitrairement choisie notée 0, toutes les insertions successivement sur la spire génératrice, on aura par exemple, dans le cas de « spires de (type) 5 », 5 spires parallèles, passant respectivement par les insertions (0, 5, 10, . . .), (1, 6, 11, . . .), (2, 7, 12, . . .), (3, 8, 13, . . .) et (4, 9, 14, . . .). Le nombre de spires secondaires du même type est appelé *nombre secondaire* (c'est 5 dans l'exemple précédent) et la *divergence*

19. L'ambiguïté terminologique, entre l'angle de divergence à proprement parler et la portion de circonférence associée, est fréquente dans tous ces travaux botaniques, le contexte rendant clair la quantité prise en compte. Une divergence peut ainsi être exprimée indifféremment dans les textes comme 5/13 ou comme 138° 28'. Par convention, les divergences sont choisies plus petites que 180°, quitte à ajuster le sens de parcours sur la spire.

secondaire est la divergence qui sépare une insertion de la suivante sur une spire secondaire. Le *nombre encyclique* correspondant est le « nombre de *tours* nécessaires à la spire génératrice pour aller d'une feuille [ou insertion] à la feuille suivante d'une spire secondaire » (Bravais & Bravais, 1837a, p. 43-44). Les Bravais énoncent ensuite les hypothèses permettant « de traiter rigoureusement la question de la symétrie », c'est-à-dire de traduire un questionnement botanique en un problème géométrique : la tige et les spires secondaires sont respectivement identifiées à un cylindre et à des hélices parallèles entre elles et équidistantes. Se plaçant d'abord dans la situation où il existe deux systèmes de spires secondaires dont les nombres sont premiers entre eux, les Bravais reformulent alors le problème de la disposition des insertions des feuilles sur une tige : « Ainsi, étant donnés sur un cylindre des points disposés de manière à figurer, en deux sens divers, deux systèmes de spires parallèles et équidistantes, il s'agit de trouver la loi qui préside à la distribution de ces points. » (Bravais & Bravais, 1837a, p. 46) [20]. Le développement du cylindre dans le plan fait donc apparaître les deux systèmes d'hélices comme deux ensembles de droites parallèles, dont les intersections, numérotées, correspondent aux insertions sur la tige (Figure 5). La disposition des insertions des feuilles autour d'une tige est ainsi figurée comme un réseau plan de points indexés par les nombres entiers successifs à partir de 0. Si Braun avait déjà introduit des réseaux de points en 1831, l'originalité ici consiste en la possibilité d'un traitement géométrique et arithmétique de cette configuration. Les Bravais obtiennent ainsi une relation arithmétique entre la divergence principale et une divergence secondaire d'un végétal donné ; elle est ensuite utilisée pour déterminer l'une ou l'autre à partir de mesures effectuées ou pour calculer des divergences théoriques.

Pour cela, les Bravais énoncent et justifient six règles qui seront ensuite appliquées dans la deuxième partie du mémoire. Ils démontrent en particulier, à partir des systèmes de droites du réseau (représentant les spires secondaires) l'existence d'une spire génératrice dont les insertions consécutives sont toutes séparées par une même divergence et expliquent comment la construire à partir du réseau. Ils montrent aussi que les numéros de deux insertions successives d'une spire secondaire diffèrent entre eux du nombre secondaire associé (Bravais & Bravais, 1837a, p. 47–48). Par exemple, sur la figure 5, les huit spires secondaires représentées par les droites parallèles à (AG) forment un système de spires noté 8D (D comme dextrose, pour indiquer que ces spires vont de la gauche vers la droite) [21]. Pour chaque spire de ce système, deux insertions consécutives ont leurs numéros distants de 8. Par ailleurs, comme on le voit sur la figure, le nombre encyclique correspondant est 3, puisqu'il faut trois segments de droites, correspondant chacun à un tour complet autour du cylindre-tige pour aller de l'insertion-origine 0 à la suivante sur la spire secondaire, c'est-à-dire l'insertion 8 [22]. De même, les cinq spires secondaires représentées par

20. Les Bravais sont tout à fait conscients que de nombreux cas rencontrés chez les végétaux ne correspondent pas exactement à cette modélisation. Ils consacrent d'ailleurs la fin du premier chapitre à ces cas irréguliers et montrent que les règles énoncées dans le chapitre sont toujours valables (Bravais & Bravais, 1837a, p. 58-61).

21. Rappelons que les Bravais considèrent des divergences inférieures à 180°.

22. Le premier segment passe par 1 et 2, le suivant par 3, 4, 5, le dernier par 6 et 7.

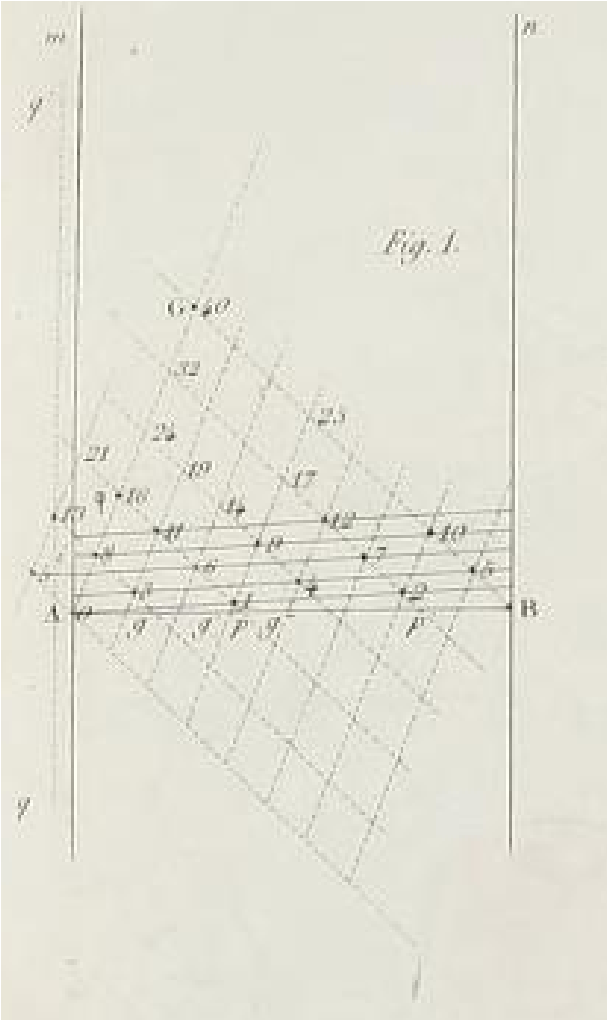


Figure 5 – Développement de la surface d'une tige cylindrique (Bravais & Bravais, 1837b, pl. 2, fig. 1).

des droites parallèles à (BG) forment un système 5S (comme sinistrose, ces spires allant vers la gauche) et deux de leurs insertions successives ont des numéros distants de 5. Le nombre encyclique de cet autre système est 2.

En notant δ_n la divergence secondaire sur la spire joignant 0 à l'insertion n sans insertion intermédiaire, et en évaluant de deux manières différentes le parcours de 0 à n, les Bravais obtiennent l'équation (A) : $n \cdot \delta_1 = \Delta_n \cdot 360° + \delta_n$ (en considérant que la divergence secondaire est positive ou négative selon que la première insertion se situe à droite ou à gauche de la droite Am) [23]. Cette équation permet de déterminer une divergence à partir d'observations et de mesures : dans l'exemple ci-dessus, si une mesure de la divergence à l'insertion 8 fournit 40°, alors la divergence de la spire génératrice sera de 140°.

Les Bravais analysent ensuite les dispositions d'insertions dans les spires secondaires. D'une part, pour deux nombres entiers n et n', correspondant à des insertions sur deux systèmes de spires, l'analyse du passage d'une insertion de numéro n à une insertion de numéro $n + n'$ leur

23. Les Bravais remarquent que dans le cas où les insertions seraient en rangées verticales, leur divergence secondaire étant nulle, l'équation (A) deviendrait alors (B) : $\delta_1 = \frac{\Delta_n}{n} \cdot 360°$.

donne les relations $\Delta_{(n+n')} = \Delta_n + \Delta_{n'}$ et $\delta_{(n+n')} = \delta_n + \delta_{n'}$. La série récurrente formée par les sommes consécutives — $n'' = n + n'$, $n''' = n'' + n'$, ... — peut ainsi être associée aux séries correspondantes des nombres encycliques et des divergences secondaires, « séries récurrentes [qui jouent] un rôle important dans les végétaux » (Bravais & Bravais, 1837a, p. 52). D'autre part, si 0 est le point de départ d'une spire où l'insertion suivante est k et si 1 est le point de départ d'une spire dont le point suivant est k' où k et k' sont deux termes consécutifs de la série récurrente associée au végétal considéré (la série 1, 2, 3, 5, 8... sur la figure 5 par exemple), alors 0 (respectivement 1) est le point de départ d'une progression arithmétique, dont les termes sont $0, k, 2k, \ldots$ (respectivement $1, 1+k', 1+2k', \ldots$) et les insertions correspondantes constituent une spire par k (respectivement une spire par k'). Si on note x (respectivement x'), le nombre de pas dans la spire par n (respectivement par n'), alors le passage de 0 à 1 par ces deux spires revient à résoudre l'équation $xn = x'n' + 1$. La théorie des fractions continues (bien connu des élèves polytechniciens de l'époque et dont les résultats pertinents sont rappelés en note par les Bravais) montre que x et x' correspondent au numérateur et au dénominateur de l'avant-dernière réduite du développement en fraction continue de $\frac{n}{n'}$. Un raisonnement fondé sur la considération de triangles semblables permet de plus de déduire que x et x' correspondent respectivement aux nombres encycliques Δ_n et Δ'_n (Bravais & Bravais, 1837a, p. 48, p. 53). Par ailleurs, grâce à la relation (A), les valeurs de $\frac{\Delta_n}{n} \cdot 360°$ fournissent des approximations de la divergence principale, en changeant le type des spires prises en compte, et la valeur de n.

Dans le cas où les nombres secondaires admettent un diviseur commun K, il n'existe pas de spire génératrice unique et les Bravais désignent « ce nouvel ordre des choses sous le nom d'ordre conjugué ou de système conjugué » (Bravais & Bravais, 1837a, p. 54) : ces systèmes sont tels qu'il y a K intersections du réseau plan avec l'horizontale, autrement dit K insertions sur la circonférence AB du cylindre-tige. La circonférence est ainsi divisée en K parties égales (voir la figure 6, qui présente un cas de système bijugué, c'est-à-dire pour lequel K=2, et un cas de système trijugué, pour lequel K=3). Cette situation est celle d'une tige où apparaissent des groupements (appelés verticilles) de K insertions à chaque section transversale. Les Bravais numérotent les insertions par K séries de nombres (par exemple, 0, 0', 0" ; 1, 1', 1" ; ... dans le cas où K=3), qui correspondent à K spires génératrices parallèles. Un système trijugué peut être ramené à un système simple en considérant le tiers de la circonférence AB et en supprimant les primes et les secondes des numéros du tiers gauche de la tige déroulée (cf. Figure 6, à droite, tiers gauche) et il est ainsi très simple de déterminer les lois d'un système conjugué à partir de celles d'un système simple (Bravais & Bravais, 1837a, p. 56-57).

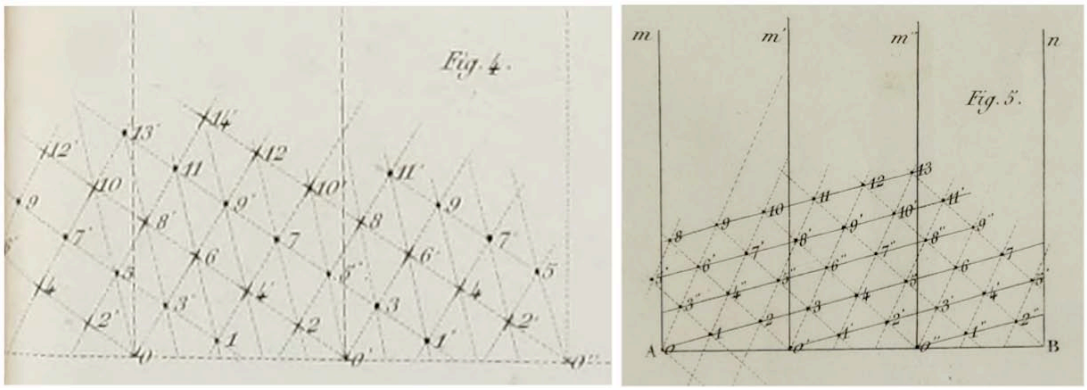


FIGURE 6 – Représentation plane d'un système bijugué (à gauche) et trijugué (à droite), (BRAVAIS & BRAVAIS, 1837a, pl. 2, Fig. 4 & 5).

1.4 « Une fois la question posée ainsi, les mesures directes sont à-peu-près inutiles pour la résoudre »

Dans la deuxième partie du mémoire, les Bravais se servent des règles et des lois qu'ils ont précédemment énoncées pour traiter leurs observations végétales, et les comparer aux résultats de Braun et Schimper. Une question cruciale est l'exactitude et la précision des observations, dont dépend la détermination des divergences. Selon la longueur des mérithalles (c'est-à-dire de l'espace entre deux groupes d'insertions sur la tige), la forme de la tige ou son éventuelle torsion, les résultats obtenus sont variables et plus ou moins fiables, les mesures étant plus difficiles à effectuer sur des tiges à mérithalles longs par exemple. Une observation fine montre souvent que les insertions n° 5, 8 ou 13 ne sont jamais situées exactement à la verticale de l'insertion 0, contrairement à ce que les modélisations de Braun et Schimper supposent. Dans le cas du Lis blanc, les Bravais indiquent qu'ils ont eu des difficultés à décider si la configuration était en 5 (6e feuille à la verticale de la feuille 0, et donc une divergence de $\frac{2}{5}$) ou en 8 (neuvième feuille à la verticale de la feuille origine, divergence de $\frac{3}{8}$) ou plus. Adopter l'hypothèse de rationalité de Schimper et Braun amènerait donc à la conclusion qu'une même espèce, voire un même individu végétal, pourrait présenter différentes divergences rationnelles. Mais en mesurant les divergences secondaires et en calculant les divergences principales correspondantes à partir de l'équation (A), les Bravais ont toujours trouvé une divergence génératrice comprise entre 137°et 138°. Ce premier exemple les a donc amenés à « pressentir que la divergence génératrice à une valeur constante dans les végétaux » (BRAVAIS & BRAVAIS, 1837a, p. 66).

Pour confirmer leur hypothèse, les Bravais commencent par traiter de ce qu'ils appellent le « système ordinaire » ou la « symétrie ordinaire », qui correspond aux cas où les nombres secondaires suivent la série récurrente 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc. ; cette situation est celle d'environ 19 vingtièmes des végétaux observés. Ils en déduisent d'après les formules de la première partie que les nombres encycliques suivent la même série, décalée de deux rangs : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, etc. Ces deux séries de nombres permettent : 1) de déterminer les divergences génératrices selon

l'hypothèse de Braun et Schimper, c'est-à-dire l'existence de systèmes de rangées verticales des insertions (tableau I de la figure 7) ; 2) de calculer les divergences principales à partir de mesures de divergences secondaires, plus faciles à mesurer, et de l'équation (A). Or, ces seconds calculs donnent toujours des divergences principales comprises entre 137°27' et 138°, sachant que les fluctuations peuvent être dues à des erreurs d'observations difficilement décelables à l'oeil nu [24]. Rappelant que les divergences rationnelles de Braun et Schimper correspondent aux réduites consécutives de la fraction continue périodique associée à la suite de Fibonacci $\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}}$, les Bravais préfèrent l'hypothèse d'une divergence principale unique et invariable, irrationnelle, qui apparaît avec une probabilité maximale dans les observations. Cette probabilité grandit avec la densité des feuilles — les mérithalles étant dans ce cas plus courts et les observations associées, plus précises ; or, les cas où les feuilles sont les plus denses correspondent aux observations où les divergences sont égales aux réduites les plus élevées. Les Bravais concluent : « Une induction très forte nous porte à étendre ces résultats aux *réduites* supérieures que la nature n'a pas encore fait observer, telles que $\frac{144}{377}$, $\frac{233}{610}$, $\frac{377}{987}$, etc., et dans ce cas la probabilité devient infinie pour la fraction génératrice, *qui n'est autre que la réduite d'un rang infini* » (Bravais & Bravais, 1837b, p. 70–71). En d'autres termes, la divergence unique correspond à la valeur de la fraction continue (non tronquée), c'est-à-dire $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot 360°$, soit environ 137°30'28", une valeur parfaitement compatible avec les observations. Il est possible de calculer à partir de cette divergence principale les divergences secondaires théoriques en utilisant les nombres secondaires et encycliques donnés précédemment (tableau II de la figure 7).

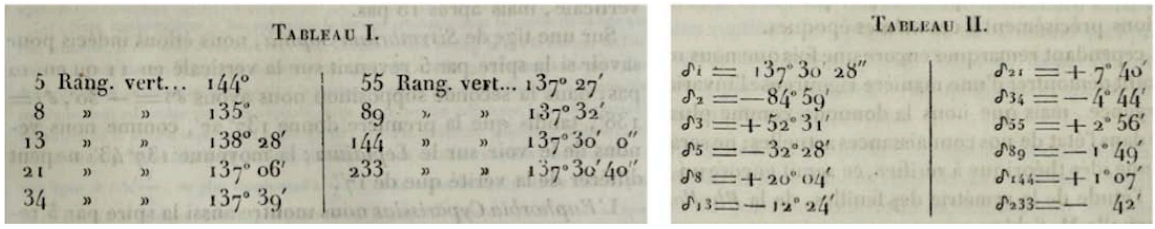


Tableau I.

5	Rang.	vert...	144°	55	Rang.	vert...	137° 27′
8	»	»	135°	89	»	»	137° 32′
13	»	»	138° 28′	144	»	»	137° 30′ 0″
21	»	»	137° 06′	233	»	»	137° 30′ 40″
34	»	»	137° 39′				

Tableau II.

$\delta_1 =$ 137° 30′ 28″	$\delta_{21} = +$ 7° 40′
$\delta_2 = -$ 84° 59′	$\delta_{34} = -$ 4° 44′
$\delta_3 = +$ 52° 31′	$\delta_{55} = +$ 2° 56′
$\delta_5 = -$ 32° 28′	$\delta_{89} = -$ 1° 49′
$\delta_8 = +$ 20° 04′	$\delta_{144} = +$ 1° 07′
$\delta_{13} = -$ 12° 24′	$\delta_{233} = -$ 42′

Figure 7 – Divergences théoriques des feuilles curvisériées disposées suivant la série récurrente 1, 2, 3, 5, 8, etc., selon : 1) l'hypothèse de systèmes de rangées verticales (Braun & Schimper) et l'application de l'équation (B) ; 2) l'hypothèse d'une divergence irrationnelle unique (Bravais & Bravais) : les divergences secondaires sont calculées en fonction de la divergence principale théorique et avec l'équation (A). (Bravais & Bravais, 1837b, tab. I, p. 67 & tab. II, p. 74)

Les Bravais sont conscients que la théorie qu'ils défendent n'est pas démontrée plus rigoureusement que celles de leurs collègues allemands et que les mesures effectuées ne permettent en aucun cas de trancher :

> La seule théorie que l'on puisse élever contradictoirement à celle d'une divergence invariable est celle d'un angle variable qui suivrait les valeurs des diverses réduites,

24. Les Bravais précisent que, pour une tige d'un diamètre d'un centimètre, une différence d'arc d'1° correspond à environ 8 centièmes de millimètre (Bravais & Bravais, 1837b, p. 69).

> et qui offrirait la particularité d'être toujours *rationnel* avec la circonférence, et c'est effectivement à cette hypothèse que MM. Schimper et Braun se sont arrêtés.
>
> Une fois la question posée ainsi, les mesures directes sont à-peu-près inutiles pour la résoudre. (Bravais & Bravais, 1837b, p. 71)

La préférence pour leur théorie, que les Bravais considèrent néanmoins comme « plus probable dans l'état de nos connaissances actuelles » (Bravais & Bravais, 1837b, p. 73), s'appuie sur une simplicité supposée de la nature : des « lois d'analogie d'après lesquelles nous rattachons une même cause à des effets semblables » et donc le choix de « la loi la plus simple » (Bravais & Bravais, 1837b, p. 71). En effet, l'hypothèse de la rationalité des divergences, impliquant l'existence de divergences différentes au sein d'une même espèce, voire d'un même individu, s'opposerait aux lois d'analogie. De plus, les divergences rationnelles les plus simples, celles formées par les premières réduites ($\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, etc.), n'apparaîtraient que rarement et sur des végétaux pour lesquels les observations sont particulièrement peu précises, comme les spécimens à mérithalles longs, ce qui contredit la simplicité de la nature (Bravais & Bravais, 1837b, p. 72-73).

Les Bravais listent ensuite différents « caractères utiles pour la distinction des genres et des espèces » (Bravais & Bravais, 1837b, p. 76) qui permettent de penser une classification des végétaux relevant du système ordinaire. Ils analysent ensuite d'autres systèmes moins répandus, associés à d'autres suites récurrentes, en calculant à chaque fois les divergences selon la méthode de Braun et Schimper et selon leur propre théorie (Bravais & Bravais, 1837b, p. 87-95). Ils traitent enfin des systèmes conjugués en observant que statistiquement, ce sont encore la suite 1, 2, 3, 5, 8, etc. et les systèmes bijugués qui sont les plus courants [25]. Ils notent également que les systèmes conjugués ne sont pas caractéristiques d'espèces végétales, mais sont des variations du système ordinaire ; un exemple est celui des involucres des *Scabosia* (Figure 8), qui manifeste deux organisations, selon le système ordinaire et selon le système bijugué, distinguables grâce à la mesure des angles entre les six premières folioles.

Les travaux botaniques des Bravais manifestent des caractéristiques que nous retrouverons dans les recherches cristallographiques d'Auguste : leur argumentaire articule des convictions épistémologiques — simplicité, harmonie et unité de la nature —, une grande quantité d'observations et de mesures sur des spécimens naturels — les leurs et celles consignées dans plusieurs traités de botanique du second XVIIIe siècle et du premier tiers du XIXe siècle — et un appui, tant conceptuel que technique, sur les mathématiques. Il faut souligner que l'ajustement de ces caractéristiques ne va pas de soi : la simplicité botanique, par exemple, ne coïncide pas nécessairement avec la simplicité mathématique privilégiant les nombres rationnels. Une régularité trop abstraite (postuler la rationalité des divergences), trop simple, pourrait ne pas rendre compte de la nature aussi correctement qu'un modèle mathématiquement plus délicat. Si quelques outils

25. Voir (Bravais & Bravais, 1837b, p. 87-95). Le tableau IX récapitule l'observation de 350 capitules de *Dipsacus sylvestris* par exemple.

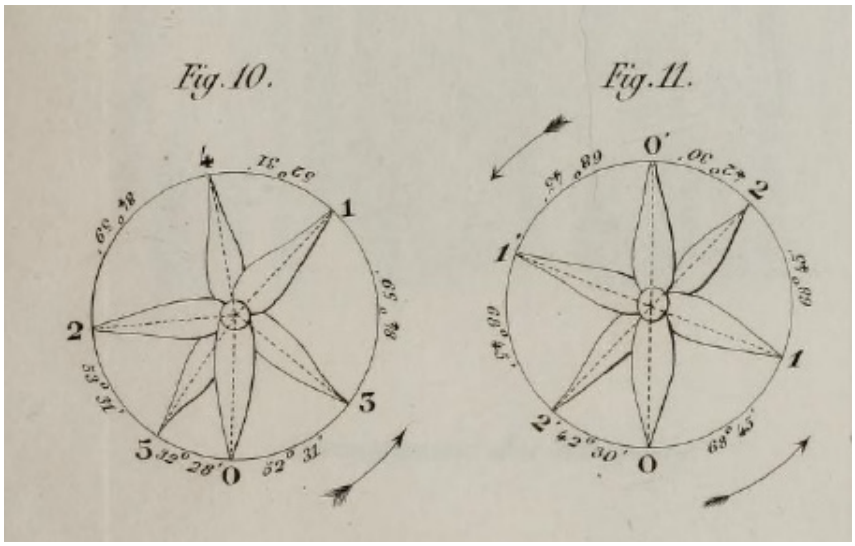


FIGURE 8 – Les six premières feuilles d'un involucre de scabieuse, respectivement disposées selon les système ordinaire et le système bijugué (BRAVAIS & BRAVAIS, 1837b, pl. 1, Fig. 10 & 11). Les mesures d'angles indiquées permettent de calculer une divergence principale de 137°31' pour le système ordinaire et de 68°45' pour le système bijugué, soit la moitié.

(les suites récurrentes et les fractions continues) étaient déjà présents dans les travaux de Braun notamment, les Bravais mobilisent bien plus systématiquement les ressources mathématiques de l'éducation polytechnicienne d'Auguste [26] : les fractions continues et les équations indéterminées sont bien sûr des classiques de l'enseignement en classes de mathématiques élémentaires et spéciales, les traitements statistiques de séries d'observations et les estimations d'erreurs reposent sur la méthode des moindres carrés [27] et surtout, la géométrie descriptive, au centre de la formation de tout polytechnicien, fournit l'idée clé de transformer les hélices, supports fictifs des insertions tout autour du cylindre-tige, en un réseau plan (SAKAROVITCH, 1998). Tout en reconnaissant que la plupart de leurs développements mathématiques sont hors de portée de beaucoup de botanistes (BRAVAIS & BRAVAIS, 1837b, p. 61), les Bravais revendiquent une telle approche géométrique de la botanique :

> On ne doit peut-être point dédaigner, dans l'étude des modifications de la force vitale, de semblables comparaisons rendues faciles par l'étude *géométrique* des végétaux, et cette note ainsi que la précédente ne donnent même qu'une faible idée des ressources que peut fournir ce mode d'étude au botaniste organographe. (BRAVAIS & BRAVAIS, 1837b, p. 36)

26. Les parties mathématiques de ces mémoires sont vraisemblablement de son fait. Dans leur rapport sur l'« Essai géométrique... », Brongniart et Turpin soulignent d'ailleurs l'importance des « connaissances mathématiques étendues de l'un d'eux [Auguste], ancien élève distingué de l'École polytechnique » (BRONGNIART & TURPIN, 1837, p. 621). Rappelons aussi qu'Auguste seul présente un mémoire sur les « réseaux » plans de points en 1837 directement connecté aux mathématiques utilisées par les deux frères en botanique.

27. Voir entre autres (BRAVAIS & BRAVAIS, 1837b, p. 63-64). Ces techniques de probabilité sont aussi à l'œuvre à la même époque dans le travail d'Auguste Bravais en cartographie (BRU, 2019).

Se manifeste aussi l'ambiguïté du positionnement de ces recherches par rapport à une théorie de l'ordre. D'une part, le problème des mesures est central ici — les Bravais parlent de botanométrie — et les techniques mathématiques des Bravais sont plutôt associées à cette époque à des considérations de grandeur. À cet égard, alors que le point de vue de Braun et Schimper mettait l'accent sur une disposition discrète des insertions, puisque les angles de divergence (principaux) sont dans leur théorie des fractions simples de la circonférence, le point de vue des Bravais introduit des nombres réels, irrationnels, qui ne sont qu'approchés par des fractions, ce qui rendrait artificielle une modélisation par le discret [28]. Toutefois, les problèmes soulevés par la botanique conduisent à examiner mathématiquement des configurations discrètes sur les hélices, ou, par projection, sur des cercles — on pourra ainsi rapprocher les dessins de la figure 8 et ceux liés aux racines de l'unité qui servent d'inspiration à Louis Poinsot. Ils fournissent aussi de nouveaux objets mathématiques à étudier, comme les réseaux discrets de points, réseaux plans pour les insertions végétales, qui seront étendus à l'espace pour les cristaux et qui sont associés à des savoir-faire particuliers. Par exemple, les Bravais utilisent des marches dans ces grilles discrètes ou des arguments fondés sur l'absence de points intermédiaires entre deux insertions bien choisies, arguments que nous retrouverons pour étudier une maille cristalline élémentaire. Dès ce moment, les Bravais pensent d'ailleurs à la possibilité d'aborder d'autres aspects de la nature par les mêmes méthodes. Louis, qui est le porte-parole des deux frères lors du Congrès scientifique de France en 1838,

> ajoute qu'il ne lui semble pas impossible d'appliquer une théorie en quelques points analogues à la cristallographie, et exprime le désir que des tentatives soient faites pour formuler, par des séries indéfinies, les relations qui peuvent exister entre les minéraux, quant aux angles de leurs molécules élémentaires. (Bravais & Bravais, 1839c, p. 9)

2 Auguste Bravais et la cristallographie

Les travaux de cristallographie pour lesquels Bravais est peut-être le plus connu ne semblent pourtant commencer que dix ans environ après ceux sur la botanique qui viennent d'être évoqués. Dans l'intervalle, Bravais, nommé à la Commission scientifique du nord par le ministre de la Marine, fait de nombreuses observations au Finmark et en Laponie, des aurores boréales aux populations locales, de la météorologie à l'astronomie [29]. Lors de son voyage de retour par

28. Rappelons que les travaux des Bravais sont antérieurs aux développements de la théorie algébrique des nombres, après lesquels les réels spécifiques intervenant ici comme limites de réduites fractionnaires seront perçus comme des nombres algébriques particuliers, solutions d'équations polynomiales, quadratiques, à coefficients entiers, et récupérés dans une vision sinon discrète, du moins dénombrable, opposée au continu de l'ensemble des nombres réels.

29. Sur ces voyages et les excursions scientifiques en montagne des années 1840, voir (Reynaud, 1991).

terre, il se livre avec Charles Martins, qui fait aussi partie de la Commission, à une étude de la croissance du pin sylvestre sous différentes latitudes qui, de manière caractéristique, mélange de nombreuses observations, organisées par des arguments de géométrie élémentaire et de statistiques, et s'achevant sur « l'indispensable nécessité de reboiser nos montagnes dans l'intérêt du commerce, de la marine et de l'agriculture » (Bravais & Martins, 1841). Nommé en 1840 professeur de mathématiques appliquées à l'astronomie à la Faculté des sciences de Lyon, Bravais obtient cinq ans plus tard la chaire de physique de l'École polytechnique en remplacement de Gabriel Lamé ; il continue néanmoins à rendre compte de ses recherches sur différents phénomènes rencontrés au cours de ses voyages ou expéditions scientifiques.

Dans un long mémoire sur les halos, d'abord soumis et résumé à l'Académie des sciences le 31 mai 1847 (Bravais, 1847b ; Bravais, 1847a), Bravais consacre en particulier une section à « la forme cristalline de la neige ». Il s'agit de ramener « les formes si variées et presque innombrables que présentent les cristaux de neige » à

> quelques-unes plus simples qui permettent de remonter à la forme élémentaire, à celle que les minéralogistes désignent sous le nom de *forme primitive* (Bravais, 1847a, p. 3).

Ce sont ces publications sur les nuages à particules glacées, les halos et la forme polyédrique de la neige qui débouchent sur la série consacrée à la classification plus générale des cristaux, un pas que Bravais franchit l'année suivante, après d'autres articles sur des phénomènes connexes, comme l'arc-en-ciel blanc. Tous les mémoires évoqués sont impressionnants par leur précision, leur prise en compte d'une masse de données et de recherches antérieures [30] et leur succession rapide. Comme pour la botanique, une chronologie détaillée aide à en apprécier l'ampleur, l'articulation et le développement.

2.1 Un panorama chronologique des mémoires cristallographiques de Bravais

Le 2 décembre 1848, Bravais introduit dans une communication à la Société philomathique des objets mathématiques représentant des distributions régulières et discrètes de points, en dimension 1 (les rangées), 2 (les réseaux) et enfin 3 (les assemblages) et en explique les symétries possibles (Bravais, 1848a). La communication est catégorisée comme relevant de « géométrie », mais les symétries sont associées à la fin de l'article à différents systèmes cristallins et les phénomènes d'hémiédrie et d'hémitropie évoqués [31].

30. La partie descriptive du mémoire sur les halos comprend environ, dit Bravais, cent cinquante observations, dont vingt-quatre du XVIIe siècle, (Bravais, 1847b, p. 942).

31. Ces deux phénomènes sont maintenant décrits en termes de défaut de symétries, selon le point de vue même de Bravais. A l'époque, selon le *Dictionnaire de la langue française* de Littré, par exemple, un cristal hémitrope est formé de deux moitiés dont l'une semble avoir fait sur l'autre une demi-révolution et un cristal hémièdre présente

Le 11 décembre, Bravais dépose à l'Académie des sciences un manuscrit sur les assemblages ; les commissaires désignés pour l'examiner sont deux mathématiciens ayant travaillé sur la description de phénomènes physiques, Jean-Baptiste Biot et Augustin Cauchy (qui écrira le rapport), deux minéralogistes François Sulpice Beudant et Armand Dufrénoy et un physicien et chimiste, Henri Victor Regnault. Ce choix manifeste bien la double appartenance du mémoire, d'ailleurs étiqueté à la fois en « géométrie » et en « cristallographie », non seulement par l'auteur, mais aussi par l'Académie ; Bravais fait aussi insérer un résumé décrivant l'ensemble de son projet dans les comptes rendus hebdomadaires (Bravais, 1848b). Le scénario sera d'ailleurs le même qu'en botanique, le manuscrit sur les assemblages sera publié, non dans le recueil des mémoires de savants étrangers de l'Académie, mais dans un journal au rythme de publication plus rapide, en l'occurrence, celui de l'École polytechnique, en 1850 (Bravais, 1850a).

L'année 1849 témoigne d'une activité toujours aussi intense : elle s'ouvre le 26 février par le dépôt d'un deuxième manuscrit à l'Académie (qui hérite des mêmes rapporteurs, rejoints par le mathématicien Gabriel Lamé) ; celui-ci formera la première partie du mémoire le plus célèbre de Bravais (Bravais, 1851a). Se succèdent ensuite en cascade des communications à la Société philomathique, les 17 et 24 mars, le 19 mai, le 2 juin, le 7 juillet et le 17 novembre (Bravais, 1849a ; Bravais, 1849g ; Bravais, 1849c ; Bravais, 1849f). Elles sont ponctuées par la publication de deux articles de pure mathématique sur les polyèdres et leurs symétries dans le tome XIV du *Journal de mathématiques pures et appliquées*, imprimé en mai (Bravais, 1849e ; Bravais, 1849d) et, le 6 août, par un nouveau dépôt à l'Académie des sciences. Ce dernier s'accompagne d'un extrait dans les comptes rendus (Bravais, 1849b) et du rapport, très favorable, de Cauchy sur le premier manuscrit déposé par Bravais (Cauchy, 1849) [32].

L'article de 1850 correspond au premier mémoire, celui déposé fin 1848 à l'Académie, comme l'affiche une mention en sous-titre. Bravais y mentionne toutefois ses communications de 1849, introduit explicitement quelques modifications, par exemple terminologiques, et reprend la simplification d'une preuve suggérée dans le rapport de Cauchy. Les deux articles sur les polyèdres de 1849 et cet article de 1850 sont présentés par leur auteur comme les prolégomènes de la théorie cristallographique qu'il a exposée à la Société philomathique tout au long de l'année 1849 (Bravais, 1850a, p. 128). Cette théorie est complétée par une autre communication, le 8 juin 1850, sur les hémiédries, les hémitropies et les macles (Bravais, 1850b). Celle-ci forme la troisième et dernière partie de la grande étude cristallographique de 1851 (Bravais, 1851a), dont les deux premières parties sont les mémoires déposés en février et août 1849 à l'Académie. Après la mort de Bravais, Léonce Élie de Beaumont rassemblera les quatre mémoires publiés en 1849, 1850 et 1851, ainsi que les deux rapports de Cauchy et son propre éloge de Bravais à

des modifications, comme des troncatures, sur la moitié des arêtes ou des angles semblables, et non sur tous.

32. Fin octobre 1849, Bravais demande à l'Académie de récupérer ses manuscrits de février et août, ce qui n'est accordé que pour le deuxième, un rapport étant déjà en cours sur le premier. De fait, le deuxième rapport de Cauchy sur ces travaux cristallographiques de Bravais, (Cauchy, 1851) est publié dans les comptes rendus le 25 février 1851 (et classé en « physique »).

l'Académie, dans un ouvrage posthume (Bravais, 1866) : plus facile d'accès, celui-ci est souvent la source principale, tant des successeurs de Bravais que des historiens, et même s'il synthétise la totalité des recherches de Bravais sur ce thème, la taille matérielle des « prolégomènes » de mathématiques tend à minimiser la continuité avec les autres recherches de Bravais et le caractère central de sa réflexion cristallographique, onmiprésente et mise en avant pendant toute l'année 1849 dans les communications à la Société philomathique.

2.2 La continuité des recherches de Bravais

La continuité de tous ses travaux est évoquée dès la première présentation à l'Académie, fin 1848. Bravais y indique que ce sont ses recherches sur les halos et la forme polyédrique de la neige qui l'ont ramené à la question des assemblages de points régulièrement distribués [33]. « Ramené », nous le savons, puisqu'il avait abordé le cas plan en 1837 (Bravais, 1837 ; Sturm, 1837), en lien avec les recherches d'organographie végétale relatives à la disposition des feuilles sur les tiges des plantes. La forte continuité entre les travaux botaniques et cristallographiques est ainsi marquée une fois encore par Bravais, et soulignée par l'identification d'un objet mathématique commun, les assemblages de points disposés régulièrement dans l'espace [34]. C'est cet objet qui lie botanique, cristallographie et théorie des nombres. Nous verrons, ce qui est a priori moins évident, comment les polyèdres lui sont eux aussi étroitement liés pour Bravais.

Le mémoire sur les assemblages soumis à l'Académie en décembre 1848 ne contient aucune application, même de nature mathématique (ni à l'analyse indéterminée, dit Bravais, ni à la théorie des centres de surface). Mais dans la note préliminaire qui l'accompagne et qui est publiée dans les *Comptes rendus*, l'auteur insiste pour souligner son objectif cristallographique afin que l'on ne croit pas, à tort, qu'il s'agit d'une « simple spéculation de géométrie rationnelle ». Selon Bravais, les catégories de la cristallographie étaient restées jusqu'alors purement empiriques, sans que soit comprise la cause des arrangements et les combinaisons observables réellement, et c'est ce qu'il s'agissait de changer : pour la glace, par exemple, les observations font apparaître plusieurs formes de cristallisation, une question non résolue par la cristallographie de l'époque étant de savoir si ces formes peuvent être dérivées de l'une d'elles (ou d'un nombre fini d'entre elles), et comment.

Un bon point de départ, selon Bravais, est « la disposition connue que tous les physiciens et cristallographes ont assignée, . . .aux centres des molécules des corps cristallisés, savoir l'espacement de ces centres à des intervalles égaux, suivant des séries rectilignes, équidistantes entre elles » (Bravais, 1848b, p. 602-603) :

33. Ces recherches encadrent d'ailleurs celles, plus connues, sur les cristaux, puisqu'outre les publications de 1847 (Bravais, 1847b ; Bravais, 1847a), Bravais publie un article sur les halos dans l'*Annuaire météorologique de la France* en 1851 (Bravais, 1851b).

34. Comme indiqué plus haut, Bravais distingue les dimensions par des terminologies différentes. Le point de vue moderne est d'adopter le terme « réseau » pour toutes les dimensions, y compris supérieures ou égales à 3.

> Les questions d'organographie végétale relatives à la disposition des feuilles sur les tiges des plantes m'avaient conduit à considérer les propriétés dont jouit un système de points mathématiques distribués régulièrement sur un plan. [. . .] Depuis lors, il ne m'avait pas été difficile de voir, en traitant le cas plus étendu de points distribués régulièrement dans l'espace, que des relations analogues à celles du plan caractérisaient ces systèmes de points. [. . .] Il m'est apparu que l'on ferait un pas vers la solution [des questions de la science cristallographique] en débarrassant la cristallographie de toute considération relative à la forme polyédrale de la molécule considérée dans son individualité, pour ne tenir compte que des grands traits géométriques qui se rapportent à l'agencement des centres de figure de ces molécules les uns par rapport aux autres. [. . .] Introduisant ensuite dans l'étude des systèmes de points à distribution régulière la considération des axes de symétrie, j'ai pu obtenir des divisions en classes déduites à priori, et sans possibilité d'arbitraire, de considérations purement géométriques. (Bravais, 1848b, p. 602)

Cet aspect n'est pas totalement original. Les études minéralogiques sont traversées au début du XIXe siècle par l'opposition entre un point de vue corpusculaire, discret, et un point de vue continu, dynamique — une opposition souvent associée à des traditions nationales, française pour le premier point de vue, défendu par René-Just Haüy et ses successeurs, et germanophone pour le deuxième, représenté par exemple par Christian Samuel Weiss (Scholz, 1989a ; Scholz, 1989b ; Maitte, 2001, ch. I). La représentation par des réseaux dépasse d'ailleurs le clivage linguistique et épistémologique. Dès 1824, August Seeber a notamment relié l'organisation régulière dans les cristaux à des réseaux formés de parallélépipèdes, dont il étudie l'aire des mailles grâce à la théorie des formes quadratiques élaborée par Carl Friedrich Gauss dans le contexte de la théorie des nombres (Seeber, 1824 ; Gauss, 1831). Si les dynamiciens ont mis en valeur l'importance des considérations de symétrie en cristallographie, c'est dans la suite des travaux de Haüy que son ancien élève Gabriel Delafosse utilise dans sa thèse en 1840 les réseaux à mailles parallélipédiques — analogues aux assemblages de Bravais — pour représenter ce que Haüy appelait les molécules intégrantes, lui servant à décrire par juxtaposition les formations cristallines. Delafosse corrige en particulier ce qui apparaissait comme des exceptions dans les travaux de Haüy (comme les phénomènes d'hémiédrie) en distinguant entre la molécule cristalline réelle et les molécules intégrantes abstraites, et en étudiant l'influence des formes que peuvent offrir les molécules cristallines sur la cristallisation même (Delafosse, 1840a ; Delafosse, 1843). Mais pour Delafosse, si l'organisation réticulaire relève de la géométrie, la molécule cristalline proprement dite et son rôle dans la formation cristalline relèvent de la physique.

Bravais, au contraire, modélise tous ces aspects mathématiquement. Comme nous allons le voir, une fois étudiés les agencements des centres, Bravais complète son travail en ne réduisant plus les molécules à leur centre et en prenant en compte les symétries internes des polyèdres

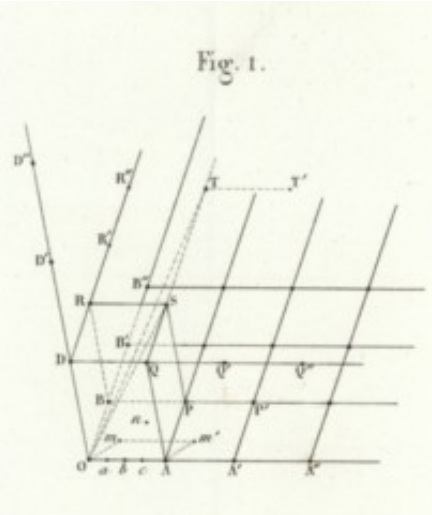


FIGURE 9 – Cette figure, donnée par Bravais dans sa première synthèse de 1850, montre la construction de base des assemblages, à partir de points distingués, appelés sommets, distribués régulièrement dans des réseaux plans (extrait d'une planche de (BRAVAIS, 1850a)). Le parallélogramme OAQD est par exemple une maille élémentaire du réseau vertical défini par les rangées parallèles à OD et à OA.

moléculaires eux-mêmes [35]. Comme il l'explique dans sa présentation à l'Académie, il a « appliqué la considération des assemblages réticulaires et celle des axes, plans et centre de symétrie, aux polyèdres que forment, dans les substances cristallisées, les atomes constituants de chaque molécule autour de leur centre de gravité »(BRAVAIS, 1849b, p. 143). L'assemblage contraint alors partiellement « la structure interne de la molécule du corps ». La géométrie analytique, adjointe aux considérations de symétrie, tant pour les polyèdres-molécules cristallines que pour les polyèdres que forment les mailles élémentaires des assemblages, permet alors à Bravais de déterminer toutes les formes cristallines possibles et d'énumérer tous les cas d'hémiédrie (ou de mériédrie) qui peuvent se présenter dans la nature (BRAVAIS, 1849b, p. 144) : ces cas sont maintenant interprétés comme ceux pour lesquels la symétrie de la molécule cristalline est moindre que celle de l'assemblage qui lui correspond.

2.3 Les communications à la Société philomathique

Les communications à la Société philomathique, de la fin 1848 à la mi-1850, permettent de retracer les différentes étapes de la démarche de Bravais.

Dans la première, (BRAVAIS, 1848a), classée en géométrie dans les procès-verbaux de la Société, Bravais explique ce que sont pour lui réseaux et assemblages : des points alignés à égale distance (le paramètre) forment ce qu'il appelle une rangée ; des rangées parallèles équidistantes forment un réseau si, lorsque pour chacune des rangées a été fixée une origine, ces origines sont

35. Une question proche est soulevée dans les années 1840 à l'Académie des sciences à propos de la polarisation. Augustin Cauchy avait pris pour hypothèse dans sa théorie que les molécules étaient des points. Il a été proposé de modifier cette hypothèse afin de réussir à rendre compte de la différence de vitesse de propagation de deux mouvements polarisés en sens contraire, voir (BUCHWALD, 1980).

elles-mêmes alignées ; enfin de tels réseaux, dans des plans parallèles équidistants et en alignant des origines fixées dans chaque réseau, forment des assemblages tridimensionnels (voir Fig. 9). Tous les points définissant les rangées, appelés par Bravais sommets [36], sont déterminés à partir d'un seul d'entre eux, choisi pour origine globale O, et par trois coordonnées entières (m, n, p).

Bravais donne une condition sur ces coordonnées pour que 3 points, joints à un même sommet origine, déterminent ce qu'il appelle des rangées conjuguées, c'est-à-dire pour nous un repère de l'espace — la condition revenant à ce que le déterminant des coordonnées soit égal à ± 1. Le résultat clé de cette communication concerne la détermination de réseaux et d'assemblages symétriques : un réseau plan est symétrique pour Bravais si une rotation de 180 degrés autour d'un axe amène les sommets à coïncider. Bravais établit que ces axes, s'ils existent, ne peuvent être qu'au nombre de 2, 4 ou 6, correspondant à des formes spécifiques de la maille élémentaire du réseau. Un assemblage est dit symétrique si la position apparente de ses sommets reste inchangée après rotation autour d'une droite, rotation qui ne peut être que d'un demi-tour, d'un tiers de tour, d'un quart de tour, ou d'un sixième de tour. À la fin de la communication, les liens avec la cristallographie sont présentés : les sommets de l'assemblage sont les centres de figure des molécules cristallines, les sections planes du cristal, les plans réticulaires, représentent des réseaux. La classification des assemblages selon leurs axes de symétries est alors comparée à celle des systèmes cristallins des minéralogistes [37], les phénomènes d'hémitropie et d'hémiédrie étant aussi brièvement évoqués.

Les communications de mars 1849, catégorisées quant à elles en cristallographie, précisent les liens entre cristallisation et assemblages : en cristallisant, explique en effet Bravais à la suite de Delafosse, les centres de gravité des molécules « se disposent en files rectilignes à espacements égaux » (Bravais, 1849a, p. 37) ; les arêtes d'un cristal correspondent aux rangées de la communication de décembre 1848, les faces sont des plans réticulaires associés aux réseaux. Les 7 systèmes d'assemblages distingués par la présence et le nombre de leurs axes de symétrie, peuvent donner lieu à des types ou modes distincts, lorsque malgré les mêmes axes de symétrie, il n'est pas possible de superposer les assemblages correspondants. Système et type sont accompagnés de données sur le nombre de faces, la forme de la maille de base, le nombre d'axes et de plans de symétrie. Le nombre de faces composant une forme cristalline complète est par exemple fourni par une formule affine en fonction des nombres d'axes de symétrie de chaque sorte (Bravais, 1849a, p. 38). Les équations des faces sont données en fonction des

36. Dans (Bravais, 1850a), celui-ci justifie cette terminologie en donnant un sens physique à ces points : il s'agit d'« en faire de véritables molécules »pour les distinguer des points purement mathématiques quelconques, au point même d'envisager les liaisons entre ces sommets comme des forces qui rendent l'assemblage invariable dans sa forme. Nous soulignons cette question, car il manifeste qu'étudier *géométriquement* des ensembles discrets de points ne va alors pas de soi.

37. Bravais sollicite de nombreuses études sur des cristaux spécifiques, témoignant comme pour la botanique de ses connaissances étendues des travaux spécialisés de cristallographie, y compris les travaux observationnels et expérimentaux.

paramètres a, b, c des rangées servant d'axes de coordonnées (Ox, Oy, Oz) :

$$h\frac{x}{a} + k\frac{y}{b} + l\frac{z}{c} = 0, \text{ou} \pm 1 \tag{1}$$

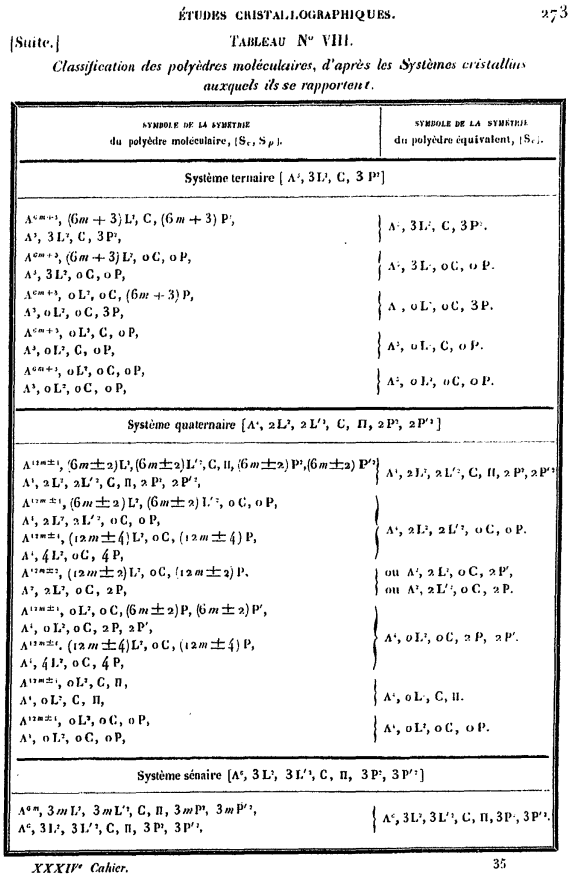
selon que la face passe par l'origine ou est parallèle à celle passant par l'origine et la plus proche, les (h, k, l) caractérisant la face (Bravais, 1849a, p. 41-42). Des calculs précisent aussi la densité du tissu réticulaire ou l'aire de chaque face, suggérant des distributions statistiques des formes d'apparition de certains cristaux dans la nature. La densité est en particulier utilisée pour fixer l'indétermination éventuelle entre différents types cristallins (Bravais, 1849a, p. 43), l'exemple de l'apatite illustrant cette approche (Bravais, 1849a, p. 44).

Ce sont les preuves de cette classification, avec quelques compléments, qui forment, comme nous l'avons dit, le cœur du mémoire publié en 1850. Celui-ci se présente sous forme d'une suite de problèmes, dont le premier est la reconstitution des échafaudages de rangées et de réseaux, non uniques (en fait en nombre infini), pouvant donner lieu à un assemblage de points donnés. Bravais montre aussi que le parallélépipède construit sur les OA, OB, OD, de longueur minimale (les paramètres), parallélépipède qui ne contient aucun sommet de l'assemblage à l'intérieur du volume délimité ou à l'intérieur des faces, est générateur (ou « noyau ») de l'assemblage et qu'une juxtaposition de ces mailles parallélépipèdiques reproduit l'assemblage (Bravais, 1850a, p. 7). Le parallélogramme générateur d'un réseau a une aire constante, indépendamment des lignes choisies pour le construire et la racine carrée de cette aire est interprétée par Bravais comme un intervalle moyen des sommets, sur le modèle mathématico-physique de l'intervalle moyen des molécules d'un corps mis en avant par Poisson ; il en est de même dans l'espace (Bravais, 1850a, p. 21, 50). Comme dans ses travaux botaniques, Bravais utilise des techniques de base de la géométrie analytique élémentaire, ainsi que les fractions continues, pour y décrire les assemblages. Il donne par exemple l'équation d'un réseau (plan) sous la forme analytique $sin^2\frac{\xi}{a}\pi + sin^2\frac{\eta}{b}\pi = 0$, où a et b sont les paramètres, ainsi que l'analogue pour les assemblages dans l'espace à 3 dimensions [38] et détermine le nombre de sommets dans un parallélépipède de côtés donnés.

C'est à partir des communications suivantes à la Société philomathique que Bravais intègre la considération de la molécule cristalline elle-même, car « en considérant ces molécules comme de simples points géométriques [. . .] il n'est [pas] possible d'expliquer » certains phénomènes apparaissant dans les corps cristallisés (Bravais, 1849g, p. 51). Cette molécule cristalline est représentée comme un polyèdre : selon l'explication proposée par Bravais, celui-ci transmet ces axes de symétrie à l'assemblage réunissant les sommets-molécules, ce qui lui permet d'expliquer « le choix que fait la nature pour constituer les parallélépipèdes générateurs (molécules sous-

38. Cette manière de représenter un système discret par une équation analytique, où interviennent des fonctions continues (ici trigonométriques), les solutions étant des multiples entiers des paramètres, se retrouve aussi par exemple chez Guglielmo Libri, « Mémoire sur divers points d'analyse », *Memorie della Reale Accademia della Scienze in Torino* 28, 1824, p. 251-280.

tractives d'Haüy) »(Bravais, 1849g, p. 52) ; cette explication raffine ainsi des idées d'Ampère et de Delafosse.



ÉTUDES CRISTALLOGRAPHIQUES. 273

[Suite.] TABLEAU N° VIII.

Classification des polyèdres moléculaires, d'après les Systèmes cristallins auxquels ils se rapportent.

SYMBOLE DE LA SYMÉTRIE du polyèdre moléculaire, $[S_c, S_p]$.	SYMBOLE DE LA SYMÉTRIE du polyèdre équivalent, $[S_c]$.
Système ternaire $[A^2, 3L^2, C, 3P^2]$	
A^{6m+3}, $(6m+3)L^2$, C, $(6m+3)P^2$, A^3, $3L^2$, C, $3P^2$,	A^3, $3L^2$, C, $3P^2$.
A^{6m+3}, $(6m+3)L^2$, o C, o P, A^3, $3L^2$, o C, o P,	A^3, $3L^2$, o C, o P.
A^{6m+3}, o L^2, o C, $(6m+3)P$, A^3, o L^2, o C, 3 P,	A, o L^2, o C, 3 P.
A^{6m+3}, o L^2, C, o P, A^3, o L^2, C, o P,	A^3, o L^2, C, o P.
A^{6m+3}, o L^2, o C, o P, A^3, o L^2, o C, o P,	A^3, o L^2, o C, o P.
Système quaternaire $[A^4, 2L^2, 2L'^2, C, \Pi, 2P^2, 2P'^2]$	
$A^{12m\pm1}$, $(6m\pm2)L^2$, $(6m\pm2)L'^2$, C, Π, $(6m\pm2)P^2$, $(6m\pm2)P'^2$, A^4, $2L^2$, $2L'^2$, C, Π, $2P^2$, $2P'^2$,	A^4, $2L^2$, $2L'^2$, C, Π, $2P^2$, $2P'^2$
$A^{12m\pm1}$, $(6m\pm2)L^2$, $(6m\pm2)L'^2$, o C, o P, A^4, $2L^2$, $2L'^2$, o C, o P, $A^{12m\pm1}$, $(12m\pm4)L^2$, o C, $(12m\pm4)P$, A^4, $4L^2$, o C, $4P$,	A^4, $2L^2$, $2L'^2$, o C, o P.
$A^{12m\pm2}$, $(12m\pm2)L^2$, o C, $(12m\pm2)P$, A^2, $2L^2$, o C, 2 P,	ou A^2, $2L^2$, o C, 2 P', ou A^2, $2L'^2$, o C, 2 P.
$A^{12m\pm1}$, o L^2, o C, $(6m\pm2)P$, $(6m\pm2)P'$, A^4, o L^2, o C, 2 P, 2 P', $A^{12m\pm1}$, $(12m\pm4)L^2$, o C, $(12m\pm4)P$, A^4, $4L^2$, o C, $4P$,	A^4, o L^2, o C, 2 P, 2 P'.
$A^{12m\pm1}$, o L^2, C, Π, A^4, o L^2, C, Π,	A^4, o L^2, C, Π.
$A^{12m\pm1}$, o L^2, o C, o P, A^4, o L^2, o C, o P,	A^4, o L^2, o C, o P.
Système sénaire $[A^6, 3L^2, 3L'^2, C, \Pi, 3P^2, 3P'^2]$	
A^{6m}, $3mL^2$, $3mL'^2$, C, Π, $3mP^2$, $3mP'^2$, A^6, $3L^2$, $3L'^2$, C, Π, $3P^2$, $3P'^2$,	A^6, $3L^2$, $3L'^2$, C, Π, $3P^2$, $3P'^2$.

XXXIVe Cahier. 35

FIGURE 10 – Classifications des polyèdres moléculaires (tableau VIII (partiel) de (Bravais, 1866)).

La séance du 2 juin est consacrée à résumer les deux articles publiés en mai 1849 (Bravais, 1849e ; Bravais, 1849d) : Bravais y explique que « les polyèdres, du point de vue de la symétrie, se divisent en 23 classes réparties en six groupes distincts » (Bravais, 1849c, p. 56), certaines classes se subdivisant elles-mêmes. En juillet, Bravais expose les règles qu'il a adoptées pour déterminer la relation entre ces symétries de la molécule et celles de l'assemblage : l'assemblage adopté est celui qui a le plus de symétries en commun avec la molécule et, s'il y a plusieurs choix, celui qui laisse le maximum d'indétermination dans les éléments constitutifs de son parallélépipède élémentaire (Bravais, 1849f, p. 70). Des exemples montrent l'application de ces règles et la manière dont elles permettent de rendre compte de phénomènes d'hémiédrie ou de dimorphisme, par exemple (Bravais, 1849f, p. 72). Lors de la séance du 17 novembre, Bravais propose d'utiliser plutôt le terme de « mériédrie » qui indique simplement une « réduction dans le nombre des faces des formes cristallines », autrement dit dans les symétries de la molécule cristalline par rapport à celles de l'assemblage cristallin (Bravais, 1849f, p. 85) ; cela évite de spécifier ces formes, et surtout le rapport de la réduction (qui dans certains cristaux n'est pas 2, comme pour l'hémiédrie, mais 4 ou 8). Bravais identifie 35 types de mériédrie, donnant de

nombreux illustrations de ses classements, et suggérant aussi que certaines espèces cristallines, correspondant à des types non encore observés dans la nature, seraient à découvrir (Bravais, 1849f, p. 90). Enfin, sa dernière communication de juin 1850 rattache à ses travaux antérieurs le cas des macles, où différentes moitiés de cristal cristallisent différemment, profitant, selon la théorie de Bravais, des différentes possibilités de cristallisation de l'assemblage par rapport au polyèdre, dans les situations d'indétermination. C'est cette dernière communication qui sera ajoutée aux deux mémoires déposés à l'Académie en 1849 pour former son grand mémoire de 1851 (Bravais, 1851a). Ces dernières communications sont fondamentales, en ce qu'elles expliquent ce qui dans la plupart des théories globales précédentes restait dans le registre de l'exception, de l'irrégularité : les mathématiques de Bravais lui permettent de mieux régulariser des phénomènes naturels, de justifier une régularité supérieure du concret.

Dans ces longs mémoires qui développent les communications aux sociétés savantes, le détail des preuves mathématiques et les questions usuelles liées à la modélisation mathématique (comme l'effet sur les résultats principaux du choix du modèle-assemblage parmi ceux ayant les mêmes points-sommets) occupent la majeure partie des pages. Leur seule lecture a pu faire croire que les recherches de Bravais étaient purement mathématiques, sans considération sérieuse des enjeux cristallographiques de son temps. Les communications à la Société philomathique, centrées sur les conséquences cristallographiques, montrent bien le contraire [39]. En conclusion de l'une d'elles, Bravais prend d'ailleurs un parti clair dans les débats de son temps : il rend hommage à « la théorie des molécules discontinues, polyatomiques et de figure symétrique [qui] rend un compte satisfaisant de l'immense majorité des phénomènes cristallographiques, ce que l'ancienne théorie des molécules continues et monoatomiques était loin de pouvoir réaliser » (Bravais, 1849b, p. 144).

2.4 Cristallographie et théorie de l'ordre

Les *résultats* de Bravais sur les cristaux peuvent bien sûr être exprimés dans le cadre de la théorie des groupes. C'est maintenant le point de vue adopté par les scientifiques se référant à Bravais [40], mais c'est aussi celui de l'historiographie : nous renvoyons en particulier à (Scholz, 1989a, ch. I, §3) et (Scholz, 2019) pour une identification minutieuse des différents groupes de la cristallographie avec la classification des types de symétrie cristalline de Bravais et, réciproquement, pour l'insertion de ses recherches dans l'avénement de la théorie des groupes. Cette tentation est encore renforcée par le fait que deux tenants importants de la théorie de l'ordre, Louis Poinsot lui-même et Camille Jordan, étudient à la même époque des transformations géométriques et leurs compositions pour elles-mêmes : Jordan effectue même explicitement ce

39. Nous croisons ici le problème de l'adaptation des résultats scientifiques aux supports de publication et à la nécessité historiographique de prendre en compte ces derniers.

40. Voir par exemple (Senechal, 1990 ; Michel, 1998 ; Neumann & Benz, 2018). Pour une exception, voir (Brieskorn, 2019).

transfert de points de vue à partir de 1866 dans ses articles sur les groupes de déplacements de l'espace, où il se propose justement de généraliser les recherches de Bravais dans le cadre de la théorie des groupes, en s'intéressant à *tous* les sous-groupes de déplacements, et plus seulement à ceux (directement reliés à la cristallographie) repérables dans les résultats de Bravais (Jordan, 1866 ; Jordan, 1867 ; Jordan, 1868-1869). Le cadre des groupes est d'ailleurs celui repris dans la cristallographie mathématique de la fin du xixesiècle, par Evgraph Stepanovič Fedorov ou Arthur Schoenflies, par exemple (Scholz, 1989a, ch. I, §5).

Or, cette transcription même met en relief deux choses : d'une part, Jordan est amené dans son travail à abandonner la contrainte de la discontinuité de l'action des transformations, autrement dit ici, la contrainte du discret, qui est au contraire au centre des préoccupations liées à la théorie de l'ordre à la fin du siècle. D'autre part, les questions principales naturelles dans chaque cadre orientent de manière différente les résultats à atteindre [41] : par exemple, lister tous les sous-groupes au lieu de recenser les symétries cristallines. Dans cette perspective, Bravais *rate* d'ailleurs certains des groupes de symétrie associés aux cristaux (Scholz, 1989a, p. 79). Lui-même évoque la géométrie analytique comme le fondement de ses mathématiques, s'alignant explicitement sur la démarche de Lamé.

Certes, la question des symétries est centrale dans les recherches de Bravais, qui comme nous l'avons expliqué, se décomposent ainsi :

— dans un premier temps, trouver les symétries possibles des assemblages infinis qui représentent la manière dont les molécules cristallines peuvent s'assembler, ces molécules étant vues comme de simples points-sommets (sans symétrie contraignante propre) ;

— dans un deuxième temps, examiner les symétries possibles d'un polyèdre moléculaire ;

— enfin, déterminer les compatibilités des symétries des assemblages avec celles d'une seule molécule polyatomique, cette fois représentée comme un assemblage polyédrique fini de points avec ses propres contraintes de symétrie établies à l'étape précédente.

Mais les symétries ne sont pas ici des objets en soi, en tant que déplacements, au sens qui sera le leur dans la théorie des groupes. Ce ne sont même pas des opérations, mais des états des corps, correspondant à des configurations particulières. Dans le premier article sur les polyèdres de 1849 (Bravais, 1849e), il s'agit d'ailleurs, en reprenant la notion de symétrie de Legendre, d'examiner la symétrie entre *deux polyèdres différents*, situés de part et d'autre d'un plan ou par rapport à un pôle de symétrie (« polyèdres inverses ») : tous les polyèdres symétriques d'un polyèdre donné s'obtiennent ainsi par rotation à partir d'un polyèdre inverse. Dans le deuxième article, (Bravais, 1849e), ce sont les « polyèdres de forme symétrique » qui sont étudiés, c'est-à-dire les configurations de points-sommets, distribués de manière symétrique autour de leur centre de gravité. Les types repérés dans la classification de Bravais sont déterminés par les axes et éléments de symétrie possibles de telles configurations, autrement dit par des éléments

41. Un cas analogue est celui de la tactique, qui peut être considérée comme relevant de la théorie des groupes, mais s'en démarque de plusieurs façons, voir (Ehrhardt, 2015).

standards de la géométrie analytique (points, droites, plans).

Symétries et rotations ne relèvent en particulier pas du tout des mêmes catégories, comme ce serait le cas dans un contexte de théorie des groupes, et elles ne jouent pas le même rôle dans les recherches de Bravais [42]. L'usage des rotations y est un soutien à un imaginaire visuel des dispositifs discrets de points : ce sont des manipulations faites par le chercheur sur ces dispositifs de points pour mettre en évidence certaines de leurs propriétés, en particulier leurs symétries. L'accent est mis sur les points transformés et sur ces propriétés, et non sur leurs transformations en tant qu'objets. Si Bravais écrit des équations des axes et des rangées, comme le demande la géométrie analytique, ses preuves reposent d'ailleurs surtout sur ces déplacements graphiques de formes dans l'espace. Voici par exemple comment Bravais définit un axe de symétrie :

> Je nomme axe de symétrie d'un Assemblage toute droite telle, que, l'Assemblage venant à tourner d'un certain angle, et tout d'une pièce, autour d'elle, les mêmes points de l'espace coincident avec les Sommets de cet Assemblage, avant et après la rotation. Je dis alors que le lieu apparent des Sommets de l'Assemblage a été restitué, après cette rotation. Pour plus de précision dans les explications qui vont suivre, je supposerai qu'il existe deux Assemblages égaux, superposés Sommet sur Sommet, de manière à figurer un Assemblage unique. L'un de ces Assemblages sera considéré comme invariable de position ; l'autre pourra se mouvoir tout d'une pièce, et comme un corps solide, soit par translation, soit par rotation. Lorsque l'Assemblage mobile, tournant autour de l'axe, reviendra en coïncidence avec l'Assemblage fixe, après une rotation d'un demi-tour, ou de 180 degrés, l'axe sera désigné sous le nom d'axe de symétrie binaire, ou, plus brièvement, d'axe binaire [. . .] Lorsque la coïncidence se rétablira après un tiers, un quart, un sixième de tour, l'axe de rotation recevra le nom d'axe de symétrie ternaire, quaternaire, sénaire. (Bravais, 1850a, p. 57)

Cette pratique est aussi à l'œuvre dans les preuves. Ainsi, dans le théorème LII (Bravais, 1850a, p. 63), Bravais veut prouver que lorsqu'un assemblage possède un axe de symétrie, il possède aussi un système de plans de symétrie normaux à cet axe. Il applique pour cela un résultat de ses mémoires sur les polyèdres (Bravais, 1849e), évoqué plus haut : si l'on fait tourner de 180 degrés le polyèdre inverse d'un polyèdre donné autour d'une droite menée par le pôle de symétrie, on obtient un polyèdre symétrique par rapport au plan de symétrie mené par le pôle normalement à la droite ; un sommet quelconque de l'assemblage peut jouer le rôle d'un pôle de symétrie, la droite alors choisie étant la parallèle à l'axe de symétrie de l'assemblage passant par ce sommet. Les assemblages inverses par rapport à une droite coïncidant, le théorème s'en déduit en faisant tourner l'assemblage autour de la droite.

La preuve esquissée ci-dessus (comme de nombreuses autres) montre bien sur quels objets est la focale de ces recherches : réseaux, assemblages et polyèdres, en tant que dispositions

42. Dans ce contexte, il est donc moins étonnant que Bravais rate justement les antirotations (Scholz, 1989a, I, §3.2).

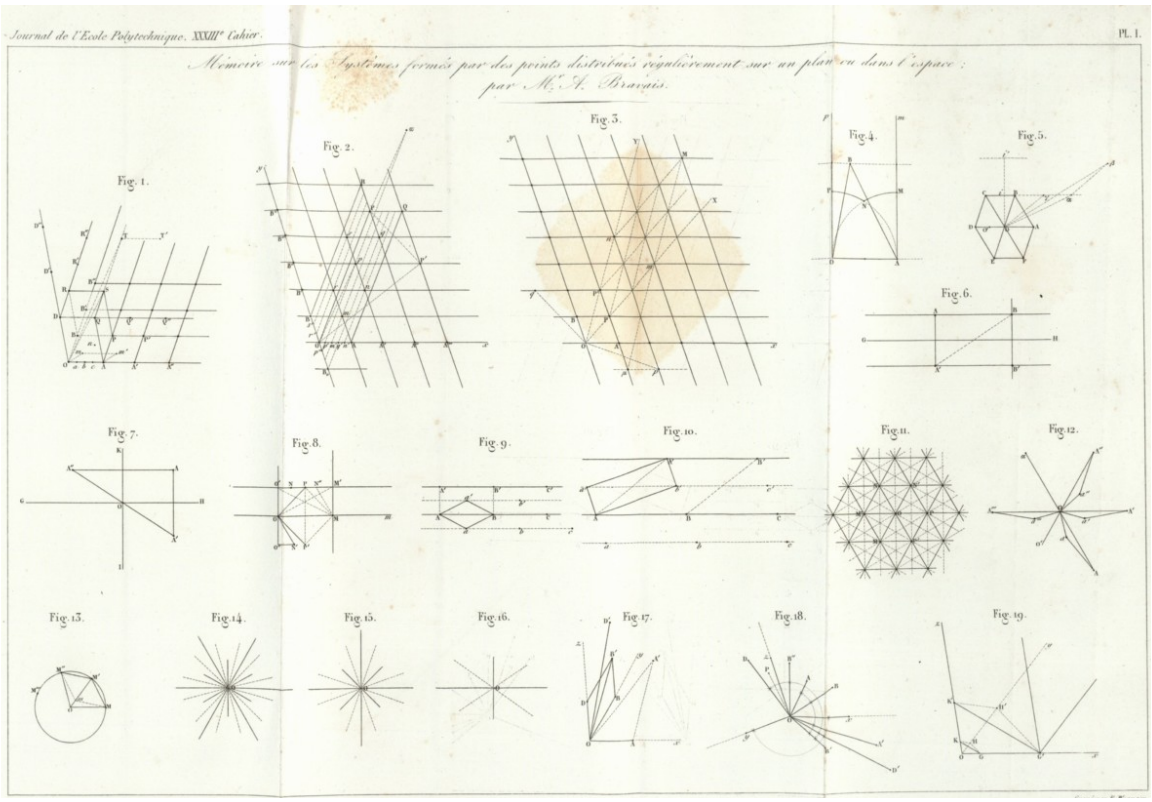


FIGURE 11 – Continuité des représentations graphiques entre réseaux et polyèdres (planche I de (BRAVAIS, 1850a)).

rigides, régulières et discrètes de points, et non les isométries qui les laissent invariantes. Ces points peuvent être en nombre fini, dans les polyèdres, ou infinis, organisés en réseaux plans et en assemblages spatiaux par des liaisons – segments ou droites ou plans – entre ces points. Mais dans les deux cas, les polyèdres servent de figures de référence. Ayant insisté sur la complète équivalence des points de vue dans la construction d'un assemblage, au sens de la perspective à partir d'un sommet donné : « La configuration formée par l'Assemblage, supposé illimité, autour d'un de ses points arbitrairement choisi, est la même, quel que soit le point adopté » (BRAVAIS, 1850a, p. 3), Bravais peut, dans de nombreuses occasions, isoler des parties finies d'un assemblage autour d'un sommet, et interpréter la configuration obtenue comme un polyèdre : « Si par l'un des sommets d'un assemblage, on fait passer tous les axes et plans de symétrie qui lui sont propres, on pourra considérer l'Assemblage comme un polyèdre dont le centre est au sommet qu'on a choisi », (BRAVAIS, 1851a, p. 92). Que ce soit d'ailleurs dans son étude des polyèdres ou dans celle des assemblages, les données numériques interviennent surtout pour identifier une situation, une position dans la classification, avec celle d'un corps naturel, et non dans l'étude théorique — en ce sens, son travail sur les polyèdres se démarque nettement de celui de la plupart de ses contemporains, dont la plupart des classifications intègrent les rapports de longueur des arêtes ou d'autres rapports numériques.

3 Bravais et la théorie de l'ordre

La « controverse » potentiellement « immense » à propos de la nature mathématique des divergences principales des végétaux curvisériés, annoncée par les Bravais (Bravais & Bravais, 1837b, p. 9), n'a pas vraiment eu lieu. Leurs travaux botaniques ont été traduits en allemand dès 1839 et régulièrement cités et commentés dans les manuels ou les synthèses de botanique dans la deuxième moitié du xixesiècle et bien au-delà [43]. Comme indiqué plus haut, ils ont parfois été critiqués comme trop mathématiques, ou parce que leur proposition alternative à celle de Schimper et Braun n'a pas convaincu, ou encore parce qu'ils ne proposent aucune cause physiologique des dispositions que leur théorie vise à décrire (Brongniart, 1848 ; Candolle, 1881). Les recherches sur les cristaux, en revanche, qui offrent une explication de certains phénomènes comme la mériédrie ou les macles, par ajustement des symétries, ont connu une réception étendue et durable, tout en étant complétés et retranscrits en particulier dans le cadre de la théorie des groupes (Scholz, 1989a ; Senechal, 1990 ; Scholz, 2019).

Comme nous l'avons dit, il n'y a pas de référence explicite à une théorie mathématique de l'ordre dans les textes de Bravais. Quand celui-ci parle d'ordre, cela renvoie à un présupposé d'harmonie des éléments naturels ou c'est dans le sens ordinaire de ranger, par exemple quand il établit un ordre linéaire banal, défini par des inégalités, à propos de la fréquence de certaines formes cristallographiques ou de leur facilité de clivage (Bravais, 1851a, p. 181). Sa démarche, tant en botanique qu'en cristallographie, est caractéristique du rapport des mathématiques au monde réel hérité de l'enseignement à l'École polytechnique, courant chez les mathématiciens français de la première moitié du xixe siècle : il s'agit de dégager du monde naturel des outils et des formes mathématiques, ou au moins mathématisables, et de les étudier systématiquement par des outils mathématiques appropriés, avant de les appliquer, à nouveau, de manière multipliée si possible, à divers phénomènes réels. Cette démarche est à l'œuvre chez Gabriel Lamé, par exemple (Katzir, 2009 ; Coll., 2009). On la trouve aussi chez Élie de Beaumont, lui aussi polytechnicien, dans son modèle pour une tectonique globale articulant observations géologiques et analyse mathématique fondée sur des réseaux de polygones ; ce modèle, dès le premier mémoire de 1829, lui vaut les éloges de plusieurs savants dont Arago qui se félicite de l'entrée de la géologie dans les sciences exactes (Touret, 2007). Il faut aussi souligner que cette démarche inclut une focalisation particulière sur les exceptions ou les aspects qui semblent résister aux théories antérieures (ici l'hémiédrie, par exemple) afin de construire une mathématisation moins fictionnelle, reflétant plus concrètement l'organisation de la nature.

Pourtant, ce n'est pas cette approche globale d'un ordre de la nature qui nous a suggéré cette enquête sur les travaux de Bravais, mais bien la pratique même qu'il met en œuvre et

43. Pour quelques jalons, voir parmi beaucoup d'autres (Morren, 1872 ; Candolle, 1881 ; Gravis, 1928 ; Chadefaud, 1943). Un renouveau d'intérêt pour la mathématisation de la phyllotaxie et les recherches des Bravais s'est dessiné à partir des années 1970, voir (Adler, 1974 ; Adler, Barabé & Jean, 1997 ; Godin, Golé & Douady, 2020).

les objets sur lesquels cette pratique s'exerce. La réflexion à partir de dispositifs graphiques — en particulier les équivalences de points de vue ou les ajustements de solides après rotation dans l'espace, s'appuie ainsi fortement sur l'enseignement de la géométrie reçu dans les écoles d'ingénieurs (Sakarovitch, 1998). C'est d'ailleurs sous le double patronage des « travaux de Bravais et la cristallographie et d'Elie de Beaumont sur le réseau pentagonal » que Albert Badoureau, ingénieur des Mines, ancien polytechnicien et conseiller scientifique de Jules Verne, place sa propre étude sur des polyèdres, qu'il appelle isoscèles [44]. Les recherches de Bravais renforcent ainsi un mouvement qui met au centre de l'attention scientifique de nouveaux objets, discrets en particulier, dont les dispositions multiples permettent de rendre compte de la nature. Mais ses méthodes le rapprochent aussi des promoteurs explicites d'une « théorie de l'ordre », dans notre sens, en ce qu'elles soulignent l'importance des symétries dans l'établissement d'un ordre, en particulier d'un ordre circulaire comme celui des racines de l'unité sur le cercle et de leur reclassement pour atteindre les symétries de l'équation cyclotomique, qui sert de modèle à Poinsot (Boucard & Eckes, 2015) : les distributions hélicoïdales des insertions florales, projetées d'ordres circulaires à des réseaux de points, ou celles des polyèdres et des assemblages moléculaires, capturées par des rotations autour de sommets, constituent autant de nouveaux exemples d'abandon de la mesure des grandeurs au profit de l'examen des seuls dispositifs de points. Comme l'explique Camille Jordan :

> Les Mathématiques ne sont pas seulement la science des rapports, je veux dire que l'esprit n'y a pas seulement en vue la proportion et la mesure ; il peut encore considérer le nombre en lui-même, l'ordre et la situation des choses, sans aucune idée de leurs rapports ni des distances plus ou moins grandes qui les séparent. Si l'on parcourt les différentes parties des Mathématiques, on y trouve partout ces deux objets de nos spéculations. [. . . Ce] qui rend la théorie des polyèdres très difficile, c'est qu'elle tient essentiellement à une science presque encore neuve, que l'on peut nommer Géométrie de situation, parce qu'elle a principalement pour objet, non la grandeur ou la proportion des figures, mais l'ordre ou la situation des éléments qui les composent. (Jordan, 1881, p. 7-8)

Donnant ensuite une liste des sujets qu'il a abordés, c'est la question de la symétrie qu'il met en avant : « En Géométrie, j'ai étudié successivement les lois de la symétrie des polyèdres, des systèmes de lignes et des systèmes de molécules. En Analyse, j'ai pris pour objet principal de mes travaux la théorie des substitutions (qui n'est au fond autre chose que celle de la symétrie des expressions algébriques) et ses applications à la théorie des équations algébriques et celle des équations différentielles linéaires. »

C'est exactement dans cette perspective que s'inscrit Émile Sarrau [45] qui s'appuie explicite-

44. Badoureau, 1881, p. 47. Sur son travail et l'importance que Badoureau accorde à la symétrie, voir (Crovisier, 2007).

45. Sur le polytechnicien Émile Sarrau et la théorie de l'ordre, voir (Buchwald, 1980) et (Appas et al., 2018).

ment sur les résultats de Bravais pour étudier la propagation de la lumière dans les cristaux : il applique « ces principes à la théorie des phénomènes lumineux », reprenant les identifications des éléments de symétrie de Bravais et en faisant de plus l'hypothèse que « tout élément de symétrie commun à la molécule et à l'assemblage est un élément de symétrie des atomes de l'éther » (à cette époque supposé emplir le milieu cristallin et y transmettre la lumière) (Sarrau, 1867, p. 2). Comme dans le cas des équations algébriques pour Poinsot ou Jordan (Boucard, 2011 ; Brechenmacher, 2015), ce sont alors les conditions de symétrie qui assignent alors une forme particulière aux équations des mouvements vibratoires. C'est aussi par la double entrée du discret et de la symétrie que Pierre Curie installe les recherches de Bravais dans la problématique de l'ordre [46] :

> Dans son mémoire sur les polyèdres de forme symétrique, Bravais a groupé ceux-ci en 23 familles à l'aide de considérations sur l'ordre et la symétrie du système de points formé par leurs sommets. La classification de Bravais s'applique aussi à tout système fini, formé par un nombre fini de points. Je me suis proposé de classer, d'après leurs types de répétition et de symétrie, un système quelconque de points doués de propriétés quelconques. Ce problème général répond directement aux besoins de la physique, de la chimie et de la cristallographie. [. . .] L 'ordre dans un système peut se manifester de deux façons bien différentes : il y a lieu de considérer la répétition et la symétrie [. . .] le classement des répétitions peut se faire en effet sans se préoccuper de la nature des qualités dont sont doués les points ; tout repose sur cette remarque de Bravais : que telle répétition, résultant de tel déplacement indifférent du système, entraîne toute une série d'autres déplacements indifférents et de nouvelles répétitions ; la nature de ce qui se répète n'intervient pas dans les démonstrations. Dans les questions de symétrie, au contraire, il y aura lieu de faire intervenir les qualités des points et de définir la symétrie d'un point doué de telle qualité que l'on voudra. (Curie, 1884b, p. 89-90)

En ce sens, même s'il ne se revendique pas d'une théorie de l'ordre, le travail de Bravais apparaît bien comme une plaque tournante, qui renforce l'intérêt pour cette théorie et l'ouvre à de nouveaux objets de recherche. Dès 1858, le médecin et polymathe portugais Isidoro Emilio Baptista consacre une longue étude aux polyèdres qui commence par remarquer que « Les systèmes, définis ou indéfinis, ne peuvent se représenter uniquement par la valeur des grandeurs qui les composent ; [leur représentation] doit comporter un autre élément qui exprime l'ordre relatif de leur succession, non seulement graphiquement mais aussi algébriquement » (Baptista, 1858, p. 258), rattachant cette remarque au projet de Leibniz d'un « calcul des situations ». Il traverse ensuite l'histoire des polyèdres depuis Leibniz, Euler et Poinsot, dans laquelle la symétrie

46. Voir là-dessus (Katzir, 2004 ; Chomarat, 2010). François Chomarat nous a fait remarquer que Curie affronte aussi des phénomènes échappant à une théorie antérieure, en l'occurrence les milieux optiquement actifs, et est ainsi amené au rôle clé de la symétrie.

est pour lui l'élément directeur, ce qui lui permet d'y rattacher Bravais :

> Le professeur Auguste Bravais a entrepris un vaste système d'études de la symétrie géométrique, considérant à la fois les formes définies et indéfinies. La nature des figures est analysée selon le nombre et l'ordre des éléments de symétrie. (Baptista, 1858, p. 269)

Les formes définies sont les polyèdres, les indéfinies les assemblages. Pour Baptista, la cristallographie occupe une place intermédiaire entre la géométrie et la chimie, et « forme, pour ainsi dire, la zone de contact, une atmosphère commune aux deux ordres de faits » (Baptista, 1858, p. 289), qui doit permettre de transférer symétrie géométrique en symétrie analytique des équations, et réciproquement. Il trace ainsi des liens entre les recherches sur les polygones de Poinsot, les mémoires combinatoires de Kirkman et de Julius Grassman [47] ou les travaux de Hauÿ, Delafosse et Bravais, qui les placent déjà dans une histoire commune.

L'accent mis par Bravais sur les points transformés, plus encore que sur leurs transformations, conforte l'interprétation de ces objets comme éléments pertinents pour l'exploration des phénomènes naturels, tant en botanique qu'en cristallographie, et par là-même la pertinence d'étudier mathématiquement réseaux ou assemblages, ou leurs dérivés. Un même imaginaire visuel des dispositifs discrets de points, souvent à partir de configurations circulaires, peut alors relier les mémoires de Poinsot sur les congruences, les polyèdres ou les équations aux travaux relevant explicitement de l'ordre dans les décennies suivantes, tels ceux de Lucas sur les quinconces, les échiquiers et la géométrie de situation à la fin du XIXe siècle.

47. Sur la pertinence de ceux-ci pour la théorie de l'ordre, voir (Ehrhardt, 2015) et (Scholz, 1996), ainsi que le chapitre "Petites mathématiques et grandes espérances".

Références

Adler, Irving (1974). « A Model of Contact Pressure in Phyllotaxis ». In : *Journal of Theoretical Biology* 45-1, p. 1–79.

Adler, Irving, Denis Barabé & Roger V. Jean (1997). « A History of the Study of Phyllotaxis ». In : *Annals of Botany* 80, p. 231–244.

Appas, Félicien, Arnaud Hirsch, Marius Martin & Romain Michon-Du Marais (2018). *La théorie de l'ordre au xix^e^siècle*. Rapport intermédiaire, sous la direction de Frédéric Brechenmacher, en ligne `https://www.academia.edu/24480066`. École polytechnique.

Badoureau, Albert (1881). « Mémoire sur les figures isoscèles ». In : *Journal de l'École polytechnique* 30, cahier 49, p. 47–172.

Baptista, Isidoro Emilio (1858). « Estudos sobre a Theoria analytica dos polyedros e suas applica
cões á cristallographia ». In : *Annaes das Sciencias e Lettras da Academia Real das Sciencias* 2, p. 257–295.

Beaumont, Élie de (1865). *Éloge historique d'Auguste Bravais*. Paris : Firmin Didot.

Boucard, Jenny (2011). « Louis Poinsot et la théorie de l'ordre : un chaînon manquant entre Gauss et Galois ? » In : *Revue d'histoire des mathématiques* 17.1, p. 41–138.

Boucard, Jenny & Christophe Eckes (2015). « Les sources scientifiques de Jules Bourgoin : cristaux, polygones et polyèdres ». In : *De l'Orient à la mathématique de l'ornement : Jules Bourgoin (1838-1908)*. Ed. par Maryse Bideault, Estelle Thibault & Mercedes Volait. Paris : Picard, p. 299–313.

Braun, Alexander (1831). « Vergleichende Untersuchung über die Ordnung der Schuppen an den Tannenzapfen als Einleitung zur Untersuchung der Blattstellung überhaupt ». In : *Verhandlungen der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Akademie der Naturforscher* 15, p. 199–402.

— (1835). « Dr. Carl Schimper's Vorträge über die Möglichkeit eines wissenschaftlichen Verständnis der Blattstellung, nebst Andeutung der hauptsächtlichen Blattstellungsgesetze und insbesondere der neuentdeckten Gesetze der Aneinanderreihung von Cyclen verschiedener Maasse ». In : *Flora* 18, p. 145–191.

Bravais, Auguste (1837). « Mémoire relatif à la coordination qu'affectent entre eux sur un plan les points dont les abscisses ainsi que les ordonnées sont des nombres entiers ». In : *Société philomatique de Paris. Extraits des procès-verbaux pendant l'année 1837* 2. Séance du 20 mai 1837, p. 88–89.

— (1847a). « Sur les halos et les phénomènes optiques qui les accompagnent ». In : *Journal de l'École polytechnique* 18, p. 1–270.

Bravais, Auguste (1847b). « Sur les phénomènes optiques auxquels donnent lieu les nuages à particules glacées ». In : *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 24, p. 962–967.

— (1848a). « Géométrie (sur la théorie des assemblages) ». In : *Procès verbaux de la Société philomathique de Paris* 13, p. 69–72.

— (1848b). « Sur les propriétés géométriques des assemblages de points régulièrement distribués dans l'espace ». In : *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 27, p. 601–604.

— (1849a). « Applications de la théorie des Assemblages à la cristallographie ». In : *Procès verbaux de la Société philomathique de Paris* 14, p. 37–39, 41–44.

— (1849b). « Applications de la théorie des Assemblages à la cristallographie ». In : *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 29, p. 143–144.

— (1849c). « Communications sur la cristallographie ». In : *Procès verbaux de la Société philomathique de Paris* 14, p. 54–58.

— (1849d). « Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique ». In : *Journal de mathématiques pures et appliquées* 14, p. 141–180.

— (1849e). « Note sur les polyèdres de forme symétrique de la géométrie ». In : *Journal de mathématiques pures et appliquées* 14, p. 137–140.

— (1849f). « Recherches sur la cristallographie ». In : *Procès verbaux de la Société philomathique de Paris* 14, p. 69–72, 85–90.

— (1849g). « Recherches sur la symétrie propre aux molécules des corps cristallisés ». In : *Procès verbaux de la Société philomathique de Paris* 14, p. 51–52.

— (1850a). « Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace ». In : *Journal de l'École polytechnique* 19, p. 1–128.

— (1850b). « Recherches relatives aux macles et hémitropies des cristaux ». In : *Procès verbaux de la société philomathique*, p. 46–50.

— (1851a). « Études cristallographiques ». In : *Journal de l'École polytechnique* 20, p. 101–276.

— (1851b). « Notice sur les Halos, suivie d'instructions sur l'observation de ses phénomènes ». In : *Annuaire météorologique de la France* 3, p. 160–198.

— (1866). *Études cristallographiques*. Ed. par Léonce Élie de Beaumont. Paris : Gauthier-Villars.

Bravais, Auguste & Charles Martins (1841). « Recherches sur la croissance du Pin sylvestre dans le nord de l'Europe ». In : *Mémoires couronnés par l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles* 15, p. 1–65.

Bravais, Louis & Auguste Bravais (1837a). « Essai sur la disposition des feuilles curvisériées ». In : *Annales des sciences naturelles (Botanique)*. 2e sér. 7, p. 42–110.

Bravais, Louis & Auguste Bravais (1837b). « Essai sur la disposition symétrique des inflorescences ». In : *Annales des sciences naturelles (Botanique)*. 2e sér. 7-8, 193–221 (T. 7), 291–348 (t. 7), 11–42 (t. 8).

— (1837c). « Mémoire sur l'inflorescence ». In : *Société philomatique de Paris. Extraits des procès-verbaux pendant l'année 1837* 2. Séances du 28 janvier et du 4 février 1837, p. 11–16.

— (1839b). « Essai sur la disposition générale des feuilles rectisériées ». In : *Congrès scientifique de France : Sixième session, tenue à Clermont-Ferrand, en septembre 1838*. Paris & Clermont-Ferrand : Derache & Berthier, p. 278–328.

— (1839a). « Essai sur la disposition générale des feuilles rectisériées ». In : *Annales des sciences naturelles (Botanique)*. 2e sér. 12, p. 5–41, 65–77.

— (1839c). « Sur les dispositions géométriques des feuilles des plantes ». In : *Congrès scientifique de France : Sixième session, tenue à Clermont-Ferrand, en septembre 1838*. Paris & Clermont-Ferrand : Derache & Berthier, p. 2–9.

Brechenmacher, Frédéric (2015). « Algebraic writings as models : the theory of order in the 19th century ». In : *Oberwolfach Reports* 12.4, p. 2808–2811.

Brieskorn, Egbert (2019). *Klassische Gestalten und moderne Strukturen in Geometrie und Kristallographie,* aus dem Nachlass hrsg. von Erhard Scholz. online : Imaginary - open mathematics.

Brongniart, Adolphe (1848). « Recherches sur l'origine des diverses dispositions spirales des feuilles ». In : *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 27, p. 68–76.

Brongniart, Adolphe & Pierre Jean-François Turpin (1837). « Rapport sur l'*Essai* géométrique sur la symétrie des feuilles curvisériées et rectisériées (1835) ». In : *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 4, p. 611–621.

Bru, Bernard (2019). « Auguste Bravais : des mathématiques polytechniciennes pour cartographier les côtes algériennes, 1832-1838 ». In : *Bulletin de la Sabix* 64, p. 45–62. (Visité le 17/11/2021).

Buchwald, Jed (1980). « Optics and the Theory of the Punctiform Ether ». In : *Archive for History of Exact Sciences* 21-3, p. 245–278.

Candolle, Augustin Pyrame de (1813). *Théorie élémentaire de la botanique ou exposition des principes de la classification naturelle et de l'art de décrire et d'étudier les végétaux*. Paris : Déterville.

Candolle, Casimir de (1881). « Considérations sur l'étude de la phyllotaxie ». In : *Archives des sciences physiques et naturelles*. 3e sér. 5, p. 260–287, 358–396.

Cauchy, Augustin-Louis (1849). « Rapport sur un mémoire de M. Bravais, relatif à certains systèmes ou assemblages de points matériels ». In : *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* 29, p. 133–137.

Cauchy, Augustin-Louis (1851). « Rapport sur un mémoire présenté par M. Bravais, et intitulé : Etudes sur la cristallographie ». In : *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* 32, p. 284–289.

Chadefaud, Marius (1943). « Phyllotaxie et phyllorhizes ». In : *Revue scientifique* 81-5, p. 235–238.

Chomarat, François (2010). *Pierre Curie et la symétrie : un principe et ses métamorphoses*. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris 1 - Panthéon - Sorbonne.

Coll. (2009). *Gabriel Lamé (1795-1870) : Les pérégrinations d'un ingénieur au XIXe siècle*. Vol. 44. Palaiseau : Sabix.

Crovisier, Sylvain (2007). « Badoureau à la recherche des polyèdres isocèles ». In : *Quadrature* 66, p. 20–23.

Curie, Pierre (1884a). « Sur la symétrie ». In : *Bulletin de la société minéralogique* 7 (8-9), p. 418–457.

— (1884b). « Sur les questions d'ordre : répétitions ». In : *Bulletin de la société minéralogique* 7 (3-4), p. 89–111.

Delafosse, Gabriel (1840a). *De la structure des cristaux, considérés comme base de la distinction et de la classification des systèmes cristallins*. Thèse de sciences naturelles. Université de Paris.

— (1840b). *Sur l'importance de l'étude de la symétrie dans les différentes branches de l'histoire naturelle et en particulier dans la morphologie végétale et animale*. 2e thèse de sciences naturelles. Université de Paris.

— (1843). « Recherches sur la cristallisation, considérée sous les rapports physiques et mathématiques (1er mémoire) ». In : *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des sciences de l'Institut de France. Sciences mathématiques et physiques* 8, 642–690 + 2 pl.

Doffin, Henry (1959). *La phyllotaxie et les caractères cristallographiques des végétaux en tant que corps solides réguliers. Article XIV*. Rapp. tech. Faculté des sciences de Poitiers.

Drouin, Jean-Marc (1994). « Classification des sciences et classification des plantes chez Augustin-Pyramus de Candolle ». In : *Revue de synthèse*. IV 1-2, p. 149–165.

Dutrochet, Henri (1834). « Observations sur les variations accidentelles du mode suivant lequel les feuilles sont distribuées sur les tiges des végétaux ». In : *Nouvelles annales du Muséum d'histoire naturelle* 3, p. 161–200.

Ehrhardt, Caroline (2015). « Tactics : in search of a long-term mathematical project (1844-1896) ». In : *Historia Mathematica* 42 (4), p. 436–467.

Faivre, Ernest (1862). *Les Œuvres scientifiques de Goethe, analysées et appréciées*. Paris : Hachette.

Gauss, Carl Friedrich (1831). « Recension der "Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig August Seeber" ». In : *Göttingische gelehrte Anzeigen* 2, p. 1065–1077.

Godin, Christophe, Christophe Golé & Stéphane Douady (2020). « Phyllotaxis as geometric canalization during plant development ». In : *Development* 147-19. url : `https://doi.org/10.1242/dev.165878`.

Gravis, Auguste (1928). *Recherches anatomiques et physiologiques sur le Tradescantia virginica L. au point de vue de l'organisation générale des Monocotylées et du type Commélinées en particulier*. Bruxelles : F. Hayez.

Guédès, Michel (1969). « La théorie de la métamorphose en morphologie végétale : Des origines à Goethe et Batsch ». In : *Revue d'histoire des sciences* 22-4, p. 323–363.

Hocquette, Maurice (1954). « Botanique des temps modernes. Morphologie, Anatomie, Cytologie ». In : *Histoire de la botanique en France*. Ed. par Adrien Davy de Virville. Paris : Société d'édition d'enseignement supérieur, p. 121–152.

Hon, Giora & Bernard R. Goldstein (2008). *From Summetria to Symmetry : The Making of a Revolutionary Scientific Concept*. Dordrecht : Springer.

Jordan, Camille (1866). « Recherches sur les réseaux plans ». In : *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 63, p. 1061–1063.

— (1867). « Sur les groupes de mouvements ». In : *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 65, p. 229–232.

— (1868-1869). « Sur les groupes de mouvements ». In : *Annali di matematica*. 2e sér. 2, p. 167–215, 322–345.

— (1881). *Notice sur les travaux de M. Camille Jordan, ingénieur des Mines, professeur à l'École polytechnique, à l'appui de sa candidature à l'Académie des sciences (section de géométrie)*. Paris : Gauthier-Villars.

Katzir, Shaul (2004). « The Emergence of the Principle of Symmetry in Physics ». In : *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences* 36.1, p. 35–65.

— (2009). « Symmetry in the Physics of Lamé and his Contemporaries ». In : *Bulletin de la Sabix* 44, p. 95–100.

Kaufman, Stuart (1993). *The Origins of Order*. New York, Oxford : Oxford University Press.

Knight, David (1981). *Ordering the World : A History of Classifying Man*. Londres : Burnett Books.

Lê, Fran¸cois & Anne-Sandrine Paumier (2016). « De la science comme classification à la classification comme pratique scientifique ». In : *Cahiers François Viète*. III 1, p. 9–34.

Maitte, Bernard (2001). « René-Just Haüy (1743-1822) et la naissance de la cristallographie ». In : *Travaux du Comité français d'histoire de la géologie* 15, p. 115–149.

— (2014). *Histoire des cristaux*. Paris : Hermann.

Martins, Charles (1833). « Bulletin bibliographique. Vergleichende Untersuchung über die Ordnung der Schuppen an den Tannenzapfen als Einleitung zur Untersuchung der Blattstellung, von Fr. Alex. Braun. 1830 - Examen comparatif de la disposition des écailles sur les cônes de Pin, pour servir d'introduction à la disposition des feuilles en général, par Alex.

Braun (Nova Acta physico-medica Acad. Caes. Leopold. natur. curios. Bonn. t. XV, p. 197 ; 1831 , cum tab. 34.) » In : *Archives de botanique* 1, p. 317–337.

Martins, Charles (1843). « La métamorphose des plantes de Goethe et la loi de symétrie d'Aug. Pyr. de Candolle ». In : *Revue indépendante* 392, p. 38–60.

Massonnaud, Dominique (2019). « Goethe et le transformisme français : histoire et actualité ». In : *Fabula/ Les colloques*. url : `http://recherche.fabula.org/colloques/document6106.php`.

Mauskopf, Seymour H. (1976). « Crystals and Compounds : Molecular Structure and Composition in Nineteenth-Century French Science ». In : *Transactions of the American Philosophical Society* 66.3, p. 5–82.

Michel, Louis (1998). « Physique et mathématiques ». In : *Publications mathématiques de l'I.H.E.S.* S88, p. 131–144.

Montgomery, William M. (1970). « The Origins of the Spiral Theory of Phyllotaxis ». In : *Journal of the History of Biology* 3.2, p. 299–323.

Morren, Edouard (1872). *Mémorandum des travaux de botanique et de physiologie végétale qui ont été publiés par l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique pendant le premier siècle de son existence (1772-1871) : rapport séculaire*. Bruxelles : F. Hayez.

Neumann, Wolfgang & Klaus-Werner Benz (2018). *Kristalle verändern unsere Welt : Struktur-Eigenschaften-Anwendungen*. Berlin, Boston : Walter de Gruyter.

Rey, Roselyne (1994). « La Classification des sciences (1750-1850) ». In : *Revue de synthèse*. IV 1-2, p. 5–12.

Reynaud, Marie-Hélène (1991). *Auguste Bravais de la Laponie au Mont-Blanc*. Annonay : Éditions du Vivarais.

Sakarovitch, Joël (1998). *Épures d'architecture : de la coupe des pierres à la géométrie descriptive XVIe-XIXe siècles*. Basel : Birkhäuser.

Sarrau, Émile (1867). « Sur la propagation et la polarisation de la lumière dans les cristaux ». In : *Journal de mathématiques pures et appliquées*. 2e sér. 12, p. 1–46.

Schimper, Karl Friedrich (1830). « Beschreibung des Symphytum Zeyheriund seiner zwei deutschen Verwandten der S. bulborum Schimper und S. tuberosum Jacqu. nebst Erlaüterungen über die Asperifolien überhaupt, namentlich über deren Blattstellung und Inflorescens und das Planzen-Ei ». In : *Magazin für Pharmacie und die dahin einschagenden Wissenschaften*, p. 1–92.

Scholz, Erhard (1989a). *Symmetrie, Gruppe, Dualität*. Basel : Birkhäuser.

— (1989b). « The Rise of Symmetry Concepts in the Atomistic and Dynamistic Schools of Crystallography, 1815-1830 ». In : *Revue d'histoire des sciences* 42, 1-2, p. 109–122.

Scholz, Erhard (1996). « The Influence of Justus Grassmann's Crystallographic Works on Hermann Grassmann ». In : *Hermann Günther Grassmann (1809-1877) : Visionary Mathe-*

matician, Scientist and Neohumanist Scholar. Ed. par Gert Schubring. Dordrecht : Kluwer, p. 37–45.

— (2019). « Geschichte der Kristallographie ». In : *Klassische Gestalten und moderne Strukturen in Geometrie und Kristallographie,* aus dem Nachlass *von Egbert Brieskorn*. Imaginary - open mathematics, p. 689–722.

Seeber, Ludwig August (1824). « Versuch zur Erklärung des inneren Baues der festen Körper ». In : *Annalen der Physik* 16 (3), p. 229–248, 349–372.

Senechal, Marjorie (1990). *Crystalline Symmetries : An Informal Mathematical Introduction*. Bristol : Adam Hilger.

Stevens, P. F. (1984). « Haüy and A.-P. Candolle : Crystallography, Botanical Systematics, and Comparative Morphology, 1780-1840 ». In : *Journal of the History of Biology* 17.1, p. 49–82.

Sturm, Charles (1837). « Rapport sur le mémoire : Recherches sur les lignes formées dans un plan par des points sont les coordonnées sont des nombres entiers, d'Auguste Bravais ». In : *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 5, p. 867–869.

Tobien, Heinz (1975). *Schimper, Karl Friedrich*. Ed. par Charles Gillispie Coulston. New York.

Tort, Patrick (1989). *La Raison classificatoire*. Paris : Aubier.

Touret, Jacques (2007). « Élie de Beaumont (1798-1874), des systèmes de montagnes au réseau pentagonal ». In : *Travaux du Comité français d'histoire de la géologie*. III 21, p. 127–155.

Turpin, Pierre Jean-François (1828). « Aperçu organographique sur le nombre deux, considéré comme multiplicateur de 4, 8, 12, 16, 32 et 64 dans la structure des végétaux d'un ordre inférieur, et dans les parties vésiculaires ou élémentaires dont se composent les masses du tissu cellulaire des végétaux d'ordres plus élevés ». In : *Mémoires du Muséum d'histoire naturelle* 16, p. 295–344.