



HAL
open science

Cours au Collège de France 2015 : Une brève histoire des atomes froids

Jean Dalibard

► **To cite this version:**

Jean Dalibard. Cours au Collège de France 2015 : Une brève histoire des atomes froids. Doctorat. France. 2015. hal-03745232

HAL Id: hal-03745232

<https://hal.science/hal-03745232>

Submitted on 19 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une brève histoire des atomes froids

Jean Dalibard

Collège de France, chaire *Atomes et rayonnement*

Cours 2014-15

Table des matières

Introduction	1	IV Se cacher dans l'ombre	57
I Atomes et lumière en équilibre thermique	5	1 Système en Λ et états noirs	57
1 Einstein 1916 : absorption et émission	5	2 Refroidissement par état noir	63
2 L'approche quantique	8	3 Lois d'échelle pour le refroidissement subrecul	66
3 Le mouvement brownien	10	4 Une ombre sur mesure : transition Raman	71
4 Einstein 1917 : thermalisation du gaz	14	V Sisyphe brillant, Sisyphe gris	77
II Le refroidissement Doppler et le piège magnéto-optique	19	1 Le modèle Sisyphe standard	77
1 La force de pression de radiation	19	2 Limite du refroidissement Sisyphe	80
2 Le refroidissement Doppler	23	3 Au delà du modèle linéaire	83
3 La mélasse optique en pratique	26	4 Sisyphe gris	87
4 Le piège magnéto-optique	31	VI Les réseaux optiques et le refroidissement par bande latérale	97
III Les vertus des raies étroites	37	1 Effets collectifs et diffusion multiple	98
1 Refroidissement monochromatique	38	2 Le refroidissement par bande latérale	102
2 Comment structurer la raie de résonance	42	3 Peut-on se passer de l'émission spontanée ?	110
3 Expériences de refroidissement en raie étroite	45	4 Conclusions	115
4 Vers la condensation	48	Références	117

Introduction

Peut-on contrôler l'équilibre thermodynamique d'un échantillon de matière par une lumière bien choisie? Depuis les articles fondateurs d'Einstein (1917) et de Kastler (1950), cette question a accompagné le développement de la physique atomique et de l'optique quantique. À partir des années 1970, le développement des sources laser accordables est venu lui donner un renouveau avec notamment les propositions de refroidissement de gaz d'atomes neutres ou d'ions par Hänsch & Schawlow (1975) et Wine-land & Dehmelt (1975). Les réponses qui ont été apportées sont allées bien au delà des prévisions initiales les plus optimistes. Le refroidissement de particules atomiques par laser permet d'abaisser la température d'un gaz depuis la température ambiante (300 K) jusqu'à un domaine compris entre le millikelvin et le microkelvin, voire même en dessous dans certains cas particuliers (figure 1).

Les atomes froids sont omniprésents dans les expériences de métrologie du temps et des fréquences, ainsi que dans la plupart des mesures de haute précision en physique atomique. Le refroidissement radiatif a également ouvert la voie à la production de gaz quantiques comme les condensats de Bose-Einstein, dans lesquels un grand nombre de particules s'accumulent dans un seul état microscopique. Il permet en effet de s'approcher de la limite où la longueur d'onde thermique des particules du gaz, $\lambda_T \sim h/M\bar{v}$, où h est la constante de Planck, M la masse d'un atome et \bar{v} la vitesse d'agitation thermique résiduelle, devient comparable à la distance entre particules. Notons toutefois que le refroidissement radiatif ne permet en général pas d'atteindre directement le seuil de condensation. Il est secondé par une phase de refroidissement par évaporation, qui permet d'abaisser la température d'encore un ou deux ordres de grandeur (figure 1).

Le refroidissement radiatif a été appliqué à de nombreuses espèces atomiques, plus d'une trentaine à ce jour (figure 2). Le seul élément déter-

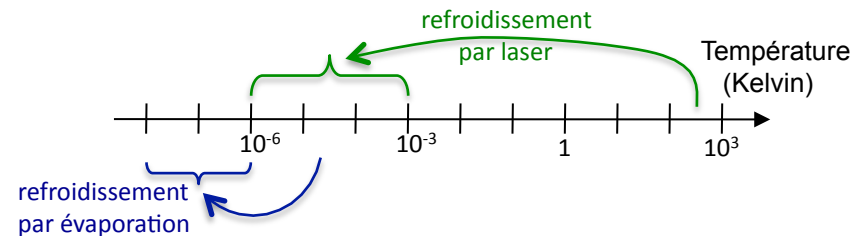


FIGURE 1. Échelle de température indiquant le gain apporté par le refroidissement de gaz d'atomes par laser, ainsi que le gain supplémentaire obtenu grâce au refroidissement par évaporation.

minant est de disposer de sources laser continues suffisamment fiables, intenses (et relativement bon marché) pour exciter de manière résonante une transition atomique. Le but de ce cours est de présenter l'évolution des principales idées à la base du refroidissement radiatif, et de discuter leurs performances et leurs limites. Nous ne chercherons pas à décrire ici toutes les méthodes qui ont été proposées, mais nous nous concentrerons sur quelques principes importants :

- L'effet Doppler, qui permet d'obtenir une réponse de l'atome à l'onde lumineuse qui dépend de la vitesse atomique.
- Le mécanisme Sisyphe, qui oblige l'atome à escalader plus de collines de potentiel qu'il n'en descend.
- L'utilisation d'états noirs, qui consiste à cacher les atomes dans l'obscurité, c'est-à-dire à les accumuler dans des états où ils sont effectivement découplés de la lumière.

En préliminaire, il est probablement utile de préciser ce que nous en-

CLASSIFICATION PÉRIODIQUE DES ÉLÉMENTS CHIMIQUES

14 IVA		13 IIIA		12 IIB		11 IB		10 VIII B		9 VIII B		8 VIII B		7 VII B		6 VI B		5 VB		4 IVA		3 IIIA		2 IIA		1 IA														
6	12,0107	14	14,0030	12	72,64	11	112,41	10	101,07	9	102,90	8	101,07	7	92,906	6	92,906	5	91,224	4	92,906	3	23,0038	2	6,941	1	1,00794													
C		Si		Ge		Sn		Pb		Tl		Pd		Au		Hg		Cd		Ag		Cu		Zn		Ga		In		Sb		Te		I		Xe		At		Rn

FIGURE 2. Espèces atomiques ayant été refroidies par laser (ou en passe de l'être pour les cercles pointillés) [le tableau périodique a été obtenu sur wikipedia].

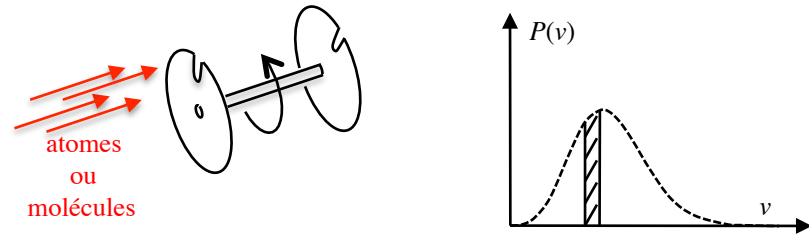


FIGURE 3. Sélection en vitesse d'un jet atomique ou moléculaire, au moins d'un système de roues dentées tournantes. Il n'y a pas d'augmentation de la densité d'une classe de vitesse donnée.

tendrons par *refroidissement*, une notion parfois subtile qui peut concerner un filtrage, un abaissement de température ou encore une augmentation de densité dans l'espace des phases.

Donnons deux exemples pour fixer les idées. Partant d'un jet atomique avec une distribution en vitesse de grande largeur Δv , on peut filtrer une tranche de largeur $\delta v \ll \Delta v$ par un système de roues dentées (figure 3). On n'a pas refroidi le gaz à proprement parler mais on l'a séparé en deux parties, l'une constituée de la tranche de vitesse désirée qui a été transmise par la roue dentée, l'autre qui s'est collée sur les parois de cette roue. Ce filtrage est très différent de l'accumulation de tous les atomes du jet dans la tranche δv , comme cela est fait dans les expériences de ralentissement par pression de radiation. Le gain en brillance peut être de plusieurs ordres de grandeur dans le deuxième cas.

Un deuxième exemple va nous permettre de distinguer *abaissement de température* et *augmentation de la densité dans l'espace des phases*. Considérons une assemblée de particules de masse M dans un piège harmonique 1D de pulsation ω , à l'équilibre thermodynamique à température T :

$$\frac{1}{2} M \omega^2 \Delta x^2 = \frac{1}{2} M \Delta v^2 = \frac{1}{2} k_B T, \tag{1}$$

où Δx et $\Delta v = \omega \Delta x$ sont les écart-types des distributions en position et en vitesse. Supposons qu'on « ouvre » ce piège en modifiant sa pulsation. Cette ouverture, si elle se fait suffisamment lentement, maintient l'équilibre thermique avec une température T' qui se déduit de T via le théorème

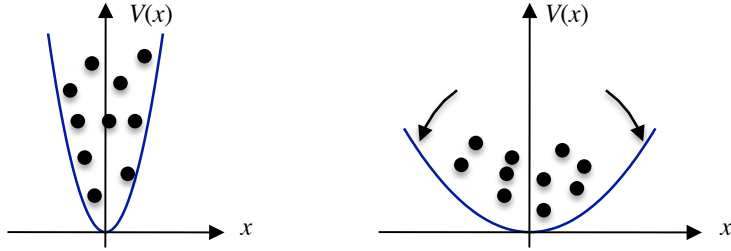


FIGURE 4. Ouverture adiabatique d'un piège harmonique, la pulsation passant de ω à $\omega' < \omega$.

adiabatique :

$$\frac{T'}{\omega'} = \frac{T}{\omega} \Rightarrow T' = T \frac{\omega'}{\omega} < T. \quad (2)$$

On a donc bien un refroidissement. On trouve pour les nouvelles largeurs en position et en vitesse :

$$\Delta x' = \Delta x \left(\frac{\omega}{\omega'} \right)^{1/2}, \quad \Delta v' = \Delta v \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^{1/2} \quad (3)$$

On a donc divisé la largeur de la distribution en vitesse par le facteur $(\omega/\omega')^{1/2}$, et multiplié la largeur de la distribution en position par le même facteur. La densité dans l'espace des phases, proportionnelle à $(\Delta x \Delta v)^{-1}$, est inchangée dans ce processus : on a simplement échangé une bonne connaissance de la position et une mauvaise connaissance de la vitesse par son inverse.¹

Sur ce deuxième exemple, on voit qu'un refroidissement n'entraîne pas forcément une augmentation de la densité dans l'espace des phases, ni – pour parler en termes quantiques – une augmentation de la population d'un état quantique individuel. Or cette augmentation est essentielle pour de nombreuses expériences de refroidissement d'atomes par laser, puisqu'un des buts de ces expériences est de se rapprocher, voire d'atteindre le seuil de dégénérescence quantique et la condensation de Bose–Einstein.

1. Les opticiens reconnaîtront dans ce qui précède l'action d'une lentille sur un faisceau lumineux, la conservation de la densité dans l'espace des phases devenant la conservation de l'étendue optique.

En fait, pour un système de N particules indépendantes, on peut facilement montrer que cette augmentation ne peut jamais être obtenue lors d'une évolution hamiltonienne du gaz. Le raisonnement est simple (Ketterle & Pritchard 1992); partons de l'opérateur densité $\hat{\rho}$ à une particule caractérisant l'état du gaz. Cet opérateur peut être diagonalisé et ses valeurs propres π_1, π_2, \dots , toutes réelles positives ou nulles avec $\sum_j \pi_j = 1$, nous donnent les probabilités d'occupation des différents états quantiques. Supposons que l'évolution du gaz de particules entre t_i et t_f soit régie par l'hamiltonien

$$\hat{H}(t) = \sum_{n=1}^N \hat{H}^{(n)}(t), \quad (4)$$

où $\hat{H}^{(n)}$ est l'hamiltonien de la $n^{\text{ème}}$ particule. À l'instant t_f , l'opérateur densité à une particule sera simplement

$$\hat{\rho}(t_f) = \hat{U}(t_i \rightarrow t_f) \hat{\rho}(t_i) \hat{U}^\dagger(t_i \rightarrow t_f), \quad (5)$$

où l'opérateur d'évolution à une particule $\hat{U}(t_i \rightarrow t_f)$ se calcule à partir de $\hat{H}^{(n)}$. Il est inutile ici de disposer de l'expression explicite de \hat{U} . Le seul point important est que cet opérateur est unitaire : les valeurs propres de $\hat{\rho}(t_f)$ sont toujours identiques aux valeurs propres de $\hat{\rho}(t_i)$. On ne peut donc pas espérer accumuler des particules dans un état donné via un processus purement hamiltonien (comme l'ouverture du piège de la figure 4) quand ces particules sont indépendantes. On peut tout au plus échanger les populations entre deux états différents, l'exemple le plus simple étant le pulse π de la résonance magnétique.

L'examen des hypothèses nécessaires pour arriver à cette conclusion quelque peu négative nous donne la démarche à suivre pour progresser :

(i) Nous avons considéré un processus hamiltonien ; le système n'est pas nécessairement isolé puisque \hat{H} peut dépendre du temps, mais nous avons fait l'hypothèse que notre assemblée de N particules n'était pas couplée à un autre système quantique qui pourrait jouer le rôle de réservoir. Or, c'est précisément ce qui va se produire dans le refroidissement d'atomes par laser. L'atome est couplé à l'ensemble des modes du champ électromagnétique, notamment via les processus d'émission spontanée : l'évolution de la matrice densité réduite de l'atome n'est donc pas hamiltonienne et on peut très bien augmenter une de ses valeurs propres au détriment des autres.

(ii) Nous avons considéré un système de particules indépendantes. Si les particules interagissent entre elles, alors il est possible de changer l'occupation des niveaux d'énergie à une particule par une variation appropriée de l'hamiltonien $\hat{H}(t)$. Il est en particulier possible de produire un condensat de Bose-Einstein en modifiant uniquement le potentiel confinant les N particules, sans introduire de couplage avec un système quantique extérieur, ni évaporer de particules. L'entropie totale du gaz est inchangée (voire augmentée si le processus est irréversible) mais le nombre de particules occupant le niveau fondamental du piège peut néanmoins croître de manière spectaculaire lors de cette transformation. Nous en verrons un exemple plus loin.

Le déroulement du cours sera le suivant.

- Le chapitre 1 sera consacré à la démarche suivie par Einstein dans ses articles fondateurs (Einstein 1916; Einstein 1917). Il y montre comment le mouvement d'atomes couplés au rayonnement électromagnétique est analogue au mouvement brownien, et pourquoi on obtient ainsi une thermalisation des atomes grâce à l'effet Doppler.
- Le deuxième chapitre sera lui aussi consacré au refroidissement Doppler, mais avec des lasers ; nous y décrirons également son équivalent dans l'espace des positions, le piège magnéto-optique, et nous rencontrerons la première signature d'une interaction effective atome-atome créée par la lumière.
- Dans le troisième chapitre, nous étudierons la possibilité de manipuler des atomes à raie étroite et nous verrons apparaître la possibilité d'accumuler les atomes dans des classes de vitesses peu couplées à la lumière.
- Cette notion d'accumulation d'atomes « dans l'obscurité » sera approfondie au chapitre 4, avec l'utilisation d'états noirs et la discussion des lois statistiques très particulières (lois de Lévy) qui peuvent apparaître.
- Le chapitre 5 sera consacré à l'effet Sisyphé, qui est à l'œuvre dans la plupart des expériences de refroidissement et conduit très simplement à des distributions en vitesse limitées seulement par le recul associé à un seul photon. Nous nous intéresserons en particulier aux développements récents concernant les « mélasses grises », qui permettent d'étendre le concept de refroidissement Sisyphé à des espèces

atomiques non concernées jusqu'ici.

- Enfin le chapitre 6 sera consacré au refroidissement par bande latérale, et nous donnera l'occasion de faire le point sur la densité dans l'espace des phases maximale qu'on peut espérer atteindre dans ce type d'expérience de refroidissement radiatif.

Insistons encore une fois sur le fait que notre but n'est pas de faire une revue exhaustive des tous les dispositifs qui ont été proposés ou étudiés depuis les articles initiaux de Hänsch & Schawlow (1975) et de Wineland & Dehmelt (1975). C'est plutôt de dégager les principes des mécanismes actuellement utilisés et de les illustrer avec des expériences récentes (en espérant ainsi stimuler l'exploration de nouvelles voies...)

Chapitre I

Atomes et lumière en équilibre thermique

Le point de départ de ce cours va être le rayonnement du corps noir, c'est-à-dire le rayonnement électromagnétique émis par un corps matériel en équilibre thermodynamique avec son environnement. La distribution spectrale de ce rayonnement est une loi universelle qui ne dépend que de la température du corps. Elle est donnée par la loi de Planck, qui l'a proposée en 1900 :

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}, \quad (\text{I.1})$$

où $\rho(\omega) d\omega$ représente l'énergie électromagnétique par unité de volume correspondant à un rayonnement de pulsation comprise entre ω et $\omega + d\omega$.

Une version « moderne » (et complètement équivalente comme nous allons le voir dans ce qui suit) de cette loi consiste à se donner un volume de quantification de taille finie et à poser que le nombre moyen de photons dans un mode de pulsation ω est donné par la loi de Bose–Einstein de potentiel chimique nul

$$\bar{n}(\omega, T) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}. \quad (\text{I.2})$$

Considérant la loi de Planck (I.1) acquise, Einstein (1917) va étudier comment un rayonnement avec cette densité spectrale d'énergie va imposer sa température à une collection d'atomes. Pour cela, il va introduire la notion de force de friction causée par la lumière sur un atome en mouvement, force de friction en tout point identique à celle proposée près de 60 ans plus tard par Hänsch & Schawlow (1975) et à l'œuvre dans les mélasse

Doppler utilisées dans les laboratoires d'aujourd'hui. De plus, le raisonnement d'Einstein est également identique à celui que nous serons amenés à utiliser pour traiter du mouvement des atomes dans des faisceaux lumineux : il s'agit d'arguments fondés sur la notion de mouvement brownien, que nous allons également passer en revue dans ce chapitre.

1 Einstein 1916 : absorption et émission

En 1916, alors qu'il vient de publier sa théorie de la Relativité Générale, Einstein revient vers l'étude des processus d'échanges d'énergie et d'impulsion entre atomes et rayonnement (Einstein 1916). Pour approfondir ce thème qu'il avait abordé dès 1905 dans son étude de l'effet photo-électrique, il va prendre comme fil directeur l'atteinte de l'équilibre thermodynamique.

Einstein considère une collection d'atomes éclairés par un rayonnement de type corps noir à température T (figure I.1). Son but est de modéliser la manière selon laquelle l'atome et le rayonnement peuvent échanger de l'énergie. La seule contrainte qu'il s'impose est la cohérence de la physique statistique : il faut que la répartition des populations moyennes des différents niveaux d'énergie de l'atome soit une distribution de Boltzmann avec la même température T . Dans un modèle d'atome à deux niveaux, avec un état fondamental g et un état excité e séparés une énergie $\hbar\omega_A$ (figure I.2,

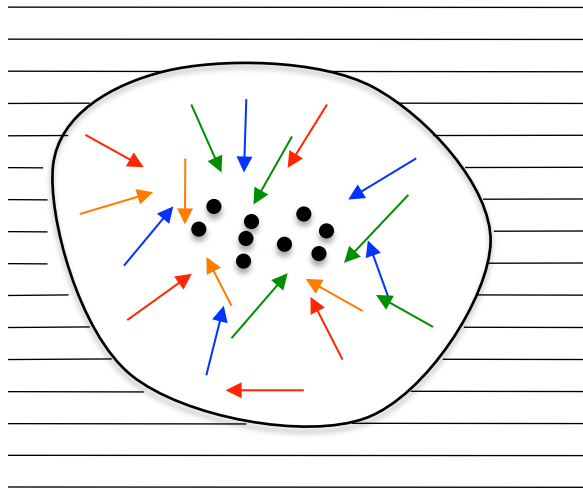


FIGURE I.1. Le problème considéré par Einstein : une assemblée d'atomes indépendants est éclairée par le rayonnement d'un corps noir à température T . Cette assemblée d'atomes va-t-elle se thermaliser avec le corps noir, aussi bien en ce qui concerne ses degrés de libertés internes qu'externes ?

gauche), le rapport des populations $P_{g,e}$ doit être tel que :

$$\frac{P_e}{P_g} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_A}{k_B T}\right). \quad (I.3)$$

1-1 Processus élémentaires et état d'équilibre

Pour expliquer comment un tel état d'équilibre peut être obtenu, Einstein étudie la compétition entre processus d'absorption de photons¹ et processus d'émission :

- Si l'atome est dans l'état fondamental, il peut absorber un photon et passer dans l'état excité (figure I.3). Einstein postule que la probabilité

1. Einstein n'utilise pas le terme de photon, qui ne sera introduit que bien plus tard (1926) par Lewis.

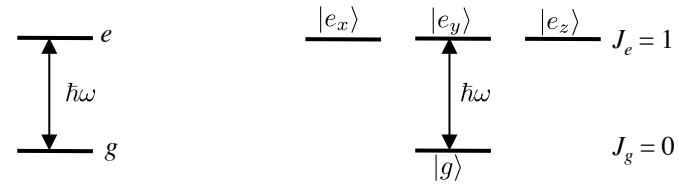


FIGURE I.2. Les deux modèles de transition atomique considérés dans ce chapitre. À gauche, atome à deux niveaux ; à droite, transition $J_g = 0 \leftrightarrow J_e = 1$ permettant de prendre correctement en compte les phénomènes liés à la polarisation de la lumière. On prendra comme base du niveau excité les états $|e_j\rangle$ dont la projection du moment cinétique sur l'axe j est nulle ($j = x, y, z$).

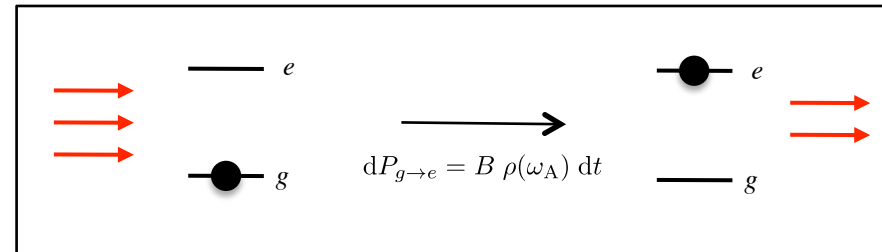


FIGURE I.3. Processus d'absorption

pour que ce processus se produise pendant un intervalle de temps infinitésimal dt est proportionnelle à dt et à la densité d'énergie du rayonnement ρ , prise à la fréquence² de résonance atomique ω_A :

$$dP_{g \rightarrow e} = B \rho(\omega_A) dt, \quad (I.4)$$

où B est un coefficient indéterminé à ce stade.

- Si l'atome est dans l'état excité, il peut tomber sur l'état fondamental en émettant un photon. La probabilité pour que cette émission se produise pendant dt est la somme de deux termes. D'une part, même si aucun photon n'est initialement présent, l'atome peut passer de e à g

2. Nous utiliserons fréquemment la dénomination usuelle *fréquence* pour la quantité ω , bien qu'il s'agisse en réalité d'une *pulsation*, la fréquence étant $\omega/2\pi$.

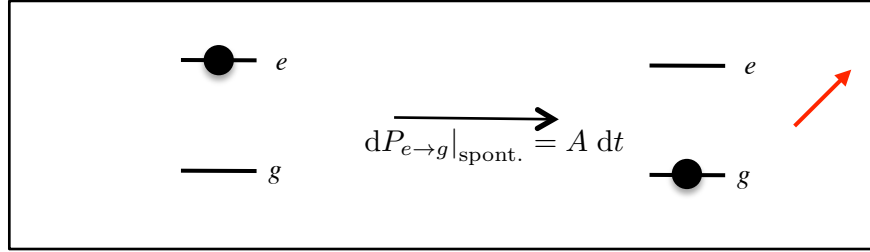


FIGURE I.4. Processus d'émission spontanée : le photon est émis dans une direction aléatoire.

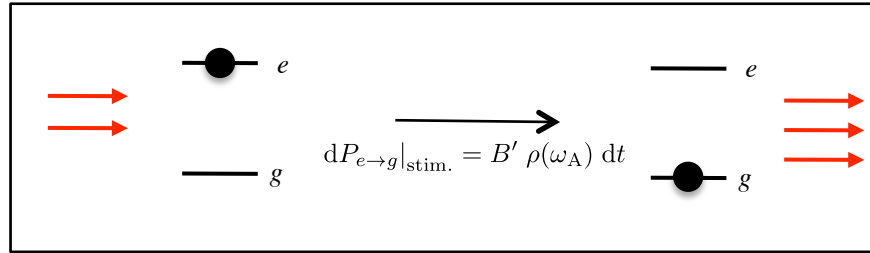


FIGURE I.5. Processus d'émission stimulée.

par émission spontanée (figure I.4) avec la probabilité :

$$dP_{e \to g}|_{spont.} = A dt, \tag{I.5}$$

c'est-à-dire une loi qui, comme Einstein le remarque, est identique à celle de la décroissance radioactive. D'autre part, l'émission peut être stimulée par le rayonnement déjà présent à la fréquence atomique, avec une probabilité

$$dP_{e \to g}|_{stim.} = B' \rho(\omega_A) dt. \tag{I.6}$$

L'évolution des probabilités $P_{g,e}$ est alors donnée par une équation de taux :

$$\frac{dP_g}{dt} = -B \rho(\omega_A) P_g + [A + B' \rho(\omega_A)] P_e, \quad P_g + P_e = 1, \tag{I.7}$$

qui entraîne que ces probabilités tendent vers l'état stationnaire

$$P_g = \frac{A + B' \rho(\omega_A)}{A + (B + B') \rho(\omega_A)}, \quad P_e = \frac{B \rho(\omega_A)}{A + (B + B') \rho(\omega_A)}, \tag{I.8}$$

avec le temps caractéristique

$$\tau_{int.} = [A + (B + B') \rho(\omega_A)]^{-1}. \tag{I.9}$$

L'indice "int." signifie qu'il s'agit ici du temps de mise à l'équilibre des variables internes, différent de celui que nous rencontrerons plus loin pour la mise à l'équilibre du centre de masse de l'atome.

1-2 Contraintes sur les coefficients d'Einstein

La comparaison de l'état stationnaire trouvé en (I.8) avec le résultat attendu pour l'équilibre thermodynamique (I.3) entraîne la contrainte suivante

$$\frac{B \rho(\omega_A)}{A + B' \rho(\omega_A)} = \exp(-\hbar\omega_A/k_B T), \tag{I.10}$$

qui doit être satisfaite à toute température T , les coefficients A, B, B' étant quant à eux indépendants de la température.

Prenons d'abord la limite haute température, pour laquelle $\rho(\omega) \rightarrow +\infty$: on en déduit immédiatement :

$$B' = B. \tag{I.11}$$

Les processus d'absorption et d'émission stimulée sont donc intimement liés.

Plus généralement, la contrainte (I.10) pourra être satisfaite si la densité d'énergie $\rho(\omega_A)$ du rayonnement est égale à :

$$\rho(\omega_A) = \frac{A/B'}{\exp(\hbar\omega_A/k_B T) - 1}. \tag{I.12}$$

Cette relation est compatible avec la loi de Planck donnée en (I.1) pourvu que le rapport A/B' soit égal à

$$\frac{A}{B'} = \frac{\hbar\omega_A^3}{\pi^2 c^3}. \tag{I.13}$$

Avec les contraintes (I.11) et (I.13), les hypothèses d'Einstein concernant l'absorption et l'émission de lumière par l'atome conduisent donc bien à une mise en équilibre thermodynamique des populations des niveaux d'énergie atomiques avec le rayonnement du corps noir. Einstein conclut son article de 1916 en remarquant que, bien que la vérification de cette mise à l'équilibre ne constitue pas une preuve de validité rigoureuse des hypothèses (I.4-I.5-I.6), il y a une forte probabilité pour que ces processus soient effectivement à la base d'une future construction théorique. Par ailleurs, il note que les coefficients A , B et B' pourraient être calculables *ab initio*, et donc les relations (I.11, I.13) testées, si l'on disposait « d'une version modifiée de l'électrodynamique et de la mécanique compatible avec l'hypothèse quantique ». C'est précisément ce que nous allons faire au paragraphe suivant.

Remarque : le cas de niveaux dégénérés. Dans son étude, Einstein considère également le cas où les niveaux d'énergie peuvent être dégénérés. En notant d_e et d_g ces dégénérescences, un raisonnement similaire au précédent conduit à

$$d_g B = d_e B', \quad \frac{A}{B'} = \frac{\hbar \omega_A^3}{\pi^2 c^3}. \quad (\text{I.14})$$

Nous rencontrons plus loin le cas d'une transition $J_g = 0 \leftrightarrow J_e = 1$, pour laquelle $d_g = 1$ et $d_e = 3$ et pour laquelle l'équation d'évolution de la population P_g du niveau g , donnée en (I.7) pour un système à deux niveaux, devient en utilisant $B = 3B'$:

$$\frac{dP_g}{dt} = A \left\{ -3 \frac{B'}{A} \rho(\omega_A) P_g + \sum_j \left[1 + \frac{B'}{A} \rho(\omega_A) \right] P_{e,j} \right\}, \quad (\text{I.15})$$

où l'indice j repère les trois sous-niveaux composant le niveau excité e . Nous verrons un peu plus loin [eq. (I.33)] une écriture plus compacte de cette relation en terme de nombre de photons par mode.

2 L'approche quantique

Dans ce paragraphe, nous allons reformuler le traitement d'Einstein pour l'absorption et l'émission de lumière par un atome dans un champ lu-

mineux isotrope et incohérent, en nous appuyant sur le formalisme quantique « moderne ». Nous allons utiliser la notion de nombre moyen \bar{n} de photons par mode, légèrement plus facile à manipuler que la densité d'énergie ρ , et considérer une transition atomique réaliste pour laquelle nous pourrions traiter l'interaction atome-champ à partir de la règle d'or de Fermi.

2-1 Densité d'énergie et nombre de photons par mode

Pour retrouver en langage quantique « moderne » les coefficients A et B introduits par Einstein, commençons par relier la densité d'énergie $\rho(\omega)$ au nombre moyen de photons par mode \bar{n} pour un champ électromagnétique confiné dans une boîte de volume L^3 . On considère des conditions aux limites périodiques dans cette boîte, de sorte que les modes du champ sont repérés par leur vecteur d'onde \mathbf{k} et leur polarisation ϵ , avec

$$k_j = \frac{2\pi}{L} n_j, \quad n_j \in \mathbb{Z}, \quad j = x, y, z \quad (\text{I.16})$$

et $\epsilon \perp \mathbf{k}$. L'énergie totale du champ s'écrit en fonction de $\rho(\omega)$ sous la forme

$$E = L^3 \int_0^{+\infty} \rho(\omega) d\omega \quad (\text{I.17})$$

et s'exprime d'autre part en terme de l'occupation des modes

$$E = \sum_{\mathbf{k}, \epsilon} \hbar \omega \bar{n}_{\mathbf{k}, \epsilon}, \quad \omega = ck. \quad (\text{I.18})$$

Remplaçons la somme discrète par une intégrale dans cette dernière expression, et supposons que la population $\bar{n}_{\mathbf{k}, \epsilon}$ d'un mode ne dépend que de la fréquence ω de ce mode, et est indépendante de la polarisation. On a alors

$$E = 2 \times \frac{L^3}{8\pi^3} \int_0^{+\infty} \hbar \omega \bar{n}(\omega) 4\pi k^2 dk, \quad (\text{I.19})$$

où le facteur 2 correspond à la somme sur les deux polarisations indépendantes associées à un vecteur \mathbf{k} donné. La comparaison de (I.17) et (I.19) donne :

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \bar{n}(\omega), \quad (\text{I.20})$$

comme on pouvait le voir directement en comparant (I.1) et (I.2).

Si l'on reprend le raisonnement d'Einstein en terme du nombre de photons par mode \bar{n} plutôt que de la densité d'énergie ρ , on est alors conduit à remplacer le coefficient B par le coefficient \tilde{B} tel que

$$B \rho(\omega_A) = \tilde{B} \bar{n}(\omega_A), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \tilde{B} = B \frac{\hbar \omega_A^3}{\pi^2 c^3} \quad (\text{I.21})$$

et idem pour B' . Les contraintes (I.14) pour atteindre l'équilibre thermodynamique se résument alors à :

$$d_g \tilde{B} = d_e \tilde{B}' \quad \text{et} \quad A = \tilde{B}'. \quad (\text{I.22})$$

2-2 Transition atomique modèle

Pour pouvoir prendre en compte de manière satisfaisante la nature vectorielle du champ électromagnétique, il est préférable de considérer une structure de niveau légèrement plus compliquée que l'atome à deux niveaux de la section précédente. Nous allons nous intéresser ici à une transition entre un niveau fondamental de moment cinétique nul, donc non dégénéré, et un niveau excité de moment cinétique unité, donc dégénéré trois fois (figure I.2, droite). Une base possible de ce niveau excité est obtenue en choisissant un trièdre de référence \mathbf{u}_j , $j = x, y, z$, et en considérant les trois états Zeeman orthogonaux $|e_j\rangle$ ayant chacun une projection de moment cinétique nulle le long de l'axe j : $(\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{u}_j) |e_j\rangle = 0$.

Le couplage atome-rayonnement s'écrit à l'approximation dipolaire électrique et à l'approximation du champ tournant

$$\hat{V} = d \left(\sum_j \mathbf{u}_j |g\rangle \langle e_j| \right) \cdot \hat{\mathbf{E}}^{(-)} + \text{H.c.} \quad (\text{I.23})$$

où d est le dipole atomique réduit caractérisant la transition atomique. L'opérateur champ électrique s'écrit en terme des opérateurs de création ($a_{\mathbf{k},\epsilon}^\dagger$) et de destruction ($a_{\mathbf{k},\epsilon}$) d'un photon dans un mode donné :

$$\hat{\mathbf{E}}^{(-)} = \sum_{\mathbf{k},\epsilon} \mathcal{E}_k a_{\mathbf{k},\epsilon}^\dagger \boldsymbol{\epsilon}, \quad \hat{\mathbf{E}}^{(+)} = \left(\hat{\mathbf{E}}^{(-)} \right)^\dagger, \quad \mathcal{E}_k = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 L^3}}. \quad (\text{I.24})$$

2-3 Utilisation de la règle d'or de Fermi

Nous allons maintenant déterminer complètement les coefficients d'Einstein en utilisant l'électrodynamique quantique. Nous allons utiliser la règle d'or de Fermi (Cohen-Tannoudji et al. 1973) qui donne, à l'ordre le plus bas non nul, la probabilité par unité de temps pour passer d'un état initial donné vers un continuum d'états.

Décrivons par exemple un processus d'émission, spontanée ou stimulée. L'état initial correspond à l'atome placé dans un de ses états excités $|e_j\rangle$ en présence d'un état donné du champ électromagnétique. Cet état est caractérisé par l'ensemble des nombres d'occupation $\{n_{\mathbf{k},\epsilon}\}$ des modes du rayonnement :

$$|\Psi_i\rangle = |e_j, \{n_{\mathbf{k},\epsilon}\}\rangle. \quad (\text{I.25})$$

L'état final correspond à l'atome dans son état fondamental, en présence d'un état du champ $\{n'_{\mathbf{k},\epsilon}\}$:

$$|\Psi_f\rangle = |g, \{n'_{\mathbf{k},\epsilon}\}\rangle, \quad (\text{I.26})$$

où tous les $n'_{\mathbf{k},\epsilon}$ sont égaux aux $n_{\mathbf{k},\epsilon}$, sauf un qui est augmenté d'une unité, correspondant à l'émission d'un photon dans ce mode particulier³ :

$$n'_{\mathbf{k}_0,\epsilon_0} = n_{\mathbf{k}_0,\epsilon_0} + 1, \quad n'_{\mathbf{k},\epsilon} = n_{\mathbf{k},\epsilon} \quad \text{si} \quad (\mathbf{k}, \epsilon) \neq (\mathbf{k}_0, \epsilon_0). \quad (\text{I.27})$$

La probabilité de transition par unité de temps depuis l'état Ψ_i vers le continuum d'états Ψ_f est donnée par la règle d'or de Fermi :

$$\mathcal{P}_{\text{émission}} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f \left| \langle \Psi_f | \hat{V} | \Psi_i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i). \quad (\text{I.28})$$

ce qui se calcule de manière explicite en terme d'une somme sur le mode \mathbf{k}_0, ϵ_0 dont la population a été augmentée d'une unité :

$$\mathcal{P}_{\text{émission}} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{k}_0,\epsilon_0} d^2 \mathcal{E}_{\mathbf{k}_0}^2 (\boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \mathbf{u}_j)^2 (n_{\mathbf{k}_0,\epsilon_0} + 1) \delta(\omega_0 - \omega_A), \quad (\text{I.29})$$

3. On ne s'intéresse ici qu'à l'ordre le plus bas, donné par la règle d'or de Fermi. Des processus d'ordre supérieur correspondraient à une diffusion multiple de photons par l'atome, avec plusieurs $n'_{\mathbf{k},\epsilon}$ différents des $n_{\mathbf{k},\epsilon}$.

où nous avons utilisé

$$\langle \{n'_{\mathbf{k},\epsilon}\} | a_{\mathbf{k}_0,\epsilon_0}^\dagger | \{n_{\mathbf{k},\epsilon}\} \rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}_0,\epsilon_0} + 1}. \quad (\text{I.30})$$

Le calcul de la somme (I.29), que l'on remplace par une intégrale comme en (I.19), est un « classique » des cours d'optique quantique. Nous supposons comme précédemment que la population moyenne d'un mode (\mathbf{k}, ϵ) ne dépend que de la fréquence de ce mode : c'est l'hypothèse d'un état isotrope pour le champ. Donnons simplement le résultat, une fois la moyenne prise sur l'état initial Ψ_i :

$$\mathcal{P}_{\text{émission}} = [\bar{n}(\omega_A) + 1] \Gamma, \quad \Gamma = \frac{d^2 \omega_A^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}, \quad (\text{I.31})$$

où la quantité Γ est la largeur naturelle de l'état excité, c'est-à-dire la probabilité par unité de temps pour que l'atome se désexcite si le rayonnement est vide de photons.

Un calcul en tout point similaire donne la probabilité par unité de temps pour qu'un atome initialement dans l'état fondamental absorbe un photon et passe dans un des trois états excités :

$$\mathcal{P}_{\text{absorption}} = 3 \bar{n}(\omega_A) \Gamma. \quad (\text{I.32})$$

L'équation d'évolution d'une des populations, P_g par exemple, est alors donnée par l'équation

$$\dot{P}_g = -3\bar{n} \Gamma P_g + \sum_j (\bar{n} + 1) \Gamma P_{e_j}, \quad (\text{I.33})$$

où l'on a posé pour simplifier $\bar{n} \equiv \bar{n}(\omega_A)$. Cette équation est formellement identique à celle que nous avons écrite en (I.15) à partir du raisonnement d'Einstein, mais son écriture est nettement plus compacte grâce à l'utilisation de la variable \bar{n} au lieu de la densité d'énergie ρ . L'état stationnaire

$$P_g = \frac{\bar{n} + 1}{4\bar{n} + 1}, \quad P_{e_j} = \frac{\bar{n}}{4\bar{n} + 1}, \quad (\text{I.34})$$

est atteint en un temps de l'ordre de

$$\tau_{\text{int}} = \frac{\Gamma^{-1}}{4\bar{n} + 1}. \quad (\text{I.35})$$

La structure du résultat, avec les termes d'absorption, d'émission stimulée et d'émission spontanée, correspond bien au résultat pressenti par Einstein avec

$$A = \Gamma. \quad (\text{I.36})$$

En particulier, à l'équilibre, le rapport entre la population d'un état excité et celle de l'état fondamental :

$$\frac{P_{e_j}}{P_g} = \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \quad (\text{I.37})$$

est égale au résultat attendu

$$\frac{P_{e_j}}{P_g} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_A}{k_B T}\right) \quad (\text{I.38})$$

si on injecte la loi du corps noir donnée en (I.2) :

$$\bar{n}(\omega) = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}. \quad (\text{I.39})$$

Le traitement que nous venons de faire répond donc au souhait d'Einstein quand il écrivait la phrase déjà citée : les coefficients A et B peuvent effectivement être calculés *ab initio*, et donc la relation (I.13) testée, car on dispose « d'une version modifiée de l'électrodynamique et de la mécanique, compatible avec l'hypothèse quantique ». En d'autres termes, nous avons vérifié la relation de proportionnalité entre A et B , ainsi que la relation $B = 3B'$ à partir des premiers principes de l'électrodynamique quantique. La cohérence de l'interaction matière-rayonnement et de la thermodynamique est donc bien assurée, au moins en ce qui concerne la dynamique atomique interne.

3 Le mouvement brownien

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes intéressés à la manière selon laquelle les variables atomiques internes, c'est-à-dire les populations des états g et e , atteignent l'équilibre thermique compatible avec la température imposée par le rayonnement du corps noir. Dans la suite de ce chapitre, nous allons considérer le mouvement du centre de masse de

l'atome et vérifier que l'état stationnaire de ce mouvement est également compatible avec l'équilibre thermique à température T . Plus précisément, nous voulons vérifier que la distribution de probabilité stationnaire pour l'impulsion de l'atome est la gaussienne

$$\mathcal{P}_{\text{stat.}}(\mathbf{p}) \propto e^{-p^2/2p_0^2} \quad (\text{I.40})$$

avec

$$\frac{p_0^2}{2M} = \frac{1}{2}k_B T. \quad (\text{I.41})$$

La thermalisation de l'atome dans le rayonnement résulte de la succession des processus d'absorption et d'émission de photons par l'atome. Comme chaque processus s'accompagne d'un changement de l'impulsion du centre de masse atomique, la situation est voisine de celle du mouvement brownien : l'atome joue le rôle de la particule brownienne et les photons du rayonnement du corps noir jouent le rôle des molécules du fluide. Les outils développés pour l'étude du mouvement brownien sont donc tout à fait adaptés pour étudier le problème qui nous intéresse ici et nous allons les résumer brièvement dans les paragraphes qui suivent [pour en savoir plus, on pourra consulter par exemple l'ouvrage de Van Kampen (1992)]. Nous reviendrons ensuite au problème de la thermalisation de l'atome dans le rayonnement thermique.

3-1 L'approche « équation de Langevin »

On suppose dans le cadre de cette approche que l'équation du mouvement de la particule brownienne comporte deux forces :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\alpha\mathbf{p} + \mathbf{F}(t). \quad (\text{I.42})$$

La première force, déterministe, correspond à un frottement fluide qui amortit l'impulsion en une durée caractéristique α^{-1} . La seconde force $\mathbf{F}(t)$, appelée *force de Langevin*, est aléatoire et caractérisée par ses propriétés statistiques. L'équation (I.42) est donc une équation différentielle stochastique.

En pratique, on impose les deux premiers moments de la force aléatoire $\mathbf{F}(t)$:

$$\langle \mathbf{F}(t) \rangle = 0, \quad \langle F_i(t)F_j(t') \rangle = 2D_p \delta_{i,j} \delta(t-t'), \quad i, j = x, y, z, \quad (\text{I.43})$$

où les moyennes sont prises sur différentes réalisations du désordre associé aux positions et vitesses des molécules du fluide. Le coefficient D_p est appelé *coefficient de diffusion en impulsion*, pour une raison qui va apparaître un peu plus loin.

Nous allons maintenant montrer que les deux coefficients α et D_p intervenant dans (I.42-I.43) sont reliés si l'on impose que l'état stationnaire de la distribution en impulsion de la particule corresponde à l'équilibre thermique, c'est-à-dire :

$$\langle \frac{p_i^2}{2M} \rangle = \frac{1}{2}k_B T, \quad i = x, y, z. \quad (\text{I.44})$$

Pour trouver cette relation, intégrons l'équation du mouvement (I.42) entre l'instant initial $t = 0$ et un instant t quelconque :

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} \mathbf{F}(t') dt'. \quad (\text{I.45})$$

En moyennant cette équation sur différentes réalisations du désordre, on trouve :

$$\langle \mathbf{p}(t) \rangle = \langle \mathbf{p}(0) \rangle e^{-\alpha t}. \quad (\text{I.46})$$

L'impulsion moyenne de la particule tend donc vers 0 avec le temps caractéristique α^{-1} . Considérons maintenant l'évolution du carré d'une composante de l'impulsion et prenons à nouveau la moyenne sur le désordre :

$$\begin{aligned} \frac{d\langle p_j^2(t) \rangle}{dt} &= 2\langle p_j(t) \frac{dp_j}{dt} \rangle \\ &= -2\alpha\langle p_j^2(t) \rangle + 2\langle p_j(t)F_j(t) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.47})$$

Le deuxième terme se calcule⁴ en injectant le résultat (I.45) :

$$\begin{aligned}
 \langle p_j(t) F_j(t) \rangle &= \langle p_j(0) F_j(t) \rangle e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} \langle F_j(t') F_j(t) \rangle dt' \\
 &= 0 + 2D_p \int_0^t e^{-\alpha\tau} \delta(\tau) d\tau \\
 &= D_p \quad (\text{pour } t > 0).
 \end{aligned}
 \tag{I.48}$$

L'impulsion quadratique moyenne évolue donc sous l'effet de deux termes :

$$\frac{d\langle p_j^2(t) \rangle}{dt} = -2\alpha \langle p_j^2(t) \rangle + 2D_p.
 \tag{I.49}$$

Le premier terme correspond à une décroissance exponentielle due à la dissipation, et le second correspond à une croissance linéaire en temps due aux fluctuations de la force de Langevin. La pente de cette croissance est $2D_p$, d'où l'appellation *coefficient de diffusion en impulsion* pour D_p . L'équilibre entre dissipation et fluctuations est atteint en un temps caractéristique $(2\alpha)^{-1}$ et correspond à

$$\langle p_j^2 \rangle_{\text{stat.}} = \frac{D_p}{\alpha}.
 \tag{I.50}$$

Si le bain de molécules dans lequel la particule brownienne est plongée est à la température T , l'équilibre thermodynamique (I.44) sera atteint si

$$\frac{\langle p_j^2 \rangle}{2M} = \frac{1}{2} k_B T \quad \Rightarrow \quad \frac{D_p}{M\alpha} = k_B T.
 \tag{I.51}$$

Dans une modélisation phénoménologique du mouvement brownien, on peut estimer le coefficient de friction α à partir de la loi de Stokes, et on impose la valeur du coefficient de diffusion en impulsion pour que (I.51) soit satisfaite. Si on dispose d'un modèle microscopique de l'interaction entre particule brownienne et molécules du fluide, on peut calculer séparément α et D_p : la vérification de la relation (I.51) est alors un test de la cohérence du modèle. C'est ce que nous serons en mesure de faire dans le paragraphe suivant pour la thermalisation du mouvement atomique dans le rayonnement du corps noir.

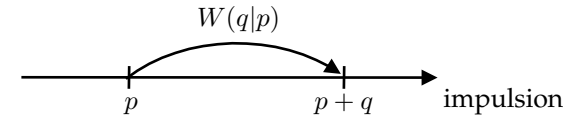


FIGURE I.6. Marche aléatoire dans l'espace des impulsions (modèle unidimensionnel) ; la quantité $W(q|p)$ représente la probabilité de transition par unité de temps pour un saut d'amplitude q partant de l'impulsion p .

3-2 L'approche « équation de Fokker–Planck »

L'approche en terme d'équation de Langevin nous a permis de déterminer les deux premiers moments de la distribution en impulsion. On pourrait itérer cette démarche pour obtenir tous les moments, caractériser ainsi l'état stationnaire et vérifier qu'il s'agit bien d'une gaussienne. Toutefois, il est plus rapide d'utiliser pour cela une autre approche, consistant à établir l'équation d'évolution de la distribution en impulsion $\mathcal{P}(p, t)$.

Pour simplifier l'écriture, considérons un problème à une dimension de sorte que l'impulsion p est maintenant un scalaire. Nous nous intéressons à une classe de problèmes pour lesquels l'évolution de $\mathcal{P}(p, t)$ est décrite par une équation pilote du type

$$\frac{\partial \mathcal{P}(p, t)}{\partial t} = - \left(\int W(q|p) dq \right) \mathcal{P}(p, t) + \int W(q|p-q) \mathcal{P}(p-q, t) dq.
 \tag{I.52}$$

La signification de cette équation est la suivante. La particule brownienne étant initialement dans l'état p , elle a la probabilité $W(q|p) dt$ de gagner l'impulsion q pendant l'intervalle de temps dt . La quantité $W(q|p)$ est donc la probabilité de transition par unité de temps pour un saut d'amplitude q partant de p (figure I.6). Le premier terme de (I.52) correspond au départ total depuis la classe d'impulsion p par des gains d'impulsion q . Le deuxième terme correspond à l'alimentation de la classe d'impulsion p par des sauts d'amplitude q partant de l'impulsion $p - q$. On vérifiera que la normalisation de $\mathcal{P}(p, t)$, $\int \mathcal{P}(p, t) dp = 1$, est bien préservée par cette évolution.

Toute la physique du problème est contenue dans le choix de la fonction $W(q|p)$. Par exemple, pour un problème présentant de la friction fluide, cette fonction devra être telle que, pour $p > 0$, les sauts avec $q < 0$ seront

4. On utilise la relation $\int_0^\infty f(x) \delta(x) dx = \frac{1}{2} f(0)$.

favorisés par rapport aux sauts avec $q > 0$ (et inversement pour une impulsion $p < 0$), pour que l'impulsion de la particule soit en moyenne ramenée vers 0.

Faisons maintenant l'hypothèse de sauts d'amplitude faible : nous supposons plus précisément que $W(q|p)$ est piquée autour de la valeur $q = 0$ avec une largeur caractéristique q_c , tout en variant doucement avec l'impulsion de départ p . Supposons par ailleurs que la distribution en impulsion \mathcal{P} est une fonction lentement variable de p à l'échelle de q_c . En particulier q_c doit être petit devant la largeur $\sqrt{Mk_B T}$ attendue pour $\mathcal{P}(p)$ à l'équilibre thermodynamique. Nous allons donc faire un développement du terme intervenant dans le deuxième membre de (I.52) :

$$\begin{aligned} W(q|p - q) \mathcal{P}(p - q, t) &= W(q|p) \mathcal{P}(p, t) - q \frac{\partial}{\partial p} [W(q|p) \mathcal{P}(p, t)] \\ &+ \frac{q^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} [W(q|p) \mathcal{P}(p, t)] + \dots \end{aligned} \quad (\text{I.53})$$

On peut bien sûr pousser ce développement à un ordre arbitrairement élevé (développement de Kramers–Moyal), mais l'ordre deux sera suffisant pour ce qui suit. Injectons ce développement dans l'équation pilote (I.52). On obtient alors pour $\mathcal{P}(p, t)$ l'équation aux dérivées partielles (équation de Fokker–Planck) :

$$\frac{\partial \mathcal{P}(p, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial p} [\mathcal{F}(p) \mathcal{P}(p, t)] + \frac{\partial^2}{\partial p^2} [\mathcal{D}(p) \mathcal{P}(p, t)], \quad (\text{I.54})$$

avec

$$\mathcal{F}(p) = \int q W(q|p) dq, \quad \mathcal{D}(p) = \frac{1}{2} \int q^2 W(q|p) dq. \quad (\text{I.55})$$

Le premier terme de (I.54) correspond à l'évolution de la densité de probabilité $\mathcal{P}(p, t)$ sous l'effet de la force $\mathcal{F}(p)$. Pour s'en convaincre, on peut évaluer l'évolution de l'impulsion moyenne $\langle p(t) \rangle = \int p \mathcal{P}(p, t) dp$ pour une distribution de probabilité relativement piquée autour de p_0 . On trouve après une intégration par parties :

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \int \mathcal{F}(p) \mathcal{P}(p, t) dp \approx \mathcal{F}(p_0). \quad (\text{I.56})$$

Le second terme de (I.54) correspond à une diffusion dans l'espace des impulsions. Pour le montrer, considérons à nouveau une distribution piquée

autour de p_0 et étudions l'évolution de l'impulsion quadratique moyenne :

$$\begin{aligned} \frac{d\langle p^2 \rangle}{dt} &= 2 \int p \mathcal{F}(p) \mathcal{P}(p, t) dp + 2 \int \mathcal{D}(p) \mathcal{P}(p, t) dp, \\ &\approx 2p_0 \mathcal{F}(p_0) + 2\mathcal{D}(p_0). \end{aligned} \quad (\text{I.57})$$

On retrouve effectivement une structure similaire à celle obtenue en (I.49) par l'approche équation de Langevin, avec les deux contributions de la force moyenne et de la diffusion en impulsion.

À ce stade, la classe de problèmes décrits par l'équation de Fokker–Planck est plus générale que celle décrite par l'équation de Langevin (I.42), puisque la force déterministe \mathcal{F} n'est pas nécessairement linéaire en impulsion et le coefficient de diffusion \mathcal{D} n'est pas nécessairement constant. Nous verrons dans la suite de ce cours que cette généralisation peut être très utile quand il s'agit de modéliser certains types de refroidissement lumineux. Pour l'instant, nous pouvons nous restreindre au cas simple

$$\mathcal{F}(p) = -\alpha p, \quad \mathcal{D}(p) = D_p, \quad (\text{I.58})$$

et modéliser le mouvement brownien par l'équation de Fokker–Planck linéaire :

$$\frac{\partial \mathcal{P}(p, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial (p \mathcal{P}(p, t))}{\partial p} + D_p \frac{\partial^2 \mathcal{P}(p, t)}{\partial p^2}. \quad (\text{I.59})$$

Une solution stationnaire de cette équation est la gaussienne

$$\mathcal{P}_{\text{stat.}}(p) = \frac{1}{p_0 \sqrt{2\pi}} e^{-p^2/2p_0^2}, \quad \text{avec } p_0^2 = \frac{D_p}{\alpha}, \quad (\text{I.60})$$

ce qui correspond bien à la distribution de Maxwell–Boltzmann attendue pour une particule en contact avec un réservoir à température T , pourvu que $k_B T = D_p / (M\alpha)$ [cf. (I.51)].

3-3 Diffusion spatiale

Dans ce qui précède, nous nous sommes intéressés au mouvement de l'atome dans l'espace des impulsions. Nous avons vu que ce mouvement était la résultante d'une diffusion en impulsion caractérisée par D_p et d'une

force de friction caractérisée par α . Dans la suite de ce cours, nous serons également amenés à considérer le mouvement de l'atome dans l'espace des positions. Nous allons voir ici que ce mouvement est purement diffusif et caractérisé par le coefficient de diffusion spatiale $D_x = D_p/(M\alpha)^2$.

Pour calculer ce coefficient de diffusion spatiale, repartons de l'équation de Langevin

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\alpha\mathbf{p} + \mathbf{F}(t), \quad (\text{I.61})$$

et de sa solution entre un instant initial t_i et l'instant t

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t_i)e^{-\alpha(t-t_i)} + \int_{t_i}^t e^{-\alpha(t-t')} \mathbf{F}(t') dt'. \quad (\text{I.62})$$

Intéressons nous à la distance parcourue par la particule entre t_i et t :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_i) + \frac{1}{M} \int_{t_i}^t \mathbf{p}(t') dt'. \quad (\text{I.63})$$

Du fait de l'isotropie du mouvement brownien, il est clair que si la particule est au point $\mathbf{r}(t_i)$ à l'instant initial, sa position moyenne sera encore $\mathbf{r}(t_i)$ à l'instant t . Considérons maintenant l'écart quadratique moyen

$$\Delta r^2(t) = \langle [\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_i)]^2 \rangle \quad (\text{I.64})$$

et calculons sa dérivée par rapport au temps :

$$\frac{d\Delta r^2}{dt} = \frac{2}{M} \langle \mathbf{p}(t) \cdot [\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_i)] \rangle = \frac{2}{M^2} \int_{t_i}^t \langle \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{p}(t') \rangle dt'. \quad (\text{I.65})$$

Il nous faut donc évaluer la fonction de corrélation de l'impulsion à deux instants différents, ce qui se déduit immédiatement de (I.62) : puisque la force de Langevin à l'instant t n'est pas corrélée avec la valeur de l'impulsion à un instant antérieur t' , on a :

$$\langle \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{p}(t') \rangle = \langle \mathbf{p}^2(t') \rangle e^{-\alpha(t-t')} \quad \text{pour } t > t'. \quad (\text{I.66})$$

Nous supposons qu'aux instants t' contribuant à l'intégrale (I.65), la particule est à l'équilibre thermique, de sorte que $\langle \mathbf{p}^2(t') \rangle = 3p_0^2$ (à trois dimensions). On obtient donc, pour un intervalle de temps $t - t_i \gg \alpha^{-1}$:

$$\frac{d\Delta r^2}{dt} = \frac{6p_0^2}{M^2\alpha}, \quad (\text{I.67})$$

soit une croissance constante de Δr^2 , caractéristique d'une diffusion selon chaque composante de l'espace x, y, z :

$$\frac{d\Delta x^2}{dt} = 2D_x \quad \text{avec} \quad D_x = \frac{p_0^2}{M^2\alpha} = \frac{D_p}{M^2\alpha^2}. \quad (\text{I.68})$$

Ce coefficient de diffusion peut être interprété comme le résultat d'une marche au hasard dans l'espace des positions, avec le pas v_0/α (c'est-à-dire la distance parcourue par la particule de vitesse moyenne $v_0 = p_0/M$ pendant le temps α^{-1} caractéristique d'amortissement de cette vitesse) et le taux α .

4 Einstein 1917 : thermalisation du gaz

Dans son article de 1917, Einstein reprend les arguments développés en 1916 pour dégager les trois processus élémentaires de l'interaction atome-rayonnement : absorption, émission stimulée, émission spontanée. Il développe un raisonnement qui va venir conforter ses conclusions de 1916 : si l'on admet que ces trois processus sont présents, alors non seulement les variables atomiques internes (populations $P_{g,e}$) atteignent l'état d'équilibre thermique attendu, mais également la distribution en impulsion $\mathcal{P}(p)$ du centre de masse de l'atome. Pour établir ce résultat, Einstein développe un formalisme qui est le parent direct du refroidissement Doppler tel qu'on le met en œuvre dans les expériences modernes. Le but de ce paragraphe est de présenter l'argument d'Einstein, avec des outils qui seront directement transposables à l'étude du refroidissement d'atomes par laser.

Nous allons utiliser ici une approche inspirée du mouvement brownien, en décomposant l'action mécanique du rayonnement sur l'atome en deux parties, d'une part une force de friction $-\alpha\mathbf{p}$, d'autre part une diffusion en impulsion caractérisée par le coefficient D_p . Nous allons calculer séparément les deux coefficients α et D_p , puis vérifier que l'équilibre atteint correspond bien à ce qui est attendu, c'est-à-dire que $D_p/\alpha = Mk_B T$, où T est la température du corps noir. En pratique, le calcul du coefficient de diffusion est plus simple que celui du coefficient de friction et nous allons donc commencer par lui.

4-1 Diffusion en impulsion de l'atome

Considérons un atome initialement au repos ($\mathbf{p} = 0$). Si l'image du mouvement brownien est correcte, l'évolution de son impulsion quadratique moyenne sous l'effet des chocs aléatoires constitués par les processus élémentaires d'absorption et d'émission est donnée par

$$\frac{d\langle p_j^2(t) \rangle}{dt} = -2\alpha\langle p_j^2(t) \rangle + 2D_p. \quad (\text{I.69})$$

L'impulsion quadratique moyenne commence donc par croître linéairement avec une pente D_p pour saturer au temps longs à la valeur D_p/α .

Considérons un temps Δt suffisamment court pour la contribution de la friction $-2\alpha\langle p_j^2(t) \rangle$ soit négligeable devant la diffusion, mais suffisamment long pour que plusieurs processus élémentaires puissent avoir lieu (nous vérifierons *a posteriori* qu'un tel intervalle de temps existe). Le taux R avec lequel ces processus se produisent vaut :

$$R = 3\bar{n}\Gamma P_g + \sum_j (\bar{n} + 1)\Gamma P_{e_j}. \quad (\text{I.70})$$

En utilisant les valeurs stationnaires des populations données en (I.34), nous obtenons

$$R = 6\Gamma \frac{\bar{n}(\bar{n} + 1)}{4\bar{n} + 1}. \quad (\text{I.71})$$

Pendant l'intervalle de temps Δt , $\Delta N = R \Delta t$ processus élémentaires vont se produire, chacun correspondant à un choc transférant à l'atome une impulsion de module $\hbar k$ dans une direction aléatoire. L'impulsion de l'atome effectue donc une marche aléatoire de pas $\hbar k$ et de taux R . Au bout du temps Δt , l'impulsion moyenne de l'atome reste nulle, mais l'impulsion quadratique moyenne selon une des trois directions de l'espace a augmenté de

$$\langle p_j^2(\Delta t) \rangle = \frac{1}{3}\hbar^2 k^2 \Delta N, \quad (\text{I.72})$$

On en déduit le coefficient de diffusion en impulsion

$$D_p = \frac{1}{2} \frac{\langle p_j^2(\Delta t) \rangle}{\Delta t}, \quad \text{ou encore} \quad D_p = \hbar^2 k^2 \Gamma \frac{\bar{n}(\bar{n} + 1)}{4\bar{n} + 1}. \quad (\text{I.73})$$

4-2 Force de friction agissant sur l'atome

Considérons maintenant un atome en mouvement à la vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{p}/M$. Nous supposons $v \ll c$ de sorte que la particule est non relativiste. L'origine de la force de friction est l'*effet Doppler* : dans le référentiel \mathcal{R} en mouvement avec l'atome, le rayonnement du corps noir n'est pas isotrope, contrairement à ce que l'on trouve dans le référentiel du laboratoire. Or l'atome « sonde » le rayonnement dans \mathcal{R} à sa fréquence de résonance ω_A ; il va donc interagir avec des modes du champ qui ne sont pas tous peuplés de manière égale.

Considérons par exemple deux modes de directions opposées, l'un allant dans le même sens que l'atome, l'autre dans le sens opposé, susceptibles d'interagir avec l'atome. Le mode allant dans le même sens que l'atome a pour fréquence ω_A dans le référentiel atomique, donc $\omega_A(1 + v/c)$ dans le référentiel du laboratoire. Le mode allant dans le sens opposé à l'atome a lui aussi pour fréquence ω_A dans le référentiel atomique, donc $\omega_A(1 - v/c)$ dans le référentiel du laboratoire. Or, le nombre de photons par mode $\bar{n}(\omega)$ est une fonction décroissante de ω pour le rayonnement du corps noir. Par conséquent

$$\bar{n}[\omega_A(1 - v/c)] > \bar{n}[\omega_A(1 + v/c)]. \quad (\text{I.74})$$

L'atome en mouvement « voit » plus de photons résonnants venir à sa rencontre que de photons allant dans le même sens que lui : il y aura donc plus de chocs diminuant la vitesse atomique que de chocs qui l'augmentent : c'est l'origine de la force de friction.

Pour une évaluation quantitative du coefficient de friction α , prenons un atome bougeant selon une direction de l'espace, z par exemple. Notons v_z sa vitesse et supposons cet atome dans l'état fondamental g . Le changement moyen d'impulsion pendant un intervalle de temps infinitésimal Δt se calcule en utilisant un formalisme très similaire à celui qui nous a permis d'évaluer les probabilités d'absorption et d'émission à partir de la règle d'or de Fermi. Il s'obtient en considérant tous les gains d'impulsion $\hbar \mathbf{k}$ résultant de l'absorption d'un photon dans un mode donné du champ \mathbf{k}_0, ϵ_0 , accompagnée du passage de l'atome dans l'état $e_j, j = x, y, z$:

$$\Delta p_z = \Delta t \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_j \sum_{\mathbf{k}_0, \epsilon_0} \hbar k_z \left| \langle e_j, \{n'_{\mathbf{k}, \epsilon}\} | \hat{V} | g, \{n_{\mathbf{k}, \epsilon}\} \rangle \right|^2 \delta(\omega_0 - \omega_{\text{at}}). \quad (\text{I.75})$$

La distribution de Dirac $\delta(\omega_0 - \omega_A)$ vient sélectionner les modes de fréquence ω_A dans le référentiel atomique⁵, donc de fréquence $\omega_A + k_z v_z$ dans le référentiel du laboratoire. La population d'un mode correspondant à cette résonance vaut

$$\bar{n}(\omega_A + k_z v_z) \approx \bar{n}(\omega_A) + k_z v_z \left. \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_A}. \quad (\text{I.76})$$

Le calcul de la somme sur les modes se fait alors d'une manière similaire à celui des taux d'absorption et d'émission. Après une algèbre quelque peu fastidieuse, on trouve pour les processus d'absorption :

$$\frac{\Delta p_z}{\Delta t} = \hbar k^2 \Gamma \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} v_z \quad (\text{I.77})$$

et un résultat identique, mais de signe opposé, pour les processus d'émission après moyenne sur les trois états e_j . Au final, en pondérant les changements d'impulsion entre absorption et émission par les populations stationnaires (I.34), on arrive à la force de friction :

$$F_z = -\alpha p_z \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{\hbar k^2}{M} \frac{\Gamma}{4\bar{n} + 1} \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega}. \quad (\text{I.78})$$

Le coefficient de friction est donc directement proportionnel à la dérivée de la population des modes par rapport à la fréquence, autour de la fréquence de résonance atomique. Ce résultat confirme l'intuition basée sur l'effet Doppler discutée plus haut [cf. (I.74)] : c'est le différentiel entre la population des modes allant dans le même sens que l'atome et ceux s'opposant à son mouvement qui crée la force de friction.

4-3 Equilibre thermique ?

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer les résultats généraux de la théorie du mouvement brownien : le mouvement de l'atome est caractérisé par un coefficient de friction α et un coefficient de diffusion en

5. On peut également faire le raisonnement directement dans le référentiel du laboratoire. La distribution de Dirac exprimant la conservation de l'énergie sélectionne alors des modes de pulsation ω tel que $E_i - E_f = [\mathbf{p}^2/2M + \hbar\omega] - [(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k})^2/2M + \hbar\omega_A] = 0$, ce qui revient à prendre $\omega = \omega_A + k_z v_z$, à l'énergie de recul $\hbar^2 k^2/2M$ près, qui joue ici un rôle négligeable.

impulsion D_p , de sorte que la distribution d'impulsion à l'équilibre est une gaussienne à laquelle on peut associer une température effective

$$k_B T_{\text{eff}} = \frac{D_p}{M\alpha} = \hbar \frac{\bar{n}(\bar{n} + 1)}{\left| \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} \right|}. \quad (\text{I.79})$$

Si l'on injecte dans cette relation l'occupation des modes pour le rayonnement du corps noir :

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}, \quad (\text{I.80})$$

on vérifie que le modèle est bien cohérent sur le plan thermodynamique, c'est-à-dire que la température effective associée à la distribution en impulsion de l'atome coïncide avec la température du corps noir :

$$T_{\text{eff}} = T. \quad (\text{I.81})$$

Pour Einstein, ce résultat constituait la confirmation des hypothèses faites sur la nature des échanges entre atomes et rayonnement. L'argument de 1916, qui portait sur les populations des états internes de l'atome, ne concernait que l'énergie. Au contraire, pour ce problème de la thermalisation, il est essentiel de poser que l'impulsion de l'atome augmente ou diminue de $\hbar\mathbf{k}$ quand l'atome absorbe ou émet un photon. Einstein concluait son article sur deux remarques prémonitoires. D'une part, tout en reconnaissant les « faiblesses » de son modèle dans lequel « les instants et les directions des processus élémentaires y sont livrés au hasard », il indiquait « j'ai pleinement confiance dans la sûreté de la démarche ici suivie ». Par ailleurs, il remarquait que presque toutes les théories du rayonnement thermique ne prenaient en compte que les échanges d'énergie entre lumière et matière, mais pas les échanges d'impulsion : « On s'y croit volontiers autorisé par le fait que les impulsions que transfère le rayonnement sont petites, et donc en réalité presque toujours négligeables devant les autres causes du mouvement ». Il continuait ensuite sur l'importance de prendre ces échanges d'impulsion en compte sur le plan théorique pour une théorie justifiée. Le refroidissement d'atomes par la lumière montre qu'il est également essentiel de prendre ces échanges en compte sur le plan pratique !

4-4 Ordres de grandeur et critère de validité

Nous avons obtenu dans ce qui précède la valeur du coefficient de friction pour le mouvement d'un atome dans le rayonnement d'un corps noir [eq. (I.78)]. Considérons un atome de sodium et modélisons cet atome par sa raie de résonance à $\lambda = 589$ nm. La température nécessaire pour atteindre $k_B T = \hbar\omega$ est considérable, de l'ordre de 25 000 Kelvins. Même s'il s'agit d'une situation peu réaliste (y compris en ce qui concerne notre modélisation sous forme d'atome à deux niveaux), on peut calculer le coefficient de friction correspondant et on trouve un temps α^{-1} de l'ordre de 10 minutes. Pour un corps noir de température plus raisonnable, $k_B T \ll \hbar\omega$, le temps de thermalisation diverge exponentiellement :

$$\alpha^{-1} \approx \frac{M}{\hbar k^2} \frac{k_B T}{\hbar \Gamma} e^{\hbar\omega/k_B T}. \quad (\text{I.82})$$

Un corps noir de 6000 Kelvins (un atome proche de la surface de soleil) conduit ainsi à $\bar{n}(\omega_A) = 0.017$ et à un temps de thermalisation de 40 minutes. La vitesse thermique $v_0 = \sqrt{k_B T/M}$ correspond dans ce cas à 1500 m/s, et la distance moyenne parcourue pendant un temps de thermalisation, c'est-à-dire le pas de la marche au hasard dans l'espace des positions, vaut 3600 km. Même dans un milieu astrophysique, il est probable que d'autres processus de thermalisation, comme les collisions avec d'autres atomes ou molécules, vont limiter le libre parcours moyen de notre atome de sodium à des valeurs bien inférieures. Tout l'intérêt de l'utilisation de sources laser sera de produire des valeurs de $|\frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega}|$ beaucoup plus grandes, le temps de thermalisation étant alors simplement le premier terme de (I.82), à savoir $M/\hbar k^2$.

Remarquons pour terminer que notre hypothèse de sauts d'amplitude faible, indispensable pour l'approche en terme de mouvement brownien, est bien vérifiée dans cet exemple. La vitesse de recul de l'atome de sodium quand il absorbe ou émet un photon vaut $v_r = \hbar k/M = 3$ cm/s, ce qui est effectivement très faible devant la largeur caractéristique de la distribution en vitesse thermique à 6000 K, de l'ordre de 1500 m/s.

Chapitre II

Le refroidissement Doppler et le piège magnéto-optique

Soixante ans après l'article d'Einstein montrant comment la lumière d'un corps noir pouvait imposer une température cinétique à une assemblée d'atomes, deux articles par Hänsch & Schawlow (1975) d'une part et Wineland & Dehmelt (1975) d'autre part, sont venus simultanément proposer d'exploiter la lumière des lasers accordables (une nouveauté en 1975 !) pour créer de nouveaux équilibres thermodynamiques. Dans le langage que nous avons développé au chapitre précédent, un laser monochromatique permet de réaliser une distribution spectrale de lumière avec $\frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega}$ arbitrairement grand : c'est alors la largeur naturelle Γ du niveau excité de l'atome qui va venir remplacer la largeur de la distribution du corps noir. En d'autres termes, il n'y a plus de température imposée « de l'extérieur » par la lumière incidente et ce sont les paramètres de la transition atomique utilisée qui déterminent la température d'équilibre.

Comme dans l'article d'Einstein, c'est l'effet Doppler qui est à la base de la force de friction qui permet de refroidir les atomes. L'approche que nous allons suivre sera donc très similaire à ce que nous avons vu pour le rayonnement du corps noir. Nous allons utiliser la théorie du mouvement brownien et déterminer à la fois un coefficient de friction et un coefficient de diffusion, pour arriver à la célèbre « limite Doppler » :

$$k_B T = \frac{\hbar \Gamma}{2}. \quad (\text{II.1})$$

Une fois le principe de ces *mélasses optiques* établies, nous les transposerons depuis l'espace des vitesses vers l'espace des positions, en substituant l'effet Zeeman à l'effet Doppler. Nous arriverons alors au principe du piège

magnéto-optique que nous décrirons et illustrerons à partir d'expériences récentes, menées soit avec des atomes, soit avec des molécules.

1 La force de pression de radiation

À la base du refroidissement d'atomes par effet Doppler, on trouve la force de pression de radiation. La situation physique la plus simple dans laquelle cette force apparaît est celle d'un atome à deux niveaux, g et e , placé dans une onde lumineuse monochromatique plane de vecteur d'onde \mathbf{k} (figure II.1). L'état interne de l'atome effectue des cycles *absorption – émission* qui transfèrent chacun une certaine impulsion à l'atome. Plus précisément :

- Lors d'un processus d'absorption de photon, l'atome passe de l'état g à l'état e en gagnant l'impulsion $\hbar \mathbf{k}$.
- Lors d'un processus d'émission de photon, l'atome passe de l'état e à l'état g et deux cas sont possibles :
 1. S'il s'agit d'une émission stimulée, le photon émis est identique aux photons de l'onde incidente ; l'impulsion perdue par l'atome est donc $\hbar \mathbf{k}$, de sorte que le changement d'impulsion du cycle *absorption–émission stimulée* est nul.
 2. S'il s'agit d'une émission spontanée, le photon est émis dans une direction aléatoire de l'espace. La répartition angulaire de cette

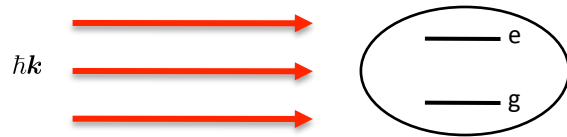


FIGURE II.1. Atome à deux niveaux éclairé par une onde plane ; la répétition des cycles absorption–émission spontanée crée sur l’atome une force de pression de radiation qui peut atteindre la valeur $\hbar k \Gamma / 2$, où Γ est la largeur naturelle de l’état excité e .

émission n’est pas universelle et dépend de la nature de la transition atomique, mais elle se fait toujours avec probabilité égale dans deux directions opposées de l’espace. L’impulsion moyenne emportée par le photon émis spontanément est donc toujours nulle, de sorte que le bilan du cycle *absorption–émission spontanée* est un gain de $\hbar k$.

On déduit de cette analyse que la force de pression de radiation est égale à

$$\mathbf{F} = \hbar \mathbf{k} \gamma \quad (\text{II.2})$$

où γ est le taux d’émission spontanée de photons. En reprenant le résultat du chapitre précédent, ce taux s’écrit

$$\gamma = \Gamma P_e, \quad (\text{II.3})$$

où Γ est la largeur naturelle de l’état excité (le coefficient A d’Einstein) et P_e la population de cet état excité en régime stationnaire. Il nous reste donc à évaluer cette population pour une excitation lumineuse monochromatique ; le résultat constituera l’équivalent pour un champ cohérent du résultat $P_e = \bar{n} / (2\bar{n} + 1)$ trouvé pour un atome à deux niveaux dans un champ incohérent et isotrope.

1-1 Les équations de Bloch optiques

Nous nous intéressons ici à la dynamique interne d’un atome couplé à la fois à un champ lumineux monochromatique (donc cohérent) et

aux modes vides du champ électromagnétique, ce deuxième couplage – incohérent – étant responsable du phénomène d’émission spontanée. Si l’on avait affaire uniquement au couplage cohérent avec le champ lumineux, on pourrait décrire l’état interne de l’atome par un vecteur d’état $\alpha_g(t)|g\rangle + \alpha_e(t)|e\rangle$, et déduire l’évolution de $\alpha_{g,e}(t)$ de l’équation de Schrödinger pour calculer ensuite $P_e = |\alpha_e|^2$. Si l’on avait affaire uniquement au couplage incohérent, on pourrait comme au chapitre précédent écrire des équations de taux pour les populations $P_{g,e}$ et déterminer leur état stationnaire. La présence simultanée des deux types de couplages, cohérent et incohérent, nécessite d’avoir recours au formalisme de l’équation pilote. Nous allons brièvement résumer ce formalisme, qui conduit aux équations de Bloch optiques [pour plus de détails, voir par exemple Cohen-Tannoudji et al. (2012)].

Nous décrivons l’état interne de l’atome par son opérateur densité $\hat{\rho}$, c’est-à-dire pour le cas du système à deux niveaux qui nous intéresse ici, une matrice 2×2 :

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{gg} & \rho_{ge} \\ \rho_{eg} & \rho_{ee} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.4})$$

Cette matrice est hermitienne et ses éléments diagonaux, réels, donnent les populations des états concernés :

$$\rho_{gg} = P_g, \quad \rho_{ee} = P_e, \quad \rho_{gg} + \rho_{ee} = 1. \quad (\text{II.5})$$

La matrice est donc de trace 1. Les éléments non diagonaux décrivent la cohérence quantique entre l’état g et l’état e et le caractère hermitien de la matrice impose :

$$\rho_{eg} = \rho_{ge}^*. \quad (\text{II.6})$$

Dans le modèle de champ incohérent développé au chapitre précédent, ces éléments non-diagonaux étaient nuls en régime stationnaire.

Dans la description par équation pilote, valable si l’excitation laser n’est pas trop intense¹, l’évolution de ρ s’écrit comme somme de deux termes :

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \left. \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right|_{\text{coh.}} + \left. \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right|_{\text{incoh.}}. \quad (\text{II.7})$$

1. Avec les notations qui suivent, il faut que la fréquence de Rabi κ et le désaccord Δ soient tous les deux petits devant la fréquence atomique ω_A .

Le premier terme décrit l'évolution cohérente sous l'effet du couplage de l'atome avec le champ lumineux. Ce couplage est caractérisé par deux paramètres, ayant chacun la dimension d'une fréquence :

- Le désaccord $\Delta = \omega_L - \omega_A$ entre la fréquence du champ lumineux ω_L et la fréquence de résonance de l'atome ω_A .
- La fréquence de Rabi $\kappa = dE_0 e^{i\phi}/\hbar$, proportionnelle au dipole réduit d associé à la transition $g \leftrightarrow e$ et à l'amplitude complexe du champ électrique de l'onde lumineuse : $E(t) = E_0 \cos(\omega_L t - \phi) = \frac{1}{2} E_0 e^{i(\omega_L t - \phi)} + \text{c.c.}$. Nous avons supposé ici l'atome localisé à l'origine des coordonnées $r = 0$.

À l'approximation du champ tournant², l'hamiltonien caractérisant le couplage s'écrit comme une matrice 2×2 dans la base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$:

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \kappa^* \\ \kappa & -\Delta \end{pmatrix}. \quad (\text{II.8})$$

En particulier, les termes non diagonaux de cet hamiltonien, $\kappa|e\rangle\langle g|$ et $\kappa^*|g\rangle\langle e|$, décrivent les processus d'absorption et d'émission de photons dans l'onde laser monochromatique. Dans le formalisme de l'opérateur densité, le couplage atome-champ cohérent se déduit alors de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \left. \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right|_{\text{coh.}} = [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (\text{II.9})$$

Le couplage incohérent lié aux processus d'émission spontanée est quant à lui donné par l'évolution simple (Cohen-Tannoudji et al. 2012):

$$\left. \frac{dP_g}{dt} \right|_{\text{incoh.}} = \Gamma P_e, \quad \left. \frac{dP_e}{dt} \right|_{\text{incoh.}} = -\Gamma P_e \quad (\text{II.10})$$

$$\left. \frac{d\rho_{eg}}{dt} \right|_{\text{incoh.}} = -\frac{\Gamma}{2} \rho_{eg}, \quad \left. \frac{d\rho_{ge}}{dt} \right|_{\text{incoh.}} = -\frac{\Gamma}{2} \rho_{ge} \quad (\text{II.11})$$

La première ligne est identique à ce que nous avons établi au chapitre précédent à partir de la règle d'or de Fermi. La seconde ligne indique que la cohérence entre g et e décroît avec le taux $\Gamma/2$, c'est-à-dire la moitié du taux de décroissance de la population $P_e = \rho_{ee}$.

2. Cette approximation a été détaillée dans le cours 2013-14, chapitre 4.

En ajoutant les deux contributions, cohérente et incohérente, on arrive à l'équation du mouvement de l'opérateur densité, constituant l'ensemble des *équations de Bloch optiques* :

$$\dot{P}_e = -\Gamma P_e + \frac{i}{2} (\kappa^* \rho_{eg} - \kappa \rho_{ge}), \quad (\text{II.12})$$

$$\dot{\rho}_{eg} = \left(i\Delta - \frac{\Gamma}{2} \right) \rho_{eg} - \frac{i\kappa}{2} (\rho_{gg} - \rho_{ee}), \quad (\text{II.13})$$

auxquelles on ajoute les deux autres équations pour \dot{P}_g et $\dot{\rho}_{ge}$ déduites de $P_g + P_e = 1$ et $\rho_{ge} = \rho_{eg}^*$.

1-2 État stationnaire des équations de Bloch optiques

Le temps caractéristique d'atteinte de l'équilibre pour le système d'équations (II.12-II.13) est de l'ordre de Γ^{-1} . La valeur stationnaire des populations et des cohérences est donnée par

$$P_e = \frac{1}{2} \frac{s}{1+s}, \quad \rho_{eg} = \frac{\kappa}{2\Delta + i\Gamma} \frac{1}{1+s}, \quad (\text{II.14})$$

où on a introduit le *paramètre de saturation* :

$$s = \frac{2|\kappa|^2}{\Gamma^2 + 4\Delta^2}. \quad (\text{II.15})$$

Remarque. On introduit souvent la notion d'intensité de saturation I_{sat} pour une raie atomique, mesurée en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$, et on caractérise la « force » de l'excitation laser par le rapport I/I_{sat} , où I est l'intensité de la lumière à l'emplacement de l'atome. Ce rapport est lié aux paramètres introduits ci-dessus par :

$$\frac{I}{I_{\text{sat}}} = \frac{2|\kappa|^2}{\Gamma^2}, \quad s = \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + 4\Delta^2/\Gamma^2}. \quad (\text{II.16})$$

Notre paramètre de saturation coïncide donc avec le rapport I/I_{sat} pour un faisceau résonant avec l'atome. L'avantage de s est qu'il caractérise directement le taux d'excitation de l'atome :

- si $s \ll 1$, ce qui peut être obtenu avec une intensité laser faible ou un grand désaccord, la population de l'état excité est négligeable devant celle de l'état fondamental :

$$s \ll 1 : \quad P_g \approx 1, \quad P_e \approx \frac{s}{2}. \quad (\text{II.17})$$

- si $s \gg 1$, l'atome occupe l'état fondamental et l'état excité avec des probabilités égales

$$s \gg 1 : \quad P_g \approx P_e \approx \frac{1}{2}. \quad (\text{II.18})$$

Connaissant la population stationnaire de l'état excité, nous pouvons maintenant revenir à l'expression de la force de pression de radiation (II.2-II.3) :

$$\gamma = \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s}, \quad \mathbf{F} = \hbar \mathbf{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s}. \quad (\text{II.19})$$

La valeur maximale de cette force est atteinte dans la limite d'une forte saturation, $s \gg 1$, pour laquelle l'atome effectue en moyenne $\Gamma/2$ cycles absorption-émission spontanée par seconde. L'accélération correspondante vaut

$$a_{\max} = \frac{F_{\max}}{M} = v_r \frac{\Gamma}{2} \quad (\text{II.20})$$

où nous avons introduit la vitesse de recul

$$v_r = \frac{\hbar k}{M}, \quad (\text{II.21})$$

c'est-à-dire le changement de vitesse d'un atome quand il absorbe ou émet un photon. Pour un atome de sodium éclairé sur sa raie de résonance, la vitesse de recul est de 3 cm/s et l'accélération maximale est 10^6 m/s².

1-3 Utilisation du théorème d'Ehrenfest

Dans ce qui précède, nous avons adopté une démarche intuitive en (II.2-II.3) pour relier la force de pression de radiation au taux d'émission spontanée et donc à la population de l'état excité. On peut justifier rigoureusement ce résultat en partant de l'hamiltonien complet décrivant le couplage entre l'atome et le rayonnement, c'est-à-dire l'hamiltonien prenant

en compte à la fois les variables internes de l'atome et celles décrivant le mouvement de son centre de masse.

En notant \hat{r} et \hat{p} les opérateurs position et impulsion du centre de masse, cet hamiltonien s'écrit

$$\hat{H}_{\text{tot.}} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \kappa^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\hat{r}} \\ \kappa e^{i\mathbf{k}\cdot\hat{r}} & -\Delta \end{pmatrix}. \quad (\text{II.22})$$

L'opérateur force agissant sur l'atome se calcule en point de vue de Heisenberg (Gordon & Ashkin 1980):

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{\text{tot.}}, \hat{p}] \\ &= \frac{1}{2} \hbar \mathbf{k} \begin{pmatrix} 0 & i\kappa^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\hat{r}} \\ -i\kappa e^{i\mathbf{k}\cdot\hat{r}} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Prenons la moyenne de cet opérateur sur un paquet d'ondes localisé au voisinage de $\mathbf{r} = 0$ et d'extension petite devant la longueur d'onde optique :

$$\langle \hat{F} \rangle = \text{Tr}(\hat{F} \hat{\rho}) = \hbar \mathbf{k} \frac{i}{2} (\kappa^* \rho_{eg} - \kappa \rho_{ge}). \quad (\text{II.24})$$

En régime stationnaire, le terme intervenant dans le membre de droite n'est autre que ΓP_e [cf. (II.12)], d'où le résultat annoncé (II.2-II.3).

1-4 Effet Doppler et « raie large »

Nous avons dégagé dans les paragraphes qui précèdent la notion de force de pression de radiation moyenne. Cette force moyenne, appliquée à l'atome, va changer sa vitesse. La prise en compte de cette vitesse dans le formalisme que nous venons d'établir est simple : il suffit d'utiliser le fait que pour un atome en mouvement, la fréquence effective du laser n'est pas ω_L mais $\omega_L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ du fait de l'effet Doppler. Le paramètre de saturation est alors une fonction de la vitesse :

$$s(\mathbf{v}) = \frac{2|\kappa|^2}{4(\Delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 + \Gamma^2}, \quad (\text{II.25})$$

ainsi que la force de pression de radiation $\mathbf{F}(\mathbf{v})$. L'évolution de la vitesse de l'atome dans une onde lumineuse est donc donnée par l'équation du

mouvement

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{v}), \quad (\text{II.26})$$

expression que nous généraliserons dans ce qui suit au cas où plusieurs ondes planes éclairent simultanément l'atome.

Toutefois, il nous faut d'abord examiner la validité de la notion de force moyenne. Nous avons utilisé dans ce qui précède le fait que la moyenne de l'impulsion emportée par un photon émis spontanément est nulle. On peut en déduire la notion de force si la valeur de cette dernière est peu modifiée lors d'un changement élémentaire de vitesse $v \rightarrow v \pm v_r$. C'est cette condition nécessaire que nous proposons d'examiner maintenant.

Pour une faible intensité lumineuse ($s \ll 1$), la largeur de la courbe de résonance donnant P_e en fonction du désaccord Δ est égale à Γ (largeur totale à mi-hauteur). Le changement de désaccord dans un processus élémentaire d'absorption ou d'émission est quant à lui égal à $kv_r = 2\omega_r$, où $\omega_r = \hbar k^2 / (2M)$ est la pulsation de recul. On peut donc distinguer deux situations limites :

- Si $\Gamma \gg \omega_r$ (raie large), alors un processus élémentaire d'absorption ou d'émission ne change pratiquement pas le paramètre de saturation s , ni la population de l'état excité. C'est seulement la répétition d'un grand nombre de ces processus qui pourra modifier $s(v)$ de manière appréciable. C'est ce cas qui va nous intéresser dans la suite de ce chapitre. Il est réalisé pour la raie de résonance de nombreuses espèces atomiques, comme on peut le voir sur le tableau II.1. On trouve par exemple $\Gamma/\omega_r \sim 400$ pour l'atome de sodium.
- Si $\Gamma \ll \omega_r$, l'absorption ou l'émission d'un seul photon suffit à changer considérablement $s(v)$. L'atome peut être à résonance avec le laser avant un cycle absorption-émission spontanée, et complètement hors résonance après ce cycle³, si bien que la notion de force moyenne pour

3. On peut néanmoins retrouver une situation de raie large même si $\Gamma \ll \omega_r$. Il faut pour cela choisir une valeur de la fréquence de Rabi $|\kappa| \gg \Gamma$, de sorte que la population de l'état excité

$$P_e = \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} = \frac{|\kappa|^2}{4(\Delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 + 2|\kappa|^2 + \Gamma^2} \quad (\text{II.27})$$

présente une résonance élargie :

$$\Gamma \longrightarrow \sqrt{\Gamma^2 + 2|\kappa|^2} = \Gamma \sqrt{1 + I/I_{\text{sat}}}, \quad (\text{II.28})$$

une vitesse v donnée perd son sens. Nous étudierons les possibilités offertes par ces raies étroites au cours suivant.

2 Le refroidissement Doppler

Nous passons maintenant à la description du refroidissement Doppler avec des lasers. Le mécanisme en jeu est très voisin de celui vu au chapitre précédent pour le rayonnement du corps noir. La description théorique sera également très proche, avec une approche de type « mouvement brownien » pour évaluer un coefficient de friction et un coefficient de diffusion, et pour en déduire finalement la température limite du refroidissement.

2-1 Mélasse optique et hypothèse de faible saturation

Nous souhaitons obtenir une situation de refroidissement Doppler, dans laquelle un atome de vitesse initiale non nulle ressent une force de friction qui amène sa vitesse vers 0. Pour cela, on éclaire la zone d'intérêt par une, deux, ou trois paires d'ondes selon le nombre de directions d'espace que l'on souhaite refroidir (figure II.2). Comme proposé initialement par Hänsch & Schawlow (1975), on choisit un désaccord $\Delta < 0$, c'est-à-dire $\omega_L < \omega_A$, de sorte qu'un atome en mouvement est plus proche de la résonance avec une onde venant à sa rencontre ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} < 0$) qu'avec une onde allant dans le même sens que lui ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} > 0$). C'est le phénomène de refroidissement recherché ! Essayons maintenant d'être plus quantitatif et de calculer la force totale agissant sur l'atome.

Pour calculer cette force, il est tentant d'ajouter les forces de pression de radiation créées par les 2, 4 ou 6 ondes éclairant l'atome. Mais cette procédure ne peut pas être complètement exacte, en particulier à cause des phénomènes d'émission stimulée : dans le cas d'une onde plane unique étudiée au paragraphe 1, les cycles absorption-émission stimulée ne jouaient aucun rôle car ils n'étaient associés à aucun transfert d'impulsion, l'atome rendant à l'onde l'impulsion qu'il lui avait empruntée lors de l'absorption. Si plusieurs ondes planes sont simultanément incidentes sur l'atome, l'atome peut absorber un photon dans l'onde 1, puis faire une émission

ce qui peut être considérablement plus grand que Γ pour des valeurs réalistes de I/I_{sat} .

	A	λ nm	$\Gamma/2\pi$ kHz	$\omega_r/2\pi$ kHz	Γ/ω_r	T_{\min} μK	v_r cm/s	v_0 cm/s	δv_{res} cm/s	ℓ μm
He	4	1083	1600	42.3	38	38	9.16	28.2	173	3.3
Li	6	671	5910	73.5	80	142	9.86	44.2	397	4.3
Na	23	589	9800	24.9	394	235	2.93	29.1	577	18.5
Mg	24	285	80000	101.8	786	1922	5.80	81.3	2280	17.8
K	39	770	6000	8.6	699	144	1.32	17.5	462	42.8
Ca	40	423	34600	27.7	1248	831	2.35	41.4	1464	42.0
Cr	52	426	5020	21.1	238	121	1.79	13.8	214	8.1
Rb	87	780	6100	3.8	1627	147	0.59	11.8	476	101.0
Sr	84	461	30500	11.1	2743	733	1.03	26.8	1406	100.6
Cs	133	852	5200	2.1	2529	125	0.35	8.8	443	171.5
Er	168	401	27500	7.3	3743	661	0.59	18.0	1103	119.4
		583	190	3.5	55	5	0.41	1.5	11	2.5
Dy	170	421	32000	6.6	4857	769	0.55	19.3	1347	162.7
		626	135	3.0	45	3	0.37	1.3	8	2.3
Yb	174	399	29100	7.2	4061	699	0.57	18.2	1161	128.9
		556	183	3.7	50	4	0.41	1.4	10	2.2
Hg	202	254	1300	15.2	85	31	0.77	3.6	33	1.7

TABLE II.1. Caractéristiques de quelques éléments chimiques disposant d'une raie de résonance large ($\Gamma/\omega_r \gg 1$) et pouvant être refroidis par laser. Pour certains atomes à deux électrons externes, on a indiqué la raie principale $^1S_0 \leftrightarrow ^1P_1$ et la raie d'intercombinaison $^1S_0 \leftrightarrow ^3P_1$. La température minimale indiquée, ainsi que la vitesse quadratique moyenne v_0 , correspondent au refroidissement Doppler étudié dans ce chapitre. Pour certains de ces éléments, un refroidissement de type Sisyphus est également possible et il conduit à des températures plus basses que celles indiquées ici.

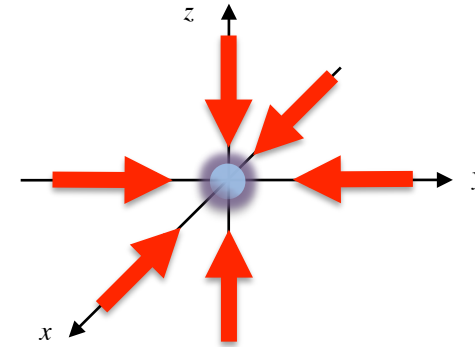


FIGURE II.2. Schéma de base d'une mélasse optique à trois dimensions. On éclaire les atomes par 3 paires d'ondes monochromatiques, avec un désaccord $\Delta = \omega_L - \omega_A$ négatif.

stimulée dans l'onde 2, gagnant ainsi l'impulsion $\hbar(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$. Certes le processus inverse est également possible, mais rien ne prouve que les deux processus se produisent avec la même amplitude, pour une vitesse et une position données de l'atome.

Il existe une situation dans laquelle le fait de prendre la somme des pressions de radiation est une bonne approximation : il s'agit du cas où le paramètre de saturation s_0 associée à chaque onde progressive est petit devant 1, et où l'on peut donc négliger les processus d'émission stimulée devant ceux d'émission spontanée. Notons toutefois que cette approximation conduit à ignorer la structure périodique en nœuds et ventres des ondes stationnaires créées par la superposition d'ondes progressives. La force calculée doit donc être comprise comme une moyenne spatiale sur une période de l'onde stationnaire de la force $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ calculée par une méthode plus sophistiquée, comme la résolution numérique des équations de Bloch optiques en tout point (\mathbf{r}, \mathbf{v}) de l'espace des phases.

Une fois cette approximation faite, la force agissant sur l'atome se calcule aisément :

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \frac{\Gamma}{2} \sum_j \hbar \mathbf{k}_j s_j(\mathbf{v}), \quad (\text{II.29})$$

où la somme porte sur toutes les ondes planes progressives éclairant

l'atome, avec

$$s_j(\mathbf{v}) = \frac{2|\kappa|^2}{4(\Delta - \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{v})^2 + \Gamma^2}, \quad s_j(0) \equiv s_0. \quad (\text{II.30})$$

Pour appliquer la théorie du mouvement brownien, on considère le cas de vitesses petites devant l'intervalle δv_{res} quasi-résonant avec une onde lumineuse monochromatique :

$$|kv| \ll \Gamma, \text{ ou encore } |v| \ll \delta v_{\text{res}} \equiv \Gamma/k, \quad (\text{II.31})$$

ce qui permet de calculer la force à l'ordre 1 en vitesse :

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = -M\alpha \mathbf{v}, \quad \text{avec } M\alpha = \hbar k^2 s_0 \frac{2(-\Delta)\Gamma}{\Delta^2 + \Gamma^2/4}, \quad (\text{II.32})$$

où on a utilisé $\sum_j \mathbf{k}_j = 0$ pour la géométrie considérée, ce qui annule le terme d'ordre 0 en v . On a par ailleurs utilisé pour le terme d'ordre 1 :

$$\sum_j \mathbf{k}_j (\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{v}) = 2k^2 \mathbf{v} \quad (\text{II.33})$$

dans la géométrie de la figure II.2. On retrouve bien sur (II.32) le fait qu'il faut choisir un désaccord Δ négatif pour obtenir une friction $\alpha > 0$.

Si on se fixe une valeur donnée du paramètre de saturation s_0 , choisie en particulier telle que $s_0 \ll 1$ pour que l'approximation consistant à additionner les forces créées par les différentes ondes planes soit valable, on voit que le coefficient de friction α est maximum quand $|\Delta|/(\Delta^2 + \Gamma^2/4)$ est maximum, ce qui se produit pour $\Delta = -\Gamma/2$:

$$\text{Coefficient de friction maximal à } s \text{ fixé : } \alpha = 2s_0 \frac{\hbar k^2}{M} \text{ pour } \Delta = -\Gamma/2.$$

2-2 Diffusion en impulsion et température d'équilibre

Comme au chapitre précédent, l'analyse en terme de mouvement brownien nécessite également le calcul du coefficient de diffusion en impulsion (Gordon & Ashkin 1980). En l'occurrence, le traitement fait pour le corps noir s'applique quasiment tel quel. Nous avons trouvé que ce coefficient

pouvait s'écrire $D_p = \hbar^2 k^2 R/6$, où R est le taux de processus élémentaires, absorption ou émission, pour un atome au repos. Dans le cas qui nous intéresse ici, ce taux de diffusion pour l'atome éclairé par six ondes de paramètre de saturation s_0 vaut $R = 6 \times \Gamma s_0$, soit

$$D_p = \hbar^2 k^2 s_0 \Gamma. \quad (\text{II.34})$$

La dernière étape du raisonnement consiste à déterminer la température d'équilibre des atomes éclairés par ces faisceaux lumineux :

$$k_B T = \frac{D_p}{M\alpha} = \frac{\hbar}{2} \frac{\Delta^2 + \Gamma^2/4}{|\Delta|}. \quad (\text{II.35})$$

On remarque d'abord que cette quantité est indépendante de la puissance des ondes lumineuses ; en effet les coefficients de friction α et de diffusion D_p sont tous deux linéaires en intensité ($\propto s_0 \propto |\kappa|^2$). On constate ensuite que cette température est minimale pour :

$$\Delta_{\min} = -\frac{\Gamma}{2}, \quad k_B T_{\min} = \frac{\hbar\Gamma}{2}, \quad (\text{II.36})$$

ce qui constitue la limite Doppler annoncée en introduction de ce chapitre. Ces températures sont situées dans le domaine $1 - 1000 \mu\text{K}$; on trouvera dans la table II.1 les valeurs correspondant à certaines espèces atomiques couramment utilisées dans les expériences de refroidissement radiatif.

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, une approche par équation de Fokker-Planck permet de montrer que la distribution en vitesse stationnaire est une gaussienne, identique à une distribution de Maxwell-Boltzmann de largeur en vitesse v_0 donnée par

$$\frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} k_B T_{\min}, \quad \text{soit } v_0 = \sqrt{\frac{\hbar\Gamma}{2M}}. \quad (\text{II.37})$$

2-3 Validité de l'approche « mouvement brownien »

Puisque nous avons utilisé ici une approche de type mouvement brownien, il faut vérifier que l'hypothèse sous-jacente des « petits pas » est vérifiée. Par ailleurs, nous avons utilisé une approximation linéaire pour le

calcul de la force en fonction de la vitesse, et nous devons nous assurer que cette approximation est bien satisfaite pour la vitesse quadratique moyenne v_0 prédite à l'équilibre.

Montrons que le critère de raie large assure que ces deux conditions sont vérifiées. Pour notre problème, le pas élémentaire de la marche au hasard dans l'espace des vitesses est la vitesse de recul $v_r = \hbar k/M$. Cette vitesse est effectivement petite devant v_0 :

$$\frac{v_r}{v_0} = \frac{\hbar k/M}{\sqrt{\hbar\Gamma/2M}} = 2\sqrt{\frac{\omega_r}{\Gamma}} \ll 1. \quad (\text{II.38})$$

Concernant l'approximation linéaire, on vérifie que v_0 est petite devant la plage en vitesse δv_{res} :

$$\frac{v_0}{\delta v_{\text{res}}} = \frac{\sqrt{\hbar\Gamma/2M}}{\Gamma/k} = \sqrt{\frac{\omega_r}{\Gamma}} \ll 1. \quad (\text{II.39})$$

On a donc trois échelles de vitesse dans le problème :

$$v_r \ll v_0 \ll \delta v_{\text{res}}, \quad (\text{II.40})$$

ce qui garantit la validité de notre approche. Pour l'atome de sodium, ces trois vitesses sont 3 cm/s, 30 cm/s et 600 cm/s (cf. table II.1).

Constantes de temps. Le modèle que nous venons de présenter permet également d'évaluer la constante de temps typique du refroidissement pour $\Delta = \Delta_{\text{min}}$:

$$\alpha^{-1} = \frac{M}{\hbar k^2} \frac{1}{2s_0}. \quad (\text{II.41})$$

Dans la limite d'une faible saturation, ce temps peut évidemment être arbitrairement long. Prenons $s_0 = 0.1$ comme borne supérieure typique de notre traitement perturbatif. On trouve alors $\alpha^{-1} \sim 20 \mu\text{s}$ pour l'atome de sodium, ce qui est court : pour une vitesse initiale $v_i = \delta v_{\text{res}} = 6 \text{ m/s}$ (en limite de la plage de linéarité), l'atome ne parcourt qu'une centaine de microns avant l'annulation de sa vitesse moyenne.

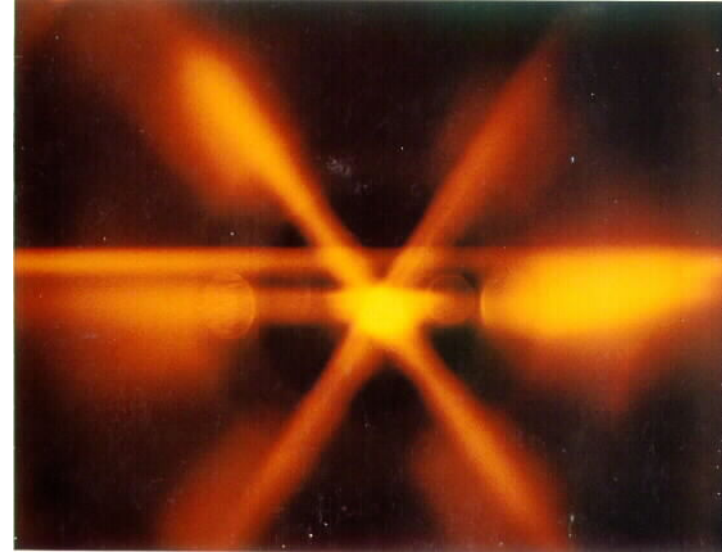


FIGURE II.3. Mélasse d'atomes de sodium réalisée dans le groupe de W.D. Phillips (NBS-NIST).

3 La mélasse optique en pratique

Les premières mélasses optiques ont été réalisées par Chu et al. (1985) peu de temps après qu'on a réussi à arrêter des atomes par pression de radiation (Ertmer et al. 1985; Prodan et al. 1985). La figure II.3 montre une image d'une mélasse optique obtenue en 1987 dans le groupe de Bill Phillips, avec des atomes de sodium (Lett et al. 1988a). Le volume central, de l'ordre du centimètre cube, contient 10^8 atomes. Nous montrons cette image dès maintenant, mais nous verrons plus tard qu'un autre mécanisme de refroidissement, fondé sur l'effet Sisyphe, était également à l'œuvre dans ce gaz d'atomes de sodium.

3-1 Comment prendre en compte la saturation ?

Notre description du paragraphe précédent a été fondée sur une hypothèse de faible saturation, permettant d'additionner les forces de pression de radiation créées par toutes les ondes progressives composant la mélasse optique. Mais dans cette hypothèse de faible saturation, le temps de refroidissement varie comme $1/s_0$ et est donc long. Il est tentant dans la pratique d'augmenter l'intensité lumineuse, mais comment prendre en compte les phénomènes qui peuvent alors se produire ?

Indiquons tout de suite qu'il est difficile de faire un traitement exact du problème. Il est possible de calculer la force agissant sur un atome de vitesse v dans une onde lumineuse stationnaire d'intensité arbitrairement grande, en cherchant le régime forcé des équations de Bloch optiques (Mingogin & Serimaa 1979). Indiquons brièvement le principe de ce calcul : la fréquence de Rabi associée à une onde stationnaire varie en $\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, ce qui crée des termes modulés temporellement pour une trajectoire donnée $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$ de l'atome. Le système des équations de Bloch optiques peut alors se résoudre numériquement par un développement en série de Fourier (on se ramène à un calcul en fractions continuées). Aller au delà du calcul de la force et évaluer le coefficient de diffusion est une tâche lourde, qui ne donne en général que peu d'intuition physique, en particulier dans une situation tridimensionnelle.

En pratique, le régime optimal pour les mélasses optiques correspond à un paramètre de saturation par onde qui ne dépasse pas 1. On utilise alors un « bricolage », qui consiste à considérer que l'atome est simplement saturé par l'ensemble des 6 ondes incidentes, et à utiliser la réponse de ce système saturé. On trouvera deux procédures légèrement différentes dans Lett et al. (1989) et Wohlleben et al. (2001). Indiquons par exemple la procédure proposée par Lett et al. (1989), où l'on prend comme valeur approchée de la force totale agissant sur l'atome :

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) \approx \sum_j \hbar \mathbf{k}_j \frac{\Gamma}{2} \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + 4(\Delta - \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{v})^2/\Gamma^2 + NI/I_{\text{sat}}}. \quad (\text{II.42})$$

où N est le nombre total d'ondes planes progressives incidentes sur l'atome. Nous verrons un peu plus loin que les résultats obtenus sont en accord raisonnable avec les observations expérimentales, en particulier la

température d'équilibre :

$$k_{\text{BT}} = \frac{\hbar\Gamma}{2} \frac{\Gamma}{4|\Delta|} \left(1 + \frac{4\Delta^2}{\Gamma^2} + \frac{NI}{I_{\text{sat}}} \right). \quad (\text{II.43})$$

Rappelons toutefois qu'il ne s'agit que d'une solution « heuristique » pour rendre compte d'une situation *a priori* complexe.

3-2 Capture dans une mélasse optique

Les mélasses optiques sont formées par des faisceaux dont le diamètre est de l'ordre du centimètre et qui se coupent au centre d'une enceinte à vide (figure II.3). Une question essentielle sur le plan pratique est le chargement de cette mélasse par des atomes de vitesse v quelconque. Puisqu'on dispose d'une distance finie L pour capturer un atome, quelle est la vitesse maximale qui pourra être amenée au voisinage de 0 par la force de friction ?

Plaçons-nous à une dimension pour simplifier. L'équation du mouvement d'un atome est

$$M \frac{dv}{dt} = F(v) \quad (\text{II.44})$$

avec

$$F(v) = \frac{\hbar k \Gamma}{2} \frac{I}{I_{\text{sat}}} \left[\frac{1}{1 + 4(\Delta - kv)^2/\Gamma^2} - \frac{1}{1 + 4(\Delta + kv)^2/\Gamma^2} \right] \quad (\text{II.45})$$

Écrivons cette équation sous la forme

$$Mv \frac{dv}{dx} = F(v) \quad (\text{II.46})$$

ce qui s'intègre en

$$M \int_{v_i}^{v_f} \frac{v}{F(v)} dv = \int dx = L. \quad (\text{II.47})$$

On souhaite obtenir $v_f \approx 0$ et on cherche à maximiser v_i , pour L fixé. En pratique, cet optimum est obtenu en prenant pour désaccord $\Delta \approx -kv_i/2$, de sorte que le désaccord effectif est initialement sur le bleu de la résonance atomique $\Delta + kv_i \approx +kv_i/2$, et finalement sur le rouge de cette résonance

$\Delta + kv_f \approx \Delta \approx -kv_i/2$. On trouve alors, en ne gardant que la contribution de l'onde résonante avec l'atome dans (II.45)

$$\frac{1}{6} \frac{k^2 v_i^4}{\Gamma^2} + \frac{v_i^2}{2} \approx \frac{\hbar k \Gamma}{2M} \frac{I}{I_{\text{sat}}} L. \quad (\text{II.48})$$

Dès que la distance L est suffisamment grande, le terme dominant dans le membre de gauche de (II.48) est le terme en v_i^4 , correspondant à la variation en $F(v) \propto 1/v^2$ pour $|\Delta - kv| \gtrsim \Gamma$. On obtient ainsi la loi d'échelle

$$\frac{kv_i}{\Gamma} \approx \left(3 \frac{L}{\ell} \frac{I}{I_{\text{sat}}} \right)^{1/4} \quad (\text{II.49})$$

où $\ell = M\Gamma/\hbar k^3$ est l'échelle de longueur pertinente pour ce problème (cf. table II.1). La vitesse qui peut être capturée dans une mélasse optique varie donc seulement comme la puissance quatrième de la distance disponible, ce qui n'est pas très favorable. Nous verrons un peu plus loin comment le piège magnéto-optique conduit à une situation nettement plus prometteuse.

Un exemple de « portrait de phase », c'est-à-dire la variation de la vitesse en fonction de la position, est montré sur la figure II.4. La distance $L = 400 \ell$ correspond à environ un centimètre pour des atomes de sodium. La vitesse maximale pouvant être capturée dans cette mélasse, obtenue pour $\Delta \approx -3\Gamma$, est telle que $kv_i/\Gamma \approx 5$, en bon accord avec (II.49).

3-3 La diffusion spatiale

Les mélasses optiques constituent un moyen simple pour accumuler un nombre important d'atomes, supérieur au million, dans un volume donné de l'espace, de l'ordre du centimètre cube. La raison pour laquelle ce nombre peut être important réside dans le temps relativement long qu'il faut à un atome pour trouver le bord de la mélasse et s'en échapper. En d'autres termes, le coefficient de diffusion spatiale dans la mélasse est faible (et les mécanismes de refroidissement supplémentaires, comme le refroidissement Sisyphes, viendront encore l'abaisser).

Nous avons obtenu au cours précédent l'expression générale du coefficient de diffusion spatiale D_x pour le mouvement brownien :

$$D_x = v_0^2/\alpha. \quad (\text{II.50})$$

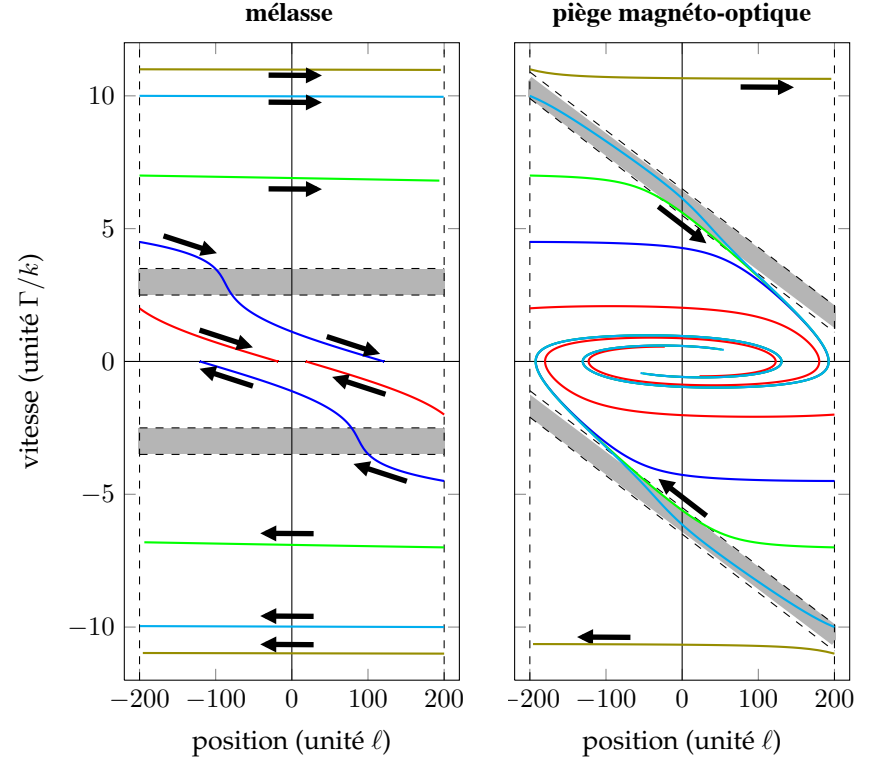


FIGURE II.4. Portrait de phase de la capture 1D dans une mélasse optique (à gauche) et dans un piège magnéto-optique (à droite), avec deux ondes d'intensité $I = I_{\text{sat}}/2$ et une longueur utile $L = 400 \ell$, avec $\ell = M\Gamma/\hbar k^3$. On a pris pour la force totale la somme des deux forces de pression de radiation individuelles (tenant compte de la saturation). La zone grisée représente la zone de l'espace des phases résonante avec l'onde lumineuse (à $\pm\Gamma/2$ près). Le désaccord a été optimisé pour maximiser la vitesse de capture, ainsi que le gradient de champ magnétique dans le cas du piège magnéto-optique. Mélasse : $\Delta = -3\Gamma$; Piège magnéto-optique : $\Delta = -6\Gamma$, $\mu b' \ell / \hbar \Gamma = 0.022$. Les trajectoires correspondent à des vitesses initiales $k|v|/\Gamma = 2, 4.5, 7, 10, 11$. La vitesse de capture est de l'ordre de $5\Gamma/k$ pour la mélasse et $10\Gamma/k$ pour le piège magnéto-optique.

Prenons une mélasse avec le désaccord optimal $\Delta = -\Gamma/2$:

$$v_0^2 = \frac{\hbar\Gamma}{2M}, \quad \alpha = 2s_0 \frac{\hbar k^2}{M} \quad \Rightarrow \quad D_x = \frac{\Gamma}{4k^2} \frac{1}{s_0}. \quad (\text{II.51})$$

Pour un atome de sodium ($\lambda = 0.59 \mu\text{m}$, $\Gamma/2\pi = 10 \text{ MHz}$) et le choix $s_0 = 0.1$, ceci donne $D_x \sim 1.4 \text{ mm}^2/\text{s}$: pour une mélasse de taille centimétrique, il faut plus d'une dizaine de secondes à un atome partant du centre pour atteindre le bord et s'échapper. Même s'il n'y a pas de force de piégeage à proprement parler, il se produit donc une accumulation des atomes dans cette mélasse du fait de sa forte viscosité. Les processus de refroidissement sub-Doppler viennent diminuer encore ce coefficient de diffusion spatiale et donc renforcer cette accumulation d'atomes, le coefficient D_x étant dans ce cas de l'ordre de la dizaine de \hbar/M (Hodapp et al. 1995).

3-4 Quelques tests expérimentaux récents à 3D

Tester la théorie du refroidissement Doppler en raie large n'est pas si facile qu'il y paraît, au moins si on veut le faire à trois dimensions. En effet, pour beaucoup d'espèces atomiques, le niveau fondamental est dégénéré et d'autres mécanismes de refroidissement sont également présents, comme le refroidissement Sisyphé que nous verrons dans un cours ultérieur. C'est notamment le cas pour tous les atomes alcalins, dont le niveau fondamental est dégénéré du fait (i) du spin de l'électron célibataire, (ii) du spin du noyau. De bons candidats pour tester la théorie du refroidissement Doppler sont les isotopes bosoniques des atomes à deux électrons externes. En effet, ces atomes ont dans leur état fondamental un spin électronique nul (état singulet pour les deux électrons externes) et le spin nucléaire peut également être nul pour les isotopes bosoniques (il est forcément demi-entier pour les isotopes fermioniques).

Nous avons reporté sur la figure II.5 le résultat de McFerran et al. (2010), obtenu sur les isotopes 200 et 202 de l'atome de mercure (points roses et verts). Le refroidissement est fait sur la raie d'intercombinaison $^1S_0 \leftrightarrow ^3P_1$ ($\lambda = 254 \text{ nm}$ et $\Gamma/2\pi = 1.3 \text{ MHz}$). La condition de raie large est bien vérifiée dans ce cas, puisque la largeur naturelle est environ 100 fois plus grande que ω_r . Les températures sont mesurées par la technique du temps de vol, à partir d'atomes initialement capturés dans un piège magnéto-optique

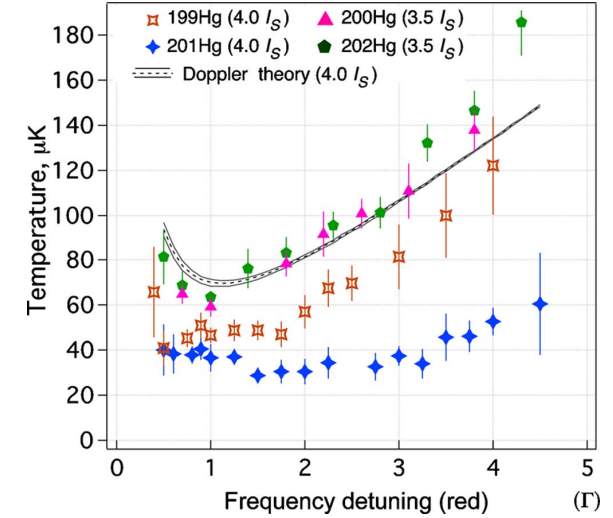


FIGURE II.5. Température d'une mélasse optique d'atomes de mercure, pour différents isotopes. Figure extraite de McFerran et al. (2010). On a indiqué en trait continu la prédiction du refroidissement Doppler, prenant en compte de manière heuristique les effets de saturation [eq. (II.43)]. Les isotopes bosoniques, de spin nucléaire nul, donnent des résultats en bon accord avec la théorie du refroidissement Doppler. Pour les isotopes fermioniques, des mécanismes de refroidissement sub-Doppler sont également présents.

(voir ci-dessous). La variation mesurée de la température reproduit bien la loi attendue pour le refroidissement Doppler, une fois les effets de saturation pris en compte de la manière heuristique décrite en § 3-1 (il y avait dans cette expérience une intensité totale au centre de la mélasse $\sim 4 I_{\text{sat}}$, avec $I_{\text{sat}} = 10.2 \text{ mW}/\text{cm}^2$). Les mesures de températures faites sur les isotopes fermioniques du mercure sont également données sur ce graphe, et montrent clairement l'existence de mécanismes sub-Doppler pour ces isotopes.

Un autre résultat récent sur le test de la théorie du refroidissement Doppler est donné par Chang et al. (2014) et est représenté sur la figure II.6. Cette fois-ci, l'expérience est faite sur des atomes d'hélium métastable

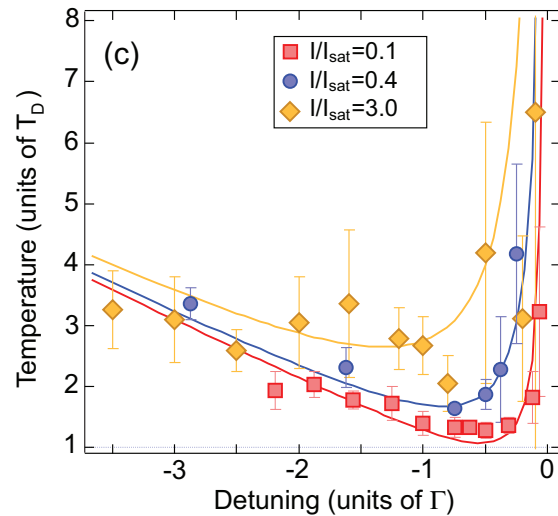


FIGURE II.6. Évolution de la température avec le désaccord dans une mélasse optique d’atomes d’hélium métastable, pour différentes valeurs de l’intensité lumineuse. Les lignes représentent la prédiction (II.43). Figure extraite de Chang et al. (2014).

($\lambda = 1083 \text{ nm}$, $\Gamma/2\pi = 1.6 \text{ MHz}$), qui possède un niveau fondamental dégénéré. Toutefois, les auteurs se sont placés dans des conditions où les mécanismes sub-Doppler jouent un rôle négligeable. L’expérience faite à basse intensité ($I_{\text{sat}}/10$ pour l’intensité totale) conduit à un très bon accord avec la théorie Doppler [température minimale mesurée $\sim 1.3 T_{\text{min}}$ donnée en (II.37)]. À plus haute intensité, la variation de la température avec le désaccord est également en bon accord avec la loi heuristique (II.43).

3-5 Refroidissement de corps macroscopiques

Bien que ce cours soit consacré au refroidissement d’atomes individuels, mentionnons brièvement ici que la force de pression de radiation peut également être utilisée pour refroidir certains degrés de liberté d’objets macroscopiques, comme le centre de masse d’un miroir d’une cavité

optique. Le champ de recherche correspondant, l’optomécanique, est en pleine expansion et il n’est pas question de le traiter ici [voir par exemple l’article de revue récent de Aspelmeyer et al. (2014)]. Nous nous contenterons de décrire ici brièvement les expériences initiales menées il y a une dizaine d’années, dont le principe est proche de ce que nous avons vu jusqu’ici pour les atomes individuels (Arcizet et al. 2006; Gigan et al. 2006; Schliesser et al. 2006).

Considérons le schéma expérimental de la figure II.7 où un faisceau lumineux arrive sur une cavité Fabry–Perot, dont le deuxième miroir est monté sur un ressort. La lumière présente dans la cavité crée une force de pression de radiation sur ce miroir, qui a pour position d’équilibre une certaine abscisse L^* , pour laquelle la force de pression de radiation F_{PR} , dirigée vers la droite, compense exactement la force du ressort F_{ressort} , dirigée vers la gauche :

$$\text{Miroir au repos en } L^* : \quad F_{\text{PR}} + F_{\text{ressort}} = 0. \quad (\text{II.52})$$

La force de pression de radiation dépend de la puissance lumineuse stockée dans la cavité, qui dépend elle-même de la longueur L de cette cavité. Quand L est un multiple entier de $\lambda/2$, cette puissance est maximale.

Supposons que la position du ressort soit choisie telle que L^* soit légèrement inférieur à $n\lambda/2$, et considérons une oscillation du miroir autour de sa position d’équilibre. Quand le miroir passe par L^* en allant vers la droite, le nombre de photons est en train d’augmenter dans la cavité. Du fait de la constante de temps nécessaire pour que ce nombre de photons atteigne sa valeur stationnaire, ce nombre de photons va être inférieur à ce qu’il serait si le miroir était immobile en L^* . La force de pression de radiation est donc plus faible que ce qu’elle serait pour un miroir immobile et la force ressentie par le miroir quand il passe au point L^* est donc dirigée vers la gauche :

$$\text{Miroir passant en } L^* \text{ vers la droite} : \quad F_{\text{PR}} + F_{\text{ressort}} < 0, \quad (\text{II.53})$$

donc opposée au mouvement du miroir. De même, quand l’atome passe en L^* en venant de la droite, la cavité contient un peu plus de photons que si le miroir était immobile et

$$\text{Miroir passant en } L^* \text{ vers la gauche} : \quad F_{\text{PR}} + F_{\text{ressort}} > 0. \quad (\text{II.54})$$

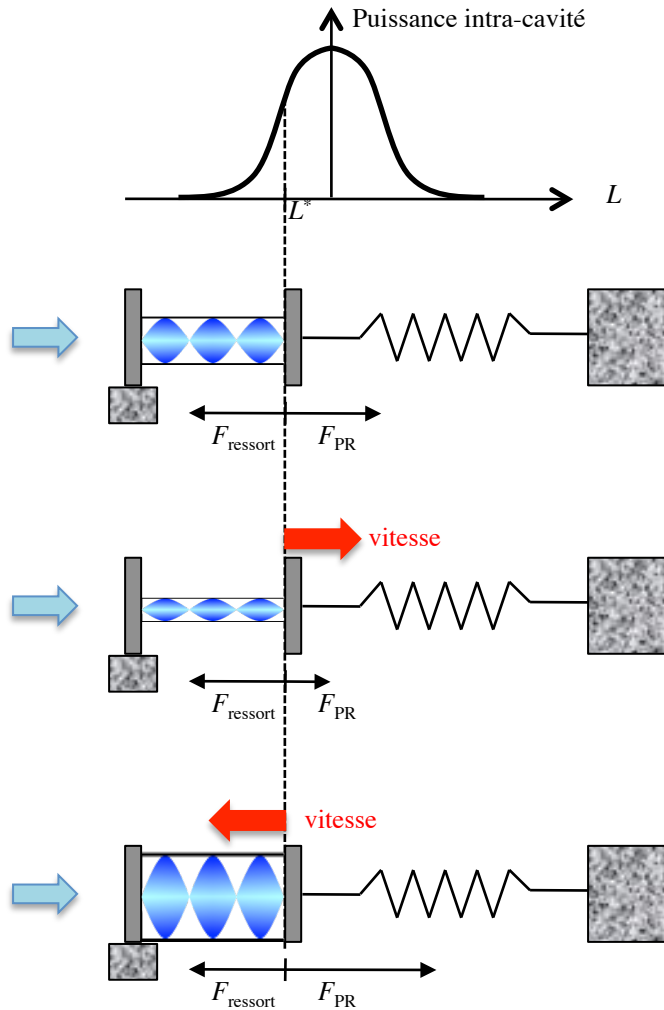


FIGURE II.7. Cavité Fabry–Perot avec un miroir mobile. Pour un choix convenable de la position d’équilibre L^* , la force de pression de radiation amortit le mouvement du centre de masse de miroir. L’amortissement provient du temps non nul que met la puissance intra-cavité à s’ajuster à la position du miroir quand celui-ci oscille autour de sa position d’équilibre.

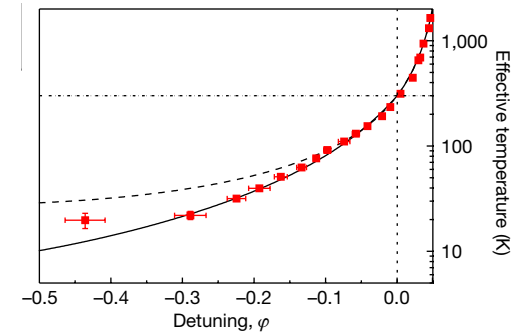


FIGURE II.8. Température effective associée au mouvement du centre de masse du miroir mobile d’une cavité Fabry–Perot, en fonction du désaccord de cette cavité. La ligne pointillée est la prédiction obtenue en ne considérant qu’un seul mode du micro-résonateur mécanique, la ligne continue prend en compte la contribution des autres modes. Figure extraite de Arcizet et al. (2006).

On voit donc apparaître, en plus des forces statiques agissant sur le miroir au repos, une force dépendant de la vitesse qui s’oppose au mouvement du centre de masse du miroir et qui refroidit ce degré de liberté (figure II.8). Cette force de friction, analogue de la force de friction Doppler pour un atome, abaisse la température associée à ce degré de liberté. On notera que la friction est obtenue seulement si L^* est choisi légèrement sur la gauche de la résonance $n\lambda/2$ de la cavité Fabry–Perot. Si on avait choisi au contraire L^* légèrement sur la droite de cette résonance, nous aurions trouvé une force d’accélération. La quantité $L^* - n\lambda/2$ (notée φ sur la figure II.8) joue donc le rôle du désaccord $\Delta = \omega_L - \omega_A$ pour les atomes libres.

4 Le piège magnéto-optique

La mélasse optique fondée sur l’effet Doppler fournit un moyen simple pour freiner les atomes et maintenir leur vitesse autour de 0, avec une température de l’ordre de $\hbar\Gamma/k_B$. Le piège magnéto-optique fournit, en complément du refroidissement Doppler, un moyen de confiner les atomes autour d’un point donné. Le seul ingrédient supplémentaire est un gradient

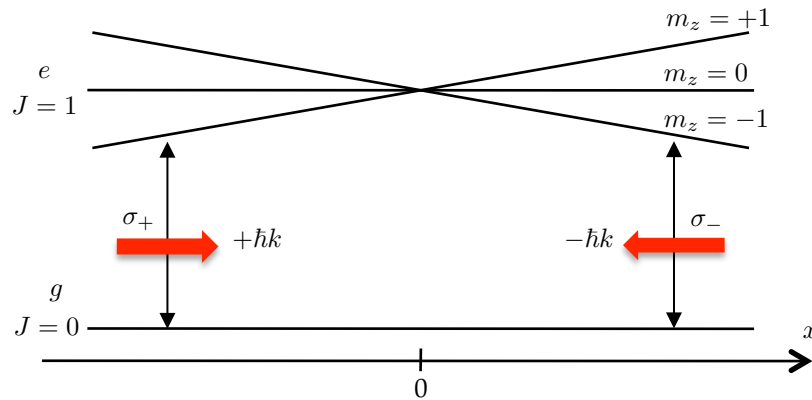


FIGURE II.9. Principe de base du piège magnéto-optique (version unidimensionnelle). Le force de pression de radiation créée par chaque onde lumineuse dépend de la position en raison de la présence d'un gradient de champ magnétique. La résultante des deux forces de pression de radiation est une force de rappel vers l'origine.

de champ magnétique, qui agit de manière différente sur le niveau fondamental et sur le niveau excité de l'atome, et qui introduit une dépendance spatiale de la force de pression de radiation. Ce principe a été mis en œuvre pour la première fois par Raab et al. (1987).

4-1 Principe de base et taille d'équilibre « à un atome »

Le principe de base du piège magnéto-optique est illustré sur la figure II.9, dans une géométrie à une dimension (la généralisation à 3D ne pose pas de problème de principe). On considère une transition entre un niveau fondamental de moment cinétique nul et un niveau excité de moment cinétique $J_e = 1$. Un gradient de champ magnétique lève la dégénérescence entre les trois états Zeeman du niveau excité. Si on prend une polarisation circulaire pour chacun des faisceaux composant la mélasse, on réalise la situation recherchée : pour un désaccord négatif (celui nécessaire pour le refroidissement Doppler), un atome immobile en $x > 0$ ressentira une force de pression de radiation plus grande de la part de l'onde venant de

la droite que de celle venant de la gauche : il sera donc rappelé vers le point central. De même un atome en $x < 0$ subira une force plus grande de la part de l'onde se propageant vers la droite, et sera lui aussi rappelé vers le centre.

Pour être plus quantitatif, introduisant le moment magnétique μ associé au niveau excité atomique, de sorte que le déplacement Zeeman d'un sous-niveau m s'écrit $m\mu B$, où B est l'amplitude du champ magnétique à l'emplacement de l'atome. Pour le gradient de champ magnétique représenté sur la figure II.9, l'amplitude du champ s'écrit $B = b'x$, de sorte que la force ressentie par un atome localisé au point x avec la vitesse v s'écrit :

$$F(x, v) = \frac{\hbar k \Gamma}{2} \frac{I}{I_{\text{sat}}} \left[\frac{1}{1 + 4(\Delta - kv - \mu b'x/\hbar)^2/\Gamma^2} - \frac{1}{1 + 4(\Delta + kv + \mu b'x/\hbar)^2/\Gamma^2} \right]. \quad (\text{II.55})$$

Limitons-nous à des effets Doppler (kv) et Zeeman ($\mu b'x/\hbar$) petits devant la largeur naturelle Γ . On obtient alors à l'ordre le plus bas non nul une force linéaire en position et en vitesse avec :

$$F(x, v) = -Kx - M\alpha v, \quad (\text{II.56})$$

qui va donner lieu à un mouvement harmonique amorti. Le coefficient de friction α est identique à celui trouvé pour une mélasse. La raideur K de la force de rappel vaut :

$$K = k\mu b' s_0 \frac{2\Gamma|\Delta|}{\Delta^2 + \Gamma^2/4}. \quad (\text{II.57})$$

Passons à la détermination de la taille à l'équilibre du nuage d'atomes piégés. Le coefficient de diffusion en impulsion est inchangé, de sorte que l'état d'équilibre est toujours un état thermique, de température déterminée par $k_B T = D_p/M\alpha$. La distribution d'équilibre est une gaussienne en position, d'écart-type x_0 donné par

$$\frac{1}{2} K x_0^2 = \frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} k_B T, \quad (\text{II.58})$$

soit

$$x_0 = \left(\frac{\hbar \Gamma}{4k\mu b' s_0} \right)^{1/2} \quad (\text{II.59})$$

si on choisit le désaccord $\Delta = -\Gamma/2$ conduisant à la température minimale $k_B T = \hbar\Gamma/2$. Pour obtenir un ordre de grandeur de x_0 , reprenons le cas d'atomes de sodium, avec $s_0 = 1/10$ et un gradient de champ magnétique typique $b' = 10 \text{ G/cm}$ (0.1 Tesla par mètre). On trouve $x_0 = 40 \mu\text{m}$ pour le désaccord $\Delta = -\Gamma/2$.

En pratique, deux effets antagonistes viennent modifier cette prédiction :

- Pour un niveau fondamental dégénéré, les processus Sisyphé qui augmentent le coefficient de friction vont venir également augmenter la raideur K du piège magnéto-optique, donc diminuer sa taille (Cooper et al. 1994; Townsend et al. 1995).
- Les effets collectifs, liés à la diffusion multiple de photons au sein du nuage d'atomes, viennent au contraire augmenter la taille d'équilibre du gaz piégé, comme nous allons le voir ci-dessous (§ 4-3).

L'article déjà cité de Chang et al. (2014) a mesuré cette taille pour des atomes d'hélium dans un niveau électronique métastable. La densité spatiale dans le piège magnéto-optique qu'ils ont réalisé était faible (limitée par les collisions Penning), si bien que les effets collectifs que nous allons discuter ci-dessous étaient négligeables dans leur cas. Les tailles mesurées sont en bon accord avec la prédiction (II.59), comme on peut le voir sur la figure II.10.

4-2 Capture dans un piège magnéto-optique

Outre le fait de ramener tous les atomes en un même point de l'espace, le piège magnéto-optique a l'avantage de capturer des atomes à une vitesse notablement plus grande qu'une mélasse optique. Ce point est illustré sur le portrait de phase de la figure II.4. La résonance d'un atome avec le laser se produit pour tous les couples "position-vitesse" vérifiant :

$$\pm\Delta = kv + \mu b' x / \hbar. \quad (\text{II.60})$$

Si on dispose d'une distance totale L pour capturer les atomes, la configuration optimale est obtenue quand un atome au repos au point $x = L/2$, sur le bord droit de la zone de capture, est résonant avec le faisceau le

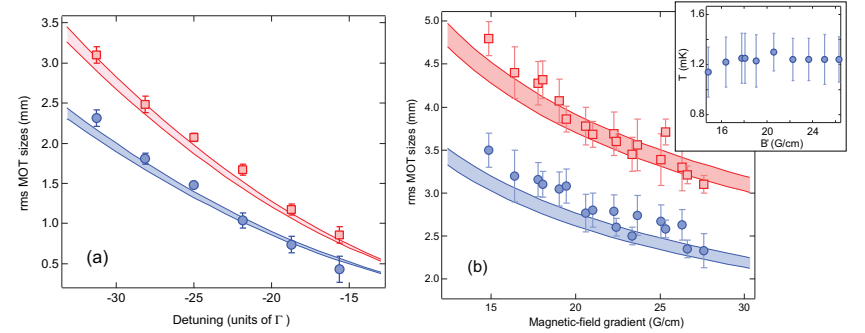


FIGURE II.10. Taille à l'équilibre d'un piège magnéto-optique d'atomes d'hélium métastables en fonction du désaccord Δ et du gradient de champ magnétique b' . Les deux séries de points correspondent à deux axes différents du champ magnétique quadrupolaire du piège. Les lignes continues sont les prédictions de la théorie présentée dans ce chapitre, compte tenu des effets de saturation. Figures tirées de Chang et al. (2014).

poussant vers le centre, soit :

$$|\Delta| \approx \frac{\mu b'}{\hbar} \frac{L}{2}. \quad (\text{II.61})$$

À l'autre extrémité de la zone de capture ($x = -L/2$), le même faisceau est résonant avec des atomes de vitesse v_i satisfaisant la condition de résonance (II.60) :

$$|\Delta| = kv_i + \frac{\mu b'}{\hbar} \frac{(-L)}{2} \Rightarrow kv_i = 2|\Delta| = \mu b' L / \hbar. \quad (\text{II.62})$$

Il reste à choisir le gradient de champ magnétique b' le plus grand possible, compatible avec la force de pression de radiation disponible ; le problème est similaire à celui d'un ralentisseur Zeeman, dans lequel il faut maintenir la condition de résonance en tout point de l'espace, compte tenu de la variation d'effet Doppler. Dans le cas qui nous intéresse ici, il faut que les points (x, v) de l'espace des phases pour lesquels la résonance (II.60) se produit soient tels que

$$F = M \frac{dv}{dt} = Mv \frac{dv}{dx} < F_{\text{max}} \quad (\text{II.63})$$

où $F_{\max} = \hbar k \frac{\Gamma}{2 I_{\text{sat}}}$ est la force maximale créée par chaque faisceau du piège. En injectant la valeur $\frac{dv}{dx} = \mu b' / \hbar k$ déduite de la condition de résonance et la vitesse initiale (II.62) dans cette relation, on en déduit la vitesse de capture et le gradient de champ magnétique correspondant :

$$\frac{kv_i}{\Gamma} = \frac{\mu b' L}{\hbar \Gamma} \approx \left(\frac{L}{\ell} \frac{I}{2 I_{\text{sat}}} \right)^{1/2}. \quad (\text{II.64})$$

On voit donc que cette vitesse de capture varie comme $L^{1/2}$ au lieu de la loi en $L^{1/4}$ trouvée pour la mélasse. En pratique, pour des paramètres raisonnables, cette vitesse de capture dans un piège magnéto-optique est deux à trois fois plus grande que pour une mélasse (*cf.* figure II.4). Ceci se traduit par un gain considérable en termes de nombre d'atomes refroidis si on part d'une vapeur à l'équilibre thermique à température ambiante : on capture en effet la partie "basses vitesses" de la distribution thermique, et le flux d'atomes entrant dans la région de capture avec une vitesse $v \lesssim v_i$ varie comme v_i^4 . Un gain d'un facteur 2 sur la vitesse de capture (comme sur la figure II.4) se traduit par un gain d'un facteur 16 du flux d'atomes refroidis.

4-3 Taille d'équilibre « à N atomes »

En pratique, les tailles mesurées pour les nuages d'atomes confinés dans un piège magnéto-optique sont la plupart du temps bien supérieures à la prédiction (II.59) (la figure II.10 est une exception). Ceci est dû aux effets collectifs entre atomes, plus précisément à la répulsion causée par la pression de radiation de la lumière de fluorescence (Walker et al. 1990). La situation est similaire à celle d'une étoile comme le soleil, où la force de gravité qui tend à contracter l'étoile sur elle-même est compensée par la pression de radiation.

En pratique, la densité au sein d'un piège magnéto-optique est limitée à une valeur de l'ordre de 10^{10} atomes/cm³, et le diamètre du nuage piégé peut atteindre une valeur de l'ordre du cm. Pour retrouver ces ordres de grandeur, commençons par évaluer la répulsion effective entre atomes. Considérons une paire d'atomes séparés par une distance r . L'atome 1, éclairé par les six faisceaux laser formant le piège magnéto-optique, diffuse des photons avec un taux $\gamma = 6 \times (\Gamma s_0/2)$. Nous supposons pour

simplifier que ces photons sont émis de manière isotrope. L'atome 2 va absorber une fraction $\sigma_{\text{abs}}/(4\pi r^2)$ de ces photons, et donc ressentir une force de pression de radiation dirigée suivant l'axe de la paire d'atomes de module

$$F = \gamma \hbar k \frac{\sigma_{\text{abs}}}{4\pi r^2}. \quad (\text{II.65})$$

La valeur de la section efficace d'absorption des photons diffusés σ_{abs} dépend de leur longueur d'onde. Supposons pour l'instant que ces photons sont émis à la longueur d'onde des lasers incidents (diffusion Rayleigh élastique) et que⁴ :

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{3\lambda^2}{2\pi} \frac{1}{1 + 4\Delta^2/\Gamma^2}. \quad (\text{II.66})$$

L'équilibre du nuage d'atomes sous l'effet conjoint de la force de piégeage $-Kr$ et de la répulsion entre atomes est un problème classique. Plaçons-nous à température nulle pour simplifier, ce qui sera légitime si la taille d'équilibre est grande devant la taille « à un atome » donnée en (II.59). Faisons de plus l'hypothèse, que nous vérifierons *a posteriori*, que la densité atomique est constante et égale à n à l'intérieure d'une sphère de rayon R , et nulle en dehors, avec $N = \frac{4}{3}\pi R^3 n$. Dans ce cas, on peut évaluer l'effet moyen de la force de répulsion par le théorème de Gauss : on a une assemblée de particules se repoussant deux à deux par une force en $1/r^2$ comme la force de Coulomb. Dans une géométrie sphérique avec une densité uniforme, on sait que le champ électrique est radial et varie linéairement avec la distance r au centre à l'intérieur de la sphère. Dans le cas qui nous intéresse ici, la force totale de pression de radiation due à la lumière diffusée s'écrit donc $\mathbf{F} = K' \mathbf{r}$ avec

$$K' = \frac{1}{3} \gamma \hbar k \sigma_{\text{abs}} n \quad (\text{II.67})$$

On obtient alors en tout point du nuage l'équilibre recherché pourvu que $K' = K$, ce qui se produit pour une densité

$$n = \frac{16\pi}{3} \frac{\mu b'}{\hbar \lambda^2} \frac{|\Delta|}{\Gamma^2}. \quad (\text{II.68})$$

Le fait que l'équilibre soit obtenu en tout point valide l'hypothèse initiale de densité uniforme. En prenant des paramètres typiques d'un piège

4. Nous aurons l'occasion de revenir sur les subtilités concernant la section efficace de diffusion d'un photon par un atome quand ce dernier est « habillé » par la lumière d'un laser.

magnéto-optique pour les atomes alcalins, $b' = 0.1 \text{ T/m}$, $|\Delta| = 3\Gamma$ et μ égal au magnéton de Bohr, on trouve une densité à l'équilibre de 1.7×10^{10} atomes/cm³, ce qui donne un rayon de 2.4 mm pour un nuage d'un milliard d'atomes.

Remarque. Notre modèle est en fait une version pessimiste de la réalité. En effet, nous avons négligé un effet de même nature, lié à l'absorption des faisceaux laser, qui vient au contraire renforcer l'effet de piégeage (Dalibard 1988). Pour comprendre cet effet, prenons un modèle 1D avec un nuage atomique centré en $z = 0$. Pour un atome situé sur un bord du nuage, par exemple à droite du centre ($z > 0$), les deux ondes piégeantes n'apparaissent pas avec la même intensité. En effet, l'onde se propageant vers les $z > 0$, qui tend à éloigner davantage l'atome du centre, a dû traverser tout le nuage pour atteindre l'atome; elle est donc notablement atténuée, du fait de l'absorption par le nuage. En revanche, l'onde se propageant vers les $z < 0$, qui tend à ramener l'atome vers le centre, n'a pratiquement pas été atténuée. Cet effet d'absorption augmente donc la raideur du piège magnéto-optique. On peut montrer que si les photons diffusés avaient exactement la même fréquence que les photons laser, l'effet de diffusion multiple discuté plus haut et cet effet d'absorption se compenseraient exactement. C'est parce qu'une partie des photons diffusés sont émis avec une fréquence proche de la résonance atomique que l'effet de diffusion multiple (qui tend à faire exploser le nuage) l'emporte sur l'effet d'absorption (qui tend à le comprimer) (Walker et al. 1990). Pour une prise en compte quantitative de la compétition entre ces deux effets, voir par exemple Townsend et al. (1995).

Le piège magnéto-optique à grand nombre d'atomes constitue en fait un système non linéaire très riche, pouvant conduire à des effets de bistabilité, d'instabilités paramétriques et de dynamique chaotique [voir par exemple Sesko et al. (1991); Wilkowski et al. (2000); Stefano et al. (2003); Kim et al. (2004); Terças et al. (2010) et refs. in]. La force répulsive en $1/r^2$ entre deux atomes conduit notamment à des effets similaires à ceux qui apparaissent dans les plasmas chargés, comme l'explosion coulombienne (Pruvost et al. 2000). Signalons également la technique du piège magnéto-optique sombre (*dark MOT*) dans laquelle on utilise un pompage optique au centre du piège pour y diminuer la lumière de fluorescence, et ainsi y augmenter la densité spatiale (Ketterle et al. 1992).

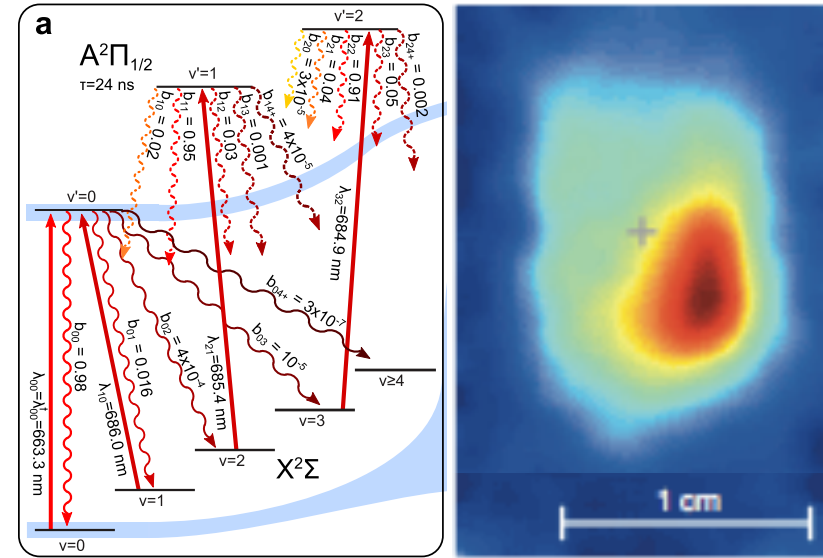


FIGURE II.11. Schéma des niveaux moléculaires de SrF utilisés pour le piégeage magnéto-optique de cette molécule. Quatre sources lasers et plusieurs modulateurs électro-optiques sont nécessaires pour interagir avec la molécule pendant $\sim 1\text{s}$ (10^6 photons échangés). À droite, piège magnéto-optique avec ~ 300 molécules, $T \sim 2 \text{ mK}$, et une durée de vie de 60 ms, limitée par la profondeur du piège. Figure extraite de Barry et al. (2014).

4-4 Au tour des molécules

Le piège magnéto-optique permet de capturer un grand nombre d'espèces atomiques (près d'une trentaine), ce qui a ouvert la voie à de nombreuses applications allant de la métrologie à la physique des gaz quantiques. L'extension de cette technique à des molécules est un défi considérable, mais qui peut déboucher sur des applications encore plus nombreuses compte tenu de la richesse des phénomènes observables, en liaison avec le moment dipolaire électrique permanent de ces molécules ainsi qu'avec la chimie quantique.

Très récemment, le premier piège magnéto-optique 3D pour des molé-

cules a été réalisé par Barry et al. (2014). Peu de temps avant, un piégeage 1D et 2D avait été observé par Hummon et al. (2013). Il s'agit d'expériences complexes, car la structure de niveaux d'une molécule di-atomique ne permet pas d'isoler une transition unique sur laquelle on pourrait échanger un nombre de photons suffisants. L'expérience de Barry et al. (2014), menée sur le monofluorure de strontium (SrF), met en jeu 7 niveaux vibrationnels moléculaires différents (figure II.11), chacun étant clivé en sous-niveaux du fait de la rotation de la molécule et de sa structure hyperfine (le trait représentant le niveau fondamental $v = 0$ correspond à 12 états). Il faut utiliser 4 sources laser (les traits droits de la figure II.11), chacune modulée électro-optiquement pour exciter les différents sous-niveaux. Grâce à ces multiples lasers, une molécule donnée peut échanger en moyenne $\sim 10^6$ photons avant de tomber sur un niveau non représenté sur la figure et non excité par un des faisceaux lumineux. Cet échange de 10^6 photons permet d'interagir avec la molécule et d'exercer une force sur elle pendant une seconde environ.

La difficulté de l'expérience est encore accrue par le fait que la transition considérée ne se ramène pas à une simple transition $J_g = 0 \leftrightarrow J_e = 1$, mais comporte des états noirs (nous reviendrons sur cette notion dans un chapitre ultérieur). Une fois tombée dans un état noir, la molécule cesse de ressentir une force et risque de s'échapper du piège. Il faut donc périodiquement basculer les polarisations des faisceaux lumineux et la direction du champ magnétique pour recycler ces états noirs. Une fois toutes ces précautions prises, on peut effectivement observer le piège ! Le nouveau-né contient environ 300 molécules (ce qui est encore peu comparé aux milliards d'atomes qu'un piège magnéto-optique peut accumuler), à une température de 2 millikelvin environ. Cette température est dix fois supérieure à la limite Doppler, ce que les auteurs interprètent comme une conséquence de l'existence des états noirs. La durée de vie du piège est de 60 ms, ce qui est là aussi bien inférieur au résultat mesuré pour des atomes (qui peut atteindre plusieurs minutes). La raison probable de cette faible durée de vie est la profondeur limitée du piège, qu'on peut estimer à $5 k_B T$ seulement. Il y a donc une évaporation des molécules du piège, qui limite leur temps de séjour.

Chapitre III

Les vertus des raies étroites

Nous nous sommes intéressés dans le chapitre précédent au refroidissement Doppler en raie large, c'est-à-dire un refroidissement opérant sur une raie atomique avec une largeur naturelle Γ du niveau excité grande devant la pulsation de recul $\omega_r = \hbar k^2/2M$. Nous avons alors trouvé une température proportionnelle à cette largeur naturelle Γ . Il est naturel de se demander ce que devient la température limite quand on cherche à utiliser des raies de plus en plus étroites, en s'approchant de la situation $\Gamma \sim \omega_r$, voire même au delà. La loi $T \propto \Gamma$ reste-t-elle valable, ou est-elle remplacée par une autre limite ?

Cette question pouvait sembler académique il y a une quinzaine d'années, mais elle est désormais très pertinente sur le plan expérimental : un grand intérêt est en effet porté aux atomes à deux électrons externes, notamment sur le plan métrologique et sur celui des gaz quantiques dégénérés. Or, ces atomes ont naturellement des raies de résonance étroites ; ces raies couplent le secteur où le spin total des deux électrons externes est $S = 0$ (singulet de spin) et celui pour lequel $S = 1$ (triplet de spin). Par exemple, pour l'atome de strontium, la raie à 689 nm couplant l'état fondamental 1S_0 et l'état excité 3P_1 a pour largeur $\Gamma/2\pi = 7.5$ kHz, ce qui est comparable à la fréquence de recul $\omega_r/2\pi = 4.7$ kHz (voir table III.1). Le refroidissement de cet atome présente un intérêt métrologique considérable puisque c'est avec lui que le groupe de Jun Ye à Boulder a récemment démontré le fonctionnement d'une horloge optique avec une précision au niveau record de 2×10^{-18} (Bloom et al. 2014; Nicholson et al. 2015).

Comme nous l'avons indiqué dans le cours précédent, l'absorption ou

	A	λ nm	$\Gamma/2\pi$ kHz	$\omega_r/2\pi$ kHz	E_r/k_B nK	v_r cm/s
Mg	24	457	0.031	40	1.9	3.6
Ca	40	657	0.40	12	0.55	1.5
Zn	64	309	6.0	32	1.6	2.0
Sr	84	689	7.6	5.0	0.24	0.69
Cd	114	326	70	16	0.79	1.1

TABLE III.1. Raies étroites (intercombinaison) $^1S_0 \leftrightarrow ^3P_1$ pour quelques espèces atomiques à deux électrons externes (données extraites de la thèse de doctorat de Zeb Barber, Boulder, et refs. in).

l'émission d'un seul photon suffit dans ce cas à changer notablement le paramètre de saturation de l'atome. On ne peut donc plus adopter une approche de type Fokker-Planck puisque l'approximation des petits pas n'est pas valable. Il faut revenir à une description du mouvement dans laquelle chaque saut est pris en compte de manière discrète. Pour simplifier, nous allons traiter d'abord le cas unidimensionnel ; l'extension à trois dimensions pourra ensuite se faire sans difficulté, via un traitement numérique. Grâce à cette approche, nous allons montrer que la distribution stationnaire a une largeur minimale donnée par la vitesse de recul $v_r = \hbar k/M$.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous passerons à la description de quelques expériences récentes. Nous verrons que cette méthode de refroidissement permet d'atteindre des températures en dessous du mi-

cokelvin, nous aborderons le problème du chauffage lié à la diffusion multiple dans l'échantillon, et nous discuterons la possibilité d'obtenir un gaz quantique dégénéré à partir des nuages refroidis sur raie étroite. Nous terminerons notre discussion par le schéma développé par Stellmer et al. (2013) pour obtenir un condensat de Bose–Einstein sans aucune évaporation, dans un nuage continûment refroidi par laser.

1 Refroidissement monochromatique

Nous allons développer dans ce paragraphe un modèle simple de refroidissement en raie étroite, en ajoutant un à un les ingrédients permettant de se rapprocher d'une situation réelle. Nous allons tout d'abord traiter une situation uni-dimensionnelle le long d'une direction donnée de l'espace (z), en supposant que les photons spontanés n'emportent aucune impulsion le long de cet axe. Nous verrons ensuite comment prendre en compte cette impulsion, puis nous passerons au cas 3D.

1-1 Modèle sans recul « spontané »

Nous considérons ici un atome à deux niveaux g, e , mobile le long de l'axe z , et nous supposons cet atome éclairé par deux ondes se propageant le long de l'axe z , de vecteur d'onde $\pm k\mathbf{u}_z$. Nous supposons ces ondes de faible intensité, de sorte que la probabilité par unité de temps pour que l'atome absorbe un photon est en bonne approximation donnée par la somme des probabilités associées à chacune des deux ondes. Dans ce premier paragraphe, nous allons supposer de plus que les photons spontanés sont émis perpendiculairement à l'axe considéré¹.

Considérons un atome initialement dans l'état interne g avec la vitesse v . Cet atome peut absorber un photon dans l'onde allant dans le sens $+z$ ou dans l'onde allant dans le sens $-z$, sa vitesse augmentant ou diminuant de v_r (figure III.1). Nous avons vu dans les chapitres précédents que les

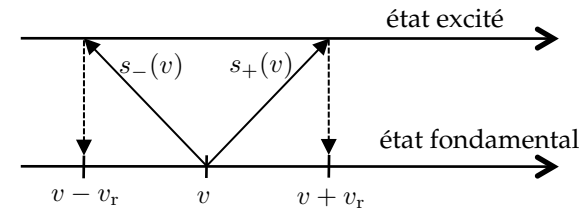


FIGURE III.1. Modèle discret pour le refroidissement Doppler en raie étroite. L'absorption d'un photon change la vitesse atomique de $\pm v_r$. L'émission spontanée est supposée se faire dans le plan perpendiculaire à l'axe du refroidissement et la vitesse de l'atome est donc inchangée lors de ce processus.

taux pour ces deux processus sont donnés par $\Gamma s_{\pm}(v)/2$ avec

$$s_{\pm}(v) = \frac{2|\kappa|^2}{\Gamma^2 + 4\Delta_v^2}. \quad (\text{III.1})$$

Dans cette équation, la grandeur κ correspond à la pulsation de Rabi de chaque onde, caractérisant le couplage dipolaire électrique de l'atome avec le champ électromagnétique. Le désaccord Δ_v se calcule en comparant l'énergie E_i de l'état initial (avant absorption, atome dans l'état g en présence de N photons laser) et l'énergie E_f de l'état final (après absorption, atome dans l'état e en présence de $N - 1$ photons laser) :

$$E_i = E_g + \frac{1}{2}Mv^2 + N\hbar\omega_L, \quad (\text{III.2})$$

$$E_f = E_e + \frac{1}{2}M(v \pm v_r)^2 + (N - 1)\hbar\omega_L, \quad (\text{III.3})$$

c'est-à-dire, en posant $\Delta = \omega_L - \omega_A$ avec $\hbar\omega_A = E_e - E_g$:

$$\Delta_v = \Delta \mp kv - \omega_r. \quad (\text{III.4})$$

Une fois dans l'état excité, l'atome retombe dans l'état fondamental en émettant de manière spontanée un photon. Comme indiqué plus haut, nous supposons dans un premier temps que ce photon se propage dans le plan orthogonal à l'axe z , ce qui ne modifie pas la vitesse v selon cet axe.

1. Notre modèle est donc optimiste puisqu'il néglige totalement le chauffage dû aux reculs lors des processus d'émission spontanée. Une autre version, pessimiste celle-là mais également simple à traiter analytiquement, serait de supposer que les photons spontanés se propagent eux aussi selon l'axe z .

En notant $\mathcal{P}(v, t)$ la distribution en vitesse à l'instant t , on a donc l'équation d'évolution :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}(v, t)}{\partial t} = & - \frac{\Gamma}{2} [s_+(v) + s_-(v)] \mathcal{P}(v) \\ & + \frac{\Gamma}{2} s_+(v - v_r) \mathcal{P}(v - v_r) + \frac{\Gamma}{2} s_-(v + v_r) \mathcal{P}(v + v_r). \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

Dans ce modèle, on couple donc une chaîne infinie, mais discrète, de classes de vitesses :

$$\dots \leftrightarrow v - 2v_r \leftrightarrow v - v_r \leftrightarrow v \leftrightarrow v + v_r \leftrightarrow \dots \quad (\text{III.6})$$

1-2 État stationnaire

Pour évaluer l'état stationnaire de ce modèle 1D de refroidissement en raie étroite, le plus simple est de considérer une frontière virtuelle située entre v et $v + v_r$ et d'écrire l'égalité des flux traversant cette frontière de droite à gauche et de gauche à droite (figure III.2) :

$$s_+(v) \mathcal{P}(v) = s_-(v + v_r) \mathcal{P}(v + v_r). \quad (\text{III.7})$$

ou encore

$$\frac{\mathcal{P}(v + v_r)}{\mathcal{P}(v)} = \frac{(\Delta + \omega_r + kv)^2 + \Gamma^2/4}{(\Delta - \omega_r - kv)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (\text{III.8})$$

Intéressons-nous tout d'abord au cas particulier $\Delta = -\omega_r$ et considérons la famille $v_n = (n - \frac{1}{2})v_r$:

$$\dots \leftrightarrow -\frac{3}{2}v_r \leftrightarrow -\frac{1}{2}v_r \leftrightarrow \frac{1}{2}v_r \leftrightarrow \frac{3}{2}v_r \leftrightarrow \dots \quad (\text{III.9})$$

La relation (III.8) devient dans la limite $\Gamma \rightarrow 0$:

$$\frac{\mathcal{P}(v_{n+1})}{\mathcal{P}(v_n)} = \frac{(n - \frac{1}{2})^2}{(n + \frac{1}{2})^2}, \quad \text{soit } \mathcal{P}(v_n) \propto \frac{1}{(n - \frac{1}{2})^2} \propto \frac{1}{v_n^2}. \quad (\text{III.10})$$

Ce cas particulier nous révèle un point important : dans la limite d'une raie étroite, la distribution en vitesse n'est plus une gaussienne contrairement

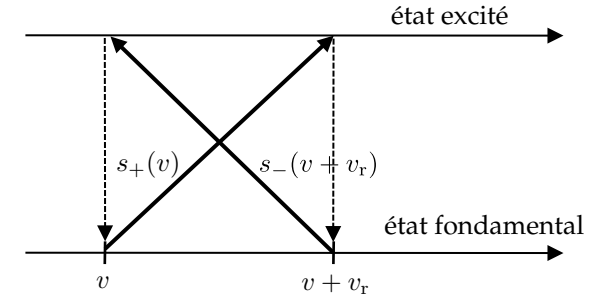


FIGURE III.2. Pour trouver le régime stationnaire de (III.5), on écrit l'égalité des flux traversant une frontière fictive située à $v + v_r/2$.

au cas d'une raie large, pour lequel l'équation de Fokker-Planck était valable. Cette distribution en vitesse décroît comme une loi de puissance $v^{-\alpha}$, en l'occurrence $\alpha = 2$ pour le choix $\Delta = -\omega_r$.

Comme nous allons le voir dans ce qui suit, cette décroissance « molle » en loi de puissance va poser des questions nouvelles par rapport au cas gaussien : à quelle condition le moment d'ordre deux $\langle v^2 \rangle$ qui entre dans la définition de l'énergie cinétique est-il défini [ce n'est manifestement pas le cas pour (III.10)] ? La distribution $\mathcal{P}(v)$ est-elle toujours normalisable ?

Pour répondre à ces questions, prenons maintenant un désaccord Δ quelconque. Il n'y a pas de solution exacte comme pour le cas particulier $\Delta = -\omega_r$, mais on peut montrer que le comportement aux grandes vitesses reste un comportement en loi de puissance

$$\mathcal{P}(v) \propto |v|^{-\alpha}. \quad (\text{III.11})$$

Pour déterminer α , utilisons le développement aux grandes vitesses

$$\frac{\mathcal{P}(v + v_r)}{\mathcal{P}(v)} \approx 1 - \alpha \frac{v_r}{v}. \quad (\text{III.12})$$

Un développement en puissances de $1/v$ du membre de droite de (III.8) donne le terme dominant :

$$1 + 4 \frac{\Delta}{kv} = 1 + 2 \frac{\Delta}{\omega_r} \frac{v_r}{v} \quad (\text{III.13})$$

dont on déduit l'exposant de la loi de puissance de \mathcal{P}

$$\mathcal{P}(v) \propto |v|^{-\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = 2 \frac{|\Delta|}{\omega_r}, \quad (\text{III.14})$$

où Δ est négatif. La condition nécessaire pour que ce traitement ait un sens est que la distribution \mathcal{P} soit normalisable, c'est-à-dire :

$$\mathcal{P} \text{ normalisable : } |\Delta| > \frac{1}{2} \omega_r. \quad (\text{III.15})$$

Si on veut que $\int v^2 \mathcal{P}(v) dv$ converge pour que l'énergie cinétique moyenne soit finie, la contrainte est plus forte :

$$\text{Energie cinétique définie : } |\Delta| > \frac{3}{2} \omega_r. \quad (\text{III.16})$$

Le cas particulier $\Delta = -\omega_r$ étudié plus haut correspond à une distribution en $1/v^2$, donc normalisable mais d'énergie cinétique moyenne infinie.

Avant de discuter la valeur précise de la largeur de la distribution en vitesse et de l'énergie cinétique moyenne, la leçon que nous pouvons tirer est que lorsque la largeur de raie Γ devient très faible, on ne peut pas espérer que la limite Doppler en raie large $k_B T = \hbar \Gamma / 2$, obtenue pour $\Delta = -\Gamma / 2$, reste valable. Le désaccord ne doit pas être choisi plus petit que la fréquence de recul, à un facteur multiplicatif près de l'ordre de l'unité. Les classes de vitesse $v = 0$, $v = \pm v_r$ ont alors des populations comparables d'après (III.8) et l'énergie cinétique obtenue est donc au moins d'ordre E_r .

1-3 Prise en compte du recul « spontané »

Le modèle 1D développé précédemment, dans lequel on négligeait l'impulsion emportée par les photons de fluorescence, nous a permis de résoudre très simplement l'équation d'évolution (III.5). Toutefois ce modèle pêche par optimisme, dans la mesure où il néglige une source de chauffage importante. Nous nous proposons maintenant d'aller au delà de cette approximation et de prendre en compte les reculs aléatoires dus aux phénomènes d'émission spontanée. Nous allons le faire d'abord dans un modèle 1D, puis généraliser nos résultats à 3D.

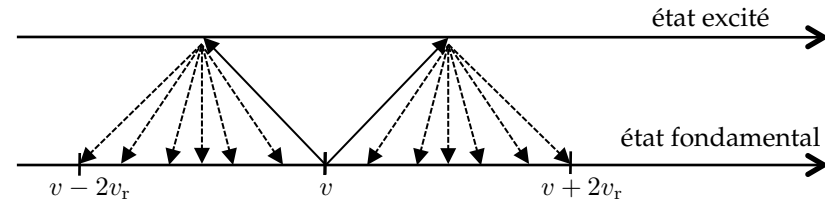


FIGURE III.3. Modèle continu pour le refroidissement Doppler en raie étroite. L'absorption d'un photon (trait plein) change la vitesse atomique de $\pm v_r$. Un photon émis spontanément (trait pointillé) a une composante d'impulsion non nulle le long de l'axe du refroidissement, avec une densité de probabilité donnée par (III.17).

Considérons pour commencer un refroidissement en raie étroite le long de l'axe z . La projection sur cet axe de l'impulsion $\hbar \mathbf{k}$ d'un photon émis spontanément est une variable continue comprise entre $-\hbar k$ et $\hbar k$ (figure III.3). Pour prendre en compte cette variable, nous modifions les termes d'alimentation de la population de la classe de vitesse v [seconde ligne de (III.5)] de la manière suivante :

$$\begin{aligned} s_+(v - v_r) \mathcal{P}(v - v_r) &\longrightarrow \int_{-v_r}^{v_r} \mathcal{N}(v') s_+(v - v_r + v') \mathcal{P}(v - v_r + v') dv' \\ s_-(v + v_r) \mathcal{P}(v + v_r) &\longrightarrow \int_{-v_r}^{v_r} \mathcal{N}(v') s_-(v + v_r + v') \mathcal{P}(v + v_r + v') dv' \end{aligned}$$

où $\mathcal{N}(v')$ est la densité de probabilité pour qu'un photon émis spontanément ait une impulsion $\hbar k_z = M v'$ selon l'axe z . Cette quantité se calcule à partir des formules classiques d'électromagnétisme donnant le rayonnement d'un dipôle oscillant. On trouve en prenant (par exemple) le cas d'une polarisation circulaire le long de l'axe z :

$$\mathcal{N}(v') = \frac{3}{8v_r} \left(1 + \frac{v'^2}{v_r^2} \right). \quad (\text{III.17})$$

Nous montrons sur la figure III.4 le résultat de l'évolution trouvée pour l'évolution de la distribution $\mathcal{P}(v)$, calculée pour $\omega_r = \Gamma$. Quelques faits marquants se dégagent de cette évolution :

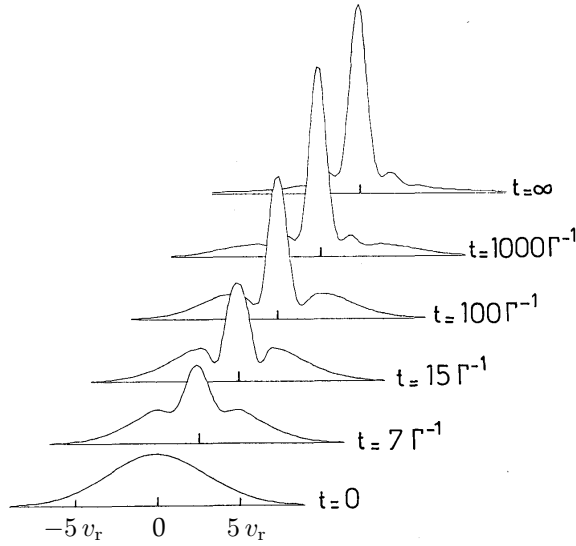


FIGURE III.4. Évolution de la distribution en vitesse à une dimension pour le refroidissement Doppler sur une raie étroite $\Gamma = \omega_r$ [figure extraite de Castin et al. (1989)]. Le désaccord vaut $\Delta = -1.5\omega_r$ et la fréquence de Rabi $\kappa = \omega_r$. La transition atomique est de type $J_g = 0 \leftrightarrow J_e = 1$ et les deux faisceaux se propageant selon $\pm z$ sont polarisés σ_{\pm} .

- Comme prévue, la distribution finale obtenue a une largeur de l'ordre de la vitesse de recul.
- Cette distribution n'est pas une fonction monotone de v pour $v > 0$. Des trous apparaissent pour les vitesses auxquelles la résonance se produit avec une des deux ondes laser et pour les multiples de ces vitesses.
- Un examen détaillé de la solution aux temps longs montre que les ailes de cette distribution varient comme une loi de puissance, $\mathcal{P}(v) \propto |v|^{-\alpha}$, comme dans le modèle discret développé précédemment.

1-4 État stationnaire et lois d'échelle

Dans le cadre du modèle continu du paragraphe précédent, nous pouvons chercher numériquement le désaccord qui minimise l'énergie cinétique moyenne

$$E_c = \frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle \equiv \frac{1}{2} k_B T_{\text{eff}} \quad (\text{III.18})$$

pour chaque valeur du rapport Γ/ω_r , et étudier ensuite comment cette température effective minimale $T_{\text{eff, min}}$ varie avec Γ/ω_r . Notons que la définition d'une « température » dans cette situation est discutable, puisque nous avons vu que les distributions stationnaires ne sont pas gaussiennes, mais varient en loi de puissance pour les grandes vitesses.

Le résultat pour $T_{\text{eff, min}}$ fonction de Γ/ω_r est représenté sur la figure III.5, tirée de Castin et al. (1989). Pour une raie étroite, cette température minimale est obtenue pour $\Delta \approx -3.4\omega_r$ et conduit à $E_c \approx 0.53 E_r$ ou encore

$$\text{raie étroite 1D : } k_B T_{\text{eff, min}} \approx 1.06 E_r, \quad \sqrt{\langle v^2 \rangle} \approx 0.73 v_r. \quad (\text{III.19})$$

Pour une raie large, on retrouve la limite Doppler trouvée au chapitre précédent ; elle s'écrit dans le modèle unidimensionnel étudié ici :

$$\text{raie large 1D : } k_B T_{\text{eff, min}} = \frac{7}{10} \frac{\hbar \Gamma}{2}. \quad (\text{III.20})$$

Le coefficient 7/10 trouvé dans ce modèle 1D par rapport au résultat 3D s'explique simplement : le chauffage lié au recul des photons émis spontanément correspond à $\langle p^2 \rangle = \frac{2}{5} \hbar^2 k^2$. Alors qu'à 3D, le coefficient de diffusion en impulsion dû aux reculs lors des émissions spontanées est égal à celui provenant du caractère aléatoire de la direction des photons absorbés, sa contribution est réduite ici par un facteur 2/5, d'où une réduction globale de la diffusion par le facteur

$$\frac{1 + \frac{2}{5}}{1 + 1} = \frac{7}{10}. \quad (\text{III.21})$$

Pour finir, nous pouvons extrapoler ces résultats à trois dimensions, en multipliant les résultats 1D par le facteur 10/7. Nous obtenons alors une estimation de la température minimale attendue :

$$\text{raie étroite 3D : } k_B T_{\text{eff, min}} \approx 1.5 E_r, \quad \sqrt{\langle v^2 \rangle} \approx 0.9 v_r. \quad (\text{III.22})$$

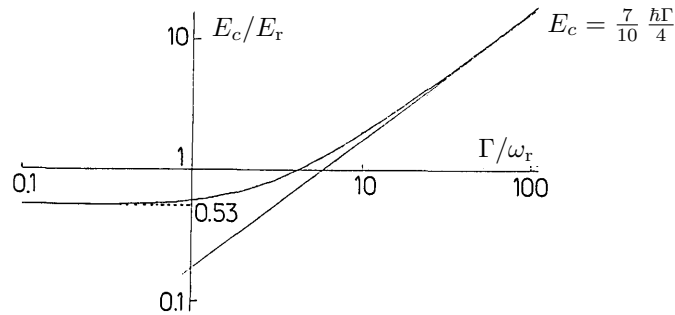


FIGURE III.5. Energie cinétique minimale en fonction du rapport Γ/ω_r [figure extraite de Castin et al. (1989)].

En conclusion, la température minimale que l'on obtient par refroidissement Doppler sur raie étroite est limitée par le recul dû à un seul photon. Le régime conduisant à cette température minimale est très différent de celui trouvé pour une raie large : le désaccord optimal est de l'ordre de $-3\omega_r$, le taux d'excitation total d'un atome

$$s_{\text{tot}}(v) = s_+(v) + s_-(v) \quad (\text{III.23})$$

est faible au voisinage de $v = 0$ et ne prend des valeurs appréciables que pour $v \approx \pm 2v_r$. Il se dégage ainsi l'idée que les atomes sont accumulés dans une région « sombre » de l'espace des vitesses (figure III.6) : quand l'atome est dans cette région sombre, il reste longtemps à la même vitesse car le taux de diffusion de photons $\Gamma s_{\text{tot}}/2$ est très faible. Quand une diffusion de photon se produit, l'atome peut se rapprocher d'une des deux zones « brillantes » situées à $v \approx \pm 2v_r$. La diffusion de photons se fait alors avec un taux élevé, et l'absorption a lieu avec une quasi-certitude dans l'onde se propageant en sens contraire de l'atome : par exemple, si $v \approx +2v_r$, alors $s_-(v) \gg s_+(v)$. Ce dernier point est essentiel pour garantir que l'atome ne franchisse pratiquement jamais le mur brillant : si cela se produit et que l'atome acquiert une vitesse de 3 ou 4 v_r , alors il lui faudra un temps considérable pour revenir au voisinage de la vitesse nulle. C'est la raison pour laquelle il faut choisir un désaccord Δ notablement plus grand que ω_r . Nous verrons dans le paragraphe qui suit comment l'utilisation de faisceaux polychromatiques permet d'assouplir cette contrainte.

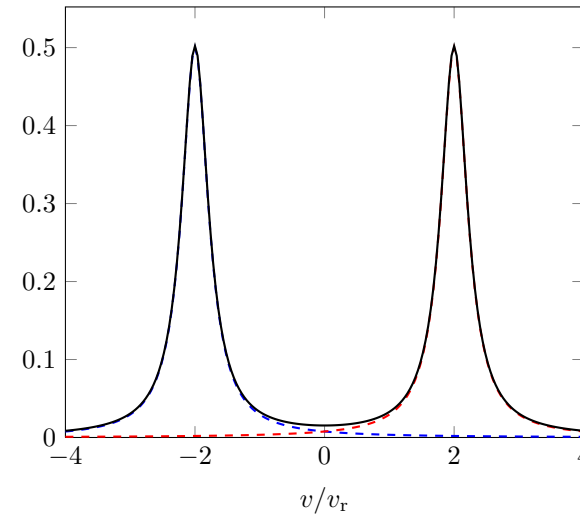


FIGURE III.6. Variation de $s_+(v)$ (tirets bleus), $s_-(v)$ (tirets rouges) et $s_{\text{tot}}(v)$ (trait continu noir) pour une raie étroite, $\Gamma = \omega_r$, $\Delta = -3\omega_r$ et $\kappa = \omega_r/2$.

2 Comment structurer la raie de résonance

D'après ce qui précède, le refroidissement en raie étroite fournit un moyen de refroidir les atomes à une température de l'ordre du recul associé à un seul photon. Mais l'inconvénient associé à une raie étroite apparaît clairement sur la figure III.6 : pour qu'un atome de vitesse v quelconque soit refroidi, il faut que cette vitesse soit proche de la classe de vitesse résonnante avec les lasers, $kv \sim \Delta$ à Γ près. Comme Γ est supposé petit, de l'ordre de la fréquence de recul ω_r , seule une classe de vitesse de faible largeur (de l'ordre de v_r) va être concernée. Comment peut-on remédier à ce manque d'efficacité ?

Une première solution est d'élargir la raie par saturation. Nous avons vu que lorsque la fréquence de Rabi qui caractérise le couplage atome-laser devient plus grande que la largeur naturelle Γ , la largeur effective de la résonance est augmentée :

$$\Gamma \longrightarrow \Gamma_{\text{eff}} = \sqrt{\Gamma^2 + 2|\kappa|^2}. \quad (\text{III.24})$$

On peut donc choisir $|\kappa|$ grand devant la pulsation de recul ω_r , pour assurer que la plage de capture en vitesse de la mélasse optique soit grande devant v_r . Mais on perd alors le bénéfice d'une raie étroite : tout se passe comme si on utilisait une raie de résonance de largeur $\Gamma_{\text{eff}} \gg \omega_r$, et la température que l'on va atteindre sera donnée par $k_B T \sim \hbar \Gamma_{\text{eff}}$, ce qui est grand devant l'énergie de recul.

2-1 Élargissement par modulation de phase

Il est nettement plus judicieux d'élargir la raie en prenant une excitation polychromatique, qui peut être obtenue en introduisant des bandes latérales grâce à une modulation de phase de l'onde lumineuse :

$$e^{i\omega_L t} \rightarrow e^{i[\omega_L t + \phi(t)]}. \quad (\text{III.25})$$

Considérons par exemple une modulation de phase $\phi(t)$ de période T pour laquelle la phase varie localement quadratiquement avec le temps. On se donne $T_0 < T$ et on prend pour la période $-T_0/2 < t < T - T_0/2$:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \alpha(t^2 - T_0^2/4) \quad \text{si } |t| < T_0/2, \\ \phi(t) &= -\beta(t - T_0/2)(t - T + T_0/2) \quad \text{si } T_0/2 < t < T - T_0/2, \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

que l'on reproduit ensuite périodiquement. On impose $\alpha T_0 = \beta(T - T_0)$ pour assurer la continuité et la dérivabilité de $\phi(t)$ en T_0 . La fréquence de l'onde, égale à la dérivée de la phase, a alors une variation en « dent de scie » et couvre un intervalle de fréquence entre $\omega_L - \Omega/2$ et $\omega_L + \Omega/2$, avec $\Omega = 2\alpha T_0$. Une analyse de Fourier montre que le spectre de la lumière est composé d'harmoniques séparées par la pulsation $2\pi/T$, avec des poids comparables si la dent de scie est suffisamment asymétrique (T_0 proche de T). Un exemple est représenté sur la figure III.7. Les harmoniques situées en dehors de la plage $[\omega_L - \Omega/2, \omega_L + \Omega/2]$ ont des poids négligeables devant celles situées à l'intérieur de cette plage.

Pour obtenir une excitation significative et uniforme de l'atome sur une large plage de vitesses, il suffit alors de choisir l'écart entre harmoniques $2\pi/T$ de l'ordre de la largeur naturelle Γ . Un exemple de profil obtenu en sommant indépendamment les contributions des différentes composantes de Fourier est représenté sur la figure III.8 dans le cas d'une raie très étroite ($\Gamma = 0.2\omega_r$).

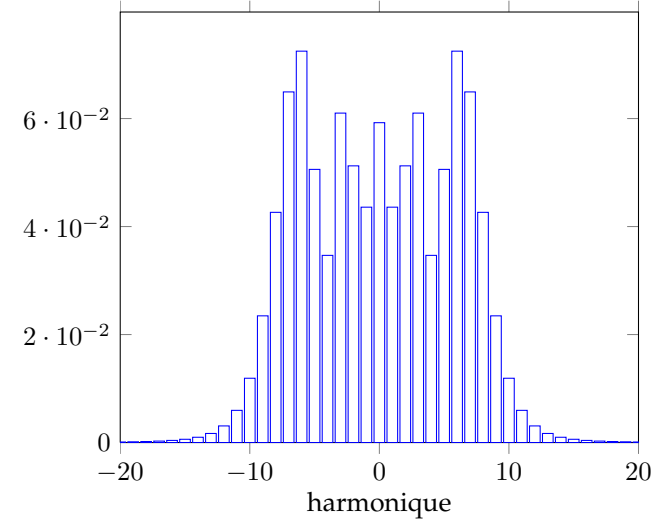


FIGURE III.7. Exemple de spectre obtenu par modulation quadratique de la phase (III.26) avec $T_0 = 0.99 T$ et $\alpha = 20\pi/(TT_0)$ (soit 20 harmoniques significativement peuplées).

Dans la suite, nous allons modéliser ce profil par la forme rectangulaire représentée sur la figure III.9. Nous discutons ici le cas 1D, mais cette modélisation s'étendra ensuite sans difficulté à trois dimensions. Séparons l'espace des vitesses en trois zones :

- La zone centrale A correspond à des vitesses faibles $|v| < v_0$. Ces atomes sont « presque dans le noir », c'est-à-dire qu'ils ont une probabilité faible d'absorber un photon. Nous notons γ_a la probabilité par unité de temps pour un processus d'absorption, qui se fait selon un sens aléatoire.
- La zone intermédiaire B correspondant à $v_0 < |v| < v_1$. Dans cette zone, les atomes absorbent des photons avec un taux γ_b élevé. Cette absorption est directive : elle se fait dans le faisceau lumineux qui se propage en sens contraire de l'atome et elle tend donc à ramener l'atome vers la vitesse nulle.
- La zone C correspondant à des atomes de grande vitesse $|v| > v_1$. Ces atomes ont une probabilité négligeable d'absorber un photon. La

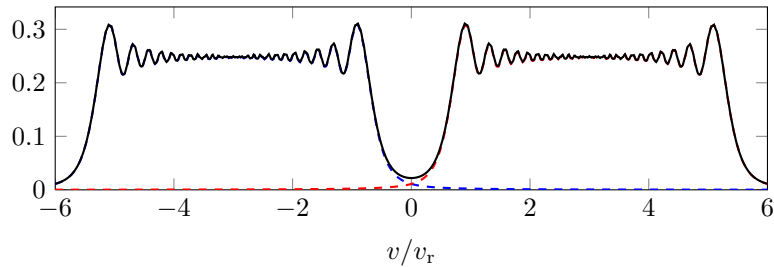


FIGURE III.8. Paramètre de saturation $s_+(v)$ (tirets bleus), $s_-(v)$ (tirets rouges) et $s_{\text{tot}}(v)$ (trait continu noir) en fonction de la vitesse v . Paramètres pour cette figure : $\Gamma = 0.2\omega_r$, $\kappa = 0.4\omega_r$, Δ moyen = $-5\omega_r$, 100 harmoniques significativement peuplées avec un écart entre harmoniques de $0.1\omega_r$.

vitesse v_1 peut être choisie en principe arbitrairement grande devant la vitesse de recul et ces classes de vitesse $|v| > v_1$ joueront un rôle négligeable dans la suite.

2-2 Lois d'échelle pour une raie élargie

L'élargissement de la raie d'excitation par modulation de phase peut avoir deux vertus. La première est d'accélérer la décroissance de la distribution de vitesse $\mathcal{P}(v)$ aux grandes vitesses. Nous avons vu que pour une excitation monochromatique, cette décroissance se faisait avec une loi de puissance $|v|^{-\alpha}$, avec $\alpha = 2|\Delta|/\omega_r$. Pour la raie élargie que nous considérons ici, le désaccord effectif correspond au centre du profil d'excitation rectangulaire et peut donc être grand devant ω_r . L'exposant de la loi de puissance est donc grand devant 1, ce qui assure la convergence de tous les moments pertinents de cette distribution en vitesse.

La seconde vertu est d'abaisser l'énergie moyenne des atomes refroidis, au moins dans le cas où $\Gamma \ll \omega_r$. Pour éclaircir ce point, nous allons faire un raisonnement statistique simple, basé sur la modélisation du taux d'absorption représentée sur la figure III.9. Notons P_a et P_b les populations respectives des zones A et B et supposons que la vitesse frontière v_0 est notablement plus petite que la vitesse de recul v_r ; en régime stationnaire, il y a équilibre entre les flux entrant et sortant de chaque zone :

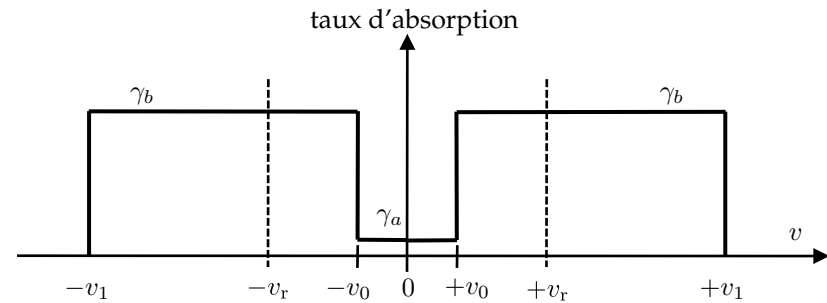


FIGURE III.9. Modélisation du taux d'absorption : une zone centrale avec un faible taux γ_a et une zone périphérique avec un taux nettement plus fort γ_b . La largeur de la zone centrale v_0 est plus petite que la vitesse de recul.

- Le flux sortant de la zone A est simplement donné par

$$\Phi_{A \rightarrow B} \approx P_a \gamma_a. \quad (\text{III.27})$$

En effet, puisque $v_0 \ll v_r$, un atome situé initialement dans la zone A et qui subit une diffusion de photon quitte en général cette zone en raison du recul aléatoire lié à l'émission spontanée.

- Le flux entrant dans la zone A correspond à des atomes de la zone B qui ont subi un processus absorption – émission spontanée, et qui par chance sont arrivés dans une classe de vitesse $|v| < v_0$. Comme les atomes de la zone B ont une vitesse de l'ordre de la vitesse de recul v_r , le flux entrant dans la zone A s'écrit :

$$\Phi_{B \rightarrow A} \approx P_b \gamma_b \left(\frac{v_0}{v_r} \right)^D \quad (\text{III.28})$$

où D est la dimension de l'espace des vitesses que l'on souhaite refroidir. Notons tout de suite que le facteur $(v_0/v_r)^D$ rend le refroidissement tri-dimensionnel beaucoup plus délicat que son équivalent 1D, à v_0 et v_r donnés ; ce point sera confirmé dans la suite.

L'égalité des deux flux correspondant au régime stationnaire entraîne donc :

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{\gamma_b}{\gamma_a} \left(\frac{v_0}{v_r} \right)^D. \quad (\text{III.29})$$

Il reste à évaluer le rapport γ_b/γ_a . Dans l'hypothèse d'une raie de résonance élargie par modulation de phase comme en figure III.8, le taux résiduel d'absorption autour de la vitesse nulle correspond à la somme des ailes des différentes lorentziennes correspondant à chacune des harmoniques de la raie élargie. On trouve donc à un coefficient numérique près :

$$\gamma_a \approx \gamma_b \frac{\Gamma}{|\Delta_{\min}|} \quad \text{où l'on suppose } \Gamma \ll |\Delta_{\min}|, \quad (\text{III.30})$$

où Δ_{\min} est la valeur du désaccord pour l'harmonique la plus proche de résonance. Cette valeur est directement liée à la vitesse frontière v_0 : $kv_0 = |\Delta_{\min}|$ de sorte que l'on arrive à

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{v_0^{D+1}}{v_r^D \delta v_{\text{res}}} \quad \text{avec } \delta v_{\text{res}} = \Gamma/k \ll v_r. \quad (\text{III.31})$$

La nature de l'optimisation possible est alors claire : on cherche à avoir au moins une fraction des atomes (ceux de la zone A) les plus froids possibles, donc une vitesse frontière v_0 aussi basse que possible. Mais on veut en même temps que cette fraction soit significative, donc que P_a ne soit pas trop petit comparé à P_b .

Imposons pour fixer les idées $P_a = P_b$. Ceci fixe la valeur de v_0 :

$$\frac{v_0}{v_r} = \left(\frac{\Gamma}{\omega_r} \right)^{\frac{1}{D+1}}. \quad (\text{III.32})$$

À une dimension, le gain est significatif comparé au refroidissement monochromatique si $\Gamma \ll \omega_r$. On a en effet $v_0 = \sqrt{v_r \delta v_{\text{res}}} \ll v_r$ (Wallis & Ertmer 1989). À trois dimensions en revanche, le gain n'est que marginal par rapport à v_r , puisque le rapport Γ/ω_r n'intervient qu'à la puissance 1/4. L'intérêt principal d'élargir la raie est dans ce cas d'augmenter la zone de capture de la mélasse optique (c'est le premier argument que nous avons mentionné).

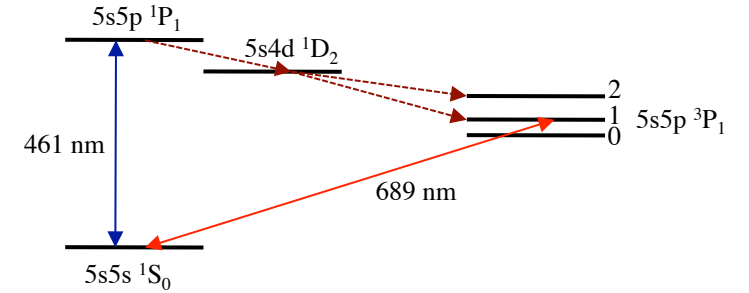


FIGURE III.10. Niveaux d'énergie pertinents pour l'atome de strontium. L'état excité pour la transition de raie large $5s5p \ ^1P_1$ peut se désexciter vers le niveau $5s4d \ ^1D_2$, ce qui peut nécessiter la mise en place d'un schéma de repompage.

3 Expériences de refroidissement en raie étroite

3-1 Mesures de température

Les premières expériences de refroidissement en raie étroite ont été menées sur l'atome de strontium (isotope 88) dans le groupe de H. Katori au Japon (Katori et al. 1999; Ido et al. 2000).

L'atome de strontium possède deux raies de résonance importantes pour la suite (figure III.10) ; la première, une raie large, correspond à la transition $5s^2 \ ^1S_0 \leftrightarrow 5s5p \ ^1P_1$, avec la longueur d'onde $\lambda_1 = 461$ nm et la largeur $\Gamma_1/2\pi = 32$ MHz. Cette raie est utilisée pour pré-refroidir les atomes dans un piège magnéto-optique. La seconde raie, étroite, correspond à la transition d'intercombinaison $5s^2 \ ^1S_0 \leftrightarrow 5s5p \ ^3P_1$, $\lambda_2 = 689$ nm et $\Gamma_2/2\pi = 7.6$ kHz. Katori et al. (1999) ont montré qu'ils pouvaient transférer les atomes pré-refroidis sur la raie large dans un piège magnéto-optique pour la raie étroite, en élargissant cette raie par modulation de phase. Ils ont ensuite éteint cette modulation de phase pour obtenir un échantillon refroidi en lumière monochromatique. En diminuant autant que possible la puissance du laser (jusqu'au seuil pour lequel la force de pression de radiation ne compense plus la gravité), ils ont pu atteindre une température de 400 nK, soit $1.7 E_r/k_B$. La vitesse quadratique moyenne correspondante

est

$$v_0 = \sqrt{\frac{k_B T}{M}} = 6.1 \text{ mm/s} = 0.9 v_r. \quad (\text{III.33})$$

Katori et al. (1999) ont également mesuré la densité dans l'espace des phases du nuage refroidi, et montré qu'elle pouvait atteindre 10^{-2} , dépassant ainsi par plusieurs ordres de grandeur celle mesurée dans un piège magnéto-optique en raie large ($\sim 10^{-6}$). Ils attribuent la limite observée pour cette densité dans l'espace des phases au chauffage lié à la diffusion multiple de photons, sur lequel nous allons revenir un peu plus loin. Pour la géométrie de leur échantillon, ils observent une augmentation de la température avec la densité spatiale :

$$\frac{dT}{dn} = 400 \text{ nK}/(10^{12} \text{ cm}^{-3}) \quad (\text{III.34})$$

sur la plage $n = 0.1\text{--}0.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. La densité dans l'espace des phases variant comme $n/T^{3/2}$, cette loi favorise le régime « basse densité – basse température ».

Ido et al. (2000) ont ensuite amélioré ce résultat en appliquant le refroidissement en raie étroite à des atomes de strontium confinés dans un piège dipolaire. En réduisant la puissance du piège dipolaire, ils ont atteint une densité dans l'espace de phases de 0.1 (à un facteur 20 de la condensation). Notons que l'équilibre obtenu correspondait probablement à une combinaison de refroidissement lumineux et de refroidissement par évaporation.

Une étude détaillée de la température obtenue dans un refroidissement en raie étroite a également été faite par le groupe de Nice pour ^{88}Sr (Chalony et al. 2011). Cette étude a porté à la fois sur des atomes confinés dans un piège dipolaire et sur des atomes libres. Pour des atomes piégés, la variation de la température avec le désaccord est en bon accord avec les modèles théoriques présentés plus haut (Castin et al. 1989). La température minimale mesurée est de $\sim 400 \text{ nK}$ comme pour Katori et al. (1999), et la température minimale déduite d'une extrapolation à très faible nombre d'atomes est de $\sim 200 \text{ nK}$ (figure III.11). Par ailleurs, des effets d'augmentation de température en fonction du nombre d'atomes ont été clairement observés là aussi : la température est multipliée par deux pour un nombre d'atomes correspondant à une épaisseur optique du nuage de l'ordre de

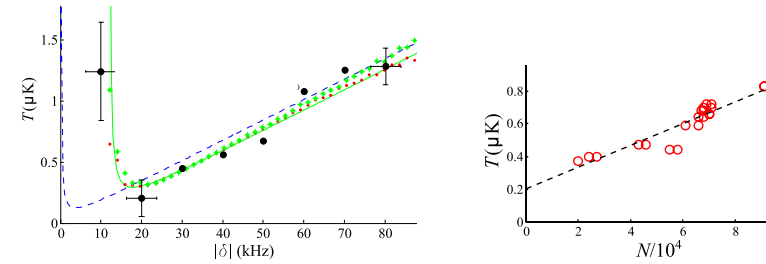


FIGURE III.11. Gauche : Évolution de la température en fonction du désaccord pour un nuage d'atomes de ^{88}Sr confinés dans un piège dipolaire. Les températures indiquées résultent de l'extrapolation à faible nombre d'atomes des températures effectivement mesurées. Droite : influence du nombre d'atomes sur la température [figure extraite de Chalony et al. (2011)].

l'unité (dans sa direction transverse). Nous allons revenir sur ce résultat dans le paragraphe suivant. Pour des atomes libres, le profil de vitesse mesuré est en bon accord avec celui montré en figure III.4, avec des trous correspondant aux classes de vitesse résonantes et des ailes notables, non gaussiennes.

3-2 Le rôle des effets collectifs

Dans la confrontation théorie - expérience que nous venons de décrire, les effets collectifs jouent un rôle important. Les modélisations théoriques que nous avons présentées auparavant portaient sur le cas d'un atome unique couplé au rayonnement. Dans les expériences, on refroidit un grand nombre de particules (de 10^4 à 10^7) et il est important de préciser à quelle condition on peut espérer que les prédictions « à un atome » soient valables.

Le problème le plus important, déjà rencontré pour le piège magnéto-optique en raie large, est la diffusion multiple des photons. Dans le cas du piège magnéto-optique, nous avons indiqué que cette diffusion multiple était à l'origine d'une force de répulsion entre les atomes, qui augmentait la taille à l'équilibre du nuage piégé. La diffusion multiple crée également un chauffage, à cause des reculs aléatoires qu'elle entraîne. Dans ce qui suit,

nous allons estimer les paramètres du nuage d'atomes à partir desquels ces effets deviennent significatifs.

Pour être refroidis à la température désirée, les atomes sont en permanence éclairés par les faisceaux lumineux de refroidissement et chaque atome diffuse les photons incidents avec un taux γ . Les photons émis ont à peu près la même longueur d'onde que les photons incidents ; ils peuvent donc être également diffusés, avec une section efficace proche de la section efficace de diffusion résonante

$$\sigma = \frac{3}{2\pi} \lambda^2. \quad (\text{III.35})$$

Remarquons la très grande valeur de cette section efficace de résonance (le micron carré), bien supérieure à la dimension géométrique d'un atome (l'angström carré).

Le libre parcours moyen d'un photon dans l'assemblée atomique est donné par $1/(n\sigma)$. La réabsorption devient significative quand ce libre parcours moyen est de l'ordre de la taille L du nuage, soit en utilisant $\sigma \sim \lambda^2$:

$$\text{réabsorption significative si : } n\lambda^2 L \gtrsim 1. \quad (\text{III.36})$$

On peut retrouver ce critère en cherchant quand le taux de diffusion γ' dû à la réabsorption devient comparable au taux de diffusion γ des photons laser incidents : il y a $N\gamma$ photons laser diffusés par seconde, et la probabilité qu'un atome donné réabsorbe un photon diffusé par un autre atome à une distance moyenne $\sim L/2$ est $\sim \sigma/L^2$. Le taux γ' vaut donc

$$\gamma' \sim \frac{\sigma}{L^2} N\gamma \quad (\text{III.37})$$

de sorte que $\gamma' \sim \gamma$ quand $n\sigma L \sim 1$. Remarquons par ailleurs que quand ce critère est vérifié, l'absorption des faisceaux laser incidents devient significative : le milieu atomique est optiquement épais.

Comme nous l'avons écrit plus haut, dès que γ' devient de l'ordre de γ , la dynamique du refroidissement est modifiée : les reculs aléatoires qui accompagnent les phénomènes de diffusion multiple engendrent un chauffage supplémentaire des atomes piégés et la température d'équilibre augmente. Nous discuterons dans un chapitre ultérieur certains « remèdes » qui ont été envisagés pour lutter contre ce chauffage lié à la diffusion

multiple. Dans ce chapitre, nous nous contenterons d'en évoquer un, mis en œuvre dans les expériences présentées dans ce chapitre : il s'agit de prendre un nuage de forte anisotropie (« cigare » ou « crêpe »), de sorte qu'au moins une des dimensions linéaires du nuage est petite, de l'ordre de quelques longueurs d'onde optique seulement. Les photons peuvent alors s'échapper facilement dans cette direction, bien que le piège puisse contenir un grand nombre d'atomes.

Remarque. Les effets collectifs qui se produisent lors de l'interaction d'un nuage atomique avec une lumière résonnante ne se limitent pas aux phénomènes de diffusion multiple. Les densités atomiques effectivement atteintes correspondent à une distance moyenne entre atomes de l'ordre de la longueur d'onde optique. Quand un atome excité et un atome dans l'état fondamental sont séparés par une distance aussi faible, il faut prendre en compte l'interaction dipole-dipole entre atomes (Julienne et al. 1992). Celle-ci donne naissance à de multiples courbes de potentiel, attractives ou répulsives, et l'accélération correspondante peut également contribuer de manière très significative au chauffage du gaz, voire à une perte d'atomes par l'intermédiaire de collisions inélastiques assistées par la lumière [voir par exemple Fuhrmanek et al. (2012) et refs. in].

3-3 Piège magnéto-optique en raie étroite

Le fonctionnement d'un piège magnéto-optique en raie étroite est notablement différent du traditionnel piège en raie large. Ce fonctionnement a été étudié en détail par le groupe de Boulder (Loftus et al. 2004) et nous résumons ici leur analyse. Considérons une transition atomique $J_g = 0 \leftrightarrow J_e = 1$, un gradient de champ magnétique b' le long de l'axe x , éclairons les atomes par une paire d'ondes monochromatiques contre-propageantes (figure III.12), et supposons que les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\omega_r \lesssim \Gamma \sqrt{1 + \frac{2|\kappa|^2}{\Gamma^2}} \ll |\Delta|. \quad (\text{III.38})$$

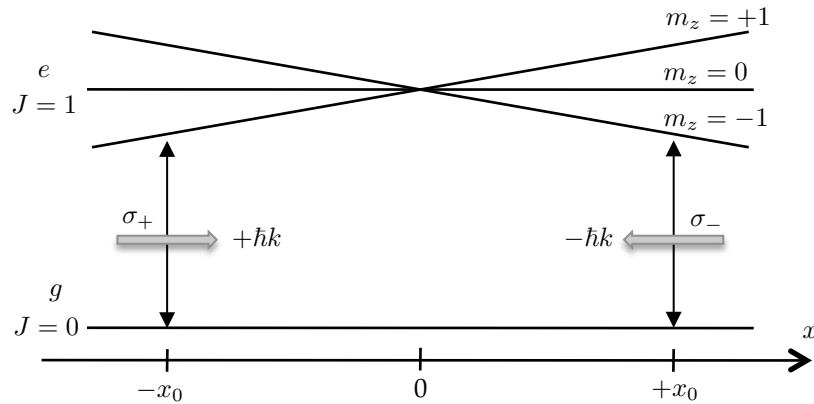


FIGURE III.12. Schéma de base du piège magnéto-optique. On s'intéresse ici au cas où la force de pression de radiation ne prend des valeurs significatives qu'au voisinage de $\pm x_0$.

La première inégalité permet d'utiliser un calcul semi-classique pour la force agissant sur un atome au repos :

$$F = F_+ + F_- \quad \text{avec} \quad F_{\pm}(z) = \pm \hbar k \Gamma \frac{|\kappa|^2}{4(\Delta \mp \mu b'x)^2 + \Gamma^2 + 2|\kappa|^2} \quad (\text{III.39})$$

La seconde indique que la force ne prendra des valeurs significatives que dans deux régions bien localisées de l'axe x : F_{\pm} est non nulle en $x = \mp |\Delta|/\mu b'$. On réalise alors l'équivalent de « murs » pour les atomes, avec un puits de potentiel² presque carré. Selon l'axe vertical, il faut en plus prendre en compte la gravité, qui n'est pas négligeable devant la force de pression de radiation pour une raie étroite : pour l'atome de strontium, la force maximale de pression de radiation $\hbar k \Gamma/2$ ne vaut que 16 fois le poids de l'atome. Le potentiel combiné lumière+gravité a alors une forme de boîte penchée, et les atomes s'accumulent en dessous du point de champ magnétique nul. Les images de la figure III.14, extraites de Loftus et al.

2. La notion de puits de potentiel est à prendre « avec des pincettes » : à une dimension, connaissant une force $F(x)$, on peut toujours définir le potentiel $V(x) = -\int^x F(x') dx'$. À plusieurs dimensions, il n'est pas garanti que la force de pression de radiation du piège magnéto-optique dérive d'un potentiel (il faudrait vérifier que $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ pour les trois composantes i, j de l'espace).

(2004), illustrent bien la dissymétrie du piège dans ce régime.

4 Vers la condensation

Nous venons de voir que les expériences de refroidissement en raie étroite permettent de produire des gaz très froids (en dessous du microkelvin), avec des densités spatiales relativement élevées puisque la distance moyenne entre particules, $n^{1/3}$, n'est que deux à trois fois supérieure à la longueur d'onde thermique

$$\lambda_T = \frac{\hbar \sqrt{2\pi}}{\sqrt{M k_B T}}. \quad (\text{III.40})$$

Ces gaz (composés d'atomes de spin nul, donc de bosons) sont au seuil du régime de dégénérescence quantique et sont de bons candidats pour produire, moyennant une étape supplémentaire « légère », un condensat de Bose-Einstein. Cette étape a été franchie dans l'expérience de Stellmer et al. (2013), qui s'inspirait d'une méthode proposée par Pinkse et al. (1997) et mise au point expérimentalement par Stamper-Kurn et al. (1998).

Le caractère remarquable de l'expérience de Stellmer et al. (2013) est qu'elle ne requiert à aucun moment le recours à une évaporation ou une perte d'atomes. Dans la mesure où cette condensation sans évaporation est fondée de manière subtile sur les propriétés particulières de la statistique de Bose-Einstein, nous allons commencer par rappeler les propriétés principales de cette statistique, en la comparant à la statistique de Maxwell-Boltzmann. Nous ne décrivons pas ici le mécanisme standard de la condensation de Bose-Einstein à la limite thermodynamique [voir par exemple Huang (1987) et Diu et al. (1989)], mais nous développerons un modèle simplifié de la méthode de Stamper-Kurn et al. (1998) et Stellmer et al. (2013). Nous verrons comment une accumulation macroscopique de particules peut se produire en changeant la forme du potentiel de confinement, puis nous présenterons les principales caractéristiques de l'expérience de Stellmer et al. (2013).

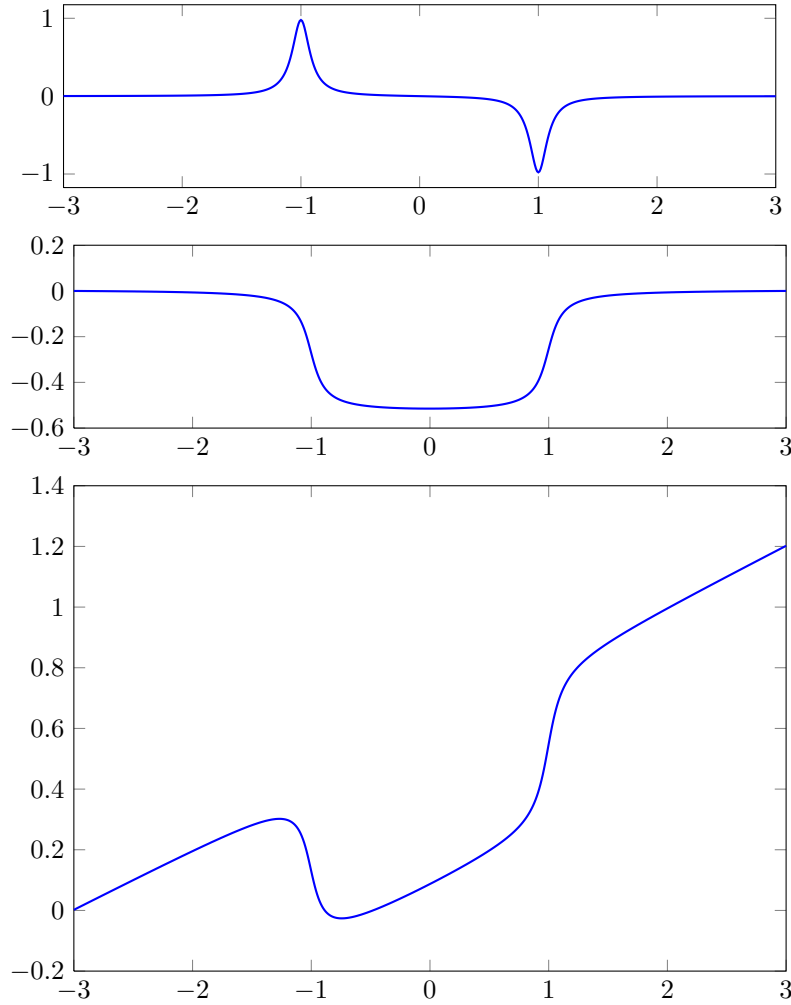


FIGURE III.13. Piège magnéto-optique avec une raie étroite. Haut : force de pression de radiation (en unité de $F_{\max} = \hbar k \Gamma / 2$) pour une excitation très désaccordée : $\Delta = -40 \Gamma$, $\kappa = 5 \Gamma$, en fonction de la position mesurée en unité de $x_0 = |\Delta| / \mu b'$. Milieu : potentiel correspondant à cette force de pression de radiation sur un axe horizontal. Bas : potentiel total lumière+gravité sur l'axe vertical, calculé pour $Mg = 0.1 F_{\max}$.

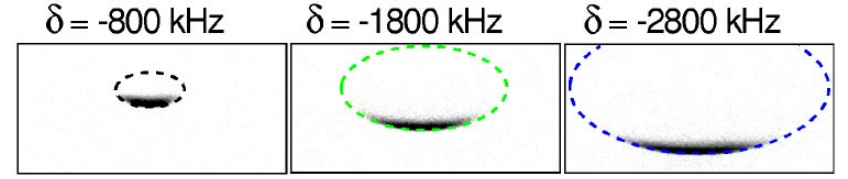


FIGURE III.14. Images in situ d'un piège magnéto-optique de strontium fonctionnant sur la raie étroite. Les lignes pointillées correspondent aux contours le long desquels la force de pression de radiation est maximale ($|\kappa| \approx 11 \Gamma \approx 2\pi \times 83 \text{ kHz}$, $\Delta = 2\pi \times \delta$). Figure extraite de Loftus et al. (2004).

4-1 La statistique de Maxwell–Boltzmann

On va s'intéresser dans ce qui suit à un gaz de particules sans interaction, confiné dans une boîte cubique de côté L (figure III.15). Nous prendrons des conditions aux limites périodiques, de sorte que les états propres de l'hamiltonien à une particule sont les ondes planes

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}/\hbar}}{L^{3/2}} \quad \text{d'énergie } E_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2M}, \quad (\text{III.41})$$

avec la condition de quantification dans la boîte

$$p_j = \frac{2\pi\hbar}{L} n_j, \quad j = x, y, z, \quad n_j \in \mathbb{Z}. \quad (\text{III.42})$$

En thermodynamique, l'état du gaz dans la boîte de volume $V = L^3$ est déterminé par deux variables thermodynamiques indépendantes. Connaissant ces deux variables, on en déduit alors les autres quantités thermodynamiques comme la pression ($P = Nk_{\text{B}}T/V$), l'énergie interne ($\frac{3}{2}k_{\text{B}}T$), l'entropie, etc. Dans ce qui suit, nous prendrons comme couple de variables la température T et le potentiel chimique μ , bien adaptés au calcul de l'occupation des états à une particule.

Dans la statistique de Maxwell–Boltzmann, le nombre moyen de particules occupant un état d'impulsion \mathbf{p} s'écrit

$$n^{(\text{Boltz.})}(\mathbf{p}) = e^{(\mu - E_{\mathbf{p}})/k_{\text{B}}T}. \quad (\text{III.43})$$

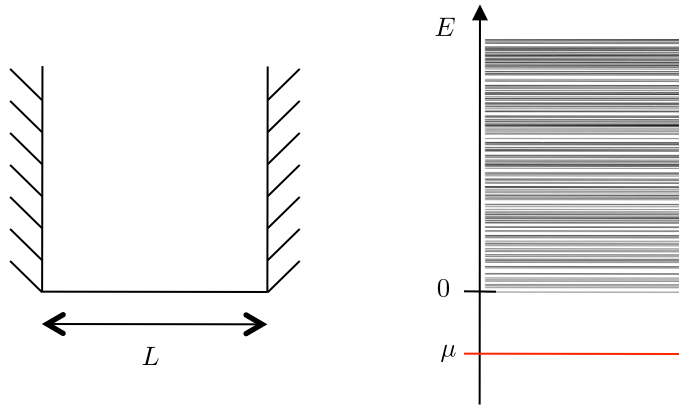


FIGURE III.15. À gauche, puits de potentiel cubique de côté L . À droite, niveaux d'énergie à une particule $E_p = p^2/2M$, où l'impulsion \mathbf{p} est quantifiée selon (III.42). Le trait rouge représente la position du potentiel chimique μ pour le gaz parfait contenu dans cette boîte. Pour la statistique de Maxwell–Boltzmann, μ peut prendre n'importe quelle valeur, mais seules les valeurs suffisamment négatives sont physiquement pertinentes car ce sont elles qui correspondent à des probabilités d'occupation $n(\mathbf{p}) \ll 1$ pour tous les \mathbf{p} . Pour la statistique de Bose–Einstein, les seules valeurs mathématiquement acceptables de μ sont négatives. La condensation de Bose–Einstein (accumulation macroscopique d'atomes dans l'état $\mathbf{p} = 0$) se produit quand μ est suffisamment proche de 0.

Le nombre total de particules N s'obtient en sommant la contribution de tous les états, et en remplaçant cette somme discrète par une intégrale dans la limite d'une grande boîte :

$$N = \sum_{\mathbf{p}} n^{(\text{Boltz.})}(\mathbf{p}) = \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 \int e^{(\mu - E_p)/k_B T} d^3p, \quad (\text{III.44})$$

ce qui donne après calcul de l'intégrale

$$N = Z \frac{L^3}{\lambda_T^3} \quad (\text{III.45})$$

où l'on a introduit la fugacité du gaz :

$$Z = e^{\mu/k_B T}. \quad (\text{III.46})$$

Dans la statistique de Maxwell–Boltzmann, le potentiel chimique peut prendre une valeur quelconque, positive ou négative. Toutefois, on remarque sur (III.43) que pour $\mu > 0$ (ou plus généralement μ supérieur à l'énergie du niveau fondamental), l'occupation des niveaux d'énergie les plus bas devient plus grande que 1. Dans le cas de particules indiscernables, l'utilisation de la statistique de Maxwell–Boltzmann pour $\mu > 0$ est alors incorrecte, même si elle ne conduit pas à une singularité mathématique : la nature statistique des particules joue en effet un rôle important quand $n(\mathbf{p})$ approche l'unité et il faut se tourner vers la statistique de Bose–Einstein ou celle de Fermi–Dirac selon que l'on a affaire à des bosons (particules de spin entier) ou des fermions (particules de spin demi-entier). Dans ce qui suit, nous allons nous concentrer sur la statistique de Bose–Einstein.

4-2 La statistique de Bose–Einstein

Dans la statistique de Bose–Einstein, l'occupation moyenne d'un état est donnée par

$$n^{(\text{Bose})}(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{(E_p - \mu)/k_B T} - 1}. \quad (\text{III.47})$$

Une remarque peut immédiatement être faite sur cette expression. Pour que la population de chaque état soit définie et positive, la valeur du potentiel chimique μ doit toujours être strictement plus petite que l'énergie de l'état fondamental du système, en l'occurrence l'énergie nulle pour nos particules dans une boîte. Contrairement à la statistique de Maxwell–Boltzmann (et celle de Fermi–Dirac), il y a donc une contrainte mathématique sur le potentiel chimique pour la statistique de Bose–Einstein (figure III.15) :

$$\mu < E_{\text{fondamental}}, \quad \text{soit pour } E_p = \frac{p^2}{2M} : \quad \mu < 0. \quad (\text{III.48})$$

Une seconde remarque concerne le lien entre statistiques de Bose–Einstein et de Maxwell–Boltzmann. Considérons dans le cadre de la statistique de Bose–Einstein un état faiblement peuplé, c'est-à-dire $n(\mathbf{p}) \ll 1$. Ceci signifie que le dénominateur de (III.47) est grand devant 1, et donc que $e^{(E_p - \mu)/k_B T} \gg 1$. On a donc pour ces niveaux faiblement peuplés :

$$n(\mathbf{p}) \ll 1 : \quad n^{(\text{Bose})}(\mathbf{p}) \approx n^{(\text{Boltz.})}(\mathbf{p}) = Z e^{-E_p/k_B T}. \quad (\text{III.49})$$

Cette approximation sera valable pour tous les niveaux, y compris le niveau fondamental, si on prend $Z \ll 1$, c'est-à-dire μ négatif avec $|\mu| \gg k_B T$.

Le nombre total d'atomes dans la statistique de Bose–Einstein est obtenu comme pour la statistique de Maxwell–Boltzmann par la somme

$$N = \sum_{\mathbf{p}} n^{(\text{Bose})}(\mathbf{p}). \quad (\text{III.50})$$

Il est tentant de remplacer là aussi la somme discrète par une intégrale, ce qui donne via un calcul simple :

$$N = g_{3/2}(Z) \frac{L^3}{\lambda_T^3} \quad \text{avec} \quad g_\alpha(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Z^n}{n^\alpha} \text{ fonction polylogarithme.} \quad (\text{III.51})$$

La similarité avec le résultat trouvé pour la statistique de Maxwell–Boltzmann est frappante. En particulier, pour $Z \ll 1$, on a $g_{3/2}(Z) \approx Z$ et les deux résultats sont comparables, comme annoncé ci-dessus.

Toutefois cette similarité est également trompeuse. Pour la statistique de Maxwell–Boltzmann, le résultat (III.45) permet toujours de trouver une valeur de la fugacité (ou du potentiel chimique) qui rend compte d'un nombre donné d'atomes N . Au contraire, pour la statistique de Bose–Einstein, nous avons vu que les valeurs de Z sont limitées à l'intervalle $[0, 1[$; la fonction $g_{3/2}(Z)$ prend donc des valeurs comprises entre 0 et $g_{3/2}(1) \approx 2.612$ de sorte que le nombre d'atomes ainsi calculé ne peut pas dépasser

$$N_{\max} = 2.612 \frac{L^3}{\lambda_T^3}. \quad (\text{III.52})$$

D'où vient le fait que le nombre d'atomes que l'on peut mettre dans le gaz soit ainsi borné supérieurement? La réponse à cette question est la condensation de Bose–Einstein. Nous n'allons pas l'étudier en détail ici, mais rappelons son origine : le passage de la somme discrète (III.50) à l'intégrale (III.51) n'est légitime que si le potentiel chimique est suffisamment loin de sa valeur maximale $\mu = 0$. Quand μ tend vers l'énergie du fondamental (ici $E = 0$), la population du niveau fondamental diverge [cf. (III.47)]. Or, cette divergence est négligée dans le passage à l'intégrale (III.51). Quand Z s'approche de 1, il faut donc traiter avec plus de soin la

population de ce niveau. On trouve alors qu'une fraction macroscopique des particules peut s'y accumuler, via un mécanisme qui devient une transition de phase à la limite thermodynamique.

La condensation se produit donc quand le nombre d'atomes N atteint la valeur (III.52), ce qui correspond à la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} = n\lambda_T^3$ avec $n = N/L^3 : \mathcal{D}_{\max} = 2.612$. Cette valeur est atteinte quand la distance moyenne entre particules, $n^{-1/3}$, est de l'ordre de la longueur d'onde thermique λ_T .

4-3 Condensation dans un micro-puits

Avant de décrire en détail l'expérience de Stellmer et al. (2013), nous allons présenter un modèle simple permettant de comprendre comment il est possible d'obtenir un gaz quantique dégénéré, en l'occurrence un condensat de Bose–Einstein, en partant d'un gaz non dégénéré et de simples transformations du potentiel confinant le gaz.

Reprenons notre gaz de N atomes à température T , confiné dans une boîte cubique de côté L , avec l'occupation $n(\mathbf{p})$ de chaque état donnée par (III.47). Rappelons pour commencer qu'une déformation « triviale » du potentiel, consistant à augmenter ou diminuer la taille L de la boîte ne va rien donner de spectaculaire. Si on fait cette déformation très lentement pour réaliser une transformation adiabatique, la densité dans l'espace des phases va rester constante ; nous avons montré ce point pour un potentiel harmonique dans le chapitre d'introduction de ce cours. Si on fait cette déformation de manière non adiabatique, la situation ne sera que pire puisque l'entropie augmentera et la densité dans l'espace des phases diminuera.

Nous allons nous intéresser dans ce qui suit à la déformation « non triviale » suivante : nous supposons qu'à un instant donné, on crée brusquement un puits de potentiel $V(\mathbf{r})$ très localisé (figure III.16). Le volume ℓ^3 sur lequel $V(\mathbf{r})$ est non nul est petit devant L^3 . La forme exacte de $V(\mathbf{r})$ importe peu ; la seule hypothèse importante pour ce qui suit est qu'il y ait dans ce puits un et un seul état lié $|\phi_0\rangle$ d'énergie $\epsilon_0 < 0$. Dans ce qui suit, nous allons prendre $|\epsilon_0| \sim k_B T$. Les états propres dans la boîte avec ce micro-puits additionnel sont donc l'état $|\phi_0\rangle$ et les états étendus $|\psi_{\mathbf{p}}\rangle$

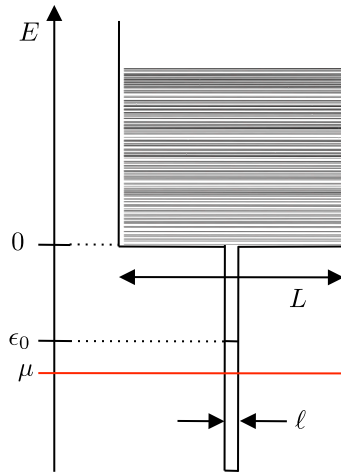


FIGURE III.16. Micro-puits de taille ℓ au milieu d'une boîte cubique de taille beaucoup plus grande L . On suppose que le micro-puits ne contient qu'un seul état lié $|\phi_0\rangle$, d'énergie $\epsilon_0 < 0$. Pour un gaz décrit par la statistique de Bose–Einstein, le potentiel chimique est nécessairement inférieur à ϵ_0 .

formés à partir des ondes planes (III.41), mais légèrement distordus pour assurer leur orthogonalité avec $|\phi_0\rangle$.

Comme le branchement de ce puits est soudain et que le volume concerné ℓ^3 est très faible, on peut considérer en bonne approximation que les N atomes restent sur les états étendus $|\psi_{\mathbf{p}}\rangle$ au moment du branchement. Toutefois, une fois le branchement effectué, des collisions entre atomes³ vont conduire à une thermalisation du gaz.

Au bout d'un temps suffisant, que nous ne chercherons pas à caractériser, un nouvel équilibre thermodynamique est atteint grâce aux collisions élastiques qui peuvent peupler le micro-puits (figure III.17). Cet équilibre est décrit par une température T' et un potentiel chimique μ' , qui sont les deux inconnues du problème. Cet équilibre correspond à N_0 atomes dans

3. L'existence de ces collisions entraine que le gaz n'est pas vraiment un gaz idéal, donc qu'il y a des déviations par rapport au modèle du gaz parfait. Mais ces déviations peuvent être rendues arbitrairement faibles, si on accepte que le temps de relaxation soit long.

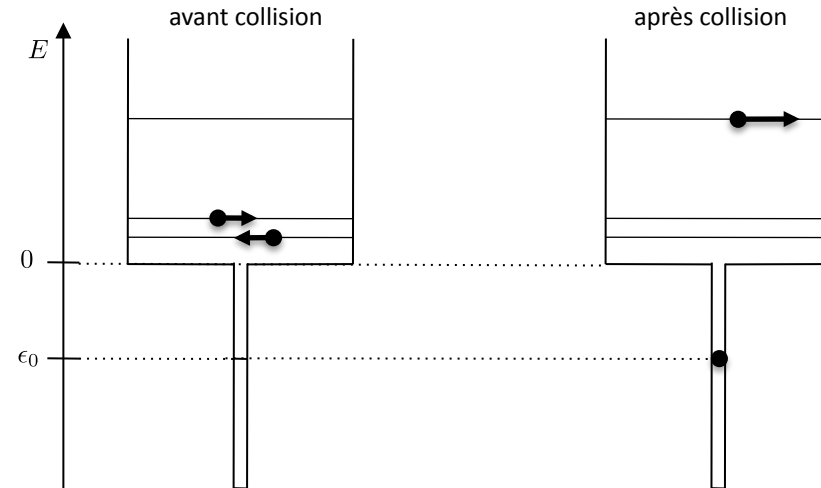


FIGURE III.17. Peuplement du micro-puits par collision élastique entre deux particules.

l'état $|\phi_0\rangle$ et $N' = N - N_0$ dans les états $|\psi_{\mathbf{p}}\rangle$. Notre but est de montrer qu'il est possible de trouver des situations où N_0 est du même ordre que N : c'est la définition d'une condensation de Bose–Einstein, avec une accumulation d'un nombre macroscopique d'atomes dans un état quantique individuel.

L'occupation des états étendus $|\psi_{\mathbf{p}}\rangle$ est donnée par la loi de Bose

$$n'(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{(\frac{p^2}{2M} - \mu')/k_B T'} - 1} \quad (\text{III.53})$$

et l'occupation de l'état fondamental $|\phi_0\rangle$ vaut

$$N_0 = \frac{1}{e^{(\epsilon_0 - \mu')/k_B T'} - 1}. \quad (\text{III.54})$$

La conservation du nombre de particules s'écrit

$$N = N_0 + \sum_{\mathbf{p}} n'(\mathbf{p}), \quad (\text{III.55})$$

ce qui fournit une première contrainte sur les deux inconnues μ' et T' . La deuxième contrainte provient de la conservation de l'énergie. Une fois le micro-puits branché, le gaz est un système isolé et l'énergie totale est conservée. On a donc égalité entre les énergies initiale et finale

$$E_i = \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2M} n(\mathbf{p}), \quad E_f = N_0 \epsilon_0 + \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2M} n'(\mathbf{p}). \quad (\text{III.56})$$

La résolution de ce problème à deux inconnues se fait aisément par un programme numérique. Les paramètres d'entrée sont

- La fugacité initiale du gaz $Z = e^{\mu/k_B T}$. Nous supposons le gaz initialement faiblement dégénéré et nous prendrons $Z = 0.5$, pour lequel les lois de Bose et de Boltzmann donnent des résultats voisins aussi bien pour le nombre d'atomes que pour l'énergie.
- L'énergie de l'état lié ϵ_0 , mesurée en unité de $k_B T$.
- Le rapport L/λ_T entre la taille de la boîte et la longueur d'onde thermique initiale. Nous prendrons ici $L/\lambda_T = 100$.

Les conditions données ci-dessus correspondent à un nombre total d'atomes $N = g_{3/2}(Z) (L/\lambda_T)^3 \approx 620\,000$. Les résultats sont indiqués sur la figure III.18. Prenons par exemple $\epsilon_0 = -3k_B T$; la résolution numérique indique alors qu'après thermalisation, 23% des atomes se sont accumulés sur le niveau microscopique, et la température du gaz est devenue $T' \approx 1.8T$: le gaz s'est réchauffé (comme on pouvait l'anticiper d'après la figure III.17), mais une fraction condensée significative est apparue.

Remarque 1. On peut résoudre le problème de manière approchée et quasi-analytique en remarquant (i) que dans l'exemple ci-dessus, les occupations des états étendus sont données en bonne approximation par la loi de Boltzmann et (ii) que le potentiel chimique μ' est pratiquement égal à l'énergie ϵ_0 de l'état lié puisque ce dernier est macroscopiquement occupé. On a alors pour la fugacité finale

$$Z' \approx e^{\epsilon_0/k_B T'} = e^{-\eta/x} \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{|\epsilon_0|}{k_B T}, \quad x = \frac{T'}{T} \quad (\text{III.57})$$

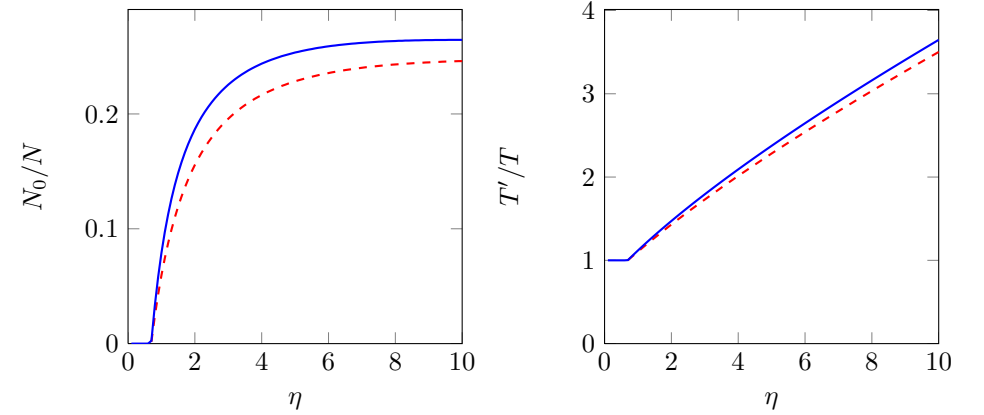


FIGURE III.18. Évolution de la fraction condensée et de la température finale dans le système « boîte+micro-piège » en fonction du paramètre de contrôle $\eta = |\epsilon_0|/k_B T$ pour un état initial faiblement dégénéré $Z = 0.5$. Courbe en trait plein bleue : traitement exact à partir de (III.53)-(III.56), dans le cas $L = 100 \lambda_T$. Courbe en pointillé rouge : traitement approché (III.60).

et les lois de conservation du nombre de particules et de l'énergie s'écrivent :

$$N = N_0 + N' \quad \text{avec} \quad N \approx Z \frac{L^3}{\lambda_T^3}, \quad N' \approx Z' \frac{L^3}{\lambda_T^3}, \quad (\text{III.58})$$

$$\frac{3}{2} N k_B T = N_0 \epsilon_0 + \frac{3}{2} N' k_B T', \quad (\text{III.59})$$

soit en prenant pour inconnues $x = T'/T$ et la fraction condensée $f_0 = N_0/N$:

$$\begin{aligned} 1 &= f_0 + \frac{x^{3/2} e^{-\eta/x}}{Z}, \\ 1 &= -\frac{2}{3} f_0 \eta + (1 - f_0) x. \end{aligned} \quad (\text{III.60})$$

La résolution de ce système donne un résultat voisin de celui obtenu par le calcul exact (figure III.18). On constate que dans cette approximation, le résultat ne dépend plus du rapport L/λ_T , mais simplement de la fugacité initiale Z et du choix du rapport $\eta = |\epsilon_0|/k_B T$.

Remarque 2. La fraction condensée obtenue ici est de l'ordre de 20% et elle ne varie que très doucement avec le paramètre de contrôle $|\epsilon_0|/k_B T$. Toutefois, on remarque que le condensat formé dans l'état $|\phi_0\rangle$ est très localisé dans l'espace; on peut alors mettre à profit une évaporation très efficace, consistant à évacuer tous les atomes en dehors du volume ℓ^3 . Les atomes dans l'état $|\phi_0\rangle$ ne seront pas affectés, alors que pratiquement tous les atomes non condensés $[N'(1 - \frac{\ell^3}{L^3})]$ seront éliminés. On obtiendra alors un condensat quasi pur au prix d'une perte d'atomes de 4/5 environ. Cette méthode qui consiste à tirer parti de la forme du potentiel de confinement pour localiser l'entropie dans des zones particulières de l'espace a été proposée dans un contexte légèrement différent par différents auteurs (voir par exemple Bernier et al. (2009) et refs. in).

Remarque 3. Nous avons négligé ici les interactions entre atomes, sauf pour ce qui est de la thermalisation du gaz. En pratique, ces interactions peuvent jouer un rôle important car les N_0 atomes sont accumulés dans une toute petite région de l'espace, ce qui correspond à une grande densité spatiale. L'énergie de champ moyen va donc déplacer la position du niveau ϵ_0 et les collisions inélastiques, via la recombinaison à trois corps conduisant à la formation de molécules, peuvent jouer un rôle important. Notre cas limite d'un puits extrêmement étroit doit donc être considéré comme un modèle simple à analyser, mais pas nécessairement une situation optimale sur le plan pratique.

4-4 L'expérience d'Innsbruck (2013)

Dans leur expérience, Stellmer et al. (2013) sont partis d'un gaz de $N \approx 10^7$ atomes de ^{84}Sr , refroidis à $T = 0.9 \mu\text{K}$ grâce la raie étroite à 689 nm que nous avons déjà mentionnée. Ce gaz est confiné dans une pince optique (piège dipolaire) formée par un faisceau gaussien fortement focalisé de longueur d'onde $\lambda = 1065 \text{ nm}$. Le faisceau est elliptique avec des rayons à $1/e^2$ (waists) de $w_y = 300 \mu\text{m}$ et $w_z = 17 \mu\text{m}$. Les fréquences d'oscillation dans le piège sont selon les trois axes x, y, z de l'espace 6, 35 et 600 Hz. La profondeur du piège est de $9 \mu\text{K}$, bien supérieure à la température des atomes de sorte que les pertes par évaporation sont négligeables. Cette pince optique joue le rôle de la boîte de volume L^3 de notre modèle.

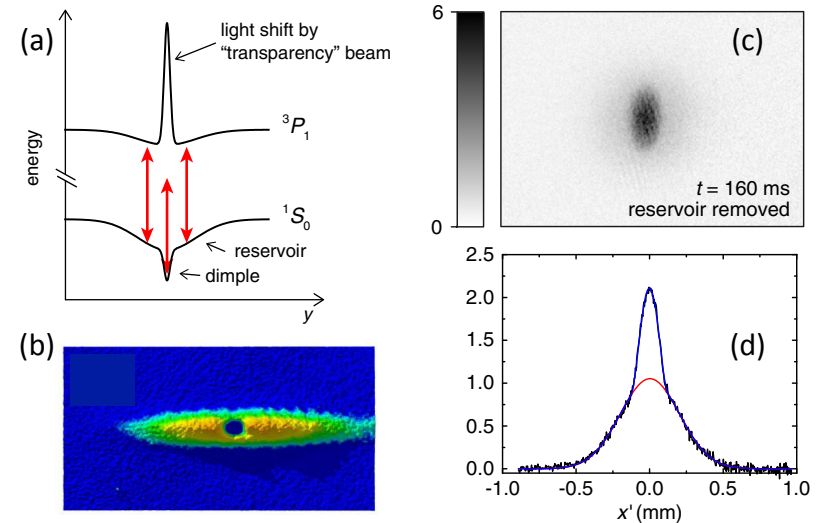


FIGURE III.19. Expérience de Stellmer et al. (2013) menée à Innsbruck. (a) Des atomes de ^{84}Sr sont refroidis par effet Doppler sur une raie étroite dans une « grosse » pince optique jouant le rôle de réservoir. On superpose une micro-pince optique (dimple), dans laquelle environ 10% des atomes vont s'accumuler. (b) Les atomes dans la micro-puits sont rendus transparents à la lumière de refroidissement grâce à un faisceau auxiliaire qui déplace fortement le niveau excité. Les conditions sont telles qu'un condensat apparaît dans cette micro-pince. (c-d) Le condensat est observé en éliminant les atomes en dehors du micro-puits. On observe après temps de vol la distribution bi-modale habituelle révélant le condensat (composante centrale étroite) et la fraction non-condensée (piédestal plus large). La fraction condensée est de l'ordre de 1%.

Pour créer le micro-puits qui va induire la condensation, Stellmer et al. superposent une deuxième pince optique, beaucoup plus focalisée que la première (figure III.19ab). Cette deuxième pince optique se propage quasi-verticalement ; elle crée dans le plan horizontal un creux de potentiel de rayon $\sim 20 \mu\text{m}$, caractérisé par des fréquences d'oscillation de 250 Hz. Pour « aider » les atomes à s'accumuler dans ce micro-puits, Stellmer et al. ajoutent un faisceau supplémentaire, de taille et de direction voisines de la micro-pince optique, dont le but est de rendre les atomes transparents aux lasers de refroidissement. Ce faisceau, qui a pour longueur d'onde 688 nm, crée un déplacement lumineux important du niveau excité 3P_1 (plus de 1000Γ).

L'expérience permet d'observer la formation d'un condensat de Bose-Einstein à l'intérieur de la micro-pince optique. La fraction condensée est faible ($\sim 1\%$), ce qui rend le condensat difficile à détecter au milieu des 99% d'atomes restants, confinés essentiellement dans la première grosse pince optique. Mais on peut tirer profit du fait que les atomes dans la micro-pince sont devenus transparents à la lumière de refroidissement pour observer ce condensat : la pression de radiation d'un flash intense de lumière peut pousser hors de la zone de détection tous les atomes sauf ceux confinés dans cette micro-pince. On détecte après un temps de vol un nuage dont la distribution en vitesse est bimodale, signature usuelle d'un condensat dans un piège harmonique anisotrope (figure III.19cd). Cette formation est réversible, car on peut brancher et éteindre la micro-pince de nombreuses fois et voir ainsi le condensat se former, puis disparaître.

Même si les performances absolues de cette expérience en terme de nombre d'atomes condensés restent en deçà de ce que l'on obtient par évaporation, elle constitue un pas important vers la réalisation de systèmes quantiques dissipatifs avec des gaz d'atomes froids. Le condensat est alimenté en permanence par un réservoir d'atomes refroidis par laser, réservoir qui peut lui-même se remplir continûment à partir d'une vapeur atomique à la température ambiante. La transposition de cette expérience à des gaz d'atomes fermioniques permettrait de réaliser une situation voisine de celle des électrons dans un métal (normal ou supraconducteur) : on aurait alors un système quantique dissipatif, en contact avec un thermostat imposant en permanence sa température au système.

Chapitre IV

Se cacher dans l'ombre

Les chapitres précédents ont été consacrés au refroidissement Doppler, d'abord avec une raie large telle que la largeur Γ du niveau excité est grande devant la pulsation de recul $\omega_r = \hbar k^2/2M$, puis avec une raie étroite.

- Dans le premier cas, nous avons trouvé que le désaccord optimal était $\Delta = -\Gamma/2$, conduisant à la limite Doppler bien connue, $k_B T = \hbar\Gamma/2$. La variation du taux de diffusion de photons avec la vitesse de l'atome est représentée sur la figure IV.1 (gauche). Il est à peu près constant sur tout l'intervalle allant de $v = -\Gamma/k$ à Γ/k et la vitesse quadratique moyenne est grande devant la vitesse de recul $v_r = \hbar k/M$.
- Dans le second cas, nous avons trouvé que le désaccord optimal est $\Delta \approx -3\omega_r$, conduisant à une vitesse quadratique moyenne de l'ordre de v_r . La variation du taux de diffusion de photons avec la vitesse est alors très différente du cas d'une raie large (cf. figure IV.1, droite) : ce taux passe par un minimum prononcé autour de $v = 0$, les atomes s'accumulant donc dans des classes de vitesse où ils ne diffusent que très peu de photons.

Le but de ce chapitre est de généraliser cette notion de « pompage optique dans l'espace des vitesses » qui se produit pour le refroidissement Doppler sur raie étroite. Nous allons exploiter l'idée d'interférence entre chemins quantiques pour annuler la probabilité d'excitation de l'atome quand il a atteint la classe de vitesse désirée. Nous allons discuter deux schémas différents, mais conduisant aux mêmes lois statistiques : le piégeage cohérent de population et le refroidissement Raman, qui utilise des impulsions lumineuses de forme optimisée pour transférer un atome d'un

sous-niveau donné du niveau électronique fondamental vers un autre, de manière sélective en vitesse.

Le point commun à ces deux schémas est l'utilisation d'une configuration de niveaux internes en Λ , avec deux états fondamentaux g_1 et g_2 , couplés à un même état excité e (figure IV.2). Malgré sa simplicité apparente, il s'agit d'un système très riche, donnant naissance à de nombreux phénomènes contre-intuitifs. Nous allons donc commencer par présenter un certain nombre de ses propriétés ; nous renvoyons le lecteur intéressé vers les articles de revue de Arimondo (1996); Harris (1997); Fleischhauer et al. (2005) pour une étude plus approfondie, notamment en ce qui concerne ses applications concernant la transparence électromagnétiquement induite et l'information quantique.

1 Système en Λ et états noirs

Le but de ce premier paragraphe est de décrire quelques propriétés remarquables du système en Λ , composé de deux états $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$ de durée de vie infinie et d'un état excité $|e\rangle$. Nous allons nous concentrer dans ce paragraphe sur la dynamique interne de l'atome. L'étude du mouvement du centre de masse atomique sera faite en § 2.

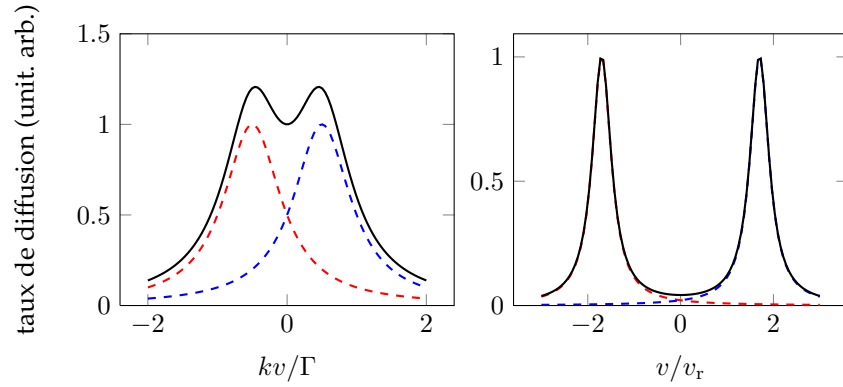


FIGURE IV.1. Taux d'excitation γ d'un atome refroidi par effet Doppler à une dimension. À gauche : cas d'une raie large, avec $\Gamma \gg \omega_r$ et $\Delta = -\Gamma/2$. À droite, cas d'une raie étroite $\Gamma = \omega_r$ et $\Delta = -3.4\omega_r$. La valeur de γ est proportionnelle à la puissance lumineuse et son unité est ici arbitraire. Les courbes en pointillé représentent les taux induits par les deux ondes progressives créant le refroidissement et la courbe en trait plein représente la somme de ces deux taux.

1-1 Rappel sur le système à deux niveaux

Avant d'aborder le système en Λ , revenons très brièvement sur quelques éléments que nous avons déjà rencontrés pour un système à deux niveaux, composé d'un état fondamental stable g d'énergie E_g et d'un état excité d'énergie E_e , de durée de vie Γ^{-1} .

Tout d'abord, rappelons que l'on peut dans de nombreux calculs prendre en compte simplement la durée de vie finie de l'état excité e en ajoutant à son énergie le terme imaginaire $-i\hbar\Gamma/2$. En effet, la loi de décroissance exponentielle $P_e(t) = e^{-\Gamma t}$ s'obtient à partir de l'évolution du vecteur d'état

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iE_e t/\hbar} e^{-\Gamma t/2} |e\rangle + \dots, \quad (\text{IV.1})$$

ce qui correspond bien à ce que l'on attend pour une énergie

$$\bar{E}_e = E_e - i\frac{\hbar\Gamma}{2}. \quad (\text{IV.2})$$

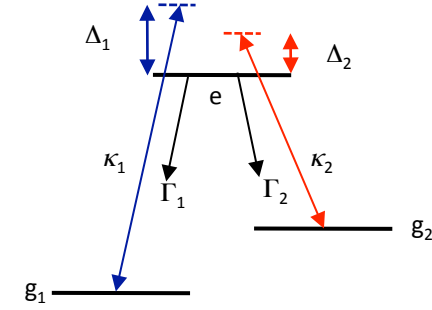


FIGURE IV.2. Système à trois niveaux, éclairés par deux ondes lumineuses cohérentes. On supposera ici que les taux d'émission spontanée depuis le niveau excité $|e\rangle$ sont $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma/2$.

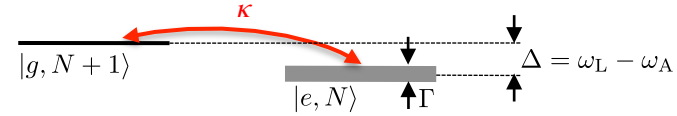


FIGURE IV.3. L'atome à deux niveaux habillé par les photons de l'onde lumineuse. Les trois fréquences caractérisant le problème sont la largeur naturelle Γ de l'état excité, le désaccord $\Delta = \omega_L - \omega_A$ et la pulsation de Rabi κ .

Supposons maintenant (comme aux chapitres précédents) que les niveaux g et e sont couplés par une excitation monochromatique de pulsation ω_L désaccordée de Δ par rapport à la résonance atomique $\omega_A = (E_e - E_g)/\hbar$. Le couplage est caractérisé par la fréquence de Rabi κ , que nous supposons ici petite devant Γ et/ou Δ . Après passage dans le référentiel tournant ou dans le formalisme de l'atome habillé (figure IV.3), les énergies propres en présence de couplage sont les valeurs propres de la matrice non-hermitienne décrivant l'hamiltonien dans la base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$:

$$\bar{H} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \kappa^*/2 \\ \kappa/2 & -\Delta - i\Gamma/2 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.3})$$

Une de ses valeurs propres reste proche de $-\hbar(\Delta + i\Gamma/2)$ et correspond à l'état \bar{e} , habillé par le couplage avec le laser. Le produit des valeurs propres

(déterminant de la matrice) valant $-(\hbar|\kappa|/2)^2$, l'autre valeur propre est

$$\approx \hbar \frac{|\kappa|^2/4}{\Delta + i\Gamma/2}. \quad (\text{IV.4})$$

Elle donne l'énergie complexe de l'état \bar{g} lui aussi habillé par le couplage avec le laser. La partie réelle de cette énergie représente le déplacement lumineux $\delta E(g)$ de \bar{g} par rapport à g , et la partie imaginaire peut s'écrire $-i\hbar\gamma/2$, où γ^{-1} est la durée de vie finie de \bar{g} correspondant à la diffusion de photons avec le taux γ . Le calcul explicite de ces deux termes à partir de (IV.4) nous donne

$$\delta E(g) = \frac{\hbar\Delta}{2} s, \quad \gamma = \frac{\Gamma}{2} s, \quad \text{avec } s = \frac{|\kappa|^2/2}{\Delta^2 + \Gamma^2/4}. \quad (\text{IV.5})$$

L'expression pour γ correspond à ce que nous avons trouvé au chapitre 2 au moyen des équations de Bloch optiques dans la limite de faible saturation. L'expression pour $\delta E(g)$ représente le potentiel dipolaire que nous avons utilisé dans les cours des années précédentes lors de la description du piégeage d'atomes par la lumière. Nous le retrouverons dans le cours sur l'effet Sisyphé.

1-2 Système en Λ sans émission spontanée

Revenons maintenant au système à trois niveaux en Λ . Supposons que les atomes modélisés par ce système à trois niveaux sont éclairés par deux ondes monochromatiques, pilotant chacune une transition $|g_j\rangle \leftrightarrow |e\rangle$. Nous noterons κ_j les fréquences de Rabi et Δ_j les désaccords correspondants (figure IV.2). Dans une représentation en terme d'atome habillé (figure IV.4), l'état $|e, N_1, N_2\rangle$ est couplé aux deux états $|g_1, N_1 + 1, N_2\rangle$ et $|g_2, N_1, N_2 + 1\rangle$ par le couplage atome-laser :

$$\hat{V}_{\text{AL}} = \frac{\hbar\kappa_1}{2}|e\rangle\langle g_1| + \frac{\hbar\kappa_2}{2}|e\rangle\langle g_2| + \text{H.c.} \quad (\text{IV.6})$$

En choisissant l'origine des énergies au milieu des deux états $|g_1, N_1 + 1, N_2\rangle$ et $|g_2, N_1, N_2 + 1\rangle$, l'hamiltonien de ce système à trois niveaux s'écrit

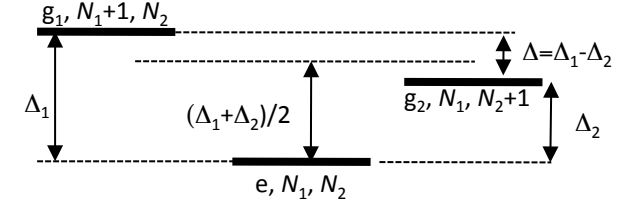


FIGURE IV.4. Système à trois niveaux de la figure IV.2, en représentation d'atome habillé.

dans la base $\{|g_1, N_1 + 1, N_2\rangle, |g_2, N_1, N_2 + 1\rangle, |e, N_1, N_2\rangle\}$:

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \kappa_1^* \\ 0 & -\Delta & \kappa_2^* \\ \kappa_1 & \kappa_2 & -(\Delta_1 + \Delta_2) \end{pmatrix} \quad \text{avec } \Delta = \Delta_1 - \Delta_2. \quad (\text{IV.7})$$

La quantité Δ représente le désaccord de la paire de faisceaux lumineux par rapport à la résonance Raman entre $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$.

Nous n'allons pas donner ici l'expression complète des états propres et des énergies associées pour cet hamiltonien, mais nous allons remarquer un point qui va jouer un rôle crucial dans la suite. L'état

$$|\psi_{\text{NC}}\rangle \propto \kappa_2|g_1\rangle - \kappa_1|g_2\rangle = \begin{pmatrix} \kappa_2 \\ -\kappa_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

n'est pas couplé à la lumière :

$$\hat{V}_{\text{AL}}|\psi_{\text{NC}}\rangle = 0 \quad (\text{IV.9})$$

(l'indice "NC" signifie précisément "non couplé"). Si l'on se place dans le cas où la résonance Raman est satisfaite, $\Delta = 0$, alors cet état est également état propre de l'hamiltonien \hat{H} : l'atome préparé dans cet état n'évoluera pas. Le fait que cet état n'est pas couplé à la lumière résulte d'un phénomène d'interférence : pour aller de $|\psi_{\text{NC}}\rangle$ à $|e\rangle$, deux chemins sont possibles : $|g_1\rangle \rightarrow |e\rangle$ et $|g_2\rangle \rightarrow |e\rangle$; or, ces deux chemins ont des amplitudes opposées et ils interfèrent de manière destructive : l'amplitude de probabilité totale pour aller de $|\psi_{\text{NC}}\rangle$ à $|e\rangle$ est nulle.

Dans ce qui suit, nous utiliserons également l'état combinaison de $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$ orthogonal à $|\psi_{\text{NC}}\rangle$ que nous appellerons « état couplé » :

$$|\psi_C\rangle \propto \kappa_1^*|g_1\rangle + \kappa_2^*|g_2\rangle. \quad (\text{IV.10})$$

1-3 Prise en compte de l'émission spontanée

Quand on prend en compte le fait que l'état excité a une durée de vie Γ^{-1} , l'étude de la dynamique du système doit passer par le formalisme de l'équation pilote [ou par un autre formalisme permettant de prendre en compte les processus dissipatifs, comme la méthode des fonctions d'onde Monte Carlo (Mølmer et al. 1993)]. L'écriture de l'équation pilote se fait d'une manière similaire à ce que nous avons vu au cours 2 pour l'atome à deux niveaux :

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + \left. \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right|_{\text{em. spont.}}. \quad (\text{IV.11})$$

L'évolution incohérente due aux phénomènes d'émission spontanée généralise ce que nous avons rencontré pour un système à deux niveaux :

$$\left. \frac{d\rho_{ee}}{dt} \right|_{\text{em. spont.}} = -(\Gamma_1 + \Gamma_2)\rho_{ee}, \quad \left. \frac{d\rho_{g_j g_j}}{dt} \right|_{\text{em. spont.}} = +\Gamma_j \rho_{ee} \quad (\text{IV.12})$$

pour les populations des trois niveaux ($j = 1, 2$),

$$\left. \frac{d\rho_{eg_j}}{dt} \right|_{\text{em. spont.}} = -\frac{\Gamma_j}{2}\rho_{eg_j}, \quad (\text{IV.13})$$

pour les cohérences optiques et

$$\left. \frac{d\rho_{g_1 g_2}}{dt} \right|_{\text{em. spont.}} = 0 \quad (\text{IV.14})$$

pour la cohérence entre les deux niveaux fondamentaux.

Pour ce système à trois niveaux, il est possible de donner une expression analytique de l'état stationnaire de l'équation pilote (Janik et al. 1985; Lounis & Cohen-Tannoudji 1992). Comme ce traitement analytique est assez long (sans poser aucune difficulté de principe), nous allons nous contenter de discuter ici physiquement quelques points qui seront utiles pour la suite.

1-4 Quelques résultats importants pour le système en Λ

Nous considérerons ici l'observable correspondant à la population stationnaire de l'état excité P_e . Nous notons immédiatement que lorsque la condition de résonance Raman est satisfaite, l'état non couplé (IV.8) proposé plus haut reste un état stable du système :

$$\hat{\rho}_{\text{NC}} = |\psi_{\text{NC}}\rangle\langle\psi_{\text{NC}}| \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\hat{\rho}_{\text{NC}}}{dt} = 0. \quad (\text{IV.15})$$

En effet, $\hat{\rho}_{\text{NC}}$ commute avec l'hamiltonien puisque $|\psi_{\text{NC}}\rangle$ est état propre de cet hamiltonien. Par ailleurs, cet état n'évolue pas par émission spontanée puisque toute la population est concentrée dans les états fondamentaux. C'est un exemple d'état « protégé » de la dissipation (causée ici par les processus d'émission spontanée).

Quand la condition de résonance Raman n'est pas vérifiée, la population stationnaire de l'état excité n'est pas nulle. Sur la figure IV.5, nous avons tracé la variation de cette population avec le désaccord d'un des faisceaux lumineux (Δ_1) pour différents régimes de paramètres.

- Quand les fréquences de Rabi κ_1 et κ_2 sont égales, l'annulation de P_e pour la résonance Raman $\Delta_1 = \Delta_2$ se fait de manière régulière, avec une courbe à peu près symétrique au voisinage du zéro de P_e (figures IV.5 A et B). Cette annulation stricte du taux d'excitation de l'atome quand la résonance Raman est atteinte va jouer un rôle clé dans le mécanisme de refroidissement par piégeage cohérent de population. La sélectivité en vitesse sera assurée par la dépendance de $\Delta_{1,2}$ par rapport à la vitesse des atomes via l'effet Doppler. Nous reviendrons sur la largeur typique du trou autour de la résonance Raman quand nous étudierons ce mécanisme de refroidissement.
- En revanche, si les fréquences de Rabi sont très différentes (figures IV.5 C et D), le profil autour du point d'annulation est fortement dissymétrique et prend l'allure d'un profil du type prédit par Fano (1961). Cette forme de profil se rencontre dans le cas où une interférence se produit entre un processus de diffusion résonnante et un processus de diffusion beaucoup plus plat. Lounis & Cohen-Tannoudji (1992) ont prouvé que le modèle de Fano était effectivement réalisé pour le système en Λ quand $\kappa_1 \ll \kappa_2 \ll |\Delta_{1,2}|$. Pour le montrer, on commence

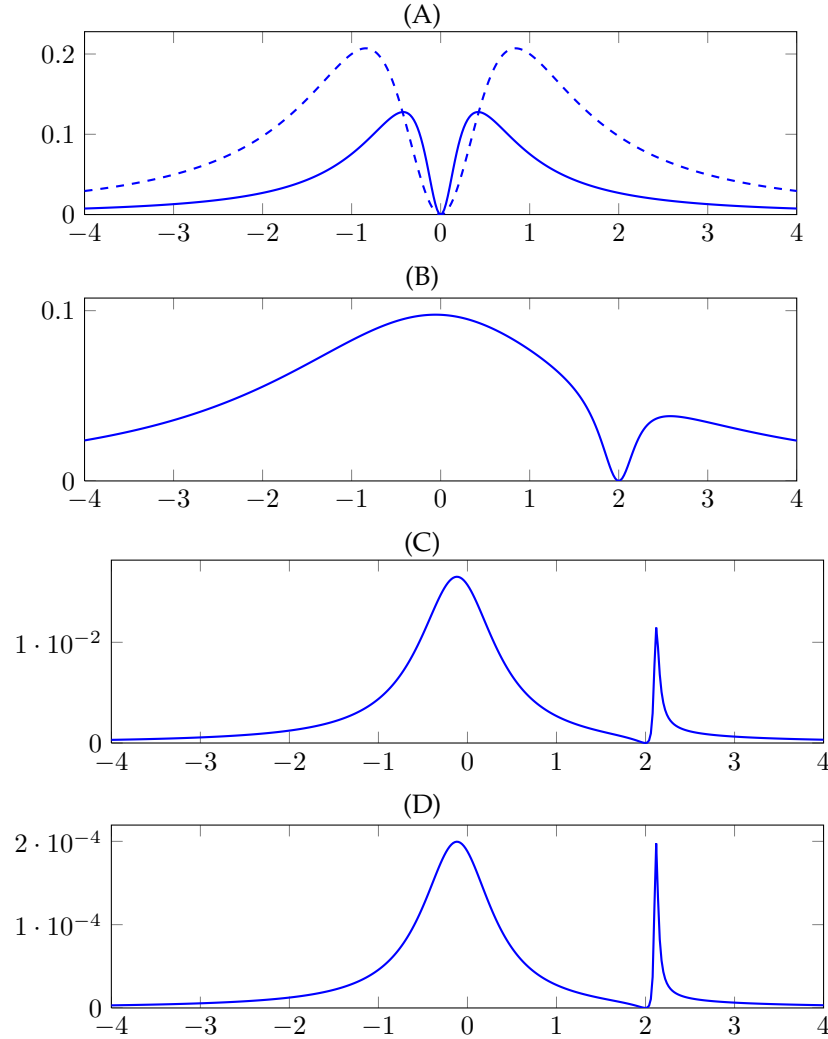


FIGURE IV.5. Variation de la population excitée P_e avec le désaccord Δ_1 , mesuré en unité de Γ . Les autres paramètres sont (en unités de Γ) : (A) trait plein : $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.5$, $\Delta_2 = 0$; trait pointillé : $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, $\Delta_2 = 0$, (B) $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, $\Delta_2 = 2$, (C) $\kappa_1 = 0.1$, $\kappa_2 = 1$, $\Delta_2 = 2$, (D) $\kappa_1 = 0.01$, $\kappa_2 = 1$, $\Delta_2 = 2$.

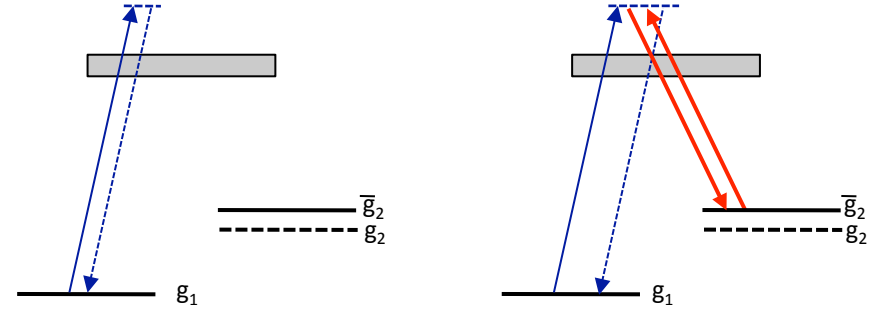


FIGURE IV.6. Les deux processus de diffusion pour un photon du laser 1, conduisant au profil de Fano de la figure IV.5 C et D.

par traiter exactement l'interaction du faisceau 2 avec l'atome. Dans le cas où $\kappa_2 \ll |\Delta_2|$, cet « habillage » du niveau g_2 induit le déplacement lumineux trouvé en (IV.5) :

$$|g_2\rangle \rightarrow |\bar{g}_2\rangle, \quad E(\bar{g}_2) = E(g_2) + \delta E(g_2) \quad \delta E(g_2) = \frac{\hbar\Delta_2}{2} s_2. \quad (\text{IV.16})$$

Partons maintenant de l'atome dans l'état $|g_1\rangle$; la diffusion d'un photon du faisceau laser faible (faisceau 1) peut se faire soit de manière non résonante en ne passant que par $|e\rangle$ (figure IV.6, gauche), soit de manière résonante via une transition Raman qui mène l'atome de manière transitoire dans $|\bar{g}_2\rangle$ (figure IV.6, droite). Le maximum étroit de la courbe pour P_e est obtenu quand la résonance Raman vis à vis de l'état habillé $|\bar{g}_2\rangle$ se produit :

$$\hbar\Delta_1 = \hbar\Delta_2 + \delta E(g_2). \quad (\text{IV.17})$$

On obtient donc une situation remarquable où P_e s'annule pour la résonance Raman « nue » $\Delta_1 = \Delta_2$, puis passe par un maximum pour la résonance Raman « habillée » (V.49). La largeur de la résonance est donnée par la largeur de l'état \bar{g}_2 , c'est-à-dire $\gamma_2 = \Gamma s_2/2$ [cf. (IV.5)]. Nous reviendrons sur ce profil d'excitation de type Fano lorsque nous étudierons la réabsorption des photons diffusés au sein d'un nuage d'atomes.

1-5 Au delà du système en Λ

La notion d'état noir n'est pas limitée au système à trois niveaux en Λ . Considérons une transition de résonance entre un niveau fondamental g de moment cinétique J_g vers un niveau excité e de moment cinétique J_e . Pour qu'une transition dipolaire soit autorisée, il faut que $J_e = J_g \pm 1$ ou $J_e = J_g$. Nous supposons ici que l'on éclaire une transition de ce type avec une lumière monochromatique. Le couplage atome-laser s'écrit de manière générale

$$\hat{V}_{\text{AL}} = \frac{\hbar}{2} \sum_{m,m'} \kappa_{m,m'} |e, m'\rangle \langle g, m| + \text{H.c.} \quad (\text{IV.18})$$

où les fréquences de Rabi $\kappa_{m,m'}$ ne sont non nulles que si $m' = m, m \pm 1$ du fait des règles de sélection pour l'interaction dipolaire électrique. Elles font intervenir les différentes composantes de polarisation du champ électrique de l'onde lumineuse (σ_{\pm} et π) ainsi que les coefficients de Clebsch-Gordan associés aux transitions $|g, m\rangle \leftrightarrow |e, m'\rangle$.

Remarquons pour commencer qu'il n'y a jamais d'état noir dans le cas $J_e = J_g + 1$. Quelle que soit la polarisation de l'onde laser choisie, il y a toujours une population stationnaire non nulle pour le niveau excité, sauf bien sûr si l'intensité lumineuse est rigoureusement nulle.

Considérons maintenant le cas $J_e = J_g - 1$. Dans ce cas, le niveau fondamental comporte deux sous-niveaux Zeeman de plus que le niveau excité¹. La matrice \hat{V}_{AL} qui décrit le couplage atome-laser envoie donc un espace de dimension $2J_g + 1$ vers un espace de dimension plus petite $2J_e + 1 = (2J_g + 1) - 2$. Son noyau est donc obligatoirement de dimension supérieure ou égale à 2, c'est-à-dire qu'il y a forcément un sous-espace de dimension au moins 2 dans l'espace associé au niveau g , formé d'états non-couplés tels que

$$\hat{V}_{\text{AL}}|g_{\alpha}\rangle = 0. \quad (\text{IV.19})$$

Nous avons représenté sur la figure IV.7 ces sous-espaces pour une transition $J_g = 3/2 \leftrightarrow J_e = 1/2$, dans les deux cas d'une polarisation circulaire et d'une polarisation linéaire parallèle à l'axe de quantification (polarisation π).

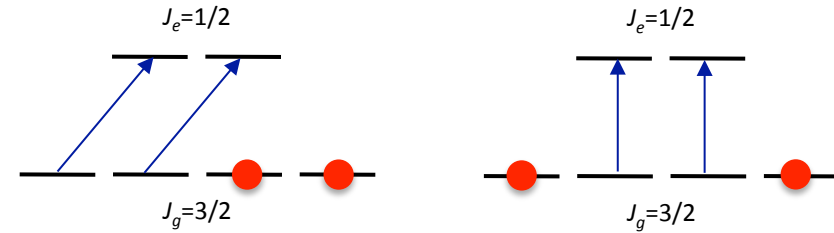


FIGURE IV.7. Atome avec une transition de résonance $J_g = 3/2 \leftrightarrow J_e = 1/2$ éclairé par une lumière de polarisation circulaire (gauche) et linéaire (droite). Les états noirs sont indiqués par des disques rouges.



FIGURE IV.8. Transition $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 1/2$: il n'y a un état noir que si la polarisation est strictement circulaire.

Passons finalement au cas d'une transition de résonance $J_e = J_g$. Ce cas est plus subtil. La matrice \hat{V}_{AL} connecte deux espaces de même dimension et il n'y a donc pas de raison évidente pour laquelle on devrait s'attendre à l'existence d'un état noir. En fait, l'existence de ces états dépend de la valeur entière ou demi-entière de J_g et J_e .

- Dans le cas demi-entier, il n'y a en général pas d'état noir. Par exemple, pour une transition $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 1/2$ et une polarisation linéaire, on obtient deux systèmes à deux niveaux indépendants et une population excitée non nulle. Ce n'est que si la lumière est polarisée circulairement que l'on retrouve un état noir dans ce cas (figure IV.8).
- Dans le cas J_g, J_e entiers, il y a toujours un état noir. Ceci est dû aux valeurs particulières des coefficients de Clebsch-Gordan. Si la lumière est

1. Rappelons que le nombre de sous-niveaux Zeeman est $2J_{g,e} + 1$.

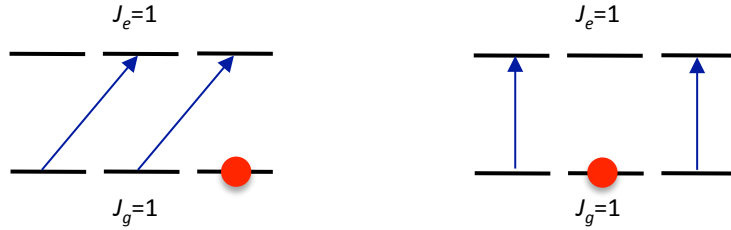


FIGURE IV.9. Transition $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$: il y a un état noir quelle que soit la polarisation, bien que la dimension de l'espace excité soit aussi grande que la dimension de l'espace fondamental.

polarisée circulairement, l'état noir est le même que celui trouvé pour J_g demi-entier : $|m_g = \pm J_g\rangle$. Si la lumière a une polarisation linéaire et parallèle à l'axe de quantification, l'état noir est l'état $|g, m = 0\rangle$, du fait de l'annulation du coefficient de Clebsch–Gordan qui caractérise la transition $|g, m = 0\rangle \leftrightarrow |e, m = 0\rangle$.

Remarque : le cas particulier $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$. Ol'shanii & Minogin (1992) ont obtenu dans ce cas une expression remarquablement simple de l'état noir pour un champ lumineux de polarisation quelconque. Choisissons un axe de quantification et caractérisons un état fondamental par le vecteur à trois composantes complexes \vec{g} :

$$|\psi_g\rangle = \sum_{m=-1}^{+1} \psi_{g,m} |g, m\rangle \leftrightarrow \vec{g} = \begin{pmatrix} \psi_{g,-1} \\ \psi_{g,0} \\ \psi_{g,+1} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.20})$$

et idem pour un état excité quelconque, qui sera caractérisé par un vecteur à trois composantes complexes \vec{e} . Considérons par ailleurs le vecteur polarisation ϵ (complexe) du champ électrique de l'onde laser :

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \epsilon e^{-i\omega_L t} + \text{c.c.} \quad (\text{IV.21})$$

Avec ces notations, Ol'shanii & Minogin (1992) ont montré que l'absorption d'un photon laser envoie un état fondamental quelconque caractérisé par \vec{g} vers l'état excité caractérisé par \vec{e} tel que

$$\vec{e} \propto \epsilon \times \vec{g}. \quad (\text{IV.22})$$

L'expression de l'état non couplé s'en déduit immédiatement : il s'agit de l'état fondamental dont les composantes $\psi_{g,m}$ sont telles que le vecteur à trois composantes \vec{g} est parallèle à la polarisation ϵ du faisceau lumineux.

2 Refroidissement par état noir

2-1 Une image simple du refroidissement

Nous avons vu dans ce qui précède que le système en Λ offre la possibilité d'obtenir un état interne non couplé à la lumière

$$|\psi_{\text{NC}}\rangle \propto \kappa_2 |g_1\rangle - \kappa_1 |g_2\rangle. \quad (\text{IV.23})$$

Cet état $|\psi_{\text{NC}}\rangle$ est un état propre de l'hamiltonien pourvu que la condition de résonance Raman soit satisfaite

$$\Delta \equiv \Delta_1 - \Delta_2 = 0. \quad (\text{IV.24})$$

Pour que cet effet puisse être utilisé pour refroidir des atomes, il faut le rendre dépendant de la vitesse. Plaçons-nous à une dimension (z) ; la dépendance en vitesse sera obtenue si les deux ondes se propagent en sens inverse, puisque le désaccord Raman $\Delta_1 - \Delta_2$ est alors fonction de v , composante de la vitesse le long de l'axe Oz . Supposons que l'onde pilotant la transition $g_1 \leftrightarrow e$ se propage vers les z négatifs, et que l'onde pilotant la transition $g_2 \leftrightarrow e$ se propage vers les z positifs (figure IV.10) :

$$\Delta_1(v) = \Delta_1(0) + kv, \quad \Delta_2(v) = \Delta_2(0) - kv. \quad (\text{IV.25})$$

Supposons qu'on choisisse un désaccord Raman nul pour un atome au repos, $\Delta_1(0) = \Delta_2(0)$, comme sur la figure IV.5A. Le désaccord Raman Δ pour un atome de vitesse v selon Oz sera

$$\Delta = 2kv. \quad (\text{IV.26})$$

On peut alors proposer une image simple pour le mécanisme de refroidissement exploitant ces états noirs (figure IV.11). On part d'une distribution en vitesse large et on éclaire les atomes avec les deux lasers 1 et 2 contre-propageants, en prenant ces deux laser résonnants et de même

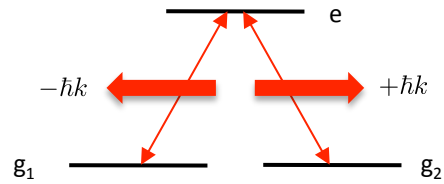


FIGURE IV.10. Configuration 1D permettant d'obtenir un piègeage cohérent de population sélectif en vitesse .

couplage $\kappa_1 = \kappa_2$. La variation de la population de l'état excité avec la vitesse, qui donne également le taux d'émission spontanée, est montrée sur la figure IV.12. Cette population présente un trou marqué en $v = 0$ comme attendu : c'est ce qu'on appelle le piègeage cohérent de population sélectif en vitesse (« piègeage » fait ici référence à l'accumulation dans l'état non couplé). Les atomes initialement de vitesse non nulle vont absorber des photons laser, émettre des photons spontanés, et leur vitesse va effectuer un mouvement brownien. Quand par chance ils arrivent au voisinage de la vitesse nulle, la probabilité par unité de temps pour qu'ils absorbent un photon chute fortement s'ils sont dans l'état $|\psi_{NC}(v)\rangle$: on s'attend donc à une accumulation d'atomes autour de $v = 0$, comme on l'avait vu pour le refroidissement Doppler en raie étroite. Notons quand même une différence importante entre les deux types de refroidissement : dans le piègeage cohérent de population tel que nous l'avons présenté, il n'y a pas de force de friction qui ramène la vitesse autour de 0 : l'évolution de la vitesse est ici un phénomène purement diffusif.

Nous allons voir ci-dessous que ce raisonnement simple, s'appuyant sur la notion semi-classique de vitesse d'un atome définie indépendamment de son état interne, est *grosso modo* correct, mais qu'il doit malgré tout être complété. Par ailleurs, il pose un certain nombre de questions qu'il faut aborder pour évaluer les performances du refroidissement :

- Puisque le refroidissement attendu dépend de la présence d'un trou d'excitation au voisinage de la vitesse nulle, comment la taille de ce trou varie-t-elle avec les paramètres des lasers ?
- Si l'on cherche à atteindre un refroidissement sub-recul, on ne peut pas se contenter de raisonner sur la vitesse de l'atome sans dire s'il s'agit

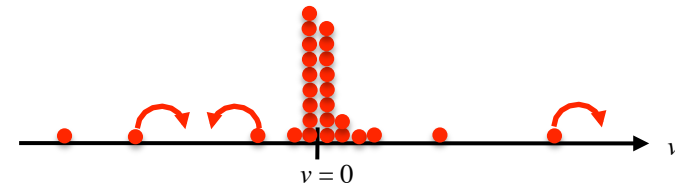


FIGURE IV.11. Mouvement brownien dans l'espace des vitesses avec accumulation autour de la vitesse nulle grâce au piègeage cohérent de population sélectif en vitesse.

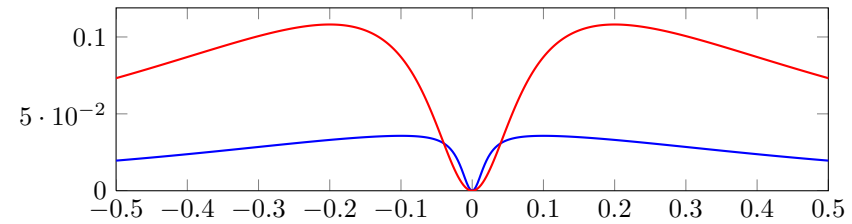


FIGURE IV.12. Variation de la population de l'état excité P_e avec la vitesse atomique, mesurée en unité de Γ/k . Figure réalisée pour $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Bleu : $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.2\Gamma$, Rouge : $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.4\Gamma$.

de la vitesse avant ou absorption du dernier photon. Comment faire un raisonnement quantique, prenant en compte ces changements de vitesse élémentaires ?

- Le processus tel que nous l'avons décrit repose sur un mouvement brownien purement diffusif qui ramène de temps en temps la vitesse de l'atome au voisinage de $v = 0$. Or, la probabilité de retour vers l'origine du mouvement brownien dépend fortement de la dimensionnalité du problème. Quelle est l'efficacité de ce processus à 3D ?

2-2 Largeur du trou d'excitation

Intéressons-nous à la largeur du trou de la courbe d'excitation autour de la vitesse nulle, qui va être déterminant pour l'efficacité du processus

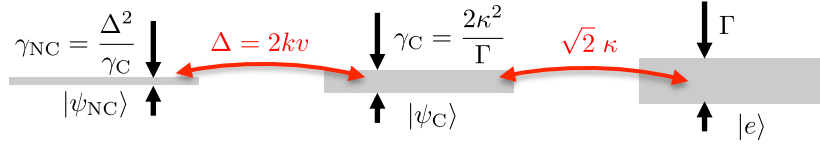


FIGURE IV.13. Les trois états couplés du problème et leur largeur. La figure est faite à résonance $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, avec des fréquences de Rabi égales $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$.

de refroidissement. Nous allons discuter l'influence de la dissipation en passant en revue successivement les trois états internes (figure IV.13)

$$|e\rangle, |\psi_C\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_1\rangle + |g_2\rangle), \quad |\psi_{NC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_1\rangle - |g_2\rangle). \quad (\text{IV.27})$$

Nous nous intéressons pour simplifier au cas où les deux ondes ont la même fréquence de Rabi et nous posons $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2$, que nous supposons très petit devant Γ . Notre raisonnement reproduit celui développé par Aspect et al. (1989).

L'état $|e\rangle$ a pour largeur Γ : l'atome préparé dans cet état émet un photon spontané au bout d'un temps $\sim \Gamma^{-1}$.

L'état $|\psi_C\rangle$ est couplé de manière résonante à l'état $|e\rangle$ avec la fréquence de Rabi $\sqrt{2}\kappa$. Ce couplage confère à l'état $|\psi_C\rangle$ la largeur [cf. (IV.5)] :

$$\gamma_C = \frac{2\kappa^2}{\Gamma}, \quad (\text{IV.28})$$

ce qui signifie qu'un atome placé initialement dans l'état $|\psi_C\rangle$ diffusera un photon après un temps de l'ordre γ_C^{-1} .

L'état $|\psi_{NC}\rangle$ est par construction non couplé à l'état excité. En revanche, si le désaccord Raman $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$ est non nul, les états $|\psi_{NC}\rangle$ et $|\psi_C\rangle$ sont couplés entre eux. En effet, pour $\kappa = 0$, l'état initial

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_{NC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_1\rangle - |g_2\rangle) \quad (\text{IV.29})$$

évolue comme

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\Delta t/2} |g_1\rangle - e^{+i\Delta t/2} |g_2\rangle \right) \quad (\text{IV.30})$$

et il devient donc proportionnel à $|\psi_C\rangle$ à l'instant $t = \pi/\Delta$. Le couplage entre $|\psi_{NC}\rangle$ et $|\psi_C\rangle$ est donc directement donné par Δ . Une valeur non nulle de Δ (ou encore une vitesse non nulle pour le cas qui nous intéresse) va donner une largeur à l'état $|\psi_{NC}\rangle$:

$$\gamma_{NC} = \frac{\Delta^2}{\gamma_C}, \quad (\text{IV.31})$$

ce qui se réécrit encore, en utilisant (IV.28) et $\Delta = 2kv$:

$$\gamma_{NC} = 2\Gamma \frac{(kv)^2}{\kappa^2}. \quad (\text{IV.32})$$

Cette estimation de γ_{NC} nous donne la largeur recherchée du trou d'excitation au voisinage de la résonance Raman. On remarque en particulier que :

- La variation du taux d'excitation est quadratique par rapport à la vitesse.
- La raideur de cette variation quadratique est d'autant plus grande que la fréquence de Rabi κ est petite ; ce point est clairement visible sur la figure IV.12, où l'on a tracé P_e pour deux valeurs de κ différentes.

2-3 Version quantique du problème

Dans ce qui précède, nous avons raisonné sur la vitesse v de l'atome sans préciser s'il s'agissait de la vitesse avant ou après que l'atome ait absorbé un photon. Ce type de raisonnement est légitime quand le changement d'effet Doppler lié au recul d'un seul photon, $kv_r = 2\omega_r$, est petit devant toutes les autres fréquences du problème. En revanche, il ne peut pas être maintenu si l'on cherche à obtenir un refroidissement subrecoil. Il faut alors être plus précis pour déterminer précisément l'état dans lequel les atomes vont s'accumuler.

Pour traiter l'interaction atome-rayonnement dans ce cas, il faut prendre en compte le recul de l'atome dans les processus absorption-émission. Commençons par le cas sans émission spontanée. On peut alors regrouper les états atomiques (internes+externes) en familles

$$\mathcal{F}(v) = \{ |g_1, v + v_r\rangle, |e, v\rangle, |g_2, v - v_r\rangle \}. \quad (\text{IV.33})$$

Le couplage atome-laser laisse ces familles globalement stables. La condition de résonance Raman dans une famille donnée s'écrit alors :

$$E(g_1) + \hbar\omega_{L,1} + \frac{M(v + v_r)^2}{2} = E(g_2) + \hbar\omega_{L,2} + \frac{M(v - v_r)^2}{2}. \quad (\text{IV.34})$$

Posons comme ci-dessus $\Delta_1 = \Delta_2$, c'est-à-dire $E(g_1) + \hbar\omega_{L,1} = E(g_2) + \hbar\omega_{L,2}$. La condition de résonance Raman (IV.34) est obtenue pour $v = 0$; la seule famille présentant un état véritablement noir est donc la famille $\mathcal{F}(v = 0)$ et l'état noir correspondant s'écrit

$$|\psi_{\text{NC}}(v = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g_1, +v_r\rangle - |g_2, -v_r\rangle). \quad (\text{IV.35})$$

Une analyse en vitesse de cet état doit montrer deux pics situés en $\pm v_r$, de part et d'autre de la vitesse nulle.

En présence d'émission spontanée, la famille occupée par l'atome va changer aléatoirement du fait du recul associé aux processus d'émission. Dans chaque famille, l'état de plus grande durée de vie est l'état non couplé $|\psi_{\text{NC}}(v)\rangle$ et l'estimation faite en (IV.32) pour sa durée de vie reste valable.

Ce traitement plus précis confirme donc l'image proposée plus haut pour le refroidissement subrecul, pourvu que l'on remplace la notion un peu floue de « vitesse de l'atome » par la notion de famille $\mathcal{F}(v)$. L'état de l'atome effectue bien une marche au hasard, l'atome sautant d'une famille à l'autre sous l'effet de l'émission spontanée. Quand cette marche au hasard amène l'atome dans l'état non couplé $|\psi_{\text{NC}}(v)\rangle$ d'une famille avec v très proche de 0, le temps de séjour dans cette famille devient extrêmement long. On peut ainsi espérer accumuler un grand nombre d'atomes au voisinage de $|\psi_{\text{NC}}(v = 0)\rangle$.

2-4 Mise en évidence expérimentale à 1D

La première expérience de refroidissement subrecul a été menée à une dimension par le groupe de l'ENS en utilisant précisément ce mécanisme (Aspect et al. 1988). La transition utilisée était la raie $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_1$ de l'hélium préparé dans son état triplet métastable, éclairé par deux ondes contre-propageantes polarisées σ_+ et σ_- . Après quelques processus de

pompage optique, l'atome se retrouve dans le système en Λ (figure IV.14, haut) :

$$|g, m = -1\rangle \leftrightarrow |e, m = 0\rangle \leftrightarrow |g, m = +1\rangle \quad (\text{IV.36})$$

car l'état $|e, m = 0\rangle$ a une probabilité nulle de se désexciter vers le troisième sous-niveau fondamental $|g, m = 0\rangle$. L'expérience a confirmé l'effet attendu et une distribution en vitesse à deux pics, en $\pm v_r$, a été observée (figure IV.14, bas). Il s'agit bien d'un refroidissement (et non d'un simple filtrage) car le nombre d'atomes dans ces classes de vitesse est plus élevé après interaction avec la lumière qu'avant.

3 Lois d'échelle pour le refroidissement subrecul

Nous allons donner dans ce paragraphe quelques éléments pour évaluer l'efficacité d'un refroidissement subrecul tirant parti d'un zéro dans le taux d'excitation de l'atome, comme en figure IV.12. Les raisonnements que nous allons faire seront également valables pour le refroidissement Raman que nous verrons en § 4. Nous souhaitons déterminer la largeur caractéristique du pic en vitesse étroit généré par le refroidissement, ainsi que la fraction d'atomes susceptibles de s'accumuler dans ce pic. Il s'agit d'un problème délicat, à la fois du fait de la multitude des situations possibles et de la complexité des outils mathématiques et statistiques à utiliser. Nous allons nous restreindre ici à la description d'un cas représentatif, qui nous permettra de discuter l'influence de deux paramètres importants : (i) la dimensionnalité de l'espace et (ii) la variation du taux d'excitation autour de son zéro. Nous renvoyons le lecteur intéressé par un approfondissement de ces notions vers Bardou et al. (1994) ainsi que vers l'ouvrage très complet de Bardou et al. (2002).

3-1 Modèle pour le taux d'excitation

Pour simplifier la discussion, nous allons modéliser le problème de la manière suivante (figure IV.15) : l'état de l'atome est repéré par sa vitesse v (1D, 2D ou 3D), qui permet de calculer le taux d'excitation $\gamma(v)$. Nous

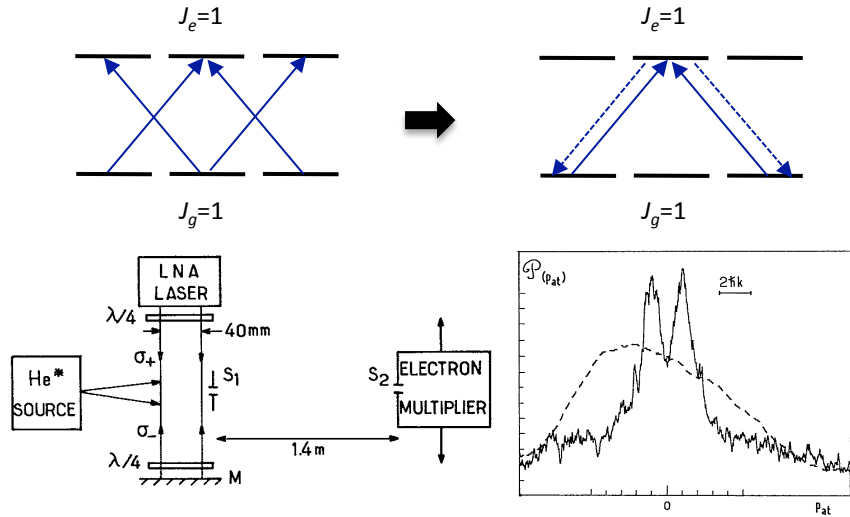


FIGURE IV.14. Haut : Transition $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ éclairée en lumière σ_+ et σ_- , composée d'un système en Λ et d'un système en V . Après quelques processus d'émission spontanée, l'atome est pompé optiquement dans le système en Λ et le refroidissement par piégeage cohérent de population peut commencer. Bas : figure extraite de Aspect et al. (1988), montrant le principe du refroidissement transverse sub-recul d'un jet atomique d'hélium métastable par piégeage cohérent de population et la collimation observée. La structure en double pic de la distribution en vitesses finale (trait continu) est caractéristique de l'état noir (IV.35) (ou de ses voisins immédiats). Les traits pointillés représentent la distribution en vitesse initiale.

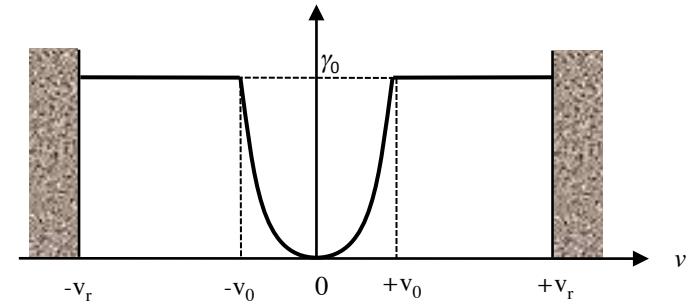


FIGURE IV.15. Modélisation du taux d'excitation (ici à 1D) selon (IV.37), avec des « murs » dans l'espace des vitesses, situés ici à $|v| = v_r$.

décrivons ce taux de la manière suivante :

$$\gamma(v) = \begin{cases} \gamma_0 \left(\frac{v}{v_0}\right)^\alpha & \text{si } |v| < v_0, \\ \gamma_0 & \text{si } |v| > v_0, \end{cases} \quad (IV.37)$$

le cas de l'état noir vu plus haut correspondant à l'exposant $\alpha = 2$ (cf. IV.32).

Nous supposons de plus qu'au mécanisme de refroidissement subrecul créant le trou du taux d'excitation au voisinage de $v = 0$ s'ajoute un autre mécanisme de refroidissement, que nous ne détaillons pas à ce stade et qui peut être de type Doppler ou Sisyphes. Cet autre mécanisme maintient les atomes dans une zone de taille finie centrée autour de $v = 0$. Il n'était pas présent dans notre discussion du paragraphe précédent, ni dans l'expérience représentée sur la figure IV.14. Dans la mesure où il s'agissait de situations unidimensionnelles, ce mécanisme n'était pas véritablement nécessaire car le mouvement brownien de la vitesse causé par les reculs aléatoires dus à l'émission spontanée était suffisant pour ramener de temps en temps l'atome au niveau du trou en $v = 0$. Mais à trois dimensions, on ne peut pas compter sur ce mouvement brownien et il faut « aider » l'atome à s'approcher de $v = 0$ et à trouver la zone sombre dans l'espace des vitesses.

Pour modéliser de la manière la plus simple possible cet autre mécanisme de refroidissement, nous allons supposer que le module de la vitesse

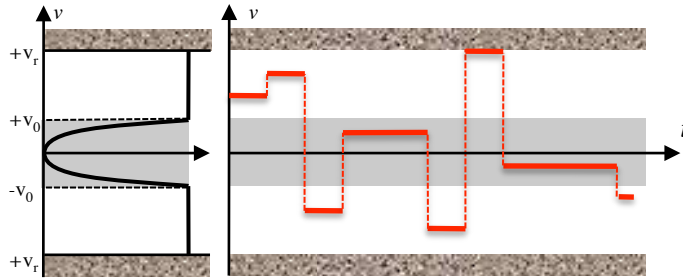


FIGURE IV.16. Marche au hasard dans l'espace des vitesses. Quand la particule arrive dans la zone sombre, la durée de séjour sur une classe de vitesse donnée est augmentée par rapport à la zone brillante.

de l'atome ne peut pas dépasser la vitesse de recul :

$$|v| < v_r. \tag{IV.38}$$

Nous plaçons donc des « murs » dans l'espace des vitesses qui confinent l'atome dans la zone centrale. La position exacte de ces murs n'est pas importante car elle intervient comme un simple facteur multiplicatif dans le calcul. Nous la fixons ici à v_r pour simplifier l'analyse.

3-2 Temps de séjour dans la zone sombre et loi de Lévy

Reprenons l'image développée précédemment, en nous plaçant dans la situation

$$v_0 \ll v_r \tag{IV.39}$$

et en tenant compte des murs. Tant que la particule n'est pas dans la zone sombre $|v| < v_0$, elle saute aléatoirement d'une vitesse à l'autre avec un taux γ_0 , chaque pas de cette marche au hasard étant de l'ordre de v_r (figure IV.16). À chaque saut, la particule « tente donc sa chance » pour tomber dans la zone sombre, l'arrosage de cette zone étant uniforme. Une fois tombée dans cette zone, il faut à la particule un temps τ de l'ordre de $1/\gamma(v)$ pour refaire un nouveau saut.

Plaçons-nous d'abord à une dimension pour évaluer la loi statistique $\mathcal{P}(\tau)$ du temps de séjour τ , la quantité $\mathcal{P}(\tau) d\tau$ donnant la probabilité pour

que la particule tombée dans la zone sombre y reste un temps compris entre τ et $\tau + d\tau$. Nous allons supposer que durant son séjour de durée τ dans la zone sombre, la particule occupe une et une seule vitesse v . En effet, la probabilité que la particule quitte v pour aller vers une vitesse v' également située dans la zone sombre est faible si la largeur de cette zone est petite devant la taille moyenne d'un saut v_r .

Nous prendrons l'expression suivante pour la densité de probabilité $\mathcal{P}(v)$ qu'une particule entrant dans la zone sombre atteigne la vitesse v :

$$\mathcal{P}(v) = \frac{1}{2v_0}, \tag{IV.40}$$

ce qui signifie que l'arrosage de cette zone sombre se fait de manière uniforme. Supposons par ailleurs que le temps de séjour sur la classe de vitesse v est exactement égal ² à $1/\gamma(v)$. Comme les classes de vitesse v et $-v$ correspondent au même temps de séjour, on a alors

$$\mathcal{P}(\tau) d\tau = [\mathcal{P}(v) + \mathcal{P}(-v)] dv \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{\gamma_0} \left(\frac{v_0}{v} \right)^\alpha \tag{IV.41}$$

qui se résout en

$$\mathcal{P}(\tau) \propto \frac{1}{\tau^{1+\frac{1}{\alpha}}}. \tag{IV.42}$$

En particulier, pour le cas du piégeage cohérent de population, on a $\alpha = 2$ et donc :

$$\text{résonance noires 1D :} \quad \mathcal{P}(\tau) \propto \frac{1}{\tau^{3/2}}. \tag{IV.43}$$

La loi de distribution (IV.43) est à l'origine d'une partie de la complexité mathématique du problème. Il s'agit d'une loi large qui, si elle est normalisable, n'a pas de moments d'ordre 1, 2, ... bien définis. Ceci entraîne par exemple que le théorème de la limite centrale ne s'applique pas : si on s'intéresse au temps total passé par l'atome dans la zone sombre après N passages :

$$T_N = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_N, \tag{IV.44}$$

2. Il serait plus correct d'écrire que le temps de séjour τ est lui-même une variable aléatoire de loi exponentielle dont la moyenne est donnée par $1/\gamma(v)$; toutefois, cela ne change pas la loi d'échelle donnée en (IV.42) [voir Bardou et al. (2002), §3.3.1.2].

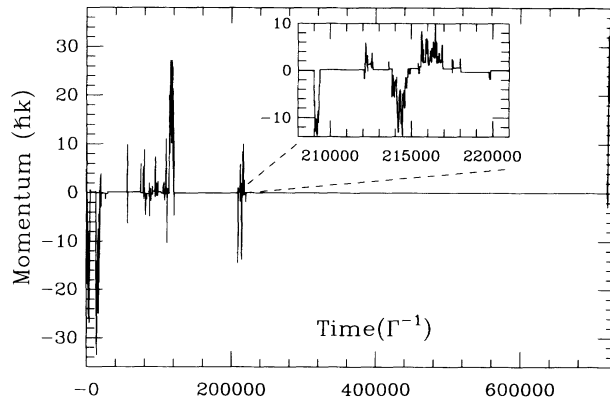


FIGURE IV.17. Exemple de trajectoire dans l'espace des vitesses obtenue par une simulation Monte Carlo du processus de refroidissement par résonance noire. On voit clairement que ces trajectoires sont dominées par quelques événements rares au cours desquels la vitesse de la particule atteint une valeur proche de zéro [Figure extraite de Bardou et al. (1994)].

on ne trouve pas une distribution gaussienne bien que l'on somme N variables aléatoires indépendantes, mais une distribution de Lévy. Plus précisément, le théorème de la limite centrale usuel indiquerait que T_N croît comme $N\langle\tau\rangle$ plus une correction en \sqrt{N} . Ici au contraire, la somme T_N est dominée par quelques événements (cf. figure IV.17) et on trouve que T_N croît comme N^2 [voir par exemple Bouchaud & Georges (1990)].

On peut généraliser le raisonnement qui précède au cas multidimensionnel. À trois dimensions, en supposant un arrosage uniforme de la boule $|\mathbf{p}| < p_0$, on trouve à la place de (IV.40) :

$$\mathcal{P}(v) = \frac{3v^2}{v_0^3} \quad (\text{IV.45})$$

ce qui conduit à

$$\mathcal{P}(\tau) \propto \frac{1}{\tau^{1+\frac{3}{\alpha}}}. \quad (\text{IV.46})$$

Plus généralement, en dimension D , on a

$$\mathcal{P}(\tau) \propto \frac{1}{\tau^{1+\frac{D}{\alpha}}}. \quad (\text{IV.47})$$

3-3 Largeur de la distribution en vitesse

Le processus de refroidissement que nous envisageons ici n'a pas d'état stationnaire, contrairement au cas du refroidissement Doppler ou Sisyphe. Donnons-nous un temps d'interaction t suffisamment long pour que de nombreux sauts aient pu se produire, au moins pour les particules qui ont évité la zone sombre :

$$t \gg 1/\gamma_0. \quad (\text{IV.48})$$

Les particules qui au cours de leur évolution sont tombées suffisamment proches de $v = 0$ sont ensuite restées dans cette zone. Plus précisément, pour un temps t donné, on peut définir la vitesse $v_t \ll v_0$ telle que

$$t = \frac{1}{\gamma(v_t)} \quad \longleftrightarrow \quad v_t = \frac{v_0}{(\gamma_0 t)^{1/\alpha}} \quad (\text{IV.49})$$

qui définit le rayon d'une deuxième sphère (à 3D) à l'intérieur de la sphère de zone sombre de rayon v_0 (figure IV.18). Dans ce qui suit, nous appellerons cette deuxième sphère la « zone noire » ; en effet, les particules arrivées à l'intérieur de cette zone entre 0 et t y sont encore (avec une bonne probabilité) à l'instant t . Dans l'hypothèse d'un arrosage uniforme de la zone sombre, on s'attend à une densité également uniforme dans cette zone noire.

On prévoit donc que la distribution en vitesse $\mathcal{P}(v)$ comportera trois composantes, que nous schématisons sur la figure IV.18 :

- La zone noire $v < v_t$: les classes de vitesse dans cette zone ont une population qui augmente avec le temps, puisqu'elles sont arrosées en permanence, sans que les particules s'en échappent. Notons toutefois que la taille de cette zone décroît avec le temps, comme $1/\sqrt{t}$ dans le cas $\alpha = 2$ des résonances noires. La densité de probabilité est uniforme dans cette zone.
- La zone brillante $v > v_0$ dans laquelle les particules effectuent des sauts en vitesse fréquents. La densité de probabilité est également à peu près uniforme dans cette zone.
- La zone intermédiaire $v_t < v < v_0$, située à l'intérieur de la zone sombre, mais composée de classes de vitesse avec un taux $\gamma(v)$ relativement élevé, tel que les particules ont eu le temps d'entrer et sortir de ces classes de vitesse durant l'intervalle de temps t .

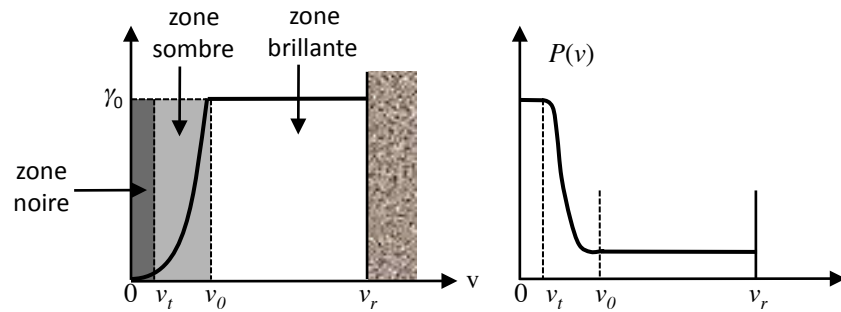


FIGURE IV.18. Gauche : taux d'excitation et « zone noire » ; pour un temps d'interaction t donné, on peut définir une « zone noire », telle qu'un atome tombé dans cette zone y est ensuite resté jusqu'à l'instant t : $\gamma(v_t)t = 1$. Droite : Schéma qualitatif du profil de vitesse attendu ; la densité à l'intérieur de la zone noire augmente avec le temps, mais le rayon v_t de cette zone diminue.

Cette prédiction qualitative peut être confirmée par un traitement analytique ou numérique plus précis des différents processus stochastiques [Bardou et al. (2002), chapitre 6].

3-4 Fraction d'atomes refroidis

La dernière étape de notre analyse va consister à estimer, pour un temps d'interaction t donné, la fraction d'atomes qui ont atteint la zone « noire » $|v| < v_t$ (figure IV.18). Comme la taille de cette zone diminue avec le temps, il n'est pas évident *a priori* de savoir si cette fraction est importante. Ici encore, nous allons faire un raisonnement qualitatif qui peut être confirmé par une analyse quantitative nettement plus élaborée [voir Bardou et al. (2002), en particulier § 6.3 pour le cas 1D et § 6.4 pour le cas 3D].

Nous allons poser qu'un atome effectue pendant la durée t un nombre de « tentatives »

$$N_{\text{tent.}} = \gamma_0 t \tag{IV.50}$$

pour entrer dans la zone noire³. À chaque tentative, l'atome en dimension

3. Il y a là un raccourci important car certains atomes ont pu passer du temps dans la zone

D a une probabilité

$$p \sim \left(\frac{v_t}{v_r}\right)^D \tag{IV.51}$$

d'arriver dans la zone noire de rayon v_t . La probabilité totale qu'un atome arrive dans la zone noire pendant la durée t est donc

$$p_{\text{tot}} = p N_{\text{tent.}} \propto t (v_t)^D \propto t^{1-\frac{D}{\alpha}}. \tag{IV.52}$$

Dans ce modèle simple, on voit donc que le paramètre déterminant est $1 - D/\alpha$:

- Si $D/\alpha < 1$, alors la probabilité p_{tot} donnée en (IV.52) croît indéfiniment avec le temps⁴. Ceci signifie qu'une fraction significative des atomes va s'accumuler dans le pic central. Ce cas est réalisé à 1D pour les résonances noires ($D/\alpha = 1/2$).
- Si $D/\alpha > 1$, alors la probabilité pour qu'un atome finisse dans le pic central tend vers 0 quand t augmente. Le pic autour de la vitesse nulle peut être détectable dans une expérience de durée finie, mais il ne contiendra qu'une faible fraction des atomes. C'est le cas des résonances noires à trois dimensions ($D/\alpha = 3/2$).
- Le cas $D = \alpha$, qui correspond aux résonances noires à deux dimensions, est marginal. La détermination de la valeur précise de la fraction d'atomes dans la zone sombre nécessite un traitement plus précis que les simples lois d'échelle présentées ici.

3-5 Expériences à 2D et 3D

Les expériences menées à 1D sur l'atome d'hélium métastable (§ 2-4) ont été généralisées quelques années plus tard à 2D et 3D par le groupe de l'ENS (Lawall et al. 1994b; Lawall et al. 1994a). Le point de départ de ces expériences était un nuage d'atomes d'hélium métastable refroidi et confiné dans un piège magnéto-optique, fonctionnant sur la transition $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_2$. À un instant donné, les faisceaux du piège magnéto-optique

grise $v_t < |v| < v_0$, ce qui a ralenti le taux de leur marche au hasard sans pour autant les placer dans la zone noire désirée.

4. Notre modèle simple consistant à additionner les probabilités comme en (IV.52) cesse bien sûr d'être valable quand la probabilité p_{tot} n'est plus petite devant 1.

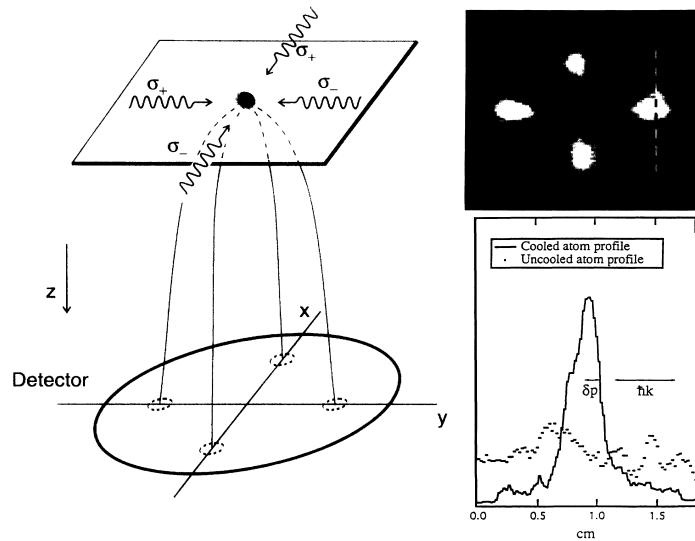


FIGURE IV.19. Gauche : schéma de l'expérience de refroidissement par état noir à deux dimensions. La distribution en impulsion de l'état noir est composée de quatre pics, correspondant aux quatre ondes planes éclairant les atomes. Cette distribution en impulsion est mesurée par temps de vol. Droite : exemple de distribution en impulsion. Chaque pic a une largeur notablement inférieure à la vitesse de recul v_r ($v_r/4$ pour celui montré sur la figure). La courbe en pointillé représente la distribution non refroidie.

sont éteints et les quatre (2D) ou six (3D) faisceaux créant à la fois un refroidissement Sisyphe et le piégeage cohérent de population sont allumés. Le rôle du refroidissement Sisyphe est de créer l'équivalent de « murs » dans l'espace des vitesses, dont la présence est essentielle à 2D ou 3D comme nous l'avons vu plus haut. La largeur de la distribution en vitesse obtenue par cet effet Sisyphe, avant que le refroidissement par état noir ne soit significatif, est de l'ordre de $1.5 v_r$ (Lawall et al. 1994a).

La mesure de la distribution en vitesse des atomes après refroidissement par piégeage cohérent de population révèle quatre (à 2D) ou six (à 3D) pics, correspondant à l'accumulation d'atomes dans l'état noir recherché (figure IV.19). Le fait que le nombre de pics soit égal au nombre de

faisceaux lumineux est une conséquence directe du résultat de Ol'shanii & Minogin (1992) présenté en (IV.20)-(IV.22) : quand on prend en compte le mouvement du centre de masse de l'atome, l'état noir est un spineur à trois composantes, $\vec{g}(\mathbf{r})$, qui est proportionnel au champ électrique $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ de l'onde laser (plus précisément au coefficient de $e^{-i\omega_L t}$ dans l'expression de ce champ). Les largeurs minimales observées pour ces pics sont de l'ordre de $v_r/4$ à 2D et $v_r/6$ (à 3D).

4 Une ombre sur mesure : transition Raman

Nous venons de voir comment l'utilisation d'une résonance noire permet d'obtenir un profil d'excitation sélectif en vitesse, avec une annulation stricte pour une classe de vitesses donnée. Nous allons maintenant explorer une deuxième méthode pour obtenir un résultat similaire : cette méthode, également basée sur un système en Λ , consiste à utiliser des impulsions transférant les atomes entre les sous-niveaux $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$ (figure IV.20). Le profil temporel de l'impulsion est optimisé pour que le transfert soit également sélectif en vitesse, ce qui ouvre une deuxième voie vers un refroidissement nettement en dessous de la vitesse de recul v_r .

4-1 Principe du refroidissement Raman

Le refroidissement Raman fonctionne en alternant deux types de phases :

- Au début de la première phase, les atomes sont dans l'état $|g_1\rangle$ avec une distribution en vitesse que l'on souhaite rendre la plus étroite possible (figure IV.21, haut). On les éclaire pendant une durée τ avec une paire de faisceaux Raman de fréquence de Rabi κ_j et de désaccord Δ_j ($j = 1, 2$). Le but est d'induire la transition de $|g_1\rangle$ vers $|g_2\rangle$ de manière sélective en vitesse. Si les désaccords Δ_j sont grands devant les fréquences de Rabi κ_j , on peut éliminer perturbativement l'état excité e et définir une fréquence de Rabi pour la transition Raman :

$$\kappa = \frac{\kappa_1 \kappa_2^*}{2\Delta_e}. \quad (\text{IV.53})$$

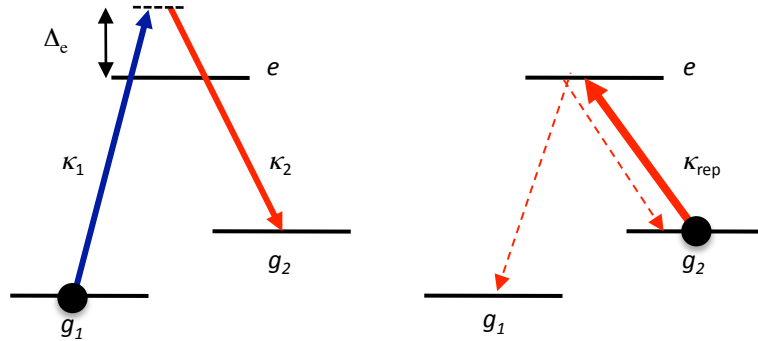


FIGURE IV.20. Principe du refroidissement Raman. À gauche, première phase : une impulsion lumineuse transfère les atomes d'une classe de vitesse donnée de l'état $|g_1\rangle$ vers l'état $|g_2\rangle$. À droite, deuxième phase : un faisceau repompeur ramène les atomes de $|g_2\rangle$ vers $|g_1\rangle$. Le bilan d'impulsion sur le cycle rétrécit la largeur de la distribution en vitesse.

Le transfert d'impulsion correspondant, $\mathbf{q} = \hbar(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$, peut être ajusté en modifiant l'angle entre les vecteurs d'onde \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 . Le désaccord Raman $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$ et la variation temporelle du couplage $\kappa(t)$ induit par cette paire de faisceaux sont choisis de manière à exciter les atomes dont la vitesse se situe à l'intérieur d'une classe déterminée par la conservation de l'énergie⁵ (à \hbar/τ près) :

$$E(g_1) + \hbar\omega_{L,1} + \frac{1}{2}Mv^2 \approx E(g_2) + \hbar\omega_{L,2} + \frac{1}{2}M(\mathbf{v} + \mathbf{q}/M)^2, \quad (\text{IV.54})$$

ce qui se simplifie pour donner

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{q} = \hbar\Delta - \frac{q^2}{2M}. \quad (\text{IV.55})$$

Le transfert d'impulsion \mathbf{q} est choisit tel qu'il ramène la vitesse de l'atome vers la vitesse nulle ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{q} < 0$) : dans un modèle à une dimension, si la classe de vitesse visée est négative, les atomes de cette

5. En toute rigueur, il faut inclure dans l'énergie $E(g_i)$ de l'état g_i le déplacement lumineux $\delta E(g_i)$ de cet état dû au laser i (Moler et al. 1992). Toutefois les contributions de $\delta E(g_1)$ et $\delta E(g_2)$ à (IV.54) se compensent si on prend $\kappa_1 = \kappa_2$ et $\Delta_1 \approx \Delta_2$.

classe feront avec probabilité élevée une transition qui change leur vitesse de v à $v + 2v_r$, accompagnée du passage $|g_1\rangle \rightarrow |g_2\rangle$, alors que les atomes en dehors de cette classe ne seront pas affectés et resteront dans $|g_1\rangle$ (figure IV.21, milieu).

- La deuxième phase consiste à repomper tous les atomes de $|g_2\rangle$ vers $|g_1\rangle$. Un faisceau repompeur couple de manière résonante l'état $|g_2\rangle$ à l'état excité $|e\rangle$ (figure IV.20). Une fois dans l'état $|e\rangle$, l'atome peut retomber sur $|g_1\rangle$ ou $|g_2\rangle$. S'il tombe sur $|g_1\rangle$, le pompage désiré est obtenu et le processus s'arrête. S'il tombe sur $|g_2\rangle$, il peut réabsorber un photon du faisceau repompeur et ainsi de suite. L'impulsion transférée lors d'un processus de pompage optique est $\hbar(\mathbf{k}_{\text{rep.}} - \mathbf{k}_{\text{flu.}})$, où $\mathbf{k}_{\text{flu.}}$ est le vecteur d'onde du photon émis spontanément (figure IV.21, bas).

On répète cette séquence en variant la classe d'atomes concernée par le pulse Raman (figure IV.22) : on peut aller chercher des atomes de vitesse positive ou négative selon différents axes de l'espace, plus ou moins proches de la vitesse nulle. Au final, on espère accumuler un grand nombre d'atomes autour de $v = 0$.

4-2 Sélectivité en vitesse

Pour déterminer précisément la classe de vitesse affectée par un pulse Raman donné, considérons un modèle uni-dimensionnel avec $\mathbf{k}_1 = -k\mathbf{u}_z$, $\mathbf{k}_2 = +k\mathbf{u}_z$ comme sur la figure IV.10. Prenons un atome de vitesse initiale v et écrivons son état interne sous la forme

$$|\psi(t)\rangle = \alpha_1(t)|g_1\rangle + \alpha_2(t)|g_2\rangle, \quad \alpha_1(0) = 1, \alpha_2(0) = 0. \quad (\text{IV.56})$$

Comme indiqué plus haut, nous négligeons ici la population de l'état $|e\rangle$ ce qui est légitime si les fréquences de Rabi κ_j sont petites devant les désaccords Δ_j . L'évolution dans le temps des coefficients α_j est donnée par l'équation de Schrödinger

$$i\dot{\alpha}_1 = \frac{\Delta_v}{2}\alpha_1 + \frac{\kappa^*(t)}{2}\alpha_2, \quad i\dot{\alpha}_2 = \frac{\kappa(t)}{2}\alpha_1 - \frac{\Delta_v}{2}\alpha_2, \quad (\text{IV.57})$$

où le désaccord Δ_v dépendant de la vitesse s'écrit :

$$\Delta_v = \Delta + 2k(v - v_r). \quad (\text{IV.58})$$

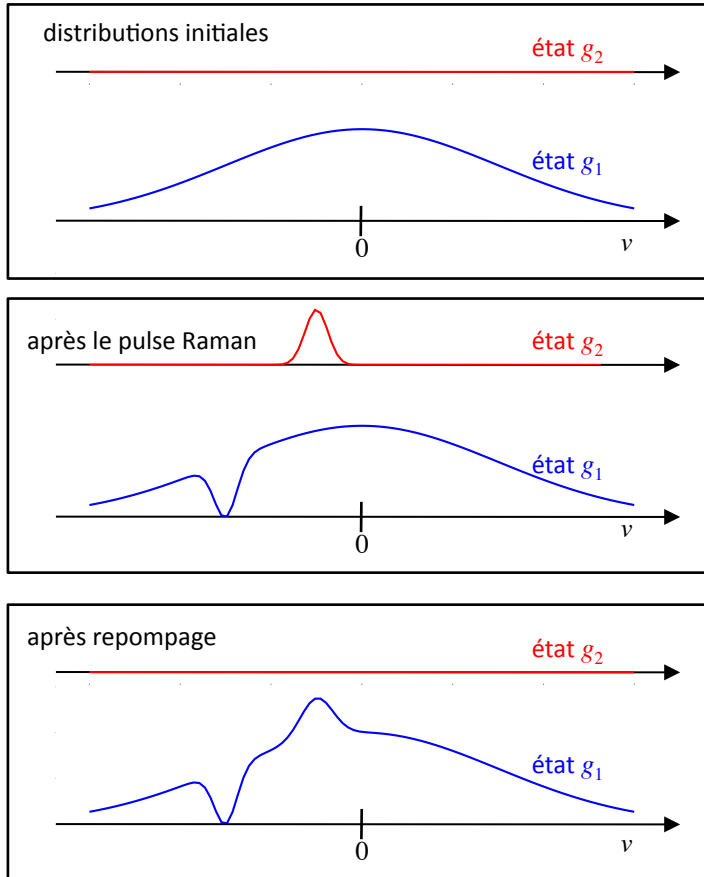


FIGURE IV.21. Évolution de la distribution en vitesse lors des deux phases du refroidissement Raman : transfert sélectif en vitesse de g_1 vers g_2 , puis repompage de g_2 vers g_1 .

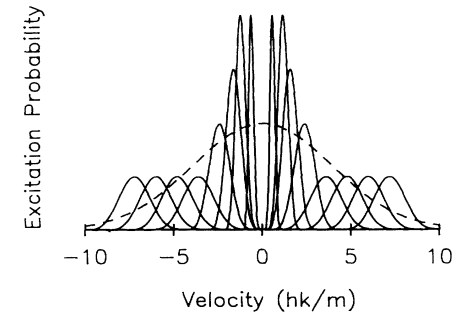


FIGURE IV.22. Taux d'excitation pour les différents pulses Raman utilisés par Kasevich & Chu (1992). La classe de vitesse nulle est « protégée ».

La résolution générale de cette équation passe par un traitement numérique, mais on peut obtenir une solution analytique si on se limite au cas de faible excitation $|\alpha_1| \sim 1$, $|\alpha_2| \ll 1$ pour toute vitesse :

$$\alpha_1(t) \approx e^{-i\Delta_v t/2}, \quad \alpha_2(t) \approx -\frac{i}{2} e^{i\Delta_v t/2} \int_0^t \kappa(t') e^{-i\Delta_v t'} dt'. \quad (IV.59)$$

Prenons un pulse de durée τ ; à la fin de ce pulse, la probabilité d'excitation d'un atome de vitesse v est donc :

$$P(v) \equiv |\alpha_2(v)|^2 \approx \frac{1}{4} \left| \int_0^\tau \kappa(t) e^{-i\Delta_v t} dt \right|^2. \quad (IV.60)$$

La variation en vitesse de cette probabilité est donc directement liée à la transformée de Fourier en fréquence du pulse.

4-3 Quelle forme de pulse choisir ?

La forme la plus simple pour l'intensité du pulse Raman est une fonction carrée (figure IV.23)

$$\kappa(t) = \kappa \quad \text{si} \quad 0 < t < \tau, \quad (IV.61)$$

dont la transformée de Fourier est un sinus cardinal, de sorte que

$$P(v) \propto \frac{\sin^2[(\bar{\Delta} + 2kv)\tau/2]}{(\bar{\Delta} + 2kv)^2}. \quad (\text{IV.62})$$

où $\bar{\Delta} = \Delta - 2kv_r$ [cf. (IV.58)]. On va donc exciter essentiellement les atomes de vitesse comprise dans l'intervalle

$$-\frac{\bar{\Delta}}{2} - \frac{\pi}{\tau} < kv < -\frac{\bar{\Delta}}{2} + \frac{\pi}{\tau}, \quad (\text{IV.63})$$

ainsi que, mais dans une moindre mesure, des atomes dont la vitesse est située dans les lobes latéraux du sinus cardinal.

Nous verrons un peu plus loin comment tirer parti des zéros bien marqués du sinus cardinal. Toutefois, comme on peut craindre que l'excitation parasite créée par les lobes latéraux génère des effets indésirables, il est intéressant d'explorer la possibilité d'utiliser d'autres fonctions $\kappa(t)$, ayant une transformée de Fourier qui décroît plus vite de part et d'autre de son maximum. C'est ce qui a été fait dans les premières séries d'expériences de refroidissement Raman, menées à Stanford entre 1992 et 1994 (Kasevich & Chu 1992; Davidson et al. 1994). La forme temporelle des impulsions Raman était un profil de Blackman, c'est-à-dire la fonction d'apodisation donnée par :

$$f(t) = 0.42 + 0.5 \cos(2\pi t/\tau) + 0.08 \cos(4\pi t/\tau) \quad \text{pour } |t| < \tau/2, \quad (\text{IV.64})$$

qui a le mérite d'avoir une transformée de Fourier avec des ailes de faible amplitude (cf. figure IV.23) : on peut ainsi exciter de manière efficace une classe de vitesse de centre \bar{v} et de largeur à mi-hauteur Δv ajustables, qui garantit une probabilité extrêmement réduite (par au moins six ordres de grandeur) d'excitation pour toute classe de vitesse distante de \bar{v} de plus de $4\Delta v$.

Cette technique a conduit à des distributions en vitesse⁶ très notablement sub-recul à une dimension, avec $\Delta v \approx 0.2v_r$ (Kasevich & Chu 1992). À deux et trois dimensions, les performances étaient plus modestes, $\Delta v \approx 1.2v_r$ et $\Delta v \approx 2.3v_r$, respectivement. Parmi les raisons invoquées

6. Les largeurs indiquées dans ce qui suit sont des largeurs à $1/\sqrt{e}$, qui coïncident avec la largeur r.m.s. pour une distribution gaussienne.

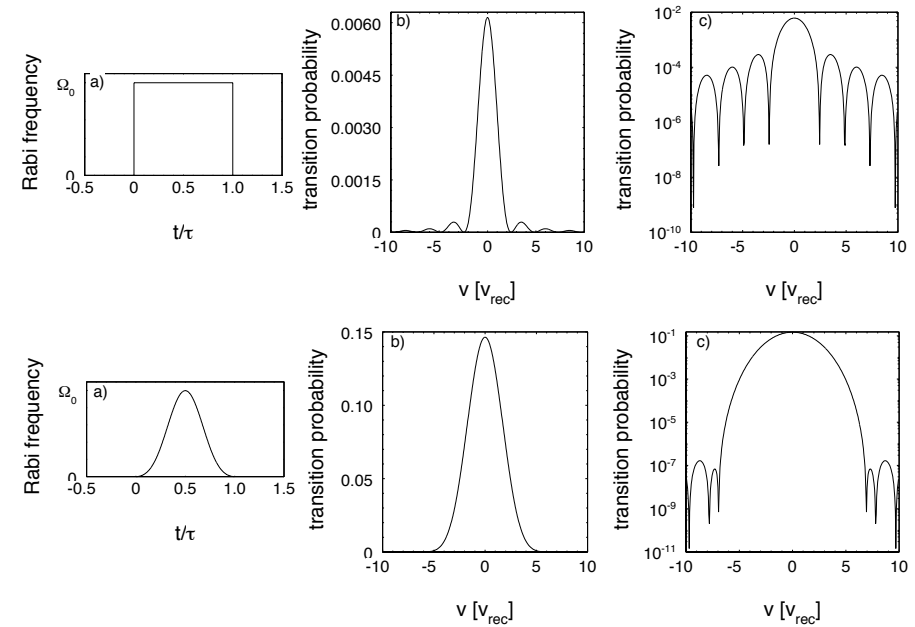


FIGURE IV.23. Deux formes possibles d'enveloppe pour les pulses Raman, avec la probabilité de transition associée (IV.60), en échelle linéaire et logarithmique. En haut, pulse carré dont la transformée de Fourier est un sinus cardinal. En bas, pulse Blackman, avec un spectre de Fourier beaucoup plus resserré que le sinus cardinal. Les deux types de pulse ont la même durée $\tau = 1.3 M/\hbar k^2$. Figures tirées de la thèse de doctorat de Jakob Reichel, Université Paris 6 (1996).

pour cette chute de performance, on retrouve le point que nous avons étudié en § 3 : le remplissage de la classe de vitesse autour de $v = 0$ est d'autant plus lent que la dimensionnalité est élevée ; un défaut qui tend à dépeupler cette classe de vitesse (par exemple lors du processus de dé-pompage) aura donc un effet plus sensible à 2 ou 3 D qu'à 1D. Par ailleurs, la mise en œuvre du protocole décrit plus haut nécessite en principe d'alterner des paires de faisceaux Raman selon toutes les directions de l'espace concernées, ce qui est compliqué à implémenter sur le plan technique. Davidson et al. (1994) ont donc simplifié cette procédure en appliquant simultanément plusieurs faisceaux Raman. Ceci peut donner naissance à des phénomènes non linéaires parasites, contribuant eux aussi à augmenter le taux de départ de la classe de vitesse nulle.

Une autre manière d'obtenir un refroidissement tri-dimensionnel est de travailler avec des atomes piégés. On peut alors se contenter de refroidir une direction de l'espace et tirer parti de la redistribution de l'énergie avec les deux autres directions du fait de l'ergodicité du mouvement des atomes dans le piège. Toujours avec des pulses Blackman, le groupe de Stanford a ainsi obtenu un refroidissement 3D conduisant à une largeur en vitesse de $0.65 v_r$ (Lee et al. 1996; Lee & Chu 1998). Une expérience similaire a été menée à l'ENS par Perrin et al. (1999), avec des pulses balayés en fréquence. Dans toutes ces études, la densité finale dans l'espace des phases était de l'ordre de quelques 10^{-3} , donc encore assez loin du seuil de condensation de Bose–Einstein. Toutefois il faut noter que ces expériences étaient menées sur des atomes préparés dans des niveaux dont on sait maintenant qu'ils ne sont pas favorables si l'on recherche de grandes densités spatiales : le sodium dans son niveau fondamental $F = 2$ ou le césium dans son niveau fondamental $F = 4$. Par ailleurs, il semble qu'un chauffage lié à la diffusion multiple du photon émis lors du processus de pompage optique était présent dans ces expériences ; ce chauffage pourrait être réduit en utilisant des géométries fortement anisotropes, favorisant la sortie rapide du photon.

Revenons pour finir aux pulses carrés et à la loi d'excitation en vitesse donnée par un sinus cardinal. Puisque le but ultime est d'accumuler les atomes au voisinage de $v = 0$, la forme de ce sinus cardinal, avec ses lobes marqués, n'est pas problématique pourvu que l'on prenne soin de toujours choisir le couple $(\bar{\Delta}, \tau)$ tel que la classe de vitesse nulle coïncide avec le premier zéro de $P(v)$:

$$|\bar{\Delta}|\tau = 2\pi. \quad (\text{IV.65})$$

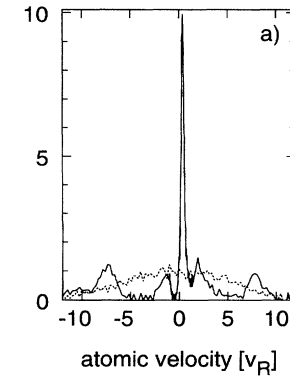


FIGURE IV.24. Résultat expérimental de Reichel et al. (1995), montrant le refroidissement Raman 1D d'atomes de césium avec des pulses carrés, tels qu'un atome de vitesse nulle a une probabilité 0 d'être excité par la transition Raman. La température équivalente est de 3 nanokelvins seulement.

Cette technique a été mise en œuvre avec succès à une dimension et à deux dimensions. À une dimension, le groupe du LKB à l'ENS (Reichel et al. 1995) a obtenu une distribution en vitesse de largeur $0.12 (1) v_r$, notablement plus étroite que celle mesurée avec des pulses Blackman à Stanford ($0.2 v_r$), et qui constitue encore maintenant un record. C'est grâce à ces distributions très étroites que le groupe de l'ENS a ensuite pu observer les oscillations de Bloch dans un réseau optique, un phénomène que nous avons décrit dans le cours 2012-13 (Dahan et al. 1996). À deux dimensions, le groupe du NIST a produit une distribution de largeur $0.39 (5) v_r$ (Boyer et al. 2004), ce qui est plus étroit que les meilleures performances obtenues à 2D ou 3D avec un refroidissement Doppler sur raie étroite. À notre connaissance, cette expérience de refroidissement Raman avec des pulses Raman carrés n'a pas encore été menée à trois dimensions.

Chapitre V

Sisyphes brillant, Sisyphes gris

Les premières mélasses optiques ont été réalisées en 1985 aux Bell Labs avec des atomes de sodium (Chu et al. 1985). Les mesures précises de température ont été faites au NIST (le NBS à l'époque) sur des mélasses de cette même espèce atomique par Lett et al. (1988b) et Lett et al. (1989) (figure V.1). La conclusion de ces mesures fut sans appel : le refroidissement Doppler ne pouvait à lui seul expliquer le refroidissement observé ; les températures étaient plus basses que la limite $k_B T = \hbar \Gamma / 2$ prévue et la variation de la température avec le désaccord du laser n'était pas du tout en accord avec la théorie. Plusieurs modèles de refroidissement ont alors été développés (Ungar et al. 1989; Dalibard & Cohen-Tannoudji 1989), avec en point commun l'idée de prendre en compte plus fidèlement la structure de la transition atomique, en allant au delà du modèle à deux niveaux.

Le point clé est que pour un atome à plusieurs sous-niveaux fondamentaux, de longues constantes de temps peuvent apparaître, liées au temps de pompage optique entre sous-niveaux. À ces longues constantes de temps, peuvent être associées de basses énergies. Au contraire, dans le modèle à deux niveaux à la base du refroidissement Doppler, la seule constante de temps pertinente est Γ^{-1} , et l'énergie associée $\hbar \Gamma$ donne la limite du refroidissement Doppler. Parmi tous les modèles 1D développés à l'époque, le plus robuste est probablement l'effet Sisyphes, qui se généralise presque tel quel à trois dimensions [pour une revue, voir par exemple Grynberg & Robilliard (2001)]. C'est donc lui que nous allons discuter maintenant dans sa version initiale, avant de passer à des développements récents qui généralisent ce type de refroidissement à d'autres transitions atomiques.

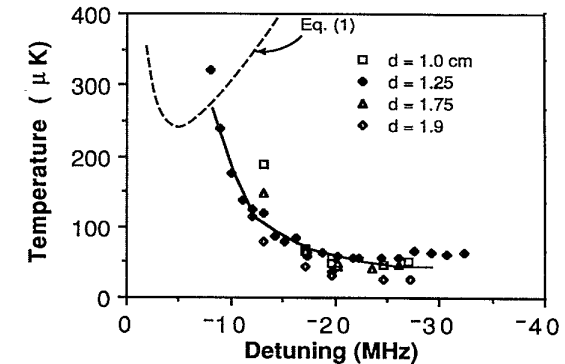


FIGURE V.1. Premières mesures précises de la température dans une mélasse optique (atomes de sodium). La courbe tiretée représente la prédiction pour le refroidissement Doppler. Figure extraite de Lett et al. (1988b).

1 Le modèle Sisyphes standard

1-1 Transition $1/2 \leftrightarrow 3/2$

Le modèle le plus simple pour le refroidissement Sisyphes est celui d'une transition entre un état fondamental $J_g = 1/2$ et un état excité $J_e = 3/2$ (figure V.2). Le choix de cette transition est logique ; nous avons vu que la

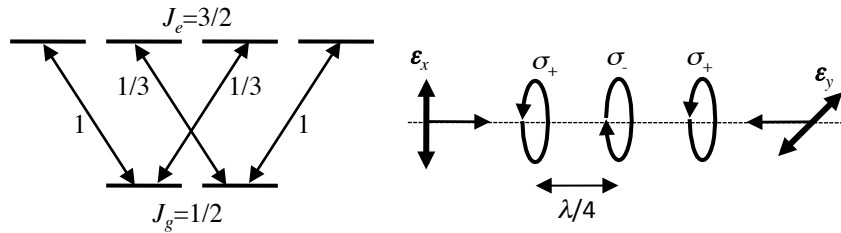


FIGURE V.2. Transition atomique $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 3/2$ et configuration laser 1D lin \perp lin donnant naissance à l'effet Sisyph.

transition atomique la plus simple $J_g = 0 \rightarrow J_e = 1$ ne donnait lieu qu'à un refroidissement Doppler, avec une température bornée par la limite Doppler (pour une raie large) $k_B T \geq \hbar \Gamma / 2$. L'apparition de cette borne inférieure peut être reliée – sans que ce soit une preuve absolue – au fait que la seule constante de temps figurant alors dans la dynamique interne de l'atome est la durée de vie de l'état excité Γ^{-1} . En passant à une structure atomique plus compliquée, notamment pour l'état fondamental, l'espoir est de voir apparaître des nouvelles constantes de temps, nettement plus longues. Ces constantes de temps correspondent par exemple au temps de pompage optique d'un état Zeeman fondamental $|g, \pm 1/2\rangle$ vers l'autre.

Pour créer une dynamique non triviale entre ces deux états fondamentaux, que nous noterons à partir de maintenant $|g_{\pm}\rangle$, il est nécessaire de placer l'atome dans une situation où la polarisation de la lumière varie dans l'espace. Limitons nous ici à un exemple unidimensionnel, avec un mouvement le long de l'axe z . Le prototype d'une telle situation correspond à la superposition de deux ondes lumineuses progressives se propageant en sens contraire le long de l'axe z , de polarisations linéaires orthogonales ϵ_x et ϵ_y (configuration lin \perp lin, figure V.2). Les deux ondes sont choisies avec la même fréquence, la même intensité, et une phase relative telle que la polarisation résultante $\epsilon(z)$ varie dans l'espace de la manière suivante :

$$\epsilon(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_x e^{ikz} - i\epsilon_y e^{-ikz}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_- \cos(kz) - i\epsilon_+ \sin(kz)), \quad (\text{V.1})$$

où les vecteurs unitaires complexes $\epsilon_{\pm} = (\mp \epsilon_x - i\epsilon_y) / \sqrt{2}$ représentent la base de polarisation circulaire droite et gauche.

La polarisation de la lumière évolue donc continûment et de manière périodique le long de l'axe z . Elle est circulaire gauche (ϵ_-) aux points $z = 0$ modulo $\lambda/2$, circulaire droite (ϵ_+) aux points $z = \lambda/4$ modulo $\lambda/2$, et elliptique entre ces points. En particulier, elle est linéaire en $z = \lambda/8$ modulo $\lambda/4$, selon les bissectrices de ϵ_x et ϵ_y .

1-2 Déplacements lumineux et pompage optique

Dans l'hypothèse où le désaccord Δ entre la fréquence du faisceau laser et la fréquence atomique est grand devant la fréquence de Rabi κ caractérisant le couplage atome-lumière, on sait que l'atome va être très majoritairement dans un des deux états g_{\pm} et on va pouvoir négliger le temps passé dans le niveau excité. L'effet de la lumière sur l'atome est alors double :

- La lumière crée un potentiel lumineux qui déplace les énergies de g_{\pm} d'une quantité qui dépend de la proportion de lumière σ_{\pm} en un point donné. On obtient ainsi une modulation différentielle $V_{\pm}(z)$ des énergies de g_{\pm} .
- La lumière induit des transitions $g_+ \leftrightarrow g_-$ par des processus Raman spontanés, c'est-à-dire l'absorption d'un photon d'une des deux ondes laser et l'émission spontanée d'un photon de fluorescence. Le taux de transition $\gamma_{+\rightarrow-}(z)$ de g_+ vers g_- fait intervenir l'intensité locale de lumière σ_- au point où se trouve l'atome et il est donc modulé dans l'espace. Il en va de même pour le taux de transition $\gamma_{-\rightarrow+}(z)$ de g_- vers g_+ .

Le refroidissement Sisyph va résulter de la corrélation entre les potentiels lumineux $V_{\pm}(z)$ et les taux de pompage optique $\gamma_{+\rightarrow-}(z)$ et $\gamma_{-\rightarrow+}(z)$. Pour une description plus quantitative, commençons par calculer les déplacements lumineux. On utilise pour cela les facteurs d'intensité (carrés des coefficients de Clebsch–Gordan) représentés sur la figure V.2. En un point z donné, le niveau g_+ sera déplacé par une quantité proportionnelle à $I_+(z) + \frac{1}{3}I_-(z)$, où $I_{\pm}(z)$ sont les intensités associées aux polarisations σ_{\pm} au point z . De même, le niveau g_- sera déplacé par une quantité proportionnelle à $I_-(z) + \frac{1}{3}I_+(z)$. À une constante additive près sans importance ici, les potentiels lumineux ressentis par g_{\pm} s'écrivent donc (figure V.3)

$$V_+(z) = V_0 \cos^2(kz), \quad V_-(z) = V_0 \sin^2(kz), \quad (\text{V.2})$$

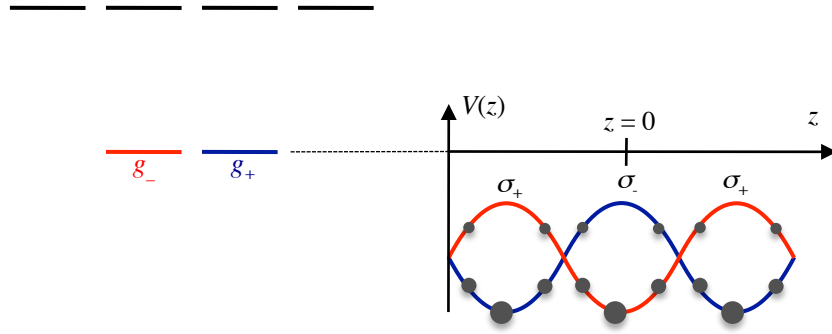


FIGURE V.3. Potentiels $V_{\pm}(z)$ créés par la lumière sur les deux états fondamentaux g_{\pm} . Les disques sombres indiquent les populations stationnaires pour un atome au repos résultant des processus de pompage optique.

où l'énergie V_0 est donnée par $V_0 = \frac{2}{3}\hbar(-\Delta)s_0$. On note ici s_0 le paramètre de saturation pour chacune des deux ondes progressives :

$$s_0 = \frac{\kappa^2/2}{\Delta^2 + \Gamma^2/4} \quad (\text{V.3})$$

où κ est la fréquence de Rabi associée à chaque onde progressive, calculée pour un coefficient de Clebsch–Gordan égal à 1. La quantité V_0 est positive pour un désaccord négatif, qui est le signe envisagé ici (comme pour le refroidissement Doppler).

Nous pouvons calculer de même le taux $\gamma_{\pm \rightarrow \mp}(z)$ avec lequel l'atome initialement dans g_{\pm} va sauter vers g_{\mp} . On trouve

$$\gamma_{+\rightarrow-}(z) = \gamma_0 \cos^2(kz), \quad \gamma_{-\rightarrow+}(z) = \gamma_0 \sin^2(kz), \quad (\text{V.4})$$

avec $\gamma_0 = \frac{2}{9}\Gamma s_0$. On trouve bien la corrélation annoncée entre déplacements lumineux et taux de pompage optique.

L'équation d'évolution de la population P_+ en un point z donné est

$$\frac{dP_+}{dt} = -\gamma_{+\rightarrow-}(z)P_+ + \gamma_{-\rightarrow+}(z)P_-, \quad (\text{V.5})$$

et idem pour P_- . En utilisant $P_+ + P_- = 1$, cette équation d'évolution peut encore s'écrire

$$\frac{dP_+}{dt} = -\gamma_0 [P_+ - P_+^{\text{stat}}(z)], \quad (\text{V.6})$$

où les populations stationnaires $P_{\pm}^{\text{stat}}(z)$ pour un atome au repos en z sont données par (figure V.3) :

$$P_+^{\text{stat}}(z) = \sin^2(kz), \quad P_-^{\text{stat}}(z) = \cos^2(kz). \quad (\text{V.7})$$

Ce résultat indique que le niveau le plus peuplé est toujours le plus bas des deux états g_+ et g_- . En $z = 0$ par exemple, la lumière est polarisée selon ϵ_- et l'atome est pompé optiquement dans l'état g_- pour lequel $V_-(z) = 0$, alors que $V_+(z) = V_0 > 0$.

1-3 Le mécanisme Sisyphe

Pour un atome au repos, nous venons de voir que le pompage optique a tendance à faire passer l'atome du sommet des collines de potentiel au fond des vallées. C'est ce point-clé qui donne son nom à l'effet Sisyphe (figure V.4). On comprend intuitivement pourquoi ce dernier donne lieu à un refroidissement : si l'atome bouge avec une vitesse v faible mais non nulle, il va avoir tendance à monter plus de collines qu'en descendre. La conservation de l'énergie est assurée par l'émission spontanée : lorsque un atome gravit une colline de potentiel $V_{\pm}(z)$, il convertit son énergie cinétique en énergie potentielle. Cette énergie est ensuite emportée par les photons de fluorescence émis spontanément lors des processus de pompage optique ; ceux-ci font passer l'atome d'un sommet de V_{\pm} à une vallée de V_{\mp} , et les photons ont en moyenne une énergie plus grande que l'énergie des photons des ondes lumineuses incidentes.

Cette image se généralise sans difficulté à trois dimensions, avec une configuration d'intensité et de polarisation qui peut être plus ou moins compliquée selon le nombre, la direction, et la phase relative des ondes lumineuses (Grynberg & Robilliard 2001). Le point essentiel est (i) de maintenir le fait que les niveaux atomiques sont déplacés vers le bas par une quantité qui dépend de l'espace, et (ii) que le pompage optique tend à accumuler l'atome dans le sous-niveau de plus basse énergie. Ce résultat est garanti si on utilise une transition $J_g \leftrightarrow J_e = J_g + 1$ et une lumière monochromatique de désaccord négatif, $\Delta = \omega_L - \omega_A < 0$.

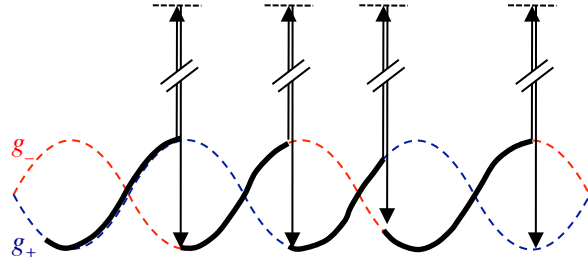


FIGURE V.4. Evolution typique dans $V_{\pm}(z)$ pour une vitesse de l'ordre de γ_0/k .

2 Limite du refroidissement Sisyphé

Pour déterminer la limite du refroidissement, nous allons adopter ici une approche de type mouvement brownien en calculant d'abord la force de friction agissant sur l'atome, puis le coefficient de diffusion pour un atome au repos. Nous verrons dans le paragraphe suivant (§ 3) comment aller au delà de ce modèle linéaire simple.

2-1 La force de friction et sa plage de linéarité

Notre modèle de refroidissement Sisyphé correspond à un problème de physique statistique relativement simple : une particule évolue dans le potentiel bi-valué $V_{\pm}(z)$ en sautant aléatoirement entre les deux valeurs avec les taux $\gamma_{\pm \rightarrow \mp}(z)$. Considérons un atome de vitesse v et déterminons la force qui agit sur lui en régime stationnaire. Cette force s'écrit en fonction de la probabilité $P_{\pm}(z, v)$ de trouver l'atome au point z dans l'état g_{\pm} :

$$F(z, v) = P_+(z, v)F_+(z) + P_-(z, v)F_-(z), \quad (\text{V.8})$$

où $F_{\pm}(z)$ sont les forces qui dérivent des potentiels $V_{\pm}(z)$:

$$F_{\pm}(z) = \pm kV_0 \sin(2kz). \quad (\text{V.9})$$

Pour calculer les probabilités d'occupation $P_{\pm}(z, v)$, reprenons l'équation d'évolution (V.6) et cherchons son régime forcé. Ce dernier s'obtient en

remplaçant $\frac{d}{dt}$ par $v\frac{d}{dz}$, et la solution s'écrit :

$$P_{\pm}(z, v) = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\cos(2kz) + (v/v_c) \sin(2kz)}{1 + v^2/v_c^2} \right) \quad \text{avec} \quad 2kv_c = \gamma_0. \quad (\text{V.10})$$

La moyenne de la force (V.8) sur une période spatiale vaut donc :

$$F(v) = -M\alpha \frac{v}{1 + v^2/v_c^2} \quad \text{avec} \quad M\alpha = k^2 \frac{V_0}{\gamma_0}. \quad (\text{V.11})$$

C'est la force de friction recherchée, qui appelle tout de suite trois commentaires :

- Aux petites vitesses, $v \ll v_c$, on obtient bien une force linéaire en vitesse $F(v) = -M\alpha v$, comme dans la théorie du mouvement brownien.
- Le coefficient de friction α est proportionnel au rapport du déplacement lumineux moyen V_0 et du taux de pompage γ_0 . Ces deux quantités sont proportionnelles à l'intensité lumineuse, ce qui fait que α est indépendant de l'intensité. Plus précisément, on trouve :

$$V_0 = \frac{2}{3} \hbar |\Delta| s_0, \quad \gamma_0 = \frac{2}{9} \Gamma s_0 \quad \longrightarrow \quad M\alpha = 3 \hbar k^2 \frac{|\Delta|}{\Gamma}. \quad (\text{V.12})$$

Cette valeur est à comparer à celle obtenue pour le refroidissement Doppler dans le cas optimal ($\Delta = -\Gamma/2$) :

$$M\alpha_{\text{Doppler}} = \hbar k^2 s_0, \quad (\text{V.13})$$

résultat valable uniquement si $s_0 \ll 1$. En pratique, le coefficient de friction correspondant à l'effet Sisyphé peut donc excéder par plusieurs ordres de grandeur α_{Doppler} .

- La plage sur laquelle la force est linéaire en vitesse est donnée par $|v| \ll v_c$, c'est-à-dire $kv \ll \frac{1}{9} \Gamma s_0$ ou encore $v/\gamma_0 \ll \lambda/4\pi$. Pour que la force soit linéaire en vitesse, il faut donc que le déplacement de l'atome pendant le temps de relaxation γ_0^{-1} soit très petit devant la période spatiale du potentiel lumineux. En d'autres termes, il faut que de nombreux processus de pompage optique se produisent quand l'atome parcourt une longueur d'onde. Cette plage de linéarité est proportionnelle au paramètre de saturation s_0 , donc à la puissance des ondes lumineuses.

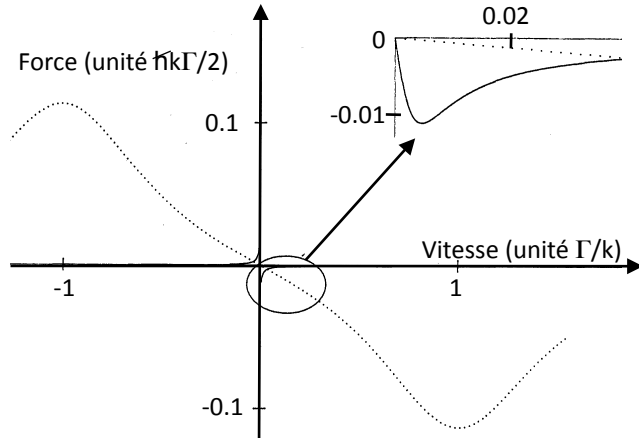


FIGURE V.5. Force en fonction de la vitesse pour l'effet Sisyphe (trait plein) et pour l'effet Doppler (trait pointillé), tracée pour $\Delta = -\Gamma$ et $s_0 \ll 1$.

La plage de linéarité pour le refroidissement Sisyphe est beaucoup plus petite que celle du refroidissement Doppler, pour lequel le résultat est indépendant de la puissance de l'onde lumineuse ($kv \ll \Gamma$). En revanche pour le refroidissement Doppler, le coefficient de friction diminue quand on diminue cette puissance (figure V.5), alors qu'il est constant (et grand) pour le refroidissement Sisyphe. En fait, les deux mécanismes Doppler et Sisyphe opèrent simultanément : on tire parti en même temps de la grande plage de capture du refroidissement Doppler et du fort coefficient de friction du refroidissement Sisyphe.

La force (V.11) a pour maximum $F = kV_0/4$ pour $v = v_c$, puis elle décroît comme $1/v$ aux grandes vitesses. Le maximum de la force pour $v = v_c$ correspond à la situation où environ un processus de pompage optique se produit par colline de potentiel, comme sur la figure V.4. Cette force correspond alors (à un coefficient multiplicatif près) à la force maximale ressentie dans les montées du potentiel $V_{\pm}(z)$ (on ne peut pas espérer mieux !).

Le comportement en $1/v$ de la force aux grandes vitesses correspond à une puissance dissipée $\mathcal{P} = vF(v)$ constante :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{4} V_0 \gamma_0, \quad (\text{V.14})$$

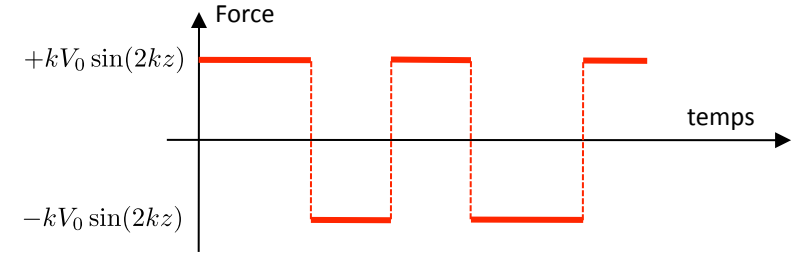


FIGURE V.6. Evolution aléatoire de la force ressentie par un atome immobile au point z quand il bascule aléatoirement entre les états g_{\pm} .

soit une perte d'énergie de l'ordre du quart de la modulation du potentiel V_{\pm} pour chaque processus de pompage optique. Là encore, cela correspond à l'optimum de ce que l'on pouvait espérer pour ce mécanisme. Ce régime $F(v) \propto 1/v$ à haute vitesse se retrouve dans toutes les variantes de l'effet Sisyphe, quels que soient les détails de la dynamique atomique.

Nous allons dans la suite de ce paragraphe supposer qu'à l'équilibre, la distribution en vitesse atomique est essentiellement contenue dans la région $|v| \ll v_c$, de sorte que la force de friction (V.11) est linéaire en vitesse :

$$F = -M\alpha v \quad \text{avec} \quad M\alpha = 3\hbar k^2 \frac{|\Delta|}{\Gamma}, \quad (\text{V.15})$$

comme dans la théorie du mouvement brownien. Pour déterminer l'état d'équilibre, il faut également évaluer le coefficient de diffusion en impulsion D_p pour en déduire la température d'équilibre $k_B T = D_p / M\alpha$.

2-2 La diffusion en impulsion

Rappelons que le coefficient de diffusion D_p donne, à un facteur 2 près, le taux de croissance de la variance de l'impulsion $\Delta p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$. Pour évaluer D_p , prenons un atome au repos en un point z quelconque. Du fait des processus de pompage optique, l'atome bascule aléatoirement entre les niveaux g_+ et g_- ; il ressent donc une force fluctuante $F(t) = \pm kV_0 \sin(2kz)$ liée aux gradients des potentiels $V_{\pm}(z)$ ressentis sur chaque niveau (figure V.6). Cette force fluctuante est la responsable principale de la diffusion en

impulsion de l'atome dans le refroidissement Sisyphe ; c'est donc à elle que nous allons nous intéresser dans un premier temps. À cette contribution, vient s'ajouter – comme pour le refroidissement Doppler – le chauffage dû aux changements aléatoires d'impulsion lors des processus d'émission spontanée. Nous le prendrons en compte dans un deuxième temps.

En décomposant la force ressentie par l'atome en une force moyenne $\bar{F}(z)$ et une force fluctuante de moyenne nulle, le coefficient de diffusion correspondant s'obtient par l'expression (cf. chapitre 1) :

$$D_p(z) = \int_0^{+\infty} \left(\overline{F(z,0)F(z,t)} - \bar{F}(z)^2 \right) dt, \quad (\text{V.16})$$

où la force moyenne $\bar{F}(z)$ se calcule en utilisant les populations stationnaires (V.7)

$$\bar{F}(z) = [P_+(z) - P_-(z)] kV_0 \sin(2kz) = \frac{1}{2} kV_0 \sin(4kz). \quad (\text{V.17})$$

L'expression de $D_p(z)$ se calcule alors sans difficulté [cf. Dalibard & Cohen-Tannoudji (1989)] et sa moyenne sur une période spatiale vaut

$$D_{p,1} = \frac{3}{4} \hbar^2 k^2 s_0 \frac{\Delta^2}{\Gamma}. \quad (\text{V.18})$$

Comme indiqué plus haut, on doit en principe ajouter à ce coefficient de diffusion $D_{p,1}$ la contribution $D_{p,0}$ du recul aléatoire lors des processus d'émission spontanée. Cette contribution est du même ordre que celle trouvée pour le refroidissement Doppler :

$$D_{p,0} \approx \hbar^2 k^2 s_0 \Gamma. \quad (\text{V.19})$$

Or, dans la plupart des applications, le refroidissement Sisyphe est utilisé avec un désaccord notablement plus grand (en valeur absolue) que la largeur naturelle Γ . On peut alors négliger la contribution de $D_{p,0}$ et se concentrer sur $D_{p,1}$. Nous verrons $D_{p,0}$ réapparaître quand nous chercherons à aller au delà du modèle linéaire pour le mouvement brownien (§ 3).

2-3 Température d'équilibre

On déduit des coefficients de friction et de diffusion trouvés précédemment la température d'équilibre du refroidissement Sisyphe :

$$|\Delta| \gg \Gamma : \quad k_B T \approx \frac{D_{p,1}}{M\alpha} \approx \frac{1}{4} \hbar |\Delta| s_0 = \frac{\hbar \kappa^2}{8|\Delta|}. \quad (\text{V.20})$$

Il semble à première vue que l'on peut obtenir une température arbitrairement basse, en prenant la limite d'une fréquence de Rabi $\kappa \rightarrow 0$. Toutefois il faut vérifier *a posteriori* que la condition $v_0 \ll v_c$ est bien vérifiée pour la vitesse thermique $v_0 = \sqrt{k_B T/M}$: puisque v_0 varie comme κ alors que v_c varie comme κ^2 , ceci vient imposer une limite inférieure aux fréquences de Rabi acceptables. À désaccord Δ fixé, on trouve que la vitesse thermique minimale est

$$\text{Limite du modèle linéaire : } v_{0,\min} \sim v_r \frac{|\Delta|}{\Gamma} \quad \text{avec } v_r = \frac{\hbar k}{M}. \quad (\text{V.21})$$

Piégeage résiduel des atomes. La force moyenne (V.17) ressentie par un atome au repos dérive du potentiel $\frac{V_0}{4} \sin^2(2kz)$. L'amplitude de ce potentiel $\frac{V_0}{4} = \frac{1}{6} \hbar |\Delta| s_0$ est du même ordre que l'énergie thermique $k_B T$. Dans ce modèle semi-classique, on s'attend donc à ce qu'il y ait une légère modulation de la densité atomique avec une périodicité $\lambda/4$, la densité étant un peu plus grande là où la lumière a une polarisation circulaire (droite ou gauche).

2-4 Premiers résultats expérimentaux

La prédiction (V.20) correspond à une loi d'échelle très simple : pourvu que le désaccord soit pris (en valeur absolue) plus grand que la largeur naturelle Γ , la température d'équilibre ne doit dépendre que du rapport intensité sur désaccord.

Cette prédiction est remarquablement bien vérifiée en pratique. Nous avons reporté sur la figure V.7 des résultats de mesure faites sur une mélasse optique 3D de césium par Salomon et al. (1990). Les désaccords choisis allaient de $\Delta/\Gamma = -2$ à -28 et la loi trouvée pour cette situation à 3

dimensions peut s'écrire :

$$Mv_0^2 = k_B T \approx 0.4 \frac{\hbar \kappa^2}{|\Delta|}, \quad (\text{V.22})$$

où v_0 représente la vitesse quadratique moyenne de la distribution et où κ désigne la fréquence de Rabi pour chacune des 6 ondes progressives constituant la mélasse optique. Un résultat très comparable a été trouvé pour les deux isotopes du rubidium par Gerz et al. (1993). Le passage du coefficient $\frac{1}{8} = 0.125$ à 0.4 est dû à la fois au passage de 1D à 3D et au fait que la transition atomique en jeu est nettement plus compliquée que le modèle $1/2 - 3/2$. Une simulation Monte Carlo quantique prenant en compte ces deux points a permis de retrouver ce coefficient avec une bonne précision (Castin & Mølmer 1995).

En revanche, pour un désaccord Δ donné, la limite (V.21) obtenue dans le cadre de ce modèle linéaire n'est pas reproduite expérimentalement. L'expérience donne en fait un résultat plus favorable : on continue à observer un refroidissement Sisyphe efficace même quand la distribution en vitesse sort de la plage de linéarité. La température limite atteinte quand on baisse l'intensité est en fait la même quel que soit le désaccord choisi : $v_0 \sim$ quelques v_r , limite également vérifiée pour le sodium (Lett et al. 1989) et pour le rubidium (isotopes 85 et 87, Gerz et al. (1993)). L'explication de cette situation plus favorable qu'attendu réside dans le fait que le refroidissement Sisyphe reste efficace bien au delà du régime linéaire, comme nous allons le voir maintenant.

3 Au delà du modèle linéaire

Pour aller au delà du modèle brownien linéaire, nous allons utiliser le formalisme de l'équation de Liouville, bien adapté à la prise en compte du potentiel bi-valué $V_{\pm}(z)$ et des sauts entre les niveaux g_{\pm} (Castin et al. 1991).

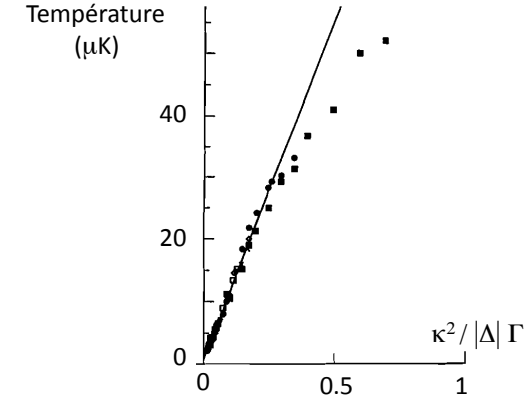


FIGURE V.7. Variation de la température dans une mélasse optique 3D de césium, en fonction du déplacement lumineux. Figure extraite de Salomon et al. (1990)

3-1 Équations de Liouville couplées

Pour une particule sans structure interne évoluant dans un champ de force $F(z)$, l'évolution de la distribution $P(z, v, t)$ dans l'espace des phases est donnée par l'équation de Liouville :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{F(z)}{M} \frac{\partial P}{\partial v} = 0. \quad (\text{V.23})$$

Cette équation est équivalente au principe fondamental de la dynamique pour une particule ponctuelle : $\dot{z} = v$, $M\dot{v} = F(z)$.

Pour le problème qui nous intéresse, nous devons introduire deux distributions $P_{\pm}(z, v)$ et prendre en compte les sauts d'un niveau vers l'autre :

$$\frac{\partial P_+}{\partial t} + v \frac{\partial P_+}{\partial z} + \frac{F_+(z)}{M} \frac{\partial P_+}{\partial v} = -\gamma_+(z)P_+(z, v) + \gamma_-(z)P_-(z, v) \quad (\text{V.24})$$

et une équation symétrique pour $P_-(z, v)$.

Intéressons nous au régime stationnaire de ces deux équations couplées, ce qui enlève le terme en $\frac{\partial}{\partial t}$. Considérons par ailleurs la densité dans

L'espace des phases totale, ainsi que la différence entre les densités de g_{\pm} :

$$P(z, v) = P_+(z, v) + P_-(z, v), \quad \delta(z, v) = P_+(z, v) - P_-(z, v). \quad (\text{V.25})$$

En faisant la différence entre (V.24) et l'équation pour P_- , on trouve d'abord, en utilisant $F_- = -F_+$:

$$v \frac{\partial \delta}{\partial z} + (\gamma_+ + \gamma_-) \delta = -\frac{F_+}{M} \frac{\partial P}{\partial v} + (\gamma_- - \gamma_+) P. \quad (\text{V.26})$$

L'intégration de cette équation permet d'exprimer la différence $\delta(z, v)$ en fonction de la somme $P(z', v)$. Faisons alors l'hypothèse que P est indépendante de la position en régime stationnaire : $P(z, v) \equiv P(v)$; nous avons vu plus haut (§ 2-3) que cette hypothèse est raisonnable, au moins dans le régime linéaire. La résolution de (V.26) est alors simple et donne

$$\delta(z, v) = \frac{-v/v_c}{1 + (v/v_c)^2} \left[\left(\sin 2kz + \frac{v_c}{v} \cos 2kz \right) P(v) - \frac{kV_0}{\gamma_0} \left(\cos 2kz - \frac{v_c}{v} \sin 2kz \right) \frac{dP}{dv} \right]. \quad (\text{V.27})$$

On injecte ensuite ce résultat dans l'équation du mouvement pour $P(v)$, obtenue en sommant (V.24) et son équivalent pour P_- . Le résultat s'écrit :

$$0 = \frac{d}{dv} \left[-F(v)P(v) + \frac{D_p(v)}{M} \frac{dP}{dv} \right] \quad (\text{V.28})$$

où la force $F(v)$ est identique à celle déjà trouvée en (V.11) pour une mouvement à vitesse v constante :

$$F(v) = -M\alpha \frac{v}{1 + v^2/v_c^2} \quad \text{avec} \quad M\alpha = k^2 \frac{V_0}{\gamma_0}, \quad (\text{V.29})$$

et où le coefficient de diffusion dépendant de la vitesse $D_p(v)$ vaut :

$$D_p(v) = \frac{D_{p,1}}{1 + v^2/v_c^2} \quad \text{avec} \quad D_{p,1} = \hbar^2 k^2 s_0 \frac{\Delta^2}{\Gamma}. \quad (\text{V.30})$$

On retrouve ici le coefficient de diffusion $D_{p,1}$, associé aux fluctuations de la force dipolaire quand l'atome au repos bascule aléatoirement entre g_{\pm} , qui a déjà été calculé en (V.18)¹. Rappelons que nous avons négligé

1. Il y a un facteur 4/3 entre l'expression trouvée ici pour $D_{p,1}$ et celle de (V.18). Ce facteur est lié à l'approximation faite ici d'une densité strictement uniforme (Castin et al. 1991).

jusqu'ici le coefficient de diffusion lié au recul aléatoire accompagnant les processus d'émission spontanée ; cette contribution va bientôt faire sa réapparition quand nous allons nous poser la question de la limite ultime du refroidissement Sisyphé.

3-2 État stationnaire

La résolution de (V.28) est simple :

$$P(v) \propto \exp \left(\int_0^v \frac{MF(v')}{D_p(v')} dv' \right). \quad (\text{V.31})$$

On voit alors immédiatement que le dénominateur en $1 + v^2/v_c^2$ qui apparaît dans la force $F(v)$ en dehors de la plage de linéarité est compensé par le même dénominateur dans $D(v)$. Le rapport $F(v')/D(v')$ reste donc une fonction linéaire de v' , si bien que la distribution stationnaire reste gaussienne :

$$P(v) \propto \exp(-v^2/2v_0^2) \quad \text{avec} \quad Mv_0^2 = \frac{1}{3} \hbar |\Delta| s_0. \quad (\text{V.32})$$

Ce résultat explique pourquoi on trouve expérimentalement des vitesses quadratiques basses, de l'ordre de quelques vitesses de recul, bien en dehors de la plage de validité (V.21) initialement prévue pour les grands désaccords.

Quelle est donc la « vraie » limite de validité du résultat (V.32) pour la température d'équilibre du refroidissement Sisyphé ? Pour la déterminer, il faut revenir aux deux sources de chauffage présentes dans ce mécanisme. Dans ce qui précède, nous avons pris en compte la diffusion de l'impulsion due aux fluctuations de la force dipolaire. En revanche, comme nous l'avons indiqué à plusieurs reprises, nous avons négligé les chocs aléatoires d'amplitude $\hbar k$ causés par les processus d'émission spontanée. Si l'on prend ce deuxième processus également en compte, on est amené à remplacer le coefficient de diffusion (V.30) par :

$$D_p(v) = \frac{D_{p,1}}{1 + v^2/v_c^2} + D_{p,0} \quad \text{avec} \quad D_{p,0} = \epsilon \hbar^2 k^2 s_0 \Gamma, \quad (\text{V.33})$$

où la valeur du coefficient multiplicatif ϵ , prenant en compte les différents facteurs de branchement entre sous-niveaux Zeeman, vaut $\epsilon = \frac{11}{18}$.

La résolution de (V.28) est alors un peu plus compliquée, mais néanmoins sans grande difficulté. On trouve

$$P(v) \propto \frac{1}{(1 + v^2/\bar{v}_c^2)^A} \quad \text{avec} \quad \frac{\bar{v}_c}{v_r} = \xi_1 \frac{V_0}{E_r}, \quad A = \xi_2 \frac{V_0}{E_r} \quad (\text{V.34})$$

c'est-à-dire une puissance de Lorentzienne. Les nombres sans dimension ξ_1 et ξ_2 sont respectivement égaux à $\frac{1}{\sqrt{88}} \approx 0.11$ et $\frac{1}{44} \approx 0.023$. Le résultat trouvé est donc fonction d'un seul paramètre physique, le rapport V_0/E_r .

Cette distribution en puissance de Lorentzienne constitue une généralisation intéressante de la distribution gaussienne de Maxwell-Boltzmann. Quand la puissance A de cette Lorentzienne est grande devant 1, c'est-à-dire $V_0 \gg E_r$, les classes de vitesse significativement peuplées sont petites devant \bar{v}_c et on retrouve alors la gaussienne de (V.32) :

$$(1 + v^2/\bar{v}_c^2)^{-A} = \exp[-A \ln(1 + v^2/\bar{v}_c^2)] \approx \exp[-Av^2/\bar{v}_c^2]. \quad (\text{V.35})$$

En revanche, si on diminue le rapport V_0/E_r , donc l'exposant A , les ailes de la distribution deviennent plus marquées et on atteint finalement, pour $A = 3/2$, une distribution pour laquelle l'énergie cinétique moyenne $M\langle v^2 \rangle/2$ n'est plus définie. Pour $A < 1/2$, c'est la distribution elle-même qui n'est plus normalisable, ce qui signifie qu'il n'y a pas de régime stationnaire : les vitesses des particules augmenteront indéfiniment avec le temps, la mélasse Sisyphé n'étant pas assez forte pour les maintenir au voisinage de la vitesse nulle.

3-3 Traitement quantique.

Pour aller plus loin et s'affranchir des diverses approximations faites ci-dessus, en particulier l'hypothèse d'une distribution $P(z, v)$ uniforme en z , il est commode de faire une simulation numérique du mouvement classique des particules sur ce potentiel bi-valué $V_{\pm}(z)$. Cette simulation conduit à une vitesse quadratique minimale de l'ordre de $6 v_r$, en bon accord avec le modèle analytique précédent (Castin et al. 1991). Toutefois, quand la vitesse quadratique moyenne n'est plus que de quelques vitesses de recul, la longueur d'onde de de Broglie des atomes devient une fraction significative de la longueur d'onde optique λ . On peut alors s'interroger légitimement sur la validité du traitement semi-classique qui précède, où

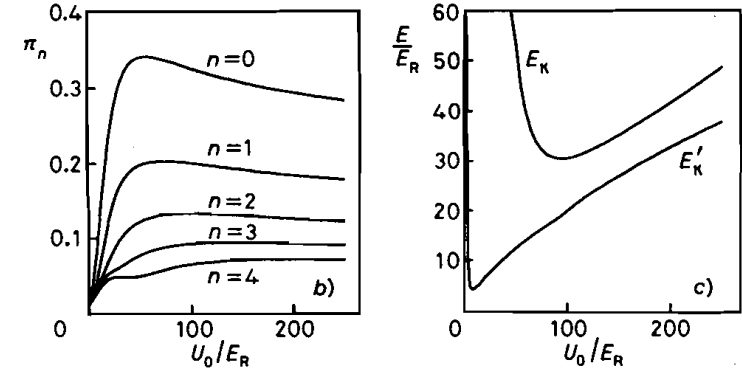


FIGURE V.8. Résultat d'un calcul numérique prenant en compte le caractère quantique du mouvement atomique dans le potentiel bi-valué $V_{\pm}(z)$, avec des sauts entre g_+ et g_- causés par les processus d'émission spontanée. Gauche : populations des différentes bandes d'énergie en fonction du rapport V_0/E_r . Droite : Variation de l'énergie cinétique moyenne $M\bar{v}^2/2$ en unité de E_r , avec deux définitions possibles pour \bar{v} : la vitesse quadratique moyenne $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ et la largeur à $1/\sqrt{e}$ de la distribution en vitesse. Ces deux grandeurs coïncident pour une gaussienne ; ici, la seconde définition donne une énergie inférieure à la première. Figure extraite de Castin & Dalibard (1991).

l'on a utilisé le concept de position z de l'atome définie à nettement mieux que λ près.

Pour aller au delà, il faut faire un traitement quantique du mouvement de l'atome, en introduisant les bandes d'énergie correspondant aux états propres dans le potentiel périodique et les taux de transfert entre bandes dus aux processus d'émission spontanée (Castin & Dalibard 1991). Ce traitement a confirmé les conclusions trouvées ici sur les limites du refroidissement, tout en les précisant. On trouve ainsi que la population accumulée dans la bande fondamentale peut atteindre $\sim 30\%$ (figure V.8, gauche). Par ailleurs, ce traitement confirme le caractère non gaussien de la distribution en vitesse pour des valeurs relativement faibles de V_0/E_r . Ainsi le minimum de la vitesse quadratique moyenne est de l'ordre de $5.5 v_r$ alors que la largeur à $1/\sqrt{e}$, qui devrait être égale à la précédente pour une distribution gaussienne, peut descendre à $2.2 v_r$ (figure V.8, droite).

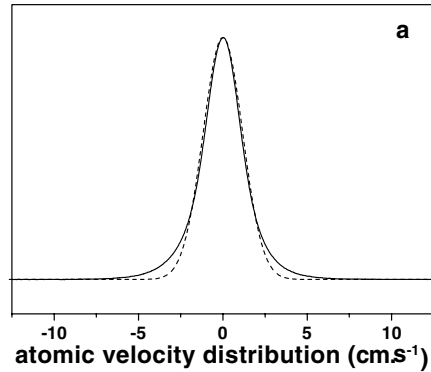


FIGURE V.9. Distribution en vitesse d'atomes de ^{87}Rb refroidis dans une mélasse optique 3D de désaccord $\Delta = -5\Gamma$. La température effective est de $1.2\ \mu\text{K}$, soit une demi-largeur à $1/\sqrt{e}$ de $1.8\ v_r$ seulement. Notons toutefois que la distribution n'est clairement pas gaussienne : le meilleur ajustement par une gaussienne est donné par le pointillé alors que l'ajustement par une puissance de lorentzienne, en l'occurrence avec l'exposant $A = 2$, donne un résultat parfaitement superposé à la courbe expérimentale. Image extraite de Sortais et al. (2000).

3-4 Résultats expérimentaux

Nous avons déjà décrit les premiers résultats expérimentaux obtenus sur le césium (figure V.7) qui ont confirmé la loi générale $k_B T \propto V_0$. Un exemple de distribution en vitesse, obtenue pour une faible profondeur V_0 , est reportée sur la figure V.9. On y voit que cette distribution dévie notablement d'une gaussienne, et qu'elle est très bien ajustée par une puissance de lorentzienne, avec ici $A \approx 2$. La largeur à $1/\sqrt{e}$ de la distribution en vitesse est très étroite, de l'ordre de $2\ v_r$ seulement.

Un des intérêts majeurs du refroidissement Sisyphes, outre sa limite en température très basse, est sa robustesse. Il faut simplement que l'ingrédient essentiel, une modulation différente des sous-niveaux Zeeman avec un pompage optique de préférence vers le niveau le plus bas, soit préservé. Le refroidissement Sisyphes continue donc à fonctionner quand les atomes sont placés dans un piège magnéto-optique : les mesures de Drewsen et al. (1994) et Cooper et al. (1994) ont montré des températures nettement en

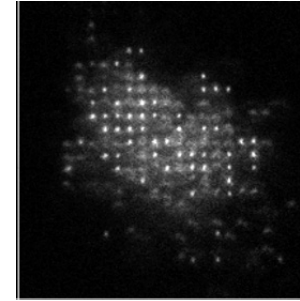


FIGURE V.10. Refroidissement Sisyphes d'atomes de césium piégés dans un réseau optique de grand pas ($4.9\ \mu\text{m}$). Chaque point lumineux correspond à un atome individuel. La température estimée est de $10\ \mu\text{K}$ et la profondeur du réseau de $165\ \mu\text{K}$. Image extraite de Nelson et al. (2007).

dessous de la limite Doppler, avec toutefois une augmentation rapide de cette température avec le nombre d'atomes piégés.

Le refroidissement Sisyphes reste également opérationnel quand les atomes sont plongés dans un réseau optique additionnel. La combinaison du refroidissement Sisyphes et d'un réseau très désaccordé par rapport à la résonance atomique permet notamment de réaliser des « microscopes atomiques », c'est-à-dire des dispositifs qui permettent de visualiser des atomes localisés sur les sites du réseau. Le refroidissement Sisyphes remplit alors deux fonctions : (i) refroidir les atomes à une température bien inférieure à la barrière en énergie entre deux sites, de sorte qu'un atome donné reste localisé sur le même site pendant toute la durée de l'expérience ; (ii) faire en sorte que l'atome émet en permanence de la lumière, qui peut être détectée via un objectif de microscope et une caméra CCD. On observe ainsi les atomes un par un, l'expérience étant simplement limitée par la résolution optique de l'objectif de microscope, qui doit permettre de séparer deux sites adjacents. Un exemple est montré sur la figure V.10, pour un réseau de relativement grand pas $\sim 5\ \mu\text{m}$ (Nelson et al. 2007). Cette expérience a ensuite été reprise et améliorée pour imager des atomes dans un réseau de pas inférieur à $1\ \mu\text{m}$ (Bakr et al. 2009; Sherson et al. 2010).

Signalons pour finir que nous nous sommes concentrés dans ce qui précède sur le cas du refroidissement Sisyphes dans un potentiel périodique.

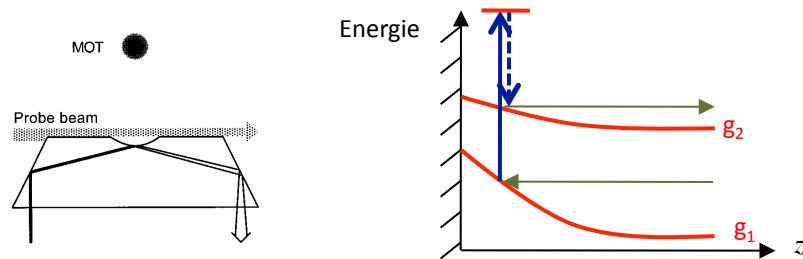


FIGURE V.11. Rebond inélastique d'atomes sur une onde laser évanescente. Les deux sous-niveaux fondamentaux g_1 et g_2 subissent des potentiels répulsifs de valeur différente. L'atome arrive sur le niveau g_1 , qui est fortement repoussé par la surface. Il subit un processus de pompage optique vers le niveau g_2 au voisinage du point de rebroussement, puis repart sur ce niveau g_2 qui est plus faiblement repoussé. L'énergie mécanique totale de l'atome a donc décréu dans le processus de rebond (Desbiolles et al. 1996; Ovchinnikov et al. 1997).

Mais on peut également utiliser ce mécanisme en « mono-coup », comme pour le rebond inélastique d'atomes dans une onde évanescente à la surface d'un prisme (Desbiolles et al. 1996; Ovchinnikov et al. 1997). L'émission d'un seul photon de fluorescence permet d'évacuer une énergie importante, égale à la différence d'énergie potentielle entre les deux sous-niveaux internes considérés. Ce type de mécanisme a également été mis en œuvre pour refroidir des molécules de fluorométhane (CH_3F), ces molécules étant confinées électrostatiquement grâce à leur moment dipolaire électrique (Zeppenfeld et al. 2012).

4 Sisyphe gris

La description que nous venons de faire du refroidissement Sisyphe, avec une transition $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 3/2$, tirait parti de la corrélation entre taux de pompage optique et déplacement lumineux. Le point essentiel était d'accumuler la population atomique au fond des vallées de potentiel. Pour la transition $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 3/2$, ceci était assuré en prenant un désaccord négatif, c'est-à-dire $\omega_L < \omega_A$ (laser sur le rouge de la résonance

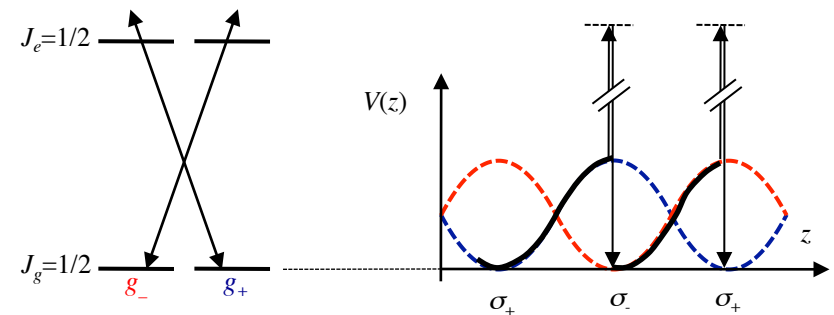


FIGURE V.12. Refroidissement Sisyphe pour une transition $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 1/2$. Il faut prendre cette fois-ci un désaccord positif, et les atomes s'accumulent dans le sous-niveau fondamental le moins couplé à la lumière.

atomique). Pour cette configuration $J_g < J_e$, les atomes étaient accumulés dans les niveaux les plus couplés à la lumière, ce qui conduisait à une émission maximale de photons de fluorescence. Nous allons maintenant regarder la situation inverse, $J_g \geq J_e$, pour laquelle le pompage optique tend à accumuler les atomes dans des états faiblement couplés à la lumière.

4-1 La transition $1/2 \leftrightarrow 1/2$

Considérons pour commencer une transition $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 1/2$ dans la même configuration laser $\text{lin} \perp \text{lin}$ unidimensionnelle que précédemment. Plusieurs résultats vont rester valables ; en particulier, les déplacements lumineux des deux sous-niveaux g_{\pm} sont toujours modulés dans l'espace, ainsi que les taux de pompage optique (figure V.12). Toutefois, la modulation des niveaux d'énergie se fait avec une phase opposée par rapport au cas précédent : en un point où la lumière est σ_+ , le niveau g_+ n'est pas déplacé, alors que le niveau g_- l'est. La phase de la modulation des taux de pompage optique est quant à elle inchangée : une lumière σ_+ tend toujours à accumuler les atomes dans l'état g_+ .

Pour obtenir un refroidissement Sisyphe, il faut accumuler les atomes au fond des vallées. En un point où la lumière est σ_+ , l'état g_+ doit donc avoir une énergie plus basse que le niveau g_- . Or, ce niveau g_+ n'est pas

déplacé par la lumière, alors que g_- l'est. On en déduit que le déplacement de g_- doit se faire vers le haut, ce qui veut dire que le désaccord du laser doit désormais être positif : $\omega_L > \omega_A$.

Une fois ce désaccord positif choisi, le traitement du refroidissement Sisyphe pour la transition $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 1/2$ est en tout point similaire à ce que nous avons vu pour la transition $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 3/2$ avec un potentiel bi-valué et des taux de pompage optique égaux (à un facteur numérique près) à ceux donnés en (V.2) et (V.4). La seule différence à ce stade est que le refroidissement Sisyphe viendra s'opposer au mécanisme Doppler (qui est un chauffage pour $\Delta > 0$), alors que les mécanismes Sisyphe et Doppler travaillent ensemble pour une transition avec $J_e = J_g + 1$ et un désaccord Δ négatif. Toutefois ce point peut être négligeable si les plages de vitesse associées à ces deux mécanismes sont suffisamment différentes.

4-2 La transition $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$

Le passage d'une transition $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 1/2$ à $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ vient enrichir considérablement le problème. La raison en est que cette transition autorise la construction d'états internes non couplés au rayonnement, en tout point de l'espace.

Nous allons présenter ici la proposition faite initialement par Shahriar et al. (1993) et Weidemüller et al. (1994). Il s'agit d'une configuration 1D pour laquelle les amplitudes des polarisations σ_{\pm} oscillent dans l'espace comme précédemment, mais pas nécessairement en opposition de phase. On réalise cette configuration grâce à deux ondes lumineuses de même fréquence et de même intensité, contre-propageantes, chacune polarisée linéairement et telles que leurs polarisations font un angle ϕ (on avait pris $\phi = \pi/2$ en §1). Nous appellerons cette configuration lin \vee lin.

Comme nous l'avons vu dans le cours précédent sur le piégeage cohérent de population, le fait que la lumière soit purement σ_{\pm} entraîne que la dynamique atomique interne se produit essentiellement dans le système en Λ (figure V.13) : $|g, m = -1\rangle \leftrightarrow |e, m = 0\rangle \leftrightarrow |g, m = +1\rangle$, avec des couplages qui peuvent s'écrire, pour un choix convenable de l'origine de l'axe z :

$$\kappa_{\pm}(z) = \kappa_0 \cos(kz \pm \phi/2). \quad (\text{V.36})$$

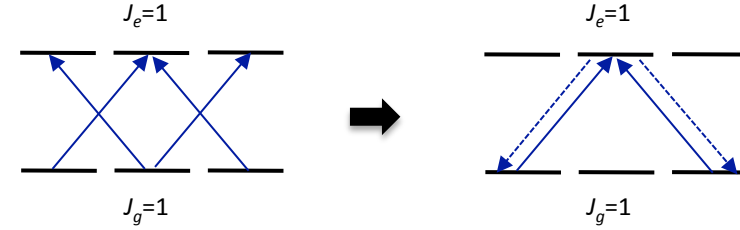


FIGURE V.13. Système en Λ qui émerge dans la dynamique d'une transition $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ éclairée par une lumière σ_{\pm} .

Etats et énergies pour un atome au repos en un point z . Nous supposons que le désaccord Δ des ondes lumineuses est grand devant κ_0 de sorte que nous pouvons restreindre notre analyse au sous-espace de dimension deux du niveau fondamental, formé de combinaisons linéaires de g_{\pm} . En tout point z de l'espace, on peut identifier dans ce sous-espace un état couplé et un état non-couplé, d'énergies respectives $\hbar\omega_C$ et $\hbar\omega_{NC}$:

$$|\psi_C\rangle \propto \kappa_+ |g_+\rangle + \kappa_- |g_-\rangle, \quad \hbar\omega_C \approx \frac{\hbar}{4\Delta} (\kappa_+^2 + \kappa_-^2), \quad (\text{V.37})$$

$$|\psi_{NC}\rangle \propto \kappa_- |g_+\rangle - \kappa_+ |g_-\rangle, \quad \hbar\omega_{NC} = 0. \quad (\text{V.38})$$

En utilisant l'expression (V.36) des fréquences de Rabi des ondes σ_{\pm} , l'énergie de l'état couplé s'écrit dans ce régime de grand Δ :

$$\hbar\omega_C \approx V_0 [1 + \cos(\phi) \cos(2kz)] \quad \text{avec} \quad V_0 = \frac{\hbar\kappa_0^2}{4\Delta}. \quad (\text{V.39})$$

Nous choisissons ici un désaccord Δ positif, de sorte que l'état couplé est toujours énergiquement au dessus de l'état non couplé (figure V.14).

Par ailleurs, du fait de son interaction avec le champ lumineux, l'atome préparé dans l'état couplé peut diffuser des photons, et le taux correspondant s'écrit

$$\gamma_C \approx \gamma_0 [1 + \cos(\phi) \cos(2kz)] \quad \text{avec} \quad \gamma_0 = \Gamma \frac{\kappa_0^2}{4\Delta^2}. \quad (\text{V.40})$$

Le taux de diffusion de photons pour un atome au repos préparé dans l'état $|\psi_{NC}\rangle$ est nul par construction et un atome au repos en z (dans une approximation semi-classique) finit donc par tomber dans l'état $|\psi_{NC}\rangle$.

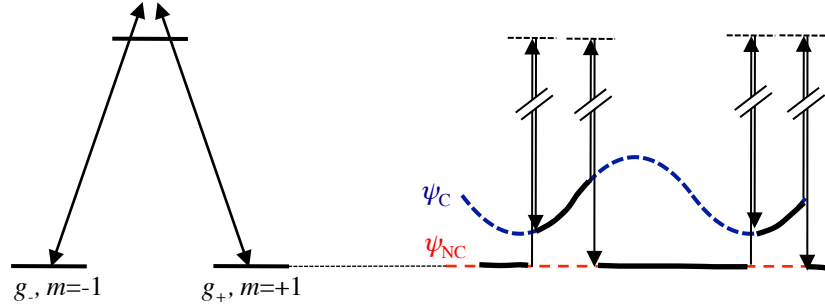


FIGURE V.14. Niveaux atomiques couplés et non couplés dans la configuration $\text{lin} \nabla \text{lin}$. Le couplage motionnel permet le passage de l'état non couplé vers l'état couplé, à l'endroit où les niveaux sont resserrés. Un deuxième processus de diffusion de photon ramène l'atome vers l'état non couplé, avec une conversion d'énergie potentielle atomique en énergie lumineuse [Image physique proposée par C. Cohen-Tannoudji dans son cours au Collège de France 1995-96].

L'effet Sisyphe dans ce contexte. Considérons maintenant un atome en mouvement lent, toujours dans l'approximation semi-classique. Supposons que cet atome est préparé initialement dans l'état $|\psi_{\text{NC}}\rangle$. Comme les expressions des états $|\psi_{\text{C}}\rangle$ et $|\psi_{\text{NC}}\rangle$ dépendent de la position, le mouvement va créer un couplage entre ces deux états. Plus précisément, prenons l'état initial de l'atome $|\psi(0)\rangle = |\psi_{\text{NC}}[z(0)]\rangle$ et écrivons² son état à l'instant t comme

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t) |\psi_{\text{NC}}[z(t)]\rangle + \beta(t) |\psi_{\text{C}}[z(t)]\rangle, \quad (\text{V.41})$$

avec, si l'atome bouge lentement, $|\beta| \ll |\alpha| \approx 1$. L'équation d'évolution pour β s'écrit à partir de l'équation de Schrödinger :

$$i\dot{\beta} = \left(\omega_{\text{C}} - i\frac{\gamma_{\text{C}}}{2}\right) \beta - i\alpha v \langle \psi_{\text{C}} | \frac{d\psi_{\text{NC}}}{dz} \rangle, \quad (\text{V.42})$$

où (i) on a ajouté le terme complexe $i\hbar\gamma_{\text{C}}/2$ à l'énergie $\hbar\omega_{\text{C}}$ de l'état couplé pour prendre en compte sa durée de vie finie sous l'effet de l'irradiation laser, et (ii) on a pris en compte le fait que les vecteurs de base $|\psi_{\text{C}}\rangle$ et

2. Pour aller au delà des arguments semi-quantitatifs présentés ici, nous renvoyons le lecteur vers le cours 1995-96 de C. Cohen-Tannoudji où le problème est abordé en détail.

$|\psi_{\text{NC}}\rangle$ « tournent » quand la position z varie. En supposant que le déplacement de l'atome pendant la durée $1/\gamma_{\text{C}}$ est petite devant la période $\lambda/2$ du problème, le régime stationnaire de (V.42) correspond à

$$|\beta| \approx \frac{k|v|}{\sqrt{\omega_{\text{C}}^2 + \frac{\gamma_{\text{C}}^2}{4}}} \mu \quad (\text{V.43})$$

avec

$$\mu = \frac{1}{k} \langle \psi_{\text{C}} | \frac{d\psi_{\text{NC}}}{dz} \rangle = \frac{\sin(\phi)}{1 + \cos(\phi) \cos(2kz)}. \quad (\text{V.44})$$

Pour un atome en mouvement, la contamination de l'état non-couplé par l'état couplé se fait donc avec un poids $|\beta|^2$. Elle est maximale aux points où l'écart ω_{C} entre ces deux états est minimal : c'est là que la « vitesse de rotation » des vecteurs $|\psi_{\text{C}}\rangle$ et $|\psi_{\text{NC}}\rangle$, donnée par $kv\mu$, est la plus grande. C'est en particulier en ces points que l'atome initialement préparé dans l'état $|\psi_{\text{NC}}\rangle$ a la plus forte probabilité de diffuser un photon, ce qui (avec probabilité 1/2) peut le faire basculer vers l'état $|\psi_{\text{C}}\rangle$.

Une fois que ce processus s'est produit, on retrouve l'effet Sisyphe habituel : l'atome va escalader une fraction de la colline de potentiel de l'état couplé, puis être repompé optiquement vers l'état $|\psi_{\text{NC}}\rangle$ au bout d'un temps $\tau \sim 1/\gamma_{\text{C}}$ (figure V.14). La perte d'énergie dans l'escalade de la colline vaut dans la limite des faibles vitesses $E_{\text{C}}(z + v\tau) - E_{\text{C}}(z)$. L'atome peut ensuite repartir pour un nouveau cycle : passage de $|\psi_{\text{NC}}\rangle$ à $|\psi_{\text{C}}\rangle$ par diffusion d'un photon induite par le couplage motionnel, retour de $|\psi_{\text{C}}\rangle$ vers $|\psi_{\text{NC}}\rangle$ par pompage optique standard.

La force dépendant de la vitesse. Du fait de la symétrie $z \leftrightarrow -z$ du problème, la force dépendant de la vitesse est forcément une fonction impaire de v : $F(-v) = -F(v)$. Dans l'effet Sisyphe traditionnel conduisant à la force (V.11), le terme d'ordre le plus bas est linéaire en vitesse, et les corrections sont en v^3, v^5, \dots . Dans le cas qui nous intéresse ici, on trouve avec (V.43) un premier facteur v^2 pour obtenir une population non nulle dans l'état couplé. L'effet de retard à l'établissement du régime stationnaire, qui entraîne que l'atome monte plus de collines qu'il n'en descend, amène un facteur v supplémentaire (comme en § 1) si bien que la force au voisinage

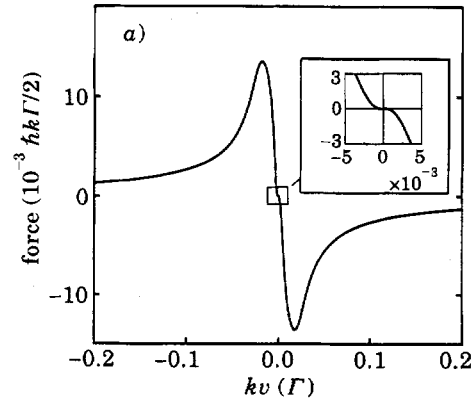


FIGURE V.15. Variation de la force $F(v)$ pour une transition $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ dans une configuration $\text{lin} \vee \text{lin}$. On note la variation en v^3 de la force au voisinage de l'origine. Paramètres : $\kappa_0 = 0.4\Gamma$, $\Delta = +\Gamma$, $\phi = \pi/4$ [figure extraite de Weidemüller et al. (1994)].

de la vitesse nulle varie ici comme v^3 . Le résultat exact après moyenne spatiale sur une période s'écrit (Weidemüller et al. 1994) :

$$F(v) = -\xi \hbar k \gamma_0 \left(\frac{kv}{\gamma_0} \right)^3 \frac{\Gamma}{\Delta}, \quad (\text{V.45})$$

avec le coefficient numérique sans dimension :

$$\xi(\phi) = \frac{16}{5\pi} \sin^2 \phi \cos \phi \int_0^{2\pi} \frac{\cos(Z)}{(1 + \cos \phi \cos Z)^5} dZ. \quad (\text{V.46})$$

On voit que pour avoir une force non nulle, il faut que

- $\sin \phi$ soit non nul ; en effet, si $\phi = 0$, κ_{\pm} sont égales en tout point de l'espace et les états couplés et non couplés ne dépendent pas de la position.
- $\cos \phi$ soit non nul ; en effet si $\phi = \pi/2$ (configuration $\text{lin} \perp \text{lin}$), l'énergie $\hbar\omega_C$ du niveau couplé ne varie pas dans l'espace et il n'y a aucune perte d'énergie dans le processus Sisyphe de la figure V.14.

Nous avons extrait de Weidemüller et al. (1994) la figure V.15 montrant la variation de $F(v)$ avec la vitesse v pour des paramètres typiques. On y voit bien la variation en v^3 au voisinage de l'origine. Quand la vitesse augmente pour devenir telle qu'il se produit en moyenne un cycle de pompage optique lorsque l'atome parcourt une période du potentiel, alors la force ressentie est (à un coefficient numérique près) donnée par la force maximale $\sim kV_0$ ressentie sur le niveau $|\psi_C\rangle$. Cette force maximale est comparable à celle trouvée pour l'effet Sisyphe brillant. Pour des vitesses encore plus grandes, la perte d'énergie par processus de pompage optique sature à une fraction de V_0 et la force décroît comme $1/v$, comme nous l'avons vu pour l'effet Sisyphe traditionnel.

Performances de ce refroidissement. Pour évaluer la limite du refroidissement, commençons par un raisonnement semi-classique. La force de friction, en v^3 au voisinage de l'origine, est plus faible que la force linéaire en vitesse trouvée pour le refroidissement Sisyphe traditionnel. Mais le coefficient de diffusion en vitesse (que nous ne calculerons pas ici) est lui aussi affecté du même coefficient v^2 supplémentaire si bien que la distribution en vitesse, évaluée à partir de (V.31)

$$\mathcal{P}(v) \propto \exp \left(\int_0^v \frac{MF(v')}{D_p(v')} dv' \right) \quad (\text{V.47})$$

reste gaussienne, avec une énergie moyenne $k_B T$ comparable à la modulation V_0 du déplacement lumineux, comme dans le cas de l'effet Sisyphe traditionnel.

Toutefois, ce raisonnement semi-classique est forcément insuffisant pour une transition $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$, puisque nous avons vu au chapitre précédent qu'il y a toujours un état noir pour ce type de transition. On s'attend à ce qu'une fraction des atomes s'accumule dans cet état noir, qui sera composé de pics bien définis en vitesse en $\pm v_r$. Cette dynamique spécifiquement quantique est beaucoup plus lente que la dynamique semi-classique (figure V.16) : la dynamique quantique résulte d'une marche au hasard dans laquelle un atome donné doit s'approcher de la famille de l'état noir avec une précision bien meilleure que la vitesse de recul, ce qui nécessite de nombreux processus d'émission spontanée. La dynamique semi-classique, qui amène les atomes à quelques vitesses de

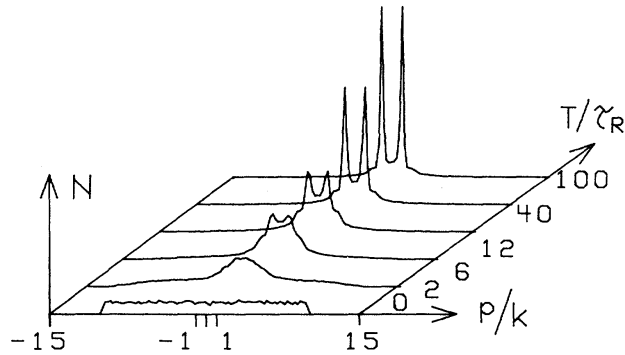


FIGURE V.16. Évolution de la distribution en impulsion d'atomes, pour une transition $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ dans une configuration lin \vee lin. Unité de temps $\tau_R = 2M/\hbar k^2$ (paramètres pour l'atome de sodium), $\kappa_0 = 0.2\Gamma$, $\Delta = +\Gamma$, $\phi = \pi/4$. On voit clairement les deux échelles de temps pour (i) le refroidissement Sisyphe, (ii) le refroidissement subreuil [Figure extraite de Shahriar et al. (1993)].

reuil du centre, ne nécessite quant à elle que quelques processus d'émission spontanée si on part d'une distribution en vitesse pré-refroidie par effet Doppler.

4-3 Les premières mélasses grises

Le refroidissement Sisyphe gris que nous venons de discuter dans les cas $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 1/2$ et $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ peut se généraliser à des transitions de moment cinétique plus élevé, de type $J_g \leftrightarrow J_e$ avec $J_e = J_g - 1$ et $J_e = J_g$. Pour ce type de transition, le pompage optique se fait toujours vers le sous-niveau fondamental le moins couplé à la lumière. Il faudra donc choisir un désaccord Δ positif pour que cet état le moins couplé soit également le plus bas en énergie, condition nécessaire pour que l'effet Sisyphe provoque un refroidissement et pas un chauffage.

Avant d'entrer un peu plus dans les détails, on peut souligner deux points de comparaison avec les mélasses brillantes :

- Un avantage clair des mélasses grises est que la fluorescence émise

par les atomes décroît fortement, puisque les atomes sont pompés optiquement vers les sous-niveaux les moins couplés, voire même un état noir quand il existe. Certains effets néfastes de la lumière de fluorescence peuvent donc être réduits : force de répulsion entre atomes comme dans le piège magnéto-optique, collisions inélastiques assistées par la lumière.

- Un inconvénient des mélasses grises est le signe du désaccord auquel elles opèrent ; ce désaccord doit être positif, donc opposé à celui du refroidissement Doppler. Il y a donc compétition entre la force de refroidissement due à la mélasse grise, importante pour des vitesses telles que $kv \lesssim \gamma_C$ et la force de chauffage due à l'effet Doppler en désaccord positif, importante pour $kv \sim \Gamma$. Si les paramètres de l'expérience peuvent être choisis tels que la séparation entre ces deux échelles de vitesses est bien marquée, ce qui en pratique impose $kv_r \ll \Gamma$, alors cette compétition n'est pas véritablement un problème et on peut ignorer en pratique le chauffage Doppler pour des atomes refroidis autour du recul par la mélasse grise. Ce sera le cas pour des raies très larges, pour lesquelles Γ dépasse par plusieurs ordres de grandeur la fréquence de recul ω_r .

Les premières expériences de refroidissement sur une transition $J_g \leftrightarrow J_e = J_g - 1$ ont été menées à 1D par Valentin et al. (1992) au laboratoire Aimé Cotton. Il s'agissait de la composante $J_g = 3 \leftrightarrow J_e = 2$ de la raie D_2 du césium, qui est une transition fermée. L'extension à 3D a été faite sur cette même raie par Boiron et al. (1995) et Boiron et al. (1996) (voir aussi Hemmerich et al. (1995) pour une version 2D sur une transition $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$). Boiron et al. (1996) ont mesuré des températures de l'ordre du microkelvin à basse densité atomique, ce qui est plus bas par un facteur deux que celles mesurées sur la transition brillante $J_g = 4 \leftrightarrow J_e = 5$ pour le même atome.

4-4 Le renouveau des mélasses grises

Depuis 2012, les mélasses grises sont revenues sur le devant de la scène pour le refroidissement de certaines espèces atomiques comme le lithium ou le potassium (Fernandes et al. 2012; Grier et al. 2013; Nath et al. 2013; Salomon et al. 2013; Burchianti et al. 2014; Sievers et al. 2015). Il s'agit

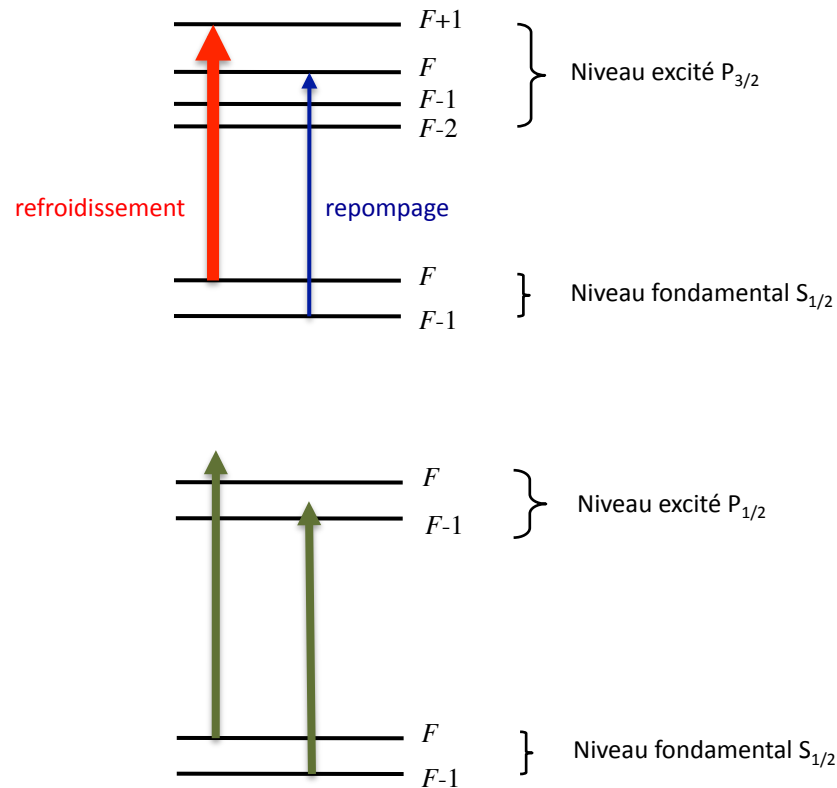


FIGURE V.17. Haut : Raie D_2 d'un atome alcalin et transitions utilisées pour le refroidissement Sisyphe standard, avec un laser principal pour le refroidissement et un laser secondaire pour le repompage. Bas : Raie D_1 d'un atome alcalin ; les deux lasers jouent alors des rôles comparables dans le refroidissement. Notons qu'il est possible que les niveaux hyperfins soient inversés par rapport à ce schéma, avec le niveau F en dessous du niveau $F-1$ (c'est le cas par exemple pour ${}^7\text{Li}$ et ${}^{40}\text{K}$). La structure de la raie D_2 pour ${}^6\text{Li}$ ($I = 1$, $F = 3/2$) est également légèrement différente de ce qui est représenté ici.

d'atomes alcalins, pour lesquels nous rappelons que la raie de résonance, qui couple un état S à un état P , est clivée en deux composantes du fait de la structure fine du niveau excité. Cet niveau excité a donc deux sous-niveaux, $P_{1/2}$ et $P_{3/2}$, et les deux raies correspondantes sont appelées D_1 et D_2 .

De la raie D_2 à la raie D_1 . Pour Li ou K, le refroidissement Sisyphe traditionnel sur la raie D_2 (utilisé avec succès pour Na, Rb, Cs) fonctionne mal. Rappelons que cette raie D_2 relie les deux sous-niveaux hyperfins fondamentaux, F et $F-1$, aux quatre sous-niveaux hyperfins de l'état excité $P_{3/2}$: $F+1$, F , $F-1$, $F-2$ (ici $F = I + 1/2$, où I est le spin du noyau atomique). Le refroidissement Sisyphe standard fonctionne sur la transition fermée $J_g = F \leftrightarrow J_e = F+1$, et nécessite un désaccord Δ négatif (figure V.17, haut). Un faisceau repompeur additionnel, accordé par exemple sur la transition $J_g = F-1 \leftrightarrow J_e = F$, permet de recycler les atomes qui seraient éventuellement pompés sur le niveau fondamental $F-1$, mais ce repompeur ne joue qu'un rôle mineur dans le problème. Cette image est valable si la structure hyperfine entre les sous-niveaux $J_e = F+1$ et $J_e = F$ est suffisamment grande devant la largeur naturelle Γ . Cette condition, très bien réalisée pour des alcalins lourds comme le rubidium ou le césium, ne l'est en revanche pas pour le lithium et le potassium (c'est marginal pour le sodium).

L'alternative consiste à utiliser la raie D_1 , qui relie les deux sous-niveaux hyperfins fondamentaux, F et $F-1$, aux deux sous-niveaux hyperfins de l'état excité $P_{1/2}$: F et $F-1$ (figure V.17, bas). Un avantage immédiat de cette raie est que pour un isotope donné, la structure hyperfine du niveau excité $P_{1/2}$ est notablement plus grande que celle du niveau $P_{3/2}$: les différentes transitions sont donc mieux résolues. Toutefois, on n'a alors plus de transition fermée entre une paire donnée de sous-niveaux : chaque sous-niveau excité (F ou $F-1$) peut se désexciter vers les deux sous-niveaux fondamentaux. On est donc obligé de considérer le problème de l'interaction atome-lumière en prenant en compte simultanément les deux niveaux fondamentaux et les deux lasers qui les excitent. Il n'y a plus un laser principal refroidisseur et un repompeur (au rôle mineur), mais deux lasers jouant des rôles également importants.

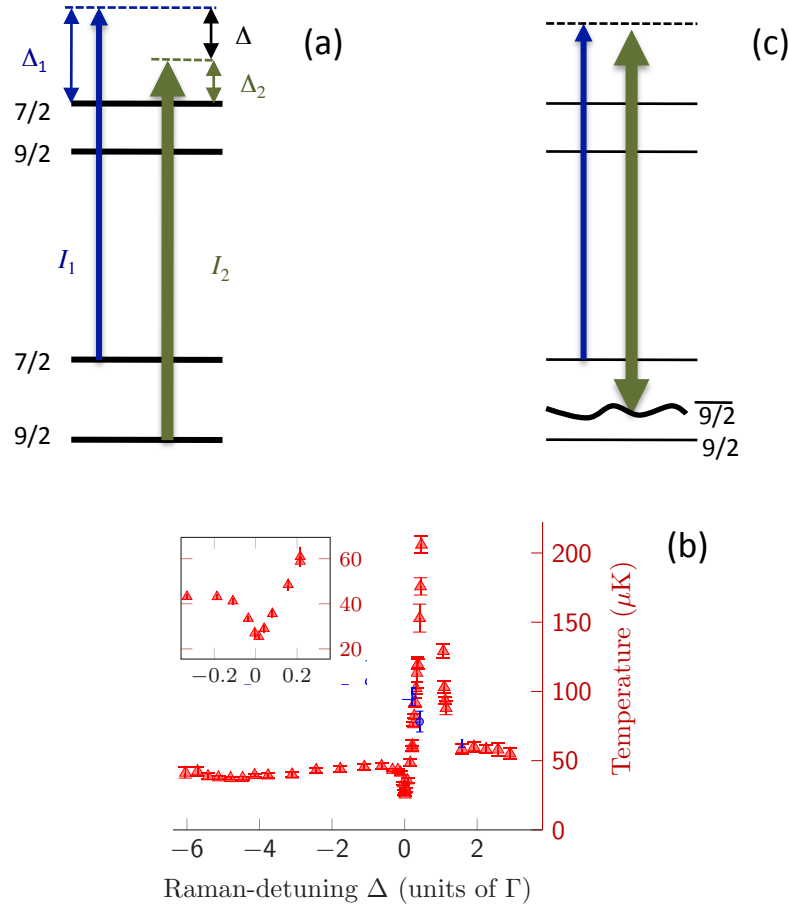


FIGURE V.18. *a) Schéma des niveaux du potassium 40 et lasers utilisés. b) Température dans une mélasse grise de potassium 40, en fonction du désaccord Raman $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$ ($I_1 = 0.46 I_{\text{sat}}$, $I_2 = 6 I_{\text{sat}}$, $\Delta_2 = 3\Gamma$) [Figure extraite de Sievers et al. (2015)]. c) Explication du chauffage observé pour un désaccord Raman Δ légèrement positif : une transition Raman résonante conduit à l'excitation du niveau 9/2 habillé par les photons du laser intense.*

Résonance Raman et profil de Fano. Un point mis en évidence par Grier et al. (2013), puis par Nath et al. (2013) et Salomon et al. (2013), est l'importance de la résonance Raman entre les deux lasers excitant respectivement le niveau fondamental $F - 1$ et le niveau fondamental F . Ce point est illustré sur la mesure de température montrée sur la figure V.18 extraite de Sievers et al. (2015), obtenue avec un laser intense (laser 2) pilotant la transition $J_g = 9/2 \leftrightarrow J_e = 7/2$ et un laser plus faible (laser 1) pilotant la transition $J_g = 7/2 \leftrightarrow J_e = 7/2$. Quand le désaccord Raman $|\Delta|$ est plus grand que Γ , on mesure une température de l'ordre de $50 \mu\text{K}$, que l'on peut interpréter comme résultat de la mélasse grise $9/2 \leftrightarrow 7/2$ pour le laser plus intense, ou $7/2 \leftrightarrow 7/2$ pour l'autre. On a alors des états noirs ou gris obtenus par superposition d'états d'un sous-niveau fondamental donné ($9/2$ ou $7/2$).

Quand la résonance Raman se produit ($\Delta = 0$), la température chute par un facteur additionnel allant de 2 à 4 selon les espèces atomiques. On voit également apparaître une zone défavorable, pour un désaccord Raman légèrement positif. Ce résultat est à rapprocher du profil trouvé dans le chapitre précédent pour un système en Λ (figure V.19). Dans le cas où les deux ondes lumineuses qui pilotent l'atome sont telles que $\kappa_1 \ll \kappa_2$, nous avons trouvé une variation de la population du niveau excité au voisinage de la résonance Raman très semblable à la variation trouvée par Sievers et al. (2015) pour la température. Rappelons ici l'origine de ce profil asymétrique, appelé *profil de Fano*. Cette forme de profil se rencontre dans le cas où une interférence se produit entre un processus de diffusion résonnante et un processus de diffusion beaucoup plus plat. Lounis & Cohen-Tannoudji (1992) ont prouvé que le modèle de Fano était effectivement réalisé pour le système en Λ quand $\kappa_1 \ll \kappa_2 \ll |\Delta_{1,2}|$. Pour le montrer, on commence par traiter exactement l'interaction du faisceau 2 avec l'atome. Dans le cas où $\kappa_2 \ll |\Delta_2|$, cet « habillage » du niveau g_2 induit le déplacement lumineux :

$$|g_2\rangle \rightarrow |\bar{g}_2\rangle, \quad E(\bar{g}_2) = E(g_2) + \delta E(g_2) \quad \delta E(g_2) \approx \frac{\hbar|\kappa_2|^2}{4\Delta_2}. \quad (\text{V.48})$$

Partons maintenant de l'atome dans l'état $|g_1\rangle$; la diffusion d'un photon du faisceau laser faible (faisceau 1) peut se faire soit de manière non résonante en ne passant que par $|e\rangle$ (figure V.19, en bas à gauche), soit de manière résonante via une transition Raman qui mène l'atome de manière

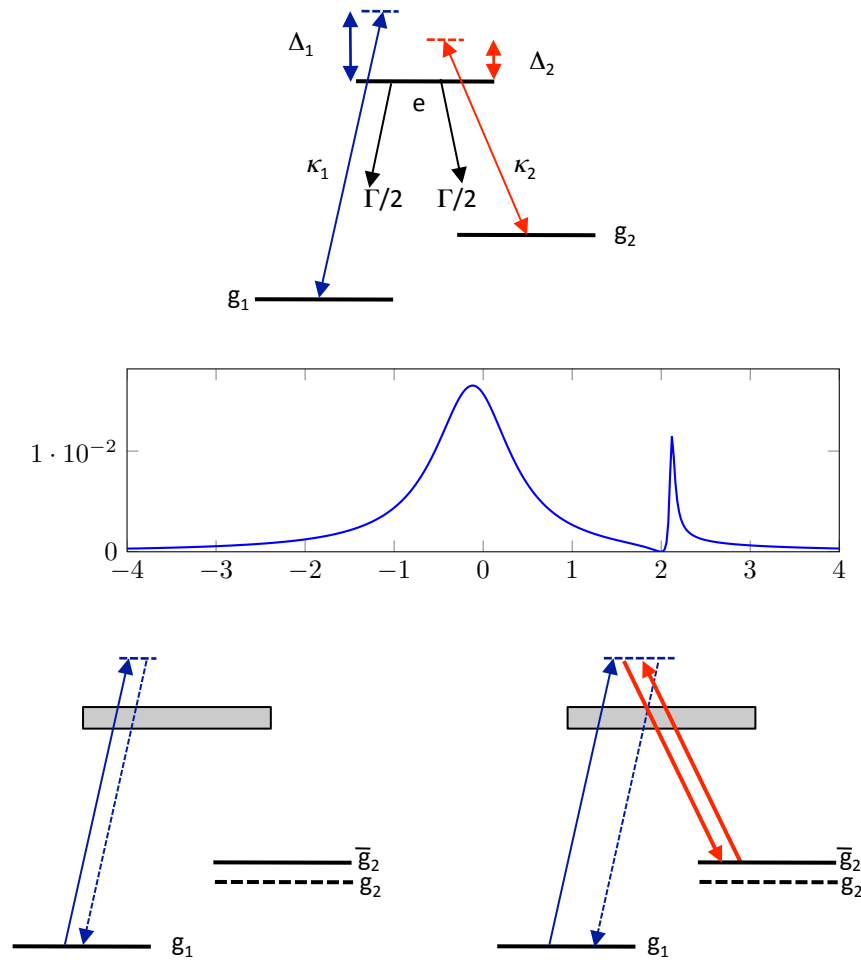


FIGURE V.19. Haut : système modèle en Λ . Milieu : Variation de la population excitée P_e avec le désaccord Δ_1 , mesuré en unité de Γ . Les autres paramètres sont (en unités de Γ) : $\kappa_1 = 0.1$, $\kappa_2 = 1$, $\Delta_2 = 2$. (Bas) : Les deux processus de diffusion pour un photon du laser 1, conduisant au profil de Fano de la figure du milieu.

transitoire dans $|\bar{g}_2\rangle$ (figure V.19, en bas à droite). Le maximum étroit de la courbe pour P_e est obtenu quand la résonance Raman vis à vis de l'état habillé $|\bar{g}_2\rangle$ se produit :

$$\hbar\Delta_1 = \hbar\Delta_2 + \delta E(g_2). \quad (\text{V.49})$$

On obtient donc une situation remarquable où P_e s'annule pour la résonance Raman « nue » $\Delta_1 = \Delta_2$, puis passe par un maximum pour la résonance Raman « habillée » (V.49).

Ce modèle d'un système en Λ est bien sûr une simplification considérable par rapport au cas réel de la raie D_1 du potassium, pour laquelle 18 états fondamentaux sont couplés à 18 états excités. Mais il rend compte au moins qualitativement du gain obtenu à la résonance Raman « nue », qui permet de faire apparaître des états noirs « robustes », combinaisons linéaires des 18 états fondamentaux issus des deux niveaux hyperfins $F_g = 7/2$ et $F_g = 9/2$. Il permet également d'expliquer le chauffage important observé pour un désaccord Raman légèrement positif (figure V.18c).

Conclusion

Le mécanisme Sisyphe, qu'il soit « brillant » pour une transition telle que $J_g < J_e$ ou « gris » pour une transition $J_g \geq J_e$, permet d'obtenir une température essentiellement limitée par le recul d'un seul photon. Il est relativement robuste dans la mesure où il ne dépend que faiblement de la qualité des faisceaux lumineux utilisés (polarisations, fronts d'onde, désaccord). Les études les plus détaillées à ce jour sur la forme des distributions en vitesse ont été menées dans le cas brillant. Elles ont montré que les profils de distribution en vitesse les plus étroits sont notablement non gaussiens, ce qui ne facilite pas toujours la comparaison entre différentes expériences, les auteurs ne prenant pas systématiquement la même convention pour mesurer « leur » température.

Nous avons néanmoins tenté de récapituler sur la table V.20 la limite obtenue par refroidissement Sisyphe pour différentes espèces de la famille des alcalins, avec un refroidissement Sisyphe brillant ou gris. Le point essentiel à noter est qu'avec la panoplie offerte par les différents types de mécanismes, on atteint systématiquement une vitesse quadratique moyenne

	M	λ nm	$\Gamma/2\pi$ MHz	v_r cm/s	$\omega_r/2\pi$ kHz	T_{\min} μK	\bar{v} cm/s	\bar{v}/v_r
Li	6	671	5.9	9.9	73.5	44*	24.6*	2.5*
Li	7	671	5.9	8.5	63.0	60*	26.6*	3.1*
Na	23	589	9.8	2.9	24.9	25	9.5	3.2
K	39	770	6	1.32	8.6	3*	2.5*	1.9*
K	40	770	6	1.29	8.4	11*	4.8*	3.7*
Rb	87	780	6.1	0.59	3.8	1.2	1.1	1.8
Cs	133	852	5.2	0.35	2.1	2.5	1.25	3.6
Cs	133	852	5.2	0.35	2.1	1.1*	0.83*	2.4*

FIGURE V.20. *Températures minimales obtenues par refroidissement Sisyphe. Les données avec une étoile correspondent à une mélasse grise, les autres à une mélasse brillante. Les vitesses quadratiques moyennes mesurées \bar{v} sont toutes comprises entre 1.8 et 3.7 vitesses de recul.*

de l'ordre de quelques vitesses de recul, typiquement entre 2 et 4 v_r . Notons pour finir que les températures indiquées ici sont des températures mesurées pour des gaz très dilués, dans lesquels les effets collectifs comme la diffusion multiple ne jouent pas de rôle. Nous reviendrons sur ces effets dans le dernier chapitre de ce cours.

Chapitre VI

Les réseaux optiques et le refroidissement par bande latérale

Nous avons exploré dans les chapitres précédents différents mécanismes de refroidissement pour des atomes libres : refroidissement Doppler, refroidissement par piégeage cohérent de population, refroidissement Raman, refroidissement Sisyphe. Mis à part le refroidissement Doppler en raie large, tous ces mécanismes ont une limite dont l'échelle est donnée par la vitesse de recul $v_r = \hbar k/M$. Certains mécanismes permettent de descendre en dessous de v_r , notamment à 1D, alors que d'autres comme l'effet Sisyphe conduisent à des distributions de largeur de quelques (2 à 4) v_r . Ces résultats sont obtenus pour des gaz très dilués, dans lesquels les effets collectifs jouent un rôle négligeable.

Un des enjeux majeurs des expériences avec des atomes froids est l'atteinte du régime quantique pour le gaz, régime dans lequel les différents paquets d'ondes, de taille donnée par la longueur d'onde thermique du gaz, se recouvrent. Revenons sur les conditions à réaliser pour cela ; prenons pour fixer les idées un gaz de vitesse quadratique moyenne $v_0 = v_r$, soit $k_B T = M v_r^2 = \hbar^2 k^2 / M$. La longueur d'onde thermique λ_T du gaz est reliée à la longueur d'onde optique $\lambda = 2\pi/k$ par

$$\lambda_T = \frac{\hbar\sqrt{2\pi}}{\sqrt{Mk_B T}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}, \quad (\text{VI.1})$$

et le seuil de dégénérescence quantique du gaz est obtenu pour une densité

$$n \approx \lambda_T^{-3} = (2\pi)^{3/2} \lambda^{-3}. \quad (\text{VI.2})$$

Pour une longueur d'onde optique de l'ordre de $0.7 \mu\text{m}$, ceci correspond à

$$n \approx 50 \text{ atomes}/\mu\text{m}^3.$$

Atteindre un tel couple densité/température en présence des faisceaux lasers de refroidissement est un défi qui n'a encore jamais été relevé pour un gaz d'atomes de densité uniforme. Les obstacles principaux sont la diffusion multiple de photons dans le gaz, ainsi que les collisions inélastiques entre atomes assistées par la lumière. La seule stratégie réussie de contournement est celle adoptée à Innsbruck par Stellmer et al. (2013) et décrite en détail au chapitre 3 : une petite partie du volume occupé par les atomes a été confinée dans un piège de grande raideur et simultanément rendue « transparente » à la lumière de refroidissement ; ceci a permis d'obtenir un condensat de Bose-Einstein contenant environ 1 % du nombre total d'atomes présents dans le piège.

Le but de chapitre est de faire d'abord le point sur les limites imposées par les effets collectifs dans les gaz éclairés par la lumière, en particulier la diffusion multiple des photons émis spontanément. Nous examinerons quelques remèdes qui ont été proposés, comme le confinement dans un piège avec à une fréquence d'oscillation élevée. Ceci nous amènera de manière naturelle vers un dernier mécanisme de refroidissement, le refroidissement par bande latérale, bien adapté à une assemblée d'atomes confinés aux sites d'un réseau optique. Et pour finir, puisque l'obstacle majeur à l'obtention de gaz dégénérés est la diffusion multiple des photons émis spontanément lors du refroidissement, nous terminerons ce chapitre en abordant une question récurrente du domaine : l'émission spontanée, qui est à l'origine du problème de la diffusion multiple, est-elle indispensable

au refroidissement d'atomes par laser ?

1 Effets collectifs et diffusion multiple

Nous avons déjà rencontré le problème de la diffusion multiple à plusieurs reprises dans ce cours. Rappelons brièvement son origine en prenant l'exemple du refroidissement Raman, où l'on doit pomper optiquement les atomes depuis un état interne g_2 vers un autre état g_1 (figure VI.1). Dans un premier temps, un atome A absorbe un photon du laser en charge de ce pompage optique et il émet de manière spontanée un photon par un processus de diffusion Raman :

$$|A : g_2\rangle + \mathbf{k}_L \longrightarrow |A : g_1\rangle + \mathbf{k}_{\text{diff}}, \quad (\text{VI.3})$$

Dans un deuxième temps, le photon émis d'impulsion $\hbar\mathbf{k}_{\text{diff}}$ se propage dans le gaz d'atomes et arrive sur un atome B dans l'état $|g_1\rangle$. Là, il peut être absorbé et donner naissance à un autre photon diffusé d'impulsion $\hbar\mathbf{k}'_{\text{diff}}$:

$$|B : g_1\rangle + \mathbf{k}_{\text{diff}} \longrightarrow |B : g_\alpha\rangle + \mathbf{k}'_{\text{diff}}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (\text{VI.4})$$

et ainsi de suite jusqu'à ce que le photon s'échappe du milieu. Notons que l'atome B peut se trouver après avoir diffusé le photon dans l'état interne g_1 ou g_2 . Dans le deuxième cas, le processus de repompage n'a rien apporté : on a simplement enlevé un atome initialement dans l'état interne g_1 (l'atome B) pour y mettre un autre atome (l'atome A).

1-1 Les méfaits de la diffusion multiple

La diffusion multiple a plusieurs effets, tous néfastes quand il s'agit de s'approcher du seuil de dégénérescence quantique, c'est-à-dire obtenir de basses températures et de grandes densités :

- Elle crée une force de répulsion effective entre les atomes, qui tend à déstabiliser le nuage piégé. Nous avons discuté cet effet lors de l'étude du piège magnéto-optique.
- Elle tend à faire sortir les atomes de l'état noir dans le mécanisme de refroidissement par piègeage cohérent de population, en brouillant la

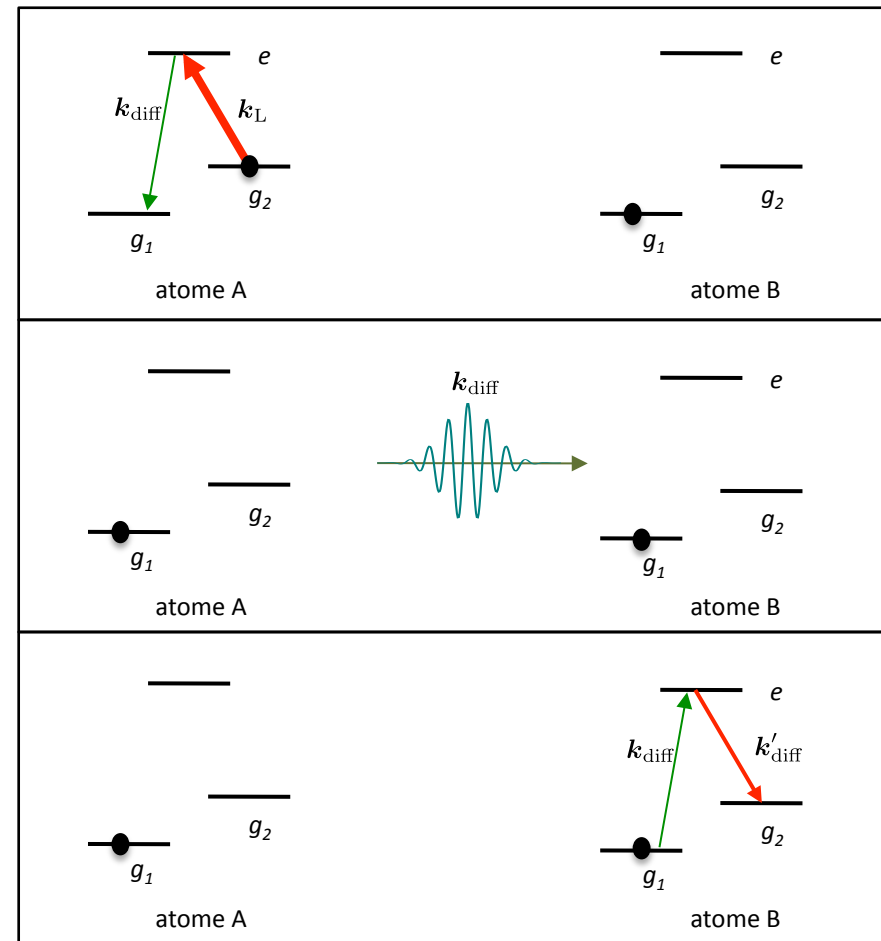


FIGURE VI.1. Un exemple de difficulté liée à la diffusion multiple, dans le cas du refroidissement Raman. On part de la situation où un atome B est dans le niveau g_1 souhaité et on souhaite repomper également l'atome A . Une fois ce pompage de l'atome A effectué, le photon émis peut être absorbé par l'atome B , annulant ainsi le gain du premier processus et causant de plus un chauffage dû au recul lors du processus de diffusion $\mathbf{k}_{\text{diff}} \rightarrow \mathbf{k}'_{\text{diff}}$.

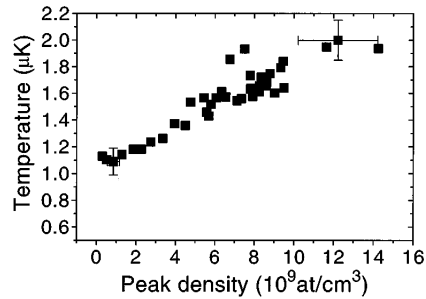


FIGURE VI.2. Variation de la température avec la densité atomique dans une expérience de refroidissement Sisyphé « gris ». Mesures faites sur un nuage d’atomes de césium par Boiron et al. (1996).

cohérence entre les différents états internes qui entrent dans la fonction d’onde de cet état noir.

- Elle perturbe le refroidissement Raman, plus précisément sa phase de repompage, comme nous l’avons indiqué ci-dessus.
- Elle diminue l’efficacité du refroidissement Sisyphé, en brisant la corrélation entre déplacements lumineux et processus de pompage optique.

De plus, la diffusion multiple entraîne des reculs aléatoires des atomes diffusant des photons et crée un chauffage supplémentaire. Elle apparaît donc comme un obstacle majeur à l’obtention de la dégénérescence quantique directement à partir du refroidissement laser (Olshanii et al. 1996).

Dans plusieurs expériences, il a été mis en évidence une variation approximativement linéaire de la température avec la densité de l’échantillon (à géométrie fixée). On caractérise alors le chauffage dû à la diffusion multiple par le coefficient $\frac{dT}{dn}$. Par exemple, pour l’effet Sisyphé (brillant ou gris) dans une géométrie sphérique, on trouve pour un gaz de césium la valeur typique [figure VI.2 et Townsend et al. (1995); Boiron et al. (1996)] :

$$\frac{dT}{dn} \approx 600 \text{ nK}/(10^{10} \text{ cm}^{-3}), \quad (\text{VI.5})$$

ce qui est considérable [100 fois plus grand que les valeurs indiquées au chapitre 3 pour le refroidissement Doppler en raie étroite (Katori et

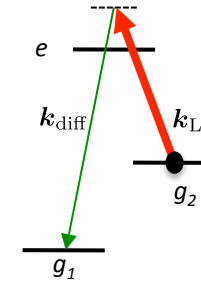


FIGURE VI.3. Tentative pour diminuer l’effet de la diffusion multiple : on désaccorde le faisceau laser de pompage optique, ce qui a pour effet de désaccorder également les photons Raman émis spontanément.

al. 1999)]. Dans ce régime, partant d’un gaz qui serait refroidi au recul ($v_0 = v_r$, $T = 200 \text{ nK}$), la température doublerait dès que la densité atteint $3 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$, alors qu’il faudrait une densité 10^3 à 10^4 fois plus grande pour atteindre la dégénérescence quantique à cette température.

Lors de notre étude du refroidissement Doppler en raie étroite, nous avons signalé un remède (partiel) au problème de la diffusion multiple : quitter la géométrie sphérique pour passer à des nuages très allongés, de sorte que les photons émis spontanément peuvent quitter rapidement le milieu en s’échappant latéralement. Ce remède fonctionne également, au moins de manière partielle, pour le refroidissement Sisyphé : en utilisant une mélasse grise dans une géométrie très allongée ($600 \times 12 \times 12$ microns), Boiron et al. (1998) ont obtenu une température de $\sim 2 \mu\text{K}$ pour une densité centrale de 10^{12} cm^{-3} .

1-2 Un remède simple...qui ne marche pas

Comment contourner le problème de la diffusion multiple ? Reprenons le processus de refroidissement Raman et sa phase de pompage optique qui ramène l’atome de g_2 vers g_1 , représentée sur la figure VI.1. On pourrait songer naïvement qu’il suffit de désaccorder suffisamment le faisceau lumineux k_L par rapport à la résonance $g_2 \leftrightarrow e$ pour diminuer les méfaits potentiels du photon de fluorescence émis (figure VI.3). En effet, par

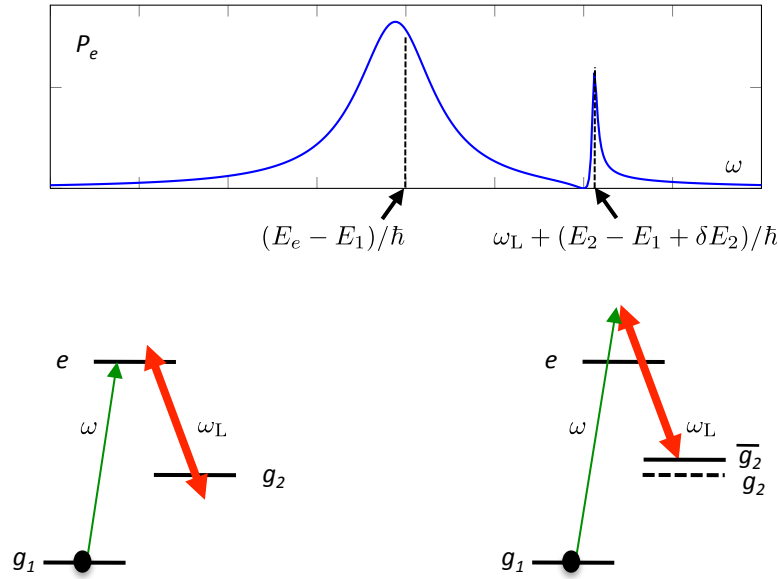


FIGURE VI.4. Diffusion d'un photon de pulsation ω dans un système en Λ quand un laser ω_L pilote la transition $g_2 \leftrightarrow e$. La population de l'état excité P_e possède deux maxima quand on varie ω : le premier correspond à la résonance simple $g_1 \leftrightarrow e$, le deuxième à la diffusion Raman résonante mettant en jeu l'état \bar{g}_2 , c'est-à-dire l'état g_2 déplacé par le laser.

conservation de l'énergie, ce photon aura lui aussi une fréquence désaccordée par rapport à la fréquence de la transition $g_1 \leftrightarrow e$. Malheureusement, ce remède ne fonctionne pas : de manière paradoxale, la section efficace d'absorption par l'atome B du photon émis reste égale à la valeur maximale permise $\sim \lambda^2$, en dépit du désaccord de la fréquence de ce photon par rapport à la résonance atomique !

La raison en est rappelée sur la figure VI.4, déjà rencontrée aux chapitres précédents. Quand un faisceau laser ω_L « habille » la transition atomique $g_2 \leftrightarrow e$ et qu'on sonde la transition $g_1 \leftrightarrow e$ avec une autre lumière ω d'intensité arbitrairement faible, la population de l'état excité atomique possède deux maxima. Le premier maximum, facile à comprendre, corres-

pond à un photon sonde résonant avec la transition $g_1 \leftrightarrow e$ (avec un léger déplacement lumineux de l'état e dû au laser de pulsation ω_L) :

$$\hbar\omega \approx E_e - E_1. \quad (\text{VI.6})$$

L'autre maximum, plus subtil, est obtenu pour (figure VI.4) :

$$\hbar\omega = \hbar\omega_L + E_2 - E_1 + \delta E_2 \quad (\text{VI.7})$$

où δE_2 est le déplacement lumineux du niveau g_2 induit par le laser ω_L . C'est la condition de résonance Raman entre l'état $|g_1\rangle$ et l'état $|\bar{g}_2\rangle$, déplacé (ou « habillé ») par le laser ω_L . Cette résonance correspond à un profil de Fano que nous avons déjà discuté au chapitre 4 (Lounis & Cohen-Tannoudji 1992). La valeur élevée de la population de l'état e correspond à une grande section efficace d'absorption du photon de pulsation ω . Or, c'est exactement à cette fréquence qu'est émis le photon du processus représenté sur la figure VI.3.

Finalement, pour un gaz de densité uniforme, les seuls remèdes (partiels) à la diffusion multiple démontrés à ce jour sont :

- choisir une transition étroite et de tirer profit de la robustesse du refroidissement Doppler pour atteindre malgré tout des densités dans l'espace des phases appréciables,
- prendre une géométrie limitant le libre parcours moyen d'un photon dans l'échantillon, par exemple des géométries en forme de cigare très allongé de sorte que le photon puisse s'échapper latéralement.

Nous allons voir dans le paragraphe suivant que la situation est favorablement modifiée dans un piège.

1-3 *Festina lente*

Le régime *festina lente*, initialement proposé par Cirac et al. (1996) et approfondi par Castin et al. (1998), constitue à placer les atomes dans un piège harmonique de fréquence d'oscillation Ω élevée. Plus précisément, on considère la situation où

$$\Omega \gg \gamma, \quad (\text{VI.8})$$

γ étant le taux de fluorescence causé par les lasers de refroidissement ou de pompage optique.

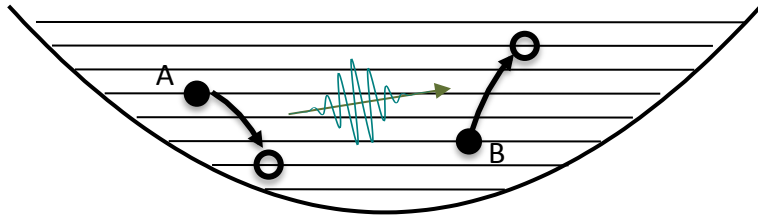


FIGURE VI.5. Un exemple d'effet de la diffusion multiple pour des atomes piégés. Un atome A passe de n_a à n'_a lors d'un processus de refroidissement impliquant l'émission spontanée d'un photon. Ce photon peut être diffusé par l'atome B qui passe de n_b à n'_b . Si $n'_a + n'_b > n_a + n_b$ (ce qui est le cas sur cette figure), l'énergie de la paire d'atomes A - B a augmenté, ce qui est défavorable.

Pour une paire d'atomes piégés, le chauffage lors de la diffusion multiple se manifeste de la manière suivante : les atomes a et b sont initialement sur les niveaux de vibration n_a et n_b (figure VI.5). Après un processus de pompage optique, l'atome a bascule vers le niveau n'_a et un photon est émis. L'atome b peut diffuser ce photon et passer vers un niveau n'_b . Si $n'_a + n'_b = n_a + n_b$, l'énergie de la paire d'atomes est la même qu'initialement, rien de grave ne s'est produit. En revanche si $n'_a + n'_b > n_a + n_b$, l'énergie de la paire d'atomes a augmenté et ce chauffage, s'il se répète plusieurs fois avant que le photon sorte de l'échantillon, va dégrader fortement les performances du refroidissement.

L'argument de Cirac et al. (1996) est semi-qualitatif : il utilise un raisonnement fondé sur l'équation pilote à l'approximation du champ tournant pour justifier le fait que les termes de chauffage lors d'un processus de réabsorption doivent avoir une contribution diminuée quand la condition (VI.8) est réalisée. Plus précisément, ces termes correspondent à une « rotation rapide » des coefficients de l'équation pilote, car ils oscillent à la pulsation $(n'_a + n'_b - n_a - n_b)\Omega$ alors que la relaxation se fait avec un taux γ . Leur contribution devient donc négligeable à la limite $\Omega \gg \gamma$, sauf pour les termes « séculaires » $n'_a + n'_b = n_a + n_b$ qui sont indolores sur le plan énergétique, comme nous l'avons mentionné plus haut.

Castin et al. (1998) ont repris le problème de manière plus quantitative ; ils ont montré que pour deux particules placées dans un piège harmonique

isotrope tel que $\gamma \ll \Omega \ll \omega_r$, la probabilité de réabsorption \mathcal{P} était fortement diminuée dans le régime *festina lente*. Ils se sont placés dans le cas où la distance moyenne entre particules r est grande devant la longueur d'onde, c'est-à-dire $kr \gg 1$, et ils ont trouvé que le résultat connu pour des atomes libres, $\mathcal{P} \sim \sigma/4\pi r^2 \sim 1/(kr)^2$, devait être remplacé dans le régime *festina lente* par $\mathcal{P} \sim 1/(kr)^3$. Le gain espéré pour le régime *festina lente* est donc validé par cette analyse théorique précise.

Il n'y a eu que peu d'études expérimentales pour tester, même qualitativement, les prédictions faites pour le régime *festina lente*. Signalons le travail de Perrin et al. (1999) qui a exploré l'influence de la puissance du faisceau repompeur dans une expérience de refroidissement Raman. Une réduction de la température de l'ordre de 20% a été observé pour une variation d'un facteur 20 de γ , mais ce taux de pompage γ restait malgré tout supérieur à la fréquence d'oscillation Ω dans le piège : le régime *festina lente* n'était donc pas vraiment atteint dans cette expérience.

1-4 Passage dans un réseau optique

Puisque le régime *festina lente* requiert des fréquences d'oscillation Ω élevées, il est naturel de chercher à le réaliser dans un réseau optique formé en superposant des ondes laser stationnaires dans les différentes directions de l'espace. Selon le désaccord choisi pour ces ondes, les atomes sont piégés aux nœuds ou aux ventres des ondes stationnaires. Le potentiel de confinement des atomes varie sur l'échelle de la longueur d'onde optique et des fréquences d'oscillation importantes, pouvant atteindre le MHz, sont obtenues.

Bien que l'analyse de Castin et al. (1998) ne s'applique pas telle quelle à un réseau optique, le gain espéré intuitivement est bien présent dans l'expérience : Wolf et al. (2000) ont étudié le refroidissement Sisyphe d'atomes de césium dans un réseau optique de grande profondeur et ils ont montré que le chauffage lié à la diffusion multiple était fortement réduit (par un facteur $\gtrsim 3$) par rapport à un gaz de même densité refroidi dans l'espace libre.

Le passage dans un réseau optique, avec les grandes fréquences Ω qu'il

autorise, ouvre par ailleurs la voie au régime de Lamb–Dicke, pour lequel

$$\Omega \gg \omega_r = \frac{\hbar k^2}{2M}. \quad (\text{VI.9})$$

Il s'agit d'une condition différente de *festina lente* donnée en (VI.8), les deux conditions étant en pratique réalisées simultanément dans les réseaux que nous allons considérer à partir de maintenant.

2 Le refroidissement par bande latérale

Nous considérons à partir de maintenant des atomes confinés dans un potentiel harmonique $\frac{1}{2}M\Omega^2 x^2$ ou un potentiel périodique $V(x) = V_0 \sin^2(kx)$, $V_0 > 0$ (ou leur équivalent à deux ou trois dimensions). Dans le cas du potentiel périodique, la fréquence d'oscillation au voisinage d'un minimum de ce réseau est donnée par $\hbar\Omega = 2\sqrt{V_0 E_r}$. Nous supposons à partir de maintenant que la condition de Lamb–Dicke

$$\eta \equiv \sqrt{\frac{E_r}{\hbar\Omega}} \ll 1 \quad \text{avec} \quad E_r = \hbar\omega_r = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \quad (\text{VI.10})$$

est réalisée, ce qui impose dans le cas du réseau la hiérarchie des énergies :

$$E_r \ll \hbar\Omega \ll V_0. \quad (\text{VI.11})$$

En pratique, la condition de Lamb–Dicke est facilement satisfaite dans un réseau optique et elle peut également l'être dans une pince optique, formée par un faisceau lumineux très focalisé, s'il est suffisamment intense. Nous allons d'abord examiner ce que cette condition implique sur l'absorption et l'émission de photons par un atome. Nous présenterons ensuite le principe du refroidissement par bande latérale, d'abord pour des ions piégés, puis pour des atomes neutres.

2-1 Le régime de Lamb–Dicke

Pour introduire les éléments importants qui caractérisent les processus d'absorption et d'émission de photons dans le régime de Lamb–Dicke,

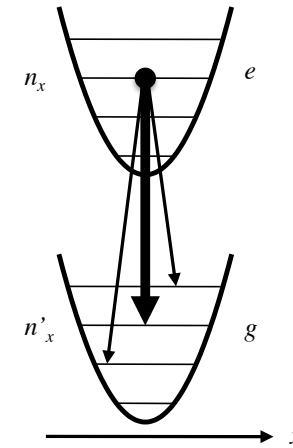


FIGURE VI.6. Emission spontanée d'un photon par un atome à deux niveaux g, e confiné dans un piège harmonique. Dans la limite de Lamb–Dicke, la transition avec le poids le plus important est la raie « sans recul » $n'_x = n_x$. Les deux autres transitions avec un poids significatif correspondent à $n'_x = n_x \pm 1$.

considérons un processus élémentaire (figure VI.6) : un atome (ou un ion) à deux niveaux, g et e , est préparé dans l'état interne excité e . On s'intéresse à l'état final du centre de masse atomique quand l'atome est tombé par émission spontanée dans l'état interne fondamental g . Nous supposons dans ce paragraphe que l'atome ressent le potentiel harmonique $\frac{1}{2}M\Omega^2 r^2$, indépendamment de son état interne, g ou e , les niveaux d'énergie étant (à 1D) les $E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar\Omega$, $n \in \mathbb{N}$.

L'état initial externe de l'atome est un état propre du mouvement dans le piège, caractérisé par les trois nombres quantiques de vibration $\mathbf{n} \equiv (n_x, n_y, n_z)$. Le phénomène d'émission spontanée d'un photon d'impulsion $\hbar\mathbf{k}$ correspond à

$$|e, \mathbf{n}\rangle \longrightarrow |g, \mathbf{n}'\rangle + \mathbf{k}. \quad (\text{VI.12})$$

La question naturelle à poser porte sur les valeurs possibles de \mathbf{n}' , pour un triplet \mathbf{n} de départ donné. Pour y répondre, on remarque que la probabilité d'arriver sur un niveau \mathbf{n}' donné fait intervenir, via la règle d'or de Fermi

(cf. Chapitre 1) :

$$|\langle \mathbf{n}' | e^{i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}} | \mathbf{n} \rangle|^2, \quad (\text{VI.13})$$

où $\hat{\mathbf{r}}$ est l'opérateur position de l'atome.

L'extension spatiale de l'état vibrationnel \mathbf{n} de départ selon un axe donné, x par exemple, est $\approx \sqrt{\overline{n_x}} a_{\text{oh}}$, où la longueur

$$a_{\text{oh}} = \left(\frac{\hbar}{M\Omega} \right)^{1/2} \quad (\text{VI.14})$$

caractérise l'extension de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique. Limitons-nous à des états vibrationnels faiblement excités, de sorte que $\sqrt{\overline{n_x}}$ est d'ordre unité. L'argument de l'exponentielle intervenant dans (VI.13), $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}$, a pour ordre de grandeur

$$|\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}| \sim ka_{\text{oh}} \sim \eta \ll 1, \quad (\text{VI.15})$$

où η est défini en (VI.10). On peut donc faire un développement limité de l'exponentielle $e^{i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}}$:

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}} \approx 1 + i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}. \quad (\text{VI.16})$$

Plaçons-nous à une dimension pour simplifier les notations. L'opérateur position \hat{x} s'écrit en fonction des opérateurs création et annihilation de l'oscillateur harmonique formant le piège selon x :

$$\hat{x} = \frac{a_{\text{oh}}}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad \text{ou encore} \quad k\hat{x} = \eta (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (\text{VI.17})$$

À l'ordre 1 du développement (VI.16), on ne va obtenir un élément de matrice $\langle \mathbf{n}' | \hat{x} | \mathbf{n} \rangle$ non nul que si $|n - n'| = 1$, cet élément de matrice ayant pour valeur :

$$\langle n+1 | \hat{x} | n \rangle = \sqrt{n+1} \frac{a_{\text{oh}}}{\sqrt{2}}, \quad \langle n-1 | \hat{x} | n \rangle = \sqrt{n} \frac{a_{\text{oh}}}{\sqrt{2}}. \quad (\text{VI.18})$$

On déduit de ce qui précède le type de transitions dominantes dans le régime de Lamb-Dicke¹ (figure VI.6) :

1. On pourra montrer que l'augmentation moyenne d'énergie lors du processus d'émission spontanée est indépendante de η et toujours égale à E_r .

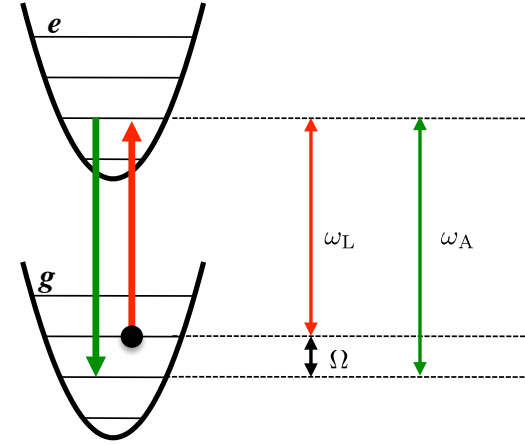


FIGURE VI.7. Principe du refroidissement par bande latérale pour un ion piégé. Un laser de fréquence $\omega_L = \omega_A - \Omega$ fait passer l'ion de l'état $|g, n+1\rangle$ à $|e, n\rangle$. La retombée par émission spontanée se fait préférentiellement sur la transition $|e, n\rangle \rightarrow |g, n\rangle$ de sorte qu'un quantum $\hbar\Omega$ est dissipé (sous forme d'énergie lumineuse) dans ce processus.

- Les transitions sans changement d'état externe $n' = \mathbf{n}$, obtenues à partir du premier terme de (VI.16).
- Les transitions avec changement d'un quantum de vibration selon un axe, les deux autres étant inchangés, comme par exemple :

$$n'_x = n_x \pm 1, \quad n'_y = n_y, \quad n'_z = n_z. \quad (\text{VI.19})$$

Ces transitions sont obtenues à partir du second terme de (VI.16), et se produisent avec une probabilité $\eta^2(n_x + 1)$ (pour $n'_x = n_x + 1$) et $\eta^2 n_x$ (pour $n'_x = n_x - 1$) plus faible que les premières.

Notons que la prédominance de la raie $n' = \mathbf{n}$ correspond à une situation formellement très proche de celle de l'effet Mössbauer, dans lequel un noyau radioactif fortement lié dans un cristal émet un photon γ sans changement de fréquence lié au recul.

2-2 Expériences sur des ions piégés

La première expérience de refroidissement par bande latérale, menée à Boulder par Diedrich et al. (1989), a permis de refroidir un ion dans l'état fondamental de vibration du piège. Il s'agissait d'un ion $^{198}\text{Hg}^+$, refroidi sur une transition étroite $^2S_{1/2} \leftrightarrow ^2D_{5/2}$ (transition quadrupolaire électrique de longue durée de vie : $\Gamma^{-1} \sim 0.1$ s).

Le principe du refroidissement est illustré sur la figure VI.7 dans sa version 1D. L'ion est éclairé par un laser accordé sur les transitions

$$\text{absorption : } |g, n+1\rangle \longrightarrow |e, n\rangle, \quad (\text{VI.20})$$

c'est-à-dire que sa fréquence est

$$\omega_L = \omega_A - \Omega. \quad (\text{VI.21})$$

C'est de ce choix que provient le nom *refroidissement par bande latérale* : dans le référentiel au repos de l'ion, la fréquence d'absorption est ω_A . Dans le référentiel du laboratoire, l'ion oscille à la fréquence Ω et son spectre d'absorption et d'émission est composée d'une bande centrale ω_A et de bandes latérales $\omega_A \pm n\Omega$. On choisit donc ici d'accorder le laser sur la première bande latérale, sur le côté rouge de la résonance.

Avec le choix (VI.21), l'absorption résonante d'un photon se traduit par une diminution du nombre quantique de vibration d'une unité. Une fois dans l'état excité $|e, n\rangle$, l'ion peut retomber dans l'état fondamental en émettant un photon spontané. Dans la limite de Lamb–Dicke, cette émission se fait avec une forte probabilité (cf. fig. VI.6) sur la transition

$$\text{émission spontanée : } |e, n\rangle \longrightarrow |g, n\rangle. \quad (\text{VI.22})$$

Chaque cycle absorption–émission spontanée diminue donc l'état vibrations d'une unité, jusqu'à ce que l'ion arrive dans le niveau vibrationnel fondamental $n = 0$.

L'état stationnaire est caractérisé par les populations π_n des différents niveaux vibrationnels, avec $\pi_0 \approx 1$ et $\pi_n \ll 1$ pour $n \geq 1$. Le rapport entre π_0 et π_1 s'obtient en égalant les flux $g, n = 1 \rightarrow g, n = 0$ et $g, n = 0 \rightarrow g, n = 1$. Le premier vaut (figure VI.8, gauche)

$$|g, n = 1\rangle \rightarrow |e, n = 0\rangle \rightarrow |g, n = 0\rangle : \quad \gamma_{1 \rightarrow 0} \approx \frac{\kappa^2 \eta^2}{\Gamma}, \quad (\text{VI.23})$$

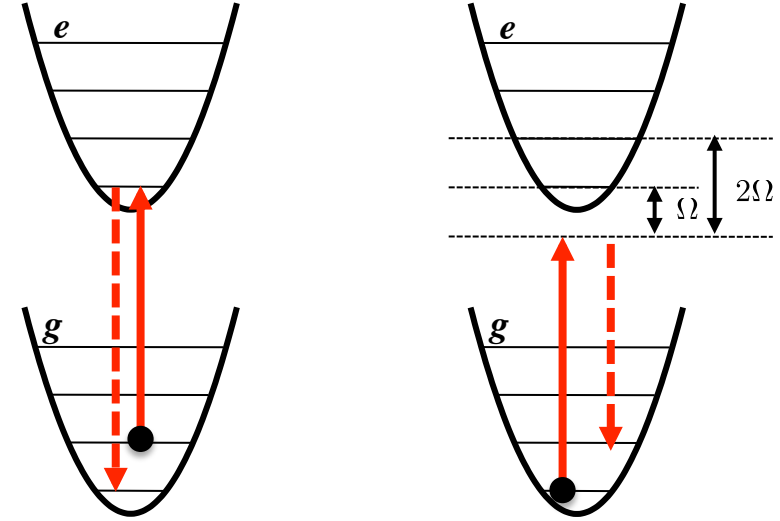


FIGURE VI.8. Les deux processus à considérer pour déterminer l'équilibre du refroidissement par bande latérale. Gauche, flux de $g, n = 1$ vers $g, n = 0$. Droite, flux de $g, n = 0$ vers $g, n = 1$ avec deux états relai possibles.

où κ est la fréquence de Rabi du laser d'excitation, réduite par le facteur de Lamb–Dicke η^2 pour tenir compte de l'élément de matrice à l'absorption $\langle n = 0 | e^{ikx} | n = 1 \rangle$.

Le flux $g, n = 0 \rightarrow g, n = 1$ est donné par l'excitation non résonante de l'état excité $e, n = 0$ ou $e, n = 1$, suivi de la désexcitation vers $g, n = 1$ (figure VI.8, droite). Le désaccord Δ à l'excitation est égal à Ω dans le premier cas et à 2Ω dans le deuxième cas [cf. (VI.21)], de sorte que

$$|g, n = 0\rangle \rightarrow |e, n = 0\rangle \rightarrow |g, n = 1\rangle : \quad \gamma_{0 \rightarrow 1}^{(a)} \approx \frac{\Gamma \kappa^2 \eta^2}{4 \Omega^2}, \quad (\text{VI.24})$$

$$|g, n = 0\rangle \rightarrow |e, n = 1\rangle \rightarrow |g, n = 1\rangle : \quad \gamma_{0 \rightarrow 1}^{(b)} \approx \frac{\Gamma \kappa^2 \eta^2}{4 (2\Omega)^2}, \quad (\text{VI.25})$$

et le taux total² vaut $\gamma_{0 \rightarrow 1} = \gamma_{0 \rightarrow 1}^{(a)} + \gamma_{0 \rightarrow 1}^{(b)}$. L'égalité

$$\pi_0 \gamma_{0 \rightarrow 1} = \pi_1 \gamma_{1 \rightarrow 0} \quad (\text{VI.26})$$

entraîne alors (Wineland & Itano 1979)

$$\frac{\pi_1}{\pi_0} \approx \frac{5}{16} \frac{\Gamma^2}{\Omega^2} \ll 1. \quad (\text{VI.27})$$

Les populations des états plus excités ($n = 2, 3, \dots$) sont encore plus petites que π_1 dans la limite $\Gamma \ll \Omega$.

C'est en général la valeur de π_0 qu'on utilise comme critère pour juger du succès du refroidissement par bande latérale, en essayant de la rendre aussi proche que possible de 1. On peut s'intéresser également au nombre moyen d'excitations³

$$\bar{n} = \sum_n n \pi_n, \quad (\text{VI.28})$$

ainsi qu'à la température d'équilibre. On peut montrer en effet que les populations π_n suivent une loi de Boltzmann $\pi_n \propto \exp(-n\hbar\Omega/k_B T)$, soit

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp(\hbar\Omega/k_B T) - 1} \Rightarrow k_B T = \frac{\hbar\Omega}{\ln(1 + \frac{1}{\bar{n}})}. \quad (\text{VI.29})$$

Dans l'expérience de Diedrich et al. (1989), l'ion $^{198}\text{Hg}^+$ était refroidi essentiellement dans l'état $g, n = 0$ avec $\pi_0 = 0.95$. Cette mesure était déduite du spectre d'absorption de l'ion piégé qui indiquait que la première bande latérale « rouge », correspondant aux transitions $|g, n\rangle \rightarrow |e, n-1\rangle$, était très réduite par rapport à la première bande latérale bleue $|g, n\rangle \rightarrow |e, n+1\rangle$ (figure VI.9).

L'expérience de Diedrich et al. (1989) nécessite d'avoir une transition $g \leftrightarrow e$ avec un état excité e de longue durée de vie, ce qui semble contraignant. Mais nous avons vu dans des chapitres précédents que l'on peut remplacer la transition directe $g \leftrightarrow e$ par une transition Raman $g_1 \leftrightarrow g_2$ via un état excité quelconque, et fabriquer ainsi un système à deux niveaux

2. On somme ici les probabilités des deux chemins et non leurs amplitudes. On pourra montrer que c'est légitime du fait qu'on prend la moyenne sur l'impulsion emportée par le photon diffusé lors du processus de pompage optique.

3. Dans la limite (VI.27), on a $\bar{n} \approx \frac{\pi_1}{\pi_0} \approx \frac{5}{16} \frac{\Gamma^2}{\Omega^2}$.

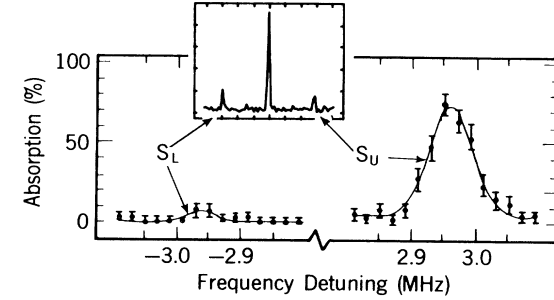


FIGURE VI.9. Spectre d'absorption d'un ion unique $^{198}\text{Hg}^+$ refroidi par bande latérale. L'encart supérieur représente le spectre avant refroidissement, avec un poids à peu près égal pour les deux transitions à $\omega_A \pm \Omega$, correspondant à $|g, n\rangle \rightarrow |e, n-1\rangle$ et $|g, n\rangle \rightarrow |e, n+1\rangle$. La figure principale montre le spectre après refroidissement : la bande latérale inférieure, à $\omega_A - \Omega$, est très réduite par rapport à la bande latérale supérieure à $\omega_A + \Omega$. Du poids relatif de ces deux raies, on peut déduire le rapport des populations π_1/π_0 [figure extraite de Diedrich et al. (1989)].

« sur mesure », où la durée de vie γ^{-1} de g_2 est ajustable : il suffit de changer la puissance du faisceau repompeur qui ramène les atomes de g_2 vers g_1 . Ce principe a été mis en œuvre par Monroe et al. (1995) selon une proposition initiale de Heinzen & Wineland (1990). Le refroidissement par bande latérale via une transition Raman est désormais une technique standard en physique des ions piégés, et conduit à une population moyenne de l'état vibrationnel fondamental supérieure à 0.99.

2-3 Le cas des atomes neutres

Le principe du refroidissement par bande latérale pour des atomes neutres est très voisin de celui pour un ion piégé. L'atome est initialement dans l'état interne g_1 , qui est en pratique un sous-niveau Zeeman de l'état fondamental et dans un état vibrationnel $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ du piège confinant l'atome (pour un piège 3D).

- Un couplage cohérent que nous allons détailler plus loin fait basculer l'atome vers un autre état interne g_2 et un état vibrationnel moins

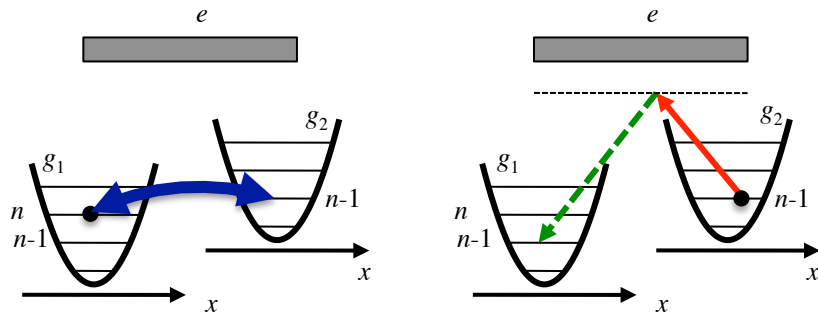


FIGURE VI.10. Refroidissement par bande latérale via une transition Raman. On a séparé le processus de refroidissement en deux phases, bien que les deux processus puissent être simultanés. L'atome est initialement dans l'état interne g_1 sur le niveau vibrationnel n (version 1D). Gauche : un couplage cohérent le fait passer dans l'état interne g_2 et le niveau vibrationnel $n - 1$. Droite : un processus de pompage optique impliquant l'émission spontanée d'un photon (trait pointillé) ramène l'atome vers l'état g_1 ; dans le régime de Lamb–Dicke, ce processus se fait en moyenne sans changement d'état interne, si bien que le bilan du cycle est une diminution du nombre vibrationnel d'une unité.

élevé, par exemple $\mathbf{n}' = (n_x - 1, n_y, n_z)$.

- Un processus de pompage optique ramène l'atome de g_2 vers g_1 avec un taux γ choisi petit devant Ω . Dans la limite de Lamb–Dicke, ce pompage optique ne modifie généralement pas l'état vibrationnel de l'atome, qui termine donc ce cycle dans l'état $|g_1, \mathbf{n}'\rangle$: on a réduit l'énergie de l'atome de la quantité $\hbar\Omega_x$, cette énergie ayant été emportée par le photon de fluorescence émis lors du pompage optique de g_2 vers g_1 .
- On recommence cette procédure pour les deux autres directions y et z de l'espace.

La principale difficulté pour implémenter cette procédure réside dans la réalisation d'un piège de raideur suffisante. Il faut en effet que la fréquence d'oscillation Ω soit grande devant ω_r et γ , ce qui conduit à des fréquences $\Omega/2\pi$ de l'ordre de plusieurs dizaines de kHz. Comme nous l'avons déjà annoncé, une méthode bien adaptée pour obtenir de telles fréquences est d'utiliser un réseau optique (cf. cours 2012-13). Ce réseau peut être 1D (Per-

rin et al. 1998; Vuletic et al. 1998), 2D (Hamann et al. 1998) ou 3D (Kerman et al. 2000; Han et al. 2000). Dans tout ce qui suit (sauf en § 2-5), nous traiterons chaque site du réseau comme un puits harmonique indépendant des autres. Cette approximation est valable quand la condition (VI.11) est satisfaite, si on se limite aux états vibrationnels faiblement excités : la non-harmonicité du potentiel du réseau est alors négligeable, ainsi que l'effet tunnel vers les puits voisins. Un avantage annexe, mais appréciable, du réseau optique est que l'on peut ainsi refroidir un grand nombre d'atomes simultanément, en allant en principe jusqu'à un atome en chaque site du réseau. En revanche, dès que deux atomes sont présents sur le même site, au moins quand il s'agit d'un réseau 3D, les collisions assistées par la lumière conduisent à une perte de cette paire d'atomes.

Il est également possible de réaliser ce refroidissement par bande latérale dans un puits unique, obtenu dans une pince optique formée par un faisceau laser très focalisé. En raison des pertes que nous venons d'évoquer, il n'y a alors qu'un atome présent dans la pince optique à chaque instant. Les premières expériences dans cette voie sont récentes et ont été réalisées à Boulder et au CUA (MIT-Harvard) par Kaufman et al. (2012) et Thompson et al. (2013).

Très récemment, la technique de refroidissement par bande latérale a été mise en œuvre pour imager des gaz sur réseau (Patil et al. 2014) et observer des atomes individuels piégés sur les sites d'un réseau optique, dans des expériences de *microscopie pour gaz quantique* (Cheuk et al. 2015; Parsons et al. 2015; Haller et al. 2015) (figure VI.11). Il s'agit d'atomes de lithium et de potassium (isotopes fermioniques) pour lesquels le refroidissement de type Sisyphe fonctionne mal en raison de la trop faible valeur de la structure hyperfine dans l'état excité (cf. Chapitre 5). Le refroidissement par bande latérale, couplé à une imagerie de haute efficacité, permet d'observer les atomes un par un tout en figeant leur position, à un pas du réseau optique près⁴.

4. Haller et al. (2015) utilise une variante du refroidissement par bande latérale, appelée refroidissement par transparence électromagnétique induite (*EIT cooling*) proposée initialement par Morigi et al. (2000). On tire parti d'une résonance noire entre g_1, n et g_2, n pour minimiser l'influence des transitions sans changement d'état vibrationnel, et maximiser les transitions recherchées $g_1, n \rightarrow g_2, n - 1$.

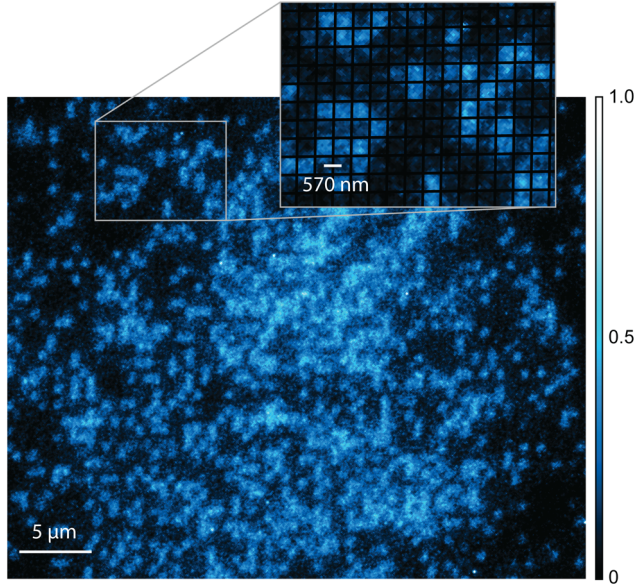


FIGURE VI.11. Fluorescence d'atomes individuels de ${}^6\text{Li}$ piégés sur les sites d'un réseau cubique et refroidis par bande latérale. Le facteur de remplissage est d'environ 40% au centre du nuage [figure extraite de Parsons et al. (2015)].

2-4 Comment réaliser le couplage cohérent

La réalisation du couplage cohérent est la partie la plus délicate dans la mise en œuvre du refroidissement par bande latérale pour des atomes piégés. Plaçons-nous à une dimension pour simplifier la discussion : il s'agit de trouver un opérateur \hat{W} ayant des éléments de matrice non nuls entre $|g_1, n\rangle$ et $|g_2, n-1\rangle$:

$$\langle g_2, n-1 | \hat{W} | g_1, n \rangle \neq 0. \quad (\text{VI.30})$$

Il faut donc que l'opérateur \hat{W} change à la fois l'état interne de l'atome ($g_1 \rightarrow g_2$) et son état externe ($n \rightarrow n-1$).

Utilisation de faisceaux laser auxiliaires. Sur le plan conceptuel, la méthode la plus simple pour induire la transition $g_1 \rightarrow g_2$ consiste à utiliser une paire de faisceaux laser induisant un transfert d'impulsion $\hbar\mathbf{q}$ (Bouchoule et al. 1999; Han et al. 2000). Dans ce cas, l'élément de matrice du couplage cohérent se factorise en

$$\langle g_2, n-1 | \hat{W} | g_1, n \rangle = \langle g_2 | \hat{W}_{\text{interne}} | g_1 \rangle \times \langle n-1 | e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} | n \rangle \quad (\text{VI.31})$$

et la partie spatiale se calcule simplement dans le régime Lamb-Dicke. Il faut alterner la direction du vecteur \mathbf{q} selon les directions de l'espace pour obtenir un refroidissement 3D (Han et al. 2000).

Utilisation d'une onde radiofréquence. Pour changer l'état interne, une transition radio-fréquence (ou micro-onde) peut faire l'affaire. Mais la longueur d'onde de cette radio-fréquence étant très grande devant l'extension des états vibrationnels, l'action de \hat{W} sur les variables externes de l'atome est essentiellement négligeable si bien que

$$\text{radio-fréquence : } \langle g_2, n-1 | \hat{W} | g_1, n \rangle = \langle g_2 | \hat{W} | g_1 \rangle \times \langle n-1 | n \rangle = 0 \quad (\text{VI.32})$$

car les états de vibration $|n-1\rangle$ et $|n\rangle$ sont orthogonaux.

Il est toutefois possible de contourner cette difficulté en décalant spatialement le fond des puits de potentiel de g_2 par rapport à ceux de g_1 , de sorte que l'état vibrationnel $|n\rangle_1$ (pour l'état interne g_1) n'est pas centré au même endroit que $|n\rangle_2$ (pour l'état interne g_2). On a alors :

$$\text{radio-fréquence (bis) : } \langle g_2, n-1 | \hat{W} | g_1, n \rangle = \langle g_2 | \hat{W} | g_1 \rangle \times \langle n-1 | n \rangle_1 \neq 0. \quad (\text{VI.33})$$

Cette méthode est appelée *refroidissement par bande latérale projectif* et a été mise en œuvre⁵ à 1D par Förster et al. (2009), puis à 3D par Li et al. (2012). Le décalage spatial entre les puits de potentiel pour les deux états internes g_1 et g_2 est obtenu en tirant parti du fait que l'opérateur "déplacement lumineux", qui crée le potentiel du réseau optique, a une composante vectorielle qui, pour des atomes alcalins, est significative si le laser créant le réseau n'est pas trop éloigné de la résonance atomique : le potentiel lumineux dépend alors de l'état interne, ce qui est la condition recherchée.

5. Perrin et al. (1998) utilisaient une transition Raman induite par deux faisceaux laser pour coupler g_1 et g_2 , mais ces faisceaux se propageaient dans la même direction et n'induisaient pas de couplage spatial. Ils étaient donc équivalents à un couplage radiofréquence.

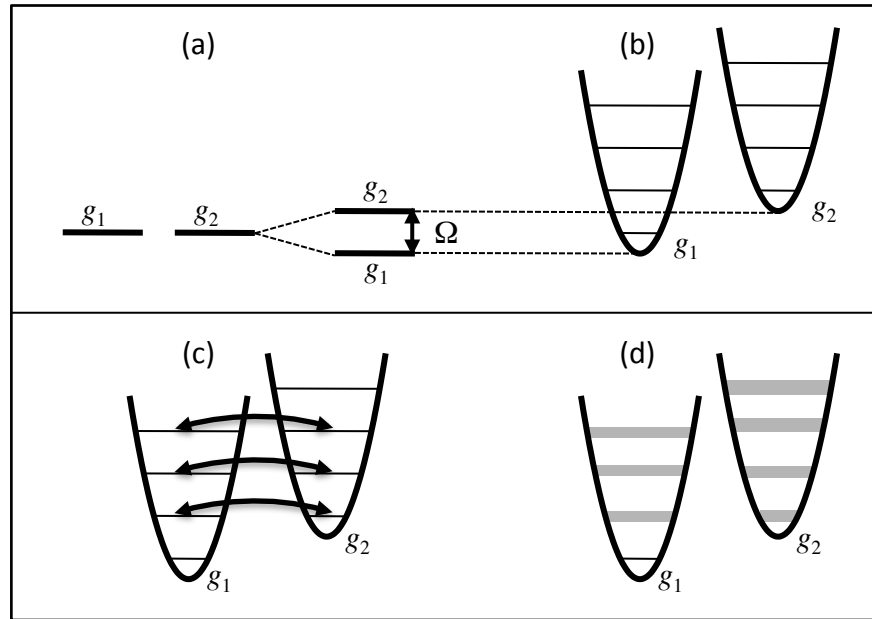


FIGURE VI.12. Les quatre étapes conduisant à un refroidissement par bande latérale via la composante vectorielle de l'opérateur "déplacement lumineux" (voir texte). Cette méthode a été mise en œuvre par Hamann et al. (1998) et Kerman et al. (2000).

Utilisation des faisceaux du réseau optique lui-même. Puisque l'opérateur "déplacement lumineux" à l'origine du réseau peut avoir une composante vectorielle couplant les différents états Zeeman, on peut en tirer parti de la manière suivante [Hamann et al. (1998) et Kerman et al. (2000)] :

- On se donne la valeur cible de la fréquence d'oscillation Ω et on applique un champ magnétique statique qui décale l'énergie de g_2 par rapport à g_1 d'environ $\hbar\Omega$. Ici, g_1 et g_2 sont deux sous-niveaux Zeeman d'un même niveau hyperfin, par exemple $|g_1\rangle = |F, m_F = F\rangle$ et $|g_2\rangle = |F, m_F = F - 1\rangle$ (figure VI.12a).
- On applique le réseau optique. La composante scalaire de l'opérateur déplacement lumineux, qui est le terme dominant, crée des puits de

potentiels identiques pour g_1 et g_2 avec la pulsation Ω . En combinaison avec l'effet du champ magnétique statique de l'item précédent, les états $|g_2, n\rangle$ sont donc au même niveau que les états $|g_1, n + 1\rangle$ (figure VI.12b).

- Prenons maintenant en compte la composante vectorielle de l'opérateur "déplacement lumineux" à l'intérieur d'une multiplicité donnée $\{|g_1, n + 1\rangle, |g_2, n\rangle\}$: les états propres de l'atome dans le réseau ne sont pas factorisés sous la forme $|g_i, n\rangle$, mais sont des superpositions d'états $\alpha|g_1, n + 1\rangle + \beta|g_2, n\rangle$. Le seul état qui reste factorisé est l'état $|g_1, 0\rangle$ car il n'y a pas d'état impliquant g_2 dans son voisinage immédiat (figure VI.12c).
- On applique un faisceau de pompage optique qui déstabilise l'état g_2 et qui repompe les atomes vers g_1 . Les états propres de l'atome dans le réseau acquièrent donc une durée de vie finie puisqu'ils sont contaminés par g_2 , à l'exception de l'état fondamental $|g_1, 0\rangle$ (figure VI.12d). On obtient ainsi l'état noir recherché.

La plupart des expériences exploratoires sur le refroidissement par bande latérale dans des réseaux optiques ont été menées avec des atomes de césium. Les performances après optimisation sont comparables d'une expérience à l'autre. À une et deux dimensions, des populations $\pi_0 > 95\%$ ont été observées par Hamann et al. (1998), Morinaga et al. (1999) et Förster et al. (2009). À trois dimensions, Kerman et al. (2000) et Li et al. (2012) ont obtenu $\pi_0 \sim 80\%$.

2-5 Ouverture adiabatique d'un réseau

La température des atomes après refroidissement par bande latérale est donnée par (VI.29). À moins de réussir à produire un nombre moyen d'excitation \bar{n} extrêmement petit devant 1, cette température est généralement d'ordre Ω . Il s'agit donc de températures relativement élevées puisque l'on est amené à choisir de grandes valeurs de Ω (par rapport à ω_r , par exemple) pour que le refroidissement par bande latérale fonctionne correctement.

Néanmoins, une fois les atomes refroidis dans un réseau optique, un moyen simple pour abaisser leur température (sans changer l'entropie du gaz) est d'abaisser adiabatiquement la profondeur du réseau (Kastberg et

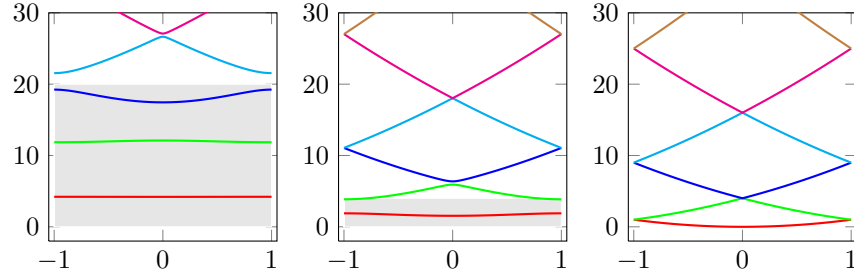


FIGURE VI.13. Premières bandes d'énergie $E_n(q)$ (unité $E_r = \hbar^2 k^2 / 2m$), en fonction de q/k pour un potentiel $V(x) = V_0 \sin^2(kx)$. De gauche à droite, $V_0/E_r = (20, 4, 0)$. Le rectangle grisé représente la zone d'énergie inférieure à la hauteur du potentiel V_0 .

al. 1995; Kerman et al. 2000). Partant d'atomes refroidis dans l'état fondamental $n = 0$ aux différents nœuds du réseau, nous allons voir que ceci conduit à une distribution en vitesse dont la largeur est automatiquement en dessous de la limite du recul. Nous allons donner ici les grandes lignes du raisonnement permettant d'arriver à ce résultat et nous renvoyons le lecteur désireux d'approfondir le sujet vers le cours 2012-13 (chapitre 2), où la physique des réseaux optiques a été étudiée en détail.

Le potentiel du réseau optique étant périodique, le bon outil pour analyser la dynamique d'un atome est le formalisme déduit du théorème de Bloch. Plaçons-nous une fois de plus à 1D pour simplifier les notations et écrivons le potentiel du réseau $V(x) = V_0 \sin^2(kx)$, de période $a = \lambda/2 = \pi/k$. Le théorème de Bloch indique que l'on peut chercher les états propres de l'hamiltonien à un atome sous la forme d'états de Bloch $\psi_{n,q}(x) = e^{ixq} u_{n,q}(x)$, où la fonction $u_{n,q}$ est périodique de période a et le quasi-moment q est choisi dans la première zone de Brillouin

$$-\pi/a < q \leq \pi/a \quad \text{ou encore} \quad -k < q \leq k. \quad (\text{VI.34})$$

L'indice $n = 0, 1, 2, \dots$ repère, pour un quasi-moment q fixé, les différents états d'énergie classés par ordre croissant. Quand q varie dans cette zone de Brillouin, on obtient pour n donné une bande d'énergie $E_n(q)$ (figure VI.13).

Le fait de choisir une fréquence d'oscillation élevée pour se placer dans

le régime de Lamb-Dicke [condition (VI.11)] implique que la profondeur du réseau V_0 est grande devant l'écart entre deux bandes consécutives, qui est d'ordre $\hbar\Omega$ pour les bandes peu excitées. La largeur des bandes, déterminée par l'effet tunnel d'un puits donné au puits voisin, est alors très faible devant Ω et ces bandes sont quasiment plates, d'énergie égale à $(n + \frac{1}{2})\hbar\Omega$: chaque site du réseau peut être vu comme un puits harmonique dans lequel l'atome se retrouve piégé, sans pouvoir sauter vers un site voisin.

Après refroidissement par bandes latérales, considérons que chaque atome a été placé dans l'état fondamental d'un site du réseau, *a priori* aléatoire (notre raisonnement se généralisera sans difficulté au cas $\bar{n} \neq 0$). Nous ne faisons pas d'hypothèse sur le taux de remplissage du réseau et nous négligeons tout phénomène de cohérence entre différents sites. L'opérateur densité qui décrit cette situation est un mélange statistique des différents états $\psi_{n,q}(x)$ avec $n = 0$ et q réparti uniformément dans la première zone de Brillouin :

$$\hat{\rho} \propto \int_{-k}^{+k} |\psi_{0,q}\rangle \langle \psi_{0,q}| dq. \quad (\text{VI.35})$$

Quand on baisse la profondeur du réseau, c'est-à-dire que l'on varie l'amplitude du potentiel sous la forme $V(x, t) = V_0(t) \sin^2(kx)$, on conserve la nature périodique du problème. Ceci reste vrai même une fois le potentiel complètement éteint puisque le potentiel $V(x) = 0$ peut être vu comme un potentiel de période a et d'amplitude nulle. Dans le cas $V_0 = 0$, les bandes d'énergie sont obtenues simplement en partant de l'énergie d'une particule libre $E(p) = p^2/2M$, puis en « repliant » cette parabole ; on écrit pour cela l'impulsion sous la forme $p = \hbar(q + 2jk)$, avec $j \in \mathbb{Z}$ et q dans la première zone de Brillouin (figure VI.13, gauche).

Puisque le potentiel garde sa nature périodique de période a , le théorème de Bloch continue à s'appliquer à chaque instant de la décompression. Plus précisément, partant d'un état de Bloch $|\psi_{0,q}\rangle$, l'atome va rester dans un état de Bloch $e^{ixq} u(x)$, où $u(x)$ est une fonction périodique : le quasi-moment q est donc une constante du mouvement. Pour que la décompression s'accompagne d'un refroidissement optimal, il faut simplement s'assurer que l'extinction du réseau se fait suffisamment lentement pour que le transfert de la bande fondamentale vers les bandes excitées (à q donné) soit négligeable (figure VI.14). Le critère pour cela, établi dans le

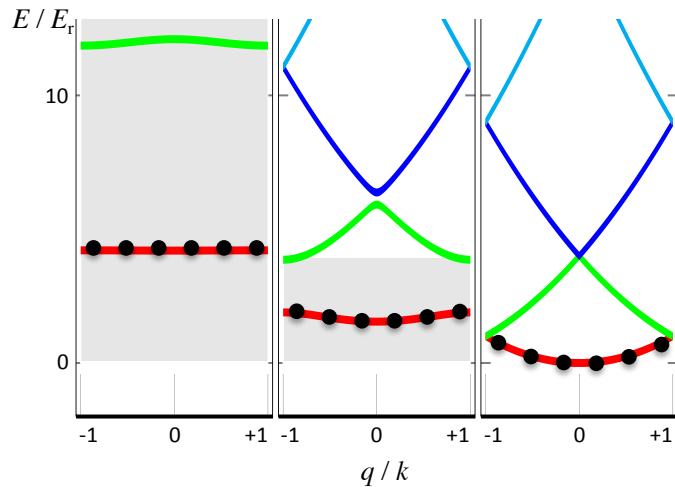


FIGURE VI.14. Extinction adiabatique d'un réseau optique. Les atomes occupent initialement la bande fondamentale d'un réseau optique, tous les quasi-moments q étant également peuplés. Lors de l'extinction du réseau, la périodicité du problème entraîne que le quasi-moment est conservé. Si la variation de l'intensité est suffisamment lente, les atomes restent sur la bande fondamentale jusqu'à l'extinction complète du réseau.

cours 2012-13, est que le temps d'extinction τ soit grand devant $1/\omega_r$.

Si cette condition est réalisée, l'état final après débranchement sera le même mélange statistique que (VI.35), mais avec l'énergie d'un état $|\psi_{0,q}\rangle$ correspondant au cas de la particule libre $E(q) = \hbar^2 q^2 / 2M$. Comme le quasi-moment initial q est distribué aléatoirement et uniformément dans la zone de Brillouin, l'énergie cinétique moyenne après extinction du réseau vaut :

$$\frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2k} \int_{-k}^{+k} \frac{\hbar^2 q^2}{2M} dq = \frac{1}{6} M v_r^2. \quad (\text{VI.36})$$

Refroidir les atomes dans l'état fondamental de chaque site du réseau offre donc la possibilité, via cette ouverture adiabatique, de produire un gaz notablement subrecul, avec une vitesse quadratique moyenne $v_0 \approx 0.6 v_r$.

Sur le plan pratique, le refroidissement par bande latérale suivi d'une

décompression adiabatique du réseau a été étudié par Kerman et al. (2000). La fraction d'atomes dans la bande fondamentale à l'issue du refroidissement était de $\sim 80\%$ et la vitesse quadratique moyenne après décompression adiabatique de $1.2 v_r$. Kerman et al. (2000) ont également mesuré la variation de la température avec la densité atomique et leur résultat illustre bien le gain apporté par le réseau pour réduire les effets néfastes de la diffusion multiple. Ils ont trouvé

$$\frac{dT}{dn} \approx 8 \text{ nK}/(10^{10} \text{ cm}^{-3}), \quad (\text{VI.37})$$

ce qui est 100 fois plus petit que le résultat (VI.5) trouvé pour le refroidissement Sisyphé.

Ouverture du réseau et interactions. Notre raisonnement concernant l'ouverture adiabatique du réseau a été fait dans la limite où les interactions entre atomes jouent un rôle complètement négligeable lors de l'ouverture. L'état final est alors un gaz de faible énergie cinétique (sous le recul), mais non condensé. En effet, deux atomes occupant initialement deux sites distincts du réseau sont dans des états quantiques orthogonaux (les fonctions de Wannier associées à chaque site); en l'absence d'interaction, ils vont rester dans des états orthogonaux au cours de l'évolution hamiltonienne décrivant l'ouverture. Il ne peut donc pas y avoir d'accumulation macroscopique de particules dans un état individuel dans ce cas.

L'approximation consistant à négliger les interactions est légitime si le taux de remplissage du réseau est faible [10^{-3} dans l'expérience de Kerman et al. (2000)]. En revanche, si l'on part d'une situation avec tous les sites occupés par un atome et en présence d'interactions répulsives, l'état initial peut être vu comme un isolant de Mott avec facteur de remplissage unité. La décompression adiabatique du réseau en présence d'interactions doit alors conduire à une phase condensée et superfluide, de température nulle.

3 Peut-on se passer de l'émission spontanée ?

Dans ce cours, nous avons passé en revue un certain nombre de mécanismes, plus ou moins complexes, permettant d'augmenter la densité dans

l'espace des phases d'une assemblée d'atomes, libres ou piégés. Le point commun à tous ces mécanismes est le phénomène d'émission spontanée. C'est grâce à lui que l'on a pu diminuer le désordre du gaz, l'entropie étant transférée dans les modes du champ électromagnétique. Mais cette émission spontanée vient également imposer des limites au refroidissement.

- Sur le plan fondamental, plusieurs de ces mécanismes conduisent à une vitesse quadratique moyenne v_0 de l'ordre de la vitesse de recul v_r , du fait du caractère aléatoire des reculs encaissés par l'atome lorsqu'il émet spontanément un photon.
- Sur le plan pratique, les photons émis spontanément peuvent subir de multiples diffusions avant de sortir de l'échantillon, ce qui crée un chauffage additionnel qui peut être considérable pour des gaz denses, comme nous l'avons rappelé en § 1.

Nous en arrivons donc à la question naturelle suivante : l'émission spontanée est-elle réellement indispensable au refroidissement radiatif ? Même si la réponse intuitive à cette question est positive, nous allons voir qu'il y a des nuances à lui apporter. Par ailleurs, certains auteurs pensent avoir observé expérimentalement un refroidissement (léger) d'un gaz d'atomes sans émission spontanée (Corder et al. 2015). Faute d'informations précises sur ces expériences très récentes, nous ne les discuterons pas ici en détail, mais nous allons énoncer dans ce dernier paragraphe un certain nombre de résultats qui restreignent le type d'effets auxquels on peut s'attendre.

3-1 Évolution hamiltonienne d'un gaz sans interaction

L'évolution hamiltonienne d'un gaz de N atomes sans interaction ne peut pas conduire à l'augmentation de la densité dans l'espace des phases ou de l'occupation d'un état quantique individuel. Nous avons déjà détaillé ce point dans le chapitre introductif du cours [voir également Ketterle & Pritchard (1992)]; si l'hamiltonien s'écrit comme une somme d'hamiltonien à une particule

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \sum_{n=1}^N \hat{H}^{(n)}(t), \quad (\text{VI.38})$$

alors l'évolution de l'opérateur densité à une particule est unitaire et ses valeurs propres sont constantes dans le temps : on ne peut ni augmenter, ni

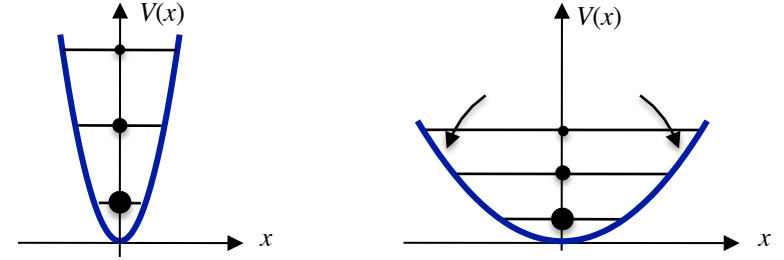


FIGURE VI.15. Ouverture adiabatique d'un piège harmonique : la population des états quantiques reste constante.

diminuer l'occupation d'un état donné, mais simplement convertir un état en un autre. Il est par exemple possible, par ouverture adiabatique d'un piège, de convertir des états de faible extension spatiale x_0 et de grande vitesse quadratique moyenne v_0 , en états de grand x_0 et de faible v_0 . La température, définie par $k_B T = M v_0^2$, aura diminué mais chaque état quantique du piège aura conservé sa population (figure VI.15).

3-2 Atome et champ électromagnétique quantifié

Quand un ensemble d'atomes est couplé au champ électromagnétique quantifié, l'hamiltonien du système est plus riche que (VI.38). Limitons-nous au cas d'un seul atome et plaçons-nous dans le cadre de l'approximation dipolaire électrique pour décrire le couplage atome-champ. L'hamiltonien total s'écrit :

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_C - \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (\text{VI.39})$$

où \hat{H}_A et H_C représentent les hamiltoniens de l'atome et du champ électromagnétique libre. L'hamiltonien de l'atome est

$$\hat{H}_A = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M} + \hat{H}_{A,\text{interne}}. \quad (\text{VI.40})$$

Dans cette expression, $\hat{\mathbf{r}}$ et $\hat{\mathbf{p}}$ représentent les opérateurs position et impulsion du centre de masse de l'atome, $\hat{H}_{A,\text{interne}}$ l'hamiltonien décrivant l'évolution des variables internes de l'atome et $\hat{\mathbf{D}}$ son opérateur dipole

électrique. Dans le modèle simple de « l'atome à deux niveaux » que nous avons utilisé à de multiples reprises dans ce cours, l'opérateur dipole s'écrit

$$\hat{D} = d|e\rangle\langle g| + \text{H.c.} \quad (\text{VI.41})$$

où le vecteur d représente le dipole réduit de la transition modélisée. Les modes du champ sont caractérisés par leur vecteur d'onde \mathbf{k} (avec $\omega = ck$) et leur polarisation ϵ , et on indexe chaque mode par la notation compacte $\lambda \equiv (\mathbf{k}, \epsilon)$. L'hamiltonien du champ électromagnétique libre est

$$\hat{H}_C = \sum_{\lambda} \hbar\omega \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\lambda} \quad (\text{VI.42})$$

où les opérateurs $\hat{a}_{\lambda}^{\dagger}$ et \hat{a}_{λ} sont les opérateurs création et annihilation d'un photon dans le mode λ . Enfin, l'opérateur champ électrique $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ s'écrit

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda} \mathcal{E}_{\lambda} \epsilon \hat{a}_{\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{H.c.} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{\lambda} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L^3}}, \quad (\text{VI.43})$$

où L^3 représente le volume de quantification, les vecteurs d'onde \mathbf{k} s'écrivant $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$.

Quand aucun faisceau lumineux n'arrive sur l'atome, l'état du champ électromagnétique est le vide de photons, pour lequel aucun mode n'est peuplé :

$$|\text{vac}\rangle = \prod_{\lambda} |0\rangle_{\lambda}. \quad (\text{VI.44})$$

Quand l'atome est éclairé par un faisceau lumineux, certains modes du champ électromagnétique (voire une infinité) sont occupés. Les processus d'absorption et d'émission stimulée correspondent à la destruction et à la création de photons dans ces modes occupés, alors que le phénomène d'émission spontanée correspond à la création de photons dans des modes initialement vides⁶.

6. Plus précisément, la probabilité de créer un photon dans un mode λ contenant déjà n_{λ} photons sera proportionnelle à $n_{\lambda} + 1$: le terme n_{λ} est dû à l'émission stimulée et le terme "1" à l'émission spontanée.

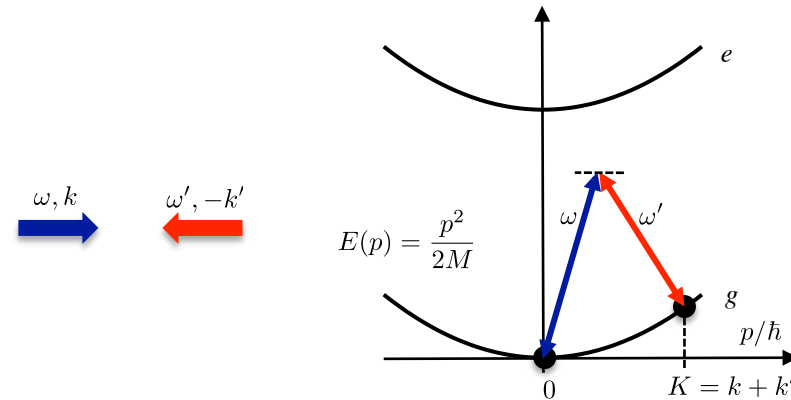


FIGURE VI.16. Configuration laser 1D avec deux ondes progressives contre-propageantes de pulsation ω et ω' induisant une transition résonante entre l'état d'impulsion nulle $p = 0$ et l'état d'impulsion $p = \hbar K$ avec $K = k + k'$.

3-3 Utilisation d'un champ non-classique

Si aucune contrainte supplémentaire n'est apportée sur l'état du champ, il est possible de trouver des situations où un refroidissement (au sens « accumulation dans un même état quantique ») se produit sans peupler de modes du rayonnement qui seraient initialement vides. Donnons en ici un exemple 1D, illustré sur la figure VI.16. On éclaire un atome par deux faisceaux contre-propageants de fréquence $\omega = ck$ et $\omega' = ck'$ choisis tels que $\omega - \omega' = \hbar K^2 / (2M)$ avec $K = k + k'$, de sorte que la transition Raman entre l'état d'impulsion nulle $p = 0$ et l'état d'impulsion $p = \hbar K$ se fait de manière résonante. On peut supposer que le désaccord par rapport à l'état excité est grand pour négliger la population de cet état. De même, pour un couplage atome-lumière suffisamment faible, on peut négliger les processus non résonnants qui conduiraient à la population des états $p = n\hbar K$ avec $n \neq 0, 1$.

Supposons d'abord que l'état initial du système atome + champ est

$$|\psi(0)\rangle = |p=0\rangle \otimes |N, N'\rangle, \quad (\text{VI.45})$$

avec N photons dans le mode k et N' photons dans le mode k' ; notons que

cette notion qui consiste à définir explicitement le nombre et l'impulsion de photons dans un mode donné n'a de sens que si les modes en question sont définis par une cavité (en anneau) physique, ce que nous supposons à partir de maintenant. L'état du système à l'instant t va s'écrire

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|p=0\rangle \otimes |N, N'\rangle + \beta(t)|p=\hbar K\rangle \otimes |N-1, N'+1\rangle \quad (\text{VI.46})$$

puisqu'on passe de $p=0$ à $p=K$ par absorption d'un photon du mode ω et émission stimulée d'un photon dans le mode ω' . L'élément de matrice correspondant se déduit de l'action des opérateurs $\hat{a}'^\dagger \hat{a}$ et est donc proportionnel à $\sqrt{N(N'+1)}$. Partant de $p=0$ à l'instant $t=0$, la probabilité de trouver l'atome dans l'état $p=0$ à l'instant t peut alors s'écrire

$$P(p=0 : t|p=0 : 0) = \cos^2 \left(\sqrt{N(N'+1)} \alpha_0 t \right), \quad (\text{VI.47})$$

où le paramètre α_0 s'écrit $\alpha_0 = \kappa_0^2/(4\Delta)$, κ_0 étant la fréquence de Rabi « à un photon », caractérisant le couplage atome lumière, et Δ le désaccord de ω et ω' avec la fréquence de résonance atomique ($|\Delta| \gg \omega_r, \Gamma$).

Supposons maintenant que l'état initial du système atome + champ est

$$|\psi(0)\rangle = |p=\hbar K\rangle \otimes |N, N'\rangle; \quad (\text{VI.48})$$

un raisonnement similaire indique que l'état à l'instant t sera de la forme

$$|\psi(t)\rangle = \gamma(t)|p=\hbar K\rangle \otimes |N, N'\rangle + \delta(t)|p=0\rangle \otimes |N+1, N'-1\rangle \quad (\text{VI.49})$$

avec cette fois-ci une absorption dans le mode ω' et une émission stimulée dans le mode ω . La probabilité de trouver l'atome dans l'état d'impulsion $p=0$ à l'instant t sachant que l'atome était dans l'état d'impulsion $p=\hbar K$ à l'instant 0 s'écrit donc

$$P(p=0 : t|p=\hbar K : 0) = \sin^2 \left(\sqrt{(N+1)N'} \alpha_0 t \right). \quad (\text{VI.50})$$

On peut alors choisir un couple N, N' et une valeur du paramètre $\alpha_0 t$ tels que⁷ :

- L'atome initialement dans l'état $p=0$ a une probabilité voisine de 1 d'y être encore à l'instant t :

$$\sqrt{N(N'+1)} \alpha_0 t \approx 0 \pmod{\pi}. \quad (\text{VI.51})$$

7. Par exemple $\alpha_0 t = \pi/10$, $N = 10^2$, $N' = 10^4$.

- L'atome initialement dans l'état $p=\hbar K$ a une probabilité voisine de 1 de se trouver dans l'état $p=0$ à l'instant t :

$$\sqrt{(N+1)N'} \alpha_0 t \approx \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}. \quad (\text{VI.52})$$

Partant d'une matrice densité pour l'atome correspondant à un mélange statistique à poids 1/2 pour $p=0$ et $p=\hbar K$, on trouve à l'instant t une matrice densité où la population de $p=0$ est devenu voisine de 1. En d'autres termes, grâce au champ laser préparé initialement dans l'état de Fock (état non-classique) $|N, N'\rangle$, on a réussi (sans émission de photons dans les modes initialement vides) à diminuer le « désordre » initial de la distribution en impulsion de l'atome, en transférant ce désordre sur le champ lumineux.

Remarque. Écrire que le processus qui précède opère sans émission spontanée est un abus de langage : l'argument repose sur la différence entre N et $N+1$ (ou N' vs. $N'+1$). Or, l'origine physique de cette différence correspond précisément à l'émission spontanée dans le mode ω (ou ω'). Il est donc correct de dire qu'il n'y a pas de photons créés dans les modes vides du rayonnement, mais abusif de dire que l'émission spontanée ne joue aucun rôle⁸.

3-4 Et avec un état cohérent ?

L'exemple du paragraphe précédent nous a montré qu'il était possible, en utilisant un état bien choisi du champ électromagnétique, de se passer de l'émission spontanée pour refroidir une assemblée d'atomes. Toutefois, la génération d'états de Fock, comme l'état $|N, N'\rangle$ de cet exemple, est une opération délicate. Dans une expérience réaliste, on manipule des champs lumineux qui sont issus de sources laser et qui sont bien décrits par des états cohérents (ou quasi-classiques) du champ électromagnétique, c'est-à-dire des états propres des opérateurs annihilation :

$$\hat{a}_\lambda |\text{coh}\rangle = \alpha_\lambda |\text{coh}\rangle \quad (\text{VI.53})$$

8. On peut d'ailleurs obtenir un résultat similaire à (VI.51–VI.52) en prenant $N=0$, $N' \neq 0$, situation dans laquelle l'accumulation dans $p=0$ résulte de l'émission spontanée dans le mode ω , par l'intermédiaire d'un simple processus de pompage optique.

où α_λ est un nombre complexe.

Commençons par un mode donné pour simplifier les notations. L'état propre de \hat{a} avec la valeur propre α , que nous noterons $|\alpha\rangle$ à partir de maintenant, peut s'écrire explicitement de différentes façons :

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}) |0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} |0\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \end{aligned} \quad (\text{VI.54})$$

Dans une situation réaliste, plusieurs modes du champ électromagnétique sont peuplés, correspondant à des vecteurs d'onde, des polarisations et des fréquences différentes. L'état du champ à l'instant initial $t = 0$, avant que l'interaction avec les atomes n'ait commencé, peut donc s'écrire

$$|\psi_C(0)\rangle = \hat{\mathcal{D}}[\{\alpha_\lambda\}] |\text{vac}\rangle \quad (\text{VI.55})$$

avec l'opérateur unitaire $\hat{\mathcal{D}}$, appelé *opérateur déplacement*, défini par :

$$\hat{\mathcal{D}}[\{\alpha_\lambda\}] = \prod_{\lambda} \exp(\alpha_\lambda \hat{a}_\lambda^\dagger - \alpha_\lambda^* \hat{a}_\lambda). \quad (\text{VI.56})$$

Nous supposons que l'état du système total atome+champ $|\tilde{\Psi}(0)\rangle$ est factorisé à cet instant initial (pas de corrélation entre les deux) de sorte que :

$$|\Psi(0)\rangle = |\psi_A(0)\rangle \otimes |\psi_C(0)\rangle. \quad (\text{VI.57})$$

Il est alors intéressant de faire sur le vecteur du système total $|\Psi(t)\rangle$ la transformation unitaire suivante, suggérée initialement par Mollow (1975) [voir aussi Cohen-Tannoudji et al. (2012), exercice 17] :

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(t)\rangle \quad \text{avec} \quad \hat{U}(t) = \left(\hat{\mathcal{D}}[\{\alpha_\lambda e^{-i\omega t}\}] \right)^\dagger. \quad (\text{VI.58})$$

Dans cette transformation unitaire, l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}|\Psi(t)\rangle \quad (\text{VI.59})$$

devient

$$i\hbar \frac{d|\tilde{\Psi}(t)\rangle}{dt} = \hat{\tilde{H}}(t)|\tilde{\Psi}(t)\rangle \quad (\text{VI.60})$$

avec l'hamiltonien dépendant désormais explicitement du temps

$$\hat{\tilde{H}}(t) = \hat{U}(t)\hat{H}\hat{U}^\dagger(t) + i\hbar \frac{d\hat{U}(t)}{dt}\hat{U}^\dagger(t). \quad (\text{VI.61})$$

Avant de calculer explicitement ce nouvel hamiltonien, indiquons tout de suite l'intérêt de cette transformation unitaire : à l'instant initial, l'état après transformation unitaire est

$$|\Psi(0)\rangle = |\psi_A(0)\rangle \otimes |\text{vac}\rangle. \quad (\text{VI.62})$$

Au prix d'une dépendance explicite en temps de l'hamiltonien, nous pouvons donc considérer que le champ électromagnétique est initialement dans son état fondamental, le vide de photons.

Le calcul de l'hamiltonien transformé se fait sans difficulté à partir des relations :

$$\hat{U}(t) \hat{a}_\lambda \hat{U}^\dagger(t) = \hat{a}_\lambda + \alpha_\lambda e^{-i\omega t} \quad (\text{VI.63})$$

$$\hat{U}(t) \hat{a}_\lambda^\dagger \hat{U}^\dagger(t) = \hat{a}_\lambda^\dagger + \alpha_\lambda^* e^{+i\omega t}, \quad (\text{VI.64})$$

qui entraînent que

$$\hat{U}(t) \hat{H}_C \hat{U}^\dagger(t) + i\hbar \frac{d\hat{U}(t)}{dt} \hat{U}^\dagger(t) = \hat{H}_C. \quad (\text{VI.65})$$

L'hamiltonien atomique est inchangé dans la transformation et le couplage dipolaire électrique devient

$$\hat{U}(t) \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{U}^\dagger(t) = \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{r}}) + \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathcal{E}(\hat{\mathbf{r}}, t) \quad (\text{VI.66})$$

où la fonction $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ est donnée par :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda} \mathcal{E}_\lambda \epsilon_{\alpha_\lambda} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (\text{VI.67})$$

Cette expression n'est autre que le champ électrique classique, dépendant du temps, pour lequel on a donné à chaque mode l'amplitude initiale α_λ .

Au final, l'hamiltonien du système global peut s'écrire comme somme de deux termes, $\hat{\tilde{H}}(t) = \hat{H}_1(t) + \hat{H}_2$. Le premier dépend du temps et ne

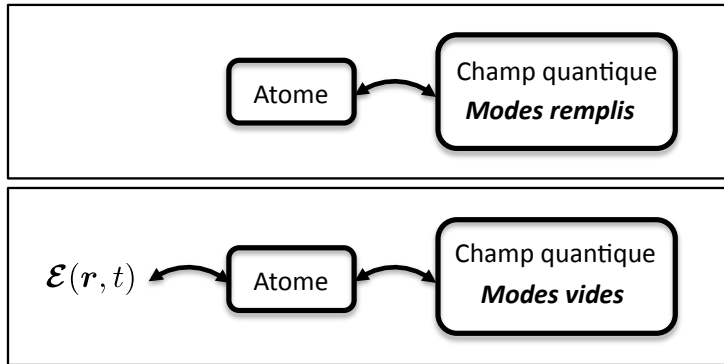


FIGURE VI.17. Bilan de la transformation unitaire (VI.58). La figure du haut représente la situation de départ, celle du bas la situation après transformation.

porte que sur les variables atomiques, couplées au champ classique $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$:

$$\hat{H}_1(t) = \hat{H}_A - \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathcal{E}(\hat{\mathbf{r}}, t). \quad (\text{VI.68})$$

Le second fait intervenir la dynamique du champ électromagnétique quantifié et le couplage du champ quantique à l'atome :

$$\hat{H}_2 = \hat{H}_C - \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (\text{VI.69})$$

Le bilan de cette transformation est donc remarquable : on s'est ramené à un problème où les phénomènes d'émission spontanée sont clairement séparés de ceux liés à l'absorption et l'émission stimulée :

- L'état du champ électromagnétique quantique est après transformation le vide de photons (VI.62). Les phénomènes d'absorption et d'émission stimulée sont décrits par l'hamiltonien $\hat{H}_1(t)$ qui ne porte que sur les variables de l'atome, couplées à un champ classique imposé de l'extérieur et dépendant du temps.
- Les phénomènes d'émission spontanée sont décrits par l'hamiltonien \hat{H}_2 , tous les modes du champ étant initialement vides et se remplissant au fur et mesure de l'émission spontanée de photons par l'atome.

On est alors en mesure de répondre à la question initiale de ce paragraphe pour le cas d'un champ électromagnétique initialement dans un

état cohérent. Si on néglige les phénomènes d'émission spontanée, donc l'hamiltonien \hat{H}_2 dans ce qui précède, on est ramené via l'hamiltonien $\hat{H}_1(t)$ à un problème du type de celui considéré en (VI.38). On ne peut alors pas espérer observer une accumulation d'atomes dans un état quantique donné : les valeurs propres de l'opérateur densité à un corps seront inchangées lors de l'évolution due au couplage atome-champ. En d'autres termes, l'émission spontanée est indispensable pour refroidir, avec un rayonnement préparé dans un état cohérent, un gaz d'atomes sans interaction.

4 Conclusions

La première conclusion de cet enseignement consacré au refroidissement radiatif est la grande diversité et la grande richesse des mécanismes qui ont été proposés depuis l'idée initiale du refroidissement Doppler en 1975. Tous n'ont pas été explorés expérimentalement et nous avons choisi de ne décrire dans cette série de cours que ceux qui ont donné lieu à une étude pratique détaillée et convaincante. En dépit de cette restriction, nous n'avons pas pu aborder toutes les catégories de processus permettant de refroidir une assemblée d'atomes avec de la lumière. Citons ici deux absents, sur lesquels nous aurons probablement l'occasion de revenir dans les cours des années ultérieures. D'abord le refroidissement en cavité, qui a donné lieu récemment à des développements spectaculaires [pour une revue, voir par exemple Ritsch et al. (2013)]. Mentionnons ensuite les mécanismes incluant une boucle de rétro-action sur le gaz d'atomes, inspirés du concept de refroidissement stochastique très utilisé en physique des hautes énergies [voir par exemple la proposition originale de Raizen et al. (1998)].

Nous n'avons pas abordé non plus le refroidissement par évaporation qui permet, au prix de pertes de particules et de constantes de temps relativement longues, d'atteindre des températures comparables à celles d'un refroidissement radiatif optimisé (entre 0.1 et 1 μK), avec des densités spatiales souvent considérablement plus grandes. Le succès remarquable du refroidissement par évaporation amène d'ailleurs à poser la question suivante : est-il pertinent d'approfondir encore les mécanismes de refroidissement lumineux, certes sans pertes et plus rapides, mais plus compliqués à mettre en place ?

La dernière conclusion de ce cours sera une réponse doublement positive à cette question. Tout d'abord, le refroidissement par évaporation, aussi efficace soit-il, présente également des limites. L'évaporation d'une particule plus énergétique que la moyenne se fait quand celle-ci atteint les bords de l'échantillon, ce qui entraîne que le refroidissement ne se fait pas de manière homogène ; il est plus efficace en périphérie du gaz qu'au centre, ce qui peut constituer un biais significatif dans certaines situations. Par ailleurs, le refroidissement radiatif, transposé à des assemblées d'atomes en interaction, peut constituer un outil pour explorer de nouvelles phases de la matière. Le principe du refroidissement par état noir par exemple peut être transposé à une assemblée d'atomes pour préparer des états à N corps, fortement corrélés, qui ne pourraient pas être atteints par une évolution hamiltonienne « standard » [voir par exemple Bardyn et al. (2013)]. La physique à N corps dissipative en est encore à ses premiers pas pour ce qui concerne le domaine des gaz quantiques, mais les concepts développés depuis quarante ans pour refroidir des atomes individuels avec de la lumière seront sans aucun doute amenés à y jouer un rôle essentiel.

Références

- Arcizet, Olivier, P-F Cohadon, Tristan Briant, Michel Pinard & Antoine Heidmann (2006), « Radiation-pressure cooling and optomechanical instability of a micromirror », in *Nature* 444.7115, pp. 71–74.
- Arimondo, E. (1996), « Coherent population trapping in laser spectroscopy », in *Progress in Optics*, vol. 35, ed. by E. Wolf, Elsevier, , p. 259.
- Aspect, A., E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste & C. Cohen-Tannoudji (1988), « Laser Cooling below the One-Photon-Recoil Energy by Velocity-Selective Coherent Population Trapping », in *Phys. Rev. Lett.* 61, p. 826.
- (1989), « Laser cooling below the one-photon recoil energy by velocity-selective coherent population trapping : theoretical analysis », in *JOSA B* 6, p. 2112.
- Aspelmeyer, Markus, Tobias J. Kippenberg & Florian Marquardt (2014), « Cavity optomechanics », in *Rev. Mod. Phys.* 86 (4), pp. 1391–1452.
- Bakr, W. S., A. Peng, S. Fölling & M. Greiner (2009), « A quantum gas microscope for detecting single atoms in a Hubbard-regime optical lattice », in *Nature* 462, pp. 74–77.
- Bardou, F., J. P. Bouchaud, O. Emile, A. Aspect & C. Cohen-Tannoudji (1994), « Subrecoil laser cooling and Lévy flights », in *Phys. Rev. Lett.* 72 (2), pp. 203–206.
- Bardou, F., J.-P. Bouchaud, A. Aspect & C. Cohen-Tannoudji (2002), *Levy statistics and laser cooling*, Cambridge University Press.
- Bardyn, C-E, M A Baranov, C V Kraus, E Rico, A İmamoglu, P Zoller & S Diehl (2013), « Topology by dissipation », in *New Journal of Physics* 15.8, p. 085001.
- Barry, JF, DJ McCarron, EB Norrgard, MH Steinecker & D DeMille (2014), « Magneto-optical trapping of a diatomic molecule », in *Nature* 512.7514, pp. 286–289.
- Bernier, Jean-Sébastien, Corinna Kollath, Antoine Georges, Lorenzo De Leo, Fabrice Gerbier, Christophe Salomon & Michael Köhl (2009), « Cooling fermionic atoms in optical lattices by shaping the confinement », in *Phys. Rev. A* 79 (6), p. 061601.
- Bloom, BJ, TL Nicholson, JR Williams, SL Campbell, M Bishof, X Zhang, W Zhang, SL Bromley & J Ye (2014), « An optical lattice clock with accuracy and stability at the 10-18 level », in *Nature* 506.7486, pp. 71–75.
- Boiron, D., C. Triché, D. R. Meacher, P. Verkerk & G. Grynberg (1995), « Three-dimensional cooling of cesium atoms in four-beam gray optical molasses », in *Phys. Rev. A* 52 (5), R3425–R3428.
- Boiron, D., A. Michaud, P. Lemonde, Y. Castin, C. Salomon, S. Weyers, K. Szymaniec, L. Cognet & A. Clairon (1996), « Laser cooling of cesium atoms in gray optical molasses down to 1.1 μK », in *Phys. Rev. A* 53 (6), R3734–R3737.
- Boiron, D., A. Michaud, J. M. Fournier, L. Simard, M. Sprenger, G. Grynberg & C. Salomon (1998), « Cold and dense cesium clouds in far-detuned dipole traps », in *Phys. Rev. A* 57, R4106.
- Bouchaud, Jean-Philippe & Antoine Georges (1990), « Anomalous diffusion in disordered media : statistical mechanisms, models and physical applications », in *Physics reports* 195.4, pp. 127–293.
- Bouchoule, I., H. Perrin, A. Kuhn, M. Morinaga & C. Salomon (1999), « Neutral atoms prepared in Fock states of a one-dimensional harmonic potential », in *Phys. Rev. A* 59 (1), R8–R11.
- Boyer, V., L. J. Lising, S. L. Rolston & W. D. Phillips (2004), « Deeply subrecoil two-dimensional Raman cooling », in *Phys. Rev. A* 70.043405.
- Burchianti, A., G. Valtolina, J. A. Seman, E. Pace, M. De Pas, M. Inguscio, M. Zaccanti & G. Roati (2014), « Efficient all-optical production of large ${}^6\text{Li}$ quantum gases using D_1 gray-molasses cooling », in *Phys. Rev. A* 90 (4), p. 043408.

- Castin, Y. & J. Dalibard (1991), « Quantization of atomic motion in optical molasses », in *Europhys. Lett.* 14, p. 761.
- Castin, Y., H. Wallis & J. Dalibard (1989), « Limit of Doppler cooling », in *J. Opt. Soc. Am. B* 6, p. 2046.
- Castin, Y, J Dalibard & C Cohen-Tannoudji (1991), « The limits of Sisyphus cooling. », in *Light Induced Kinetic Effects on Atoms, Ions and Molecules*, ed. by L. Moi, S. Gozzini, C. Gabbanini, E. Arimondo & F. Strumia, Pisa, Italy: ETS Editrice.
- Castin, Y., J. I. Cirac & M. Lewenstein (1998), « Reabsorption of Light by Trapped Atoms », in *Phys. Phys. Lett.* 80, p. 5305.
- Castin, Yvan & Klaus Mølmer (1995), « Monte Carlo Wave-Function Analysis of 3D Optical Molasses », in *Phys. Rev. Lett.* 74 (19), pp. 3772–3775.
- Chalony, M., A. Kastberg, B. Klappauf & D. Wilkowski (2011), « Doppler Cooling to the Quantum Limit », in *Phys. Rev. Lett.* 107 (24), p. 243002.
- Chang, R., A. L. Hoendervanger, Q. Bouton, Y. Fang, T. Klafka, K. Audo, A. Aspect, C. I. Westbrook & D. Clément (2014), « Three-dimensional laser cooling at the Doppler limit », in *Phys. Rev. A* 90 (6), p. 063407.
- Cheuk, Lawrence W., Matthew A. Nichols, Melih Okan, Thomas Gersdorf, Vinay V. Ramasesh, Waseem S. Bakr, Thomas Lompe & Martin W. Zwierlein (2015), « Quantum-Gas Microscope for Fermionic Atoms », in *Phys. Rev. Lett.* 114 (19), p. 193001.
- Chu, S., L. Hollberg, J. E. Bjorkholm, A. Cable & A. Ashkin (1985), « Three-Dimensional Viscous Confinement and Cooling of Atoms by Resonance Radiation Pressure », in *Phys. Rev. Lett.* 55, p. 48.
- Cirac, J. I., M. Lewenstein & P. Zoller (1996), « Collective laser cooling of trapped atoms », in *Europhysics Letters* 35, p. 647.
- Cohen-Tannoudji, C., B. Diu & F. Laloë (1973), *Mécanique Quantique*, Hermann.
- Cohen-Tannoudji, Claude, Jacques Dupont-Roc & Gilbert Grynberg (2012), *Processus d'interaction entre photons et atomes*, Edp Sciences.
- Cooper, C. J., G. Hillenbrand, J. Rink, C. G. Townsend, K. Zetie & C. J. Foot (1994), « The temperature of atoms in a magneto-optical trap », in *Europhys. Lett.* 28, p. 397.
- Corder, Christopher, Brian Arnold & Harold Metcalf (2015), « Laser Cooling without Spontaneous Emission », in *Phys. Rev. Lett.* 114 (4), p. 043002.
- Dahan, M. B., E. Peik, J. Reichel, Y. Castin & C. Salomon (1996), « Bloch Oscillations of Atoms in an Optical Potential », in *Phys. Rev. Lett.* 76, p. 4508.
- Dalibard, J. (1988), « Laser cooling of an optically thick gas : the simplest radiation pressure trap ? », in *Optics Comm.* 68, p. 203.
- Dalibard, J. & C. Cohen-Tannoudji (1989), « Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models », in *J. Opt. Soc. Am. B* 6, p. 2023.
- Davidson, N., H. J. Lee, M. Kasevich & S. Chu (1994), « Raman Cooling of Atoms in Two and Three Dimensions », in *Phys. Rev. Lett.* 72, p. 3158.
- Desbiolles, Pierre, Markus Arndt, Pascal Szriftgiser & Jean Dalibard (1996), « Elementary Sisyphus process close to a dielectric surface », in *Phys. Rev. A* 54 (5), pp. 4292–4298.
- Diedrich, F., J. C. Bergquist, W. M. Itano & D. J. Wineland (1989), « Sideband cooling in an ion trap », in *Phys. Rev. Lett.* 62, p. 403.
- Diu, B., C. Guthmann, D. Lederer & B. Roulet (1989), *Physique Statistique*, Hermann.
- Drewsen, M., P. Laurent, A. Nadir, G. Santarelli, A. Clairon, Y. Castin, D. Grison & C. Salomon (1994), « Investigation of sub-Doppler cooling effects in a cesium magneto-optical trap », in *Appl. Phys. B* 59, p. 283.
- Einstein, Albert (1916), « Strahlungs-emission und absorption nach der quantentheorie », in *Deutsche Physikalische Gesellschaft* 18, pp. 318–323.
- Einstein, Albert (1917), « Zur Quantentheorie der Strahlung [traduction française par F. Balibar, B. Jech et O. Darrigol] », in *Physikalische Zeitschrift* 18, p. 121.
- Ertmer, W., R. Blatt, J. L. Hall & M. Zhu (1985), « Laser Manipulation of Atomic Beam Velocities : Demonstration of Stopped Atoms and Velocity Reversal », in *Phys. Rev. Lett.* 54, p. 996.
- Fano, U. (1961), « Effects of Configuration Interaction on Intensities and Phase Shifts », in *Phys. Rev.* 124 (6), pp. 1866–1878.
- Fernandes, D. Rio, F. Sievers, N. Kretzschmar, S. Wu, C. Salomon & F. Chevy (2012), « Sub-Doppler laser cooling of fermionic 40 K atoms in three-dimensional gray optical molasses », in *EPL (Europhysics Letters)* 100.6, p. 63001.
- Fleischhauer, Michael, Atac Imamoglu & Jonathan P Marangos (2005), « Electromagnetically induced transparency : Optics in coherent media », in *Reviews of modern physics* 77.2, p. 633.
- Förster, Leonid, Michał Karski, et al. (2009), « Microwave Control of Atomic Motion in Optical Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* 103 (23), p. 233001.

- Fuhrmanek, A., R. Bourgain, Y. R. P. Sortais & A. Browaeys (2012), « Light-assisted collisions between a few cold atoms in a microscopic dipole trap », in *Phys. Rev. A* 85 (6), p. 062708.
- Gerz, C., T. W. Hodapp, P. Jessen, K. M. Jones, W. D. Phillips, C. I. Westbrook & K. Molmer (1993), « The Temperature of Optical Molasses for Two Different Atomic Angular Momenta », in *EPL (Europhysics Letters)* 21.6, p. 661.
- Gigan, S, HR Böhm, M Paternostro, F Blaser, G Langer, JB Hertzberg, KC Schwab, D Bäuerle, M Aspelmeyer & A Zeilinger (2006), « Self-cooling of a micromirror by radiation pressure », in *Nature* 444.7115, pp. 67–70.
- Gordon, J. P. & A. Ashkin (1980), « Motion of atoms in a radiation trap », in *Phys. Rev. A* 21.5, pp. 1606–1617.
- Grier, Andrew T., Igor Ferrier-Barbut, Benno S. Rem, Marion Delehaye, Lev Khaykovich, Frédéric Chevy & Christophe Salomon (2013), « Λ -enhanced sub-Doppler cooling of lithium atoms in D_1 gray molasses », in *Phys. Rev. A* 87 (6), p. 063411.
- Grynberg, Gilbert & Cécile Robilliard (2001), « Cold atoms in dissipative optical lattices », in *Physics Reports* 355.5, pp. 335–451.
- Haller, Elmar, James Hudson, Andrew Kelly, Dylan A Cotta, Bruno Peau-decerf, Graham D Bruce & Stefan Kuhr (2015), « Single-atom imaging of fermions in a quantum-gas microscope », in *arXiv preprint arXiv:1503.02005*.
- Hamann, S. E., D. L. Haycock, G. Klose, P. H. Pax, I. H. Deutsch & P. S. Jessen (1998), « Resolved-Sideband Raman Cooling to the Ground State of an Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 80 (19), pp. 4149–4152.
- Han, Dian-Jiun, Steffen Wolf, Steven Oliver, Colin McCormick, Marshall T. DePue & David S. Weiss (2000), « 3D Raman Sideband Cooling of Cesium Atoms at High Density », in *Phys. Rev. Lett.* 85 (4), pp. 724–727.
- Hänsch, T. W. & A. L. Schawlow (1975), « Cooling of gases by laser radiation », in *Optics Comm.* 13, p. 68.
- Harris, Stephen E (1997), « Electromagnetically induced transparency », in *Physics Today* 50.7, pp. 36–42.
- Heinzen, D. J. & D. J. Wineland (1990), « Quantum-limited cooling and detection of radio-frequency oscillations by laser-cooled ions », in *Phys. Rev. A* 42 (5), pp. 2977–2994.
- Hemmerich, A., M. Weidemüller, T. Esslinger, C. Zimmermann & T. Hänsch (1995), « Trapping Atoms in a Dark Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 75 (1), pp. 37–40.
- Hodapp, TW, C Gerz, C Furtlehner, CI Westbrook, WD Phillips & J Dalibard (1995), « Three-dimensional spatial diffusion in optical molasses », in *Applied Physics B* 60.2-3, pp. 135–143.
- Huang, K. (1987), *Statistical Mechanics*, New York: Wiley.
- Hummon, Matthew T., Mark Yeo, Benjamin K. Stuhl, Alejandra L. Collopy, Yong Xia & Jun Ye (2013), « 2D Magneto-Optical Trapping of Diatomic Molecules », in *Phys. Rev. Lett.* 110 (14), p. 143001.
- Ido, Tetsuya, Yoshitomo Isoya & Hidetoshi Katori (2000), « Optical-dipole trapping of Sr atoms at a high phase-space density », in *Phys. Rev. A* 61 (6), p. 061403.
- Janik, G, W Nagourney & H Dehmelt (1985), « Doppler-free optical spectroscopy on the Ba⁺ mono-ion oscillator », in *JOSA B* 2.8, pp. 1251–1257.
- Julienne, P.S., A.M. Smith & K. Burnett (1992), « Theory of Collisions between Laser Cooled Atoms », in *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, ed. by David Bates & Benjamin Bederson, vol. 30, Academic Press, , p. 141.
- Kasevich, M. & S. Chu (1992), « Laser Cooling below a Photon Recoil with Three-Level Atoms », in *Phys. Rev. Lett.* 69, p. 1741.
- Kastberg, A., W. D. Phillips, S. L. Rolston, R. J. C. Spreeuw & P. S. Jessen (1995), « Adiabatic Cooling of Cesium in an Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 74, p. 1542.
- Kastler, Alfred (1950), « Quelques suggestions concernant la production optique et la détection optique d'une inégalité de population des niveaux de quantification spatiale des atomes. Application à l'expérience de Stern et Gerlach et à la résonance magnétique », in *J. phys. radium* 11.6, pp. 255–265.
- Katori, H., T. Ido, Y. Isoya & M. Kuwata-Gonokami (1999), « Magneto-optical trapping and cooling of Strontium atoms down to the photon recoil temperature », in *Phys. Rev. Lett.* 82, p. 116.
- Kaufman, A. M., B. J. Lester & C. A. Regal (2012), « Cooling a Single Atom in an Optical Tweezer to Its Quantum Ground State », in *Phys. Rev. X* 2 (4), p. 041014.
- Kerman, Andrew J., Vladan Vuletic, Cheng Chin & Steven Chu (2000), « Beyond Optical Molasses : 3D Raman Sideband Cooling of Atomic Cesium to High Phase-Space Density », in *Phys. Rev. Lett.* 84 (3), pp. 439–442.
- Ketterle, W. & D. E. Pritchard (1992), « Atom Cooling By Time-Dependent Potentials », in *Phys. Rev. A* 46, pp. 4051–4054.

- Ketterle, W., K. B. Davis, M. A. Joffe, A. Martin & D. E. Pritchard (1992), « High-Densities of Cold Atoms in a Dark Spontaneous-Force Optical Trap », in *Phys. Rev. Lett.* 70, p. 2253.
- Kim, Kihwan, Heung-Ryoul Noh & Wonho Jhe (2004), « Parametric resonance in an intensity-modulated magneto-optical trap », in *Optics Communications* 236, pp. 349–361.
- Lawall, J., S. Kulin, B. Saubamea, N. Bigelow, M. Leduc & C. Cohen-Tannoudji (1994a), « Three-Dimensional Laser Cooling of Helium Beyond the Single-Photon Recoil Limit », in *Phys. Rev. Lett.* 75, p. 4194.
- Lawall, J., F. Bardou, B. Saubamea, K. Shimizu, M. Leduc, A. Aspect & C. Cohen-Tannoudji (1994b), « Two-Dimensional Subrecoil Laser Cooling », in *Phys. Rev. Lett.* 73, p. 1915.
- Lee, H. J. & S. Chu (1998), « Atomic spin polarization by Raman cooling », in *Phys. Rev. A* 57, p. 2905.
- Lee, H. J., C. S. Adams, M. Kasevich & S. Chu (1996), « Raman cooling of atoms in an optical dipole trap », in *Phys. Rev. Lett.* 76, p. 2658.
- Lett, P. D., R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, P. L. Gould & H. J. Metcalf (1988a), « Observation of Atoms Laser Cooled below the Doppler Limit », in *Phys. Rev. Lett.* 61, p. 169.
- (1988b), « Observation of Atoms Laser Cooled below the Doppler Limit », in *Phys. Rev. Lett.* 61, p. 169.
- Lett, P. D., W. D. Phillips, S. L. Rolston, C. E. Tanner, R. N. Watts & C. I. Westbrook (1989), « Optical Molasses », in *J. Opt. Soc. Am. B* 6, p. 2084.
- Li, Xiao, Theodore A. Corcovilos, Yang Wang & David S. Weiss (2012), « 3D Projection Sideband Cooling », in *Phys. Rev. Lett.* 108 (10), p. 103001.
- Loftus, Thomas H., Tetsuya Ido, Martin M. Boyd, Andrew D. Ludlow & Jun Ye (2004), « Narrow line cooling and momentum-space crystals », in *Phys. Rev. A* 70 (6), p. 063413.
- Lounis, B. & C. Cohen-Tannoudji (1992), « Coherent population trapping and Fano profiles », in *J. Phys II France* 2, p. 579.
- McFerran, J.J., L. Yi, S. Meiri & S. Bize (2010), « Sub-Doppler cooling of fermionic Hg isotopes in a magneto-optical trap », in *Opt. Lett.* 35.18, p. 3078.
- Minogin, V.G. & O.T. Serimaa (1979), « Resonant light pressure forces in a strong standing laser wave », in *Optics Communications* 30.3, 373–379.
- Moler, Kathryn, David S. Weiss, Mark Kasevich & Steven Chu (1992), « Theoretical analysis of velocity-selective Raman transitions », in *Phys. Rev. A* 45 (1), pp. 342–348.
- Mollow, B. R. (1975), « Pure-state analysis of resonant light scattering : Radiative damping, saturation, and multiphoton effects », in *Phys. Rev. A* 12 (5), pp. 1919–1943.
- Mølmer, Klaus, Yvan Castin & Jean Dalibard (1993), « Monte Carlo wavefunction method in quantum optics », in *JOSA B* 10.3, pp. 524–538.
- Monroe, C., D. M. Meekhof, B. E. King, S. R. Jefferts, W. M. Itano, D. J. Wineland & P. Gould (1995), « Resolved-Sideband Raman Cooling of a Bound Atom to the 3D Zero-Point Energy », in *Phys. Rev. Lett.* 75 (22), pp. 4011–4014.
- Morigi, Giovanna, Jürgen Eschner & Christoph H. Keitel (2000), « Ground State Laser Cooling Using Electromagnetically Induced Transparency », in *Phys. Rev. Lett.* 85 (21), pp. 4458–4461.
- Morinaga, M., I. Bouchoule, J.-C. Karam & C. Salomon (1999), « Manipulation of Motional Quantum States of Neutral Atoms », in *Phys. Rev. Lett.* 83 (20), pp. 4037–4040.
- Nath, Dipankar, R Kollengode Easwaran, G. Rajalakshmi & C. S. Unnikrishnan (2013), « Quantum-interference-enhanced deep sub-Doppler cooling of ^{39}K atoms in gray molasses », in *Phys. Rev. A* 88 (5), p. 053407.
- Nelson, K. D., X. Li & D. S. Weiss (2007), « Imaging single atoms in a three-dimensional array », in *Nature Physics* 3, pp. 556–560.
- Nicholson, T.L., S.L. Campbell, R.B. Hutson, G.E. Marti, B.J. Bloom, R.L. McNally, W. Zhang, M.D. Barrett, M.S. Safronova, G.F. Strouse, et al. (2015), « Systematic evaluation of an atomic clock at 2 [times] 10⁻¹⁸ total uncertainty », in *Nature communications* 6.
- Olshanii, M., Y. Castin & J. Dalibard (1996), « Laser Spectroscopy XII », in , ed. by M. Inguscio, M. Allegrini & A. Sasso, Singapore: World Scientific, , pp. 7–12.
- Ol'shanii, M.A. & V.G. Minogin (1992), « Three-dimensional velocity-selective coherent population trapping of a (3+3)-level atom », in *Optics Communications* 89, p. 393.
- Ovchinnikov, Y. B., I. Manek & R. Grimm (1997), « Surface trap for Cs atoms based on evanescent-wave cooling », in *Phys. Rev. Lett.* 79, p. 2225.
- Parsons, Maxwell F., Florian Huber, Anton Mazurenko, Christie S. Chiu, Widagdo Setiawan, Katherine Wooley-Brown, Sebastian Blatt & Markus Greiner (2015), « Site-Resolved Imaging of Fermionic ^6Li in an Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 114 (21), p. 213002.

- Patil, Y. S., S. Chakram, L. M. Aycock & M. Vengalattore (2014), « Non-destructive imaging of an ultracold lattice gas », in *Phys. Rev. A* 90 (3), p. 033422.
- Perrin, H., A. Kuhn, I. Bouchoule & C. Salomon (1998), « Sideband cooling of neutral atoms in a far-detuned optical lattice », in *EPL (Europhysics Letters)* 42.4, p. 395.
- Perrin, H., A. Kuhn, I. Bouchoule, T. Pfau & C. Salomon (1999), « Raman cooling of spin-polarized cesium atoms in a crossed dipole trap », in *EPL (Europhysics Letters)* 46.2, p. 141.
- Pinkse, P. W. H., A. Mosk, M. Weidemüller, M. W. Reynolds, T. W. Hijmans & J. T. M. Walraven (1997), « Adiabatically changing the phase-space density of a trapped Bose gas », in *Phys. Rev. Lett.* 78, p. 990.
- Prodan, John, Alan Migdall, William D. Phillips, Ivan So, Harold Metcalf & Jean Dalibard (1985), « Stopping Atoms with Laser Light », in *Phys. Rev. Lett.* 54 (10), pp. 992–995.
- Pruvost, Laurence, Isabelle Serre, Hong Tuan Duong & Joshua Jortner (2000), « Expansion and cooling of a bright rubidium three-dimensional optical molasses », in *Phys. Rev. A* 61 (5), p. 053408.
- Raab, E. L., M. Prentiss, A. Cable, S. Chu & D. E. Pritchard (1987), « Trapping of Neutral Sodium with Radiation Pressure », in *Phys. Rev. Lett.* 59, p. 2631.
- Raizen, MG, J. Koga, B. Sundaram, Y. Kishimoto, H. Takuma & T. Tajima (1998), « Stochastic cooling of atoms using lasers », in *Physical Review A* 58.6, p. 4757.
- Reichel, J., F. Bardou, M. B. Dahan, E. Peik, S. Rand, C. Salomon & C. Cohen-Tannoudji (1995), « Raman Cooling of Cesium below 3 nK : New Approach Inspired by Lévy Flights Statistics », in *Phys. Rev. Lett.* 75, p. 4575.
- Ritsch, Helmut, Peter Domokos, Ferdinand Brennecke & Tilman Esslinger (2013), « Cold atoms in cavity-generated dynamical optical potentials », in *Reviews of Modern Physics* 85.2, p. 553.
- Salomon, C., J. Dalibard, W. D. Phillips, A. Clairon & S. Guellati (1990), « Laser Cooling of Cesium Atoms Below 3 μ K », in *EPL (Europhysics Letters)* 12.8, p. 683.
- Salomon, G., L. Fouché, P. Wang, A. Aspect, P. Bouyer & T. Bourdel (2013), « Gray-molasses cooling of 39 K to a high phase-space density », in *EPL (Europhysics Letters)* 104.6, p. 63002.
- Schliesser, Albert, Pascal Del’Haye, Nima Nooshi, KJ Vahala & TJ Kippenberg (2006), « Radiation pressure cooling of a micromechanical oscillator using dynamical backaction », in *Physical Review Letters* 97.24, p. 243905.
- Sesko, David W, TG Walker & Carl E Wieman (1991), « Behavior of neutral atoms in a spontaneous force trap », in *JOSA B* 8.5, pp. 946–958.
- Shahriar, M. S., P. R. Hemmer, M. G. Prentiss, P. Marte, J. Mervis, D. P. Katz, N. P. Bigelow & T. Cai (1993), « Continuous polarization-gradient precooling-assisted velocity-selective coherent population trapping », in *Phys. Rev. A* 48 (6), R4035–R4038.
- Sherson, Jacob F., Christof Weitenberg, Manuel Endres, Marc Cheneau, Immanuel Bloch & Stefan Kuhr (2010), « Single-atom-resolved fluorescence imaging of an atomic Mott insulator », in *Nature* 467.7311, 68.
- Sievers, Franz, Norman Kretschmar, Diogo Rio Fernandes, Daniel Suchet, Michael Rabinovic, Saijun Wu, Colin V. Parker, Lev Khaykovich, Christophe Salomon & Frédéric Chevy (2015), « Simultaneous sub-Doppler laser cooling of fermionic ^6Li and ^{40}K on the D_1 line : Theory and experiment », in *Phys. Rev. A* 91 (2), p. 023426.
- Sortais, Y, S Bize, C Nicolas, A Clairon, Ch Salomon & C Williams (2000), « Cold collision frequency shifts in a 87 Rb atomic fountain », in *Physical Review Letters* 85.15, p. 3117.
- Stamper-Kurn, D. M., H.-J. Miesner, A. P. Chikkatur, S. Inouye, J. Stenger & W. Ketterle (1998), « Reversible formation of a Bose–Einstein condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 81, p. 2194.
- Stefano, Andrea di, Marie Fauquembergue, Philippe Verkerk & Daniel Hennequin (2003), « Giant oscillations in a magneto-optical trap », in *Phys. Rev. A* 67 (3), p. 033404.
- Stellmer, Simon, Benjamin Pasquiou, Rudolf Grimm & Florian Schreck (2013), « Laser Cooling to Quantum Degeneracy », in *Phys. Rev. Lett.* 110 (26), p. 263003.
- Terças, Hugo, J. Tito Mendonça & Robin Kaiser (2010), « Driven collective instabilities in magneto-optical traps : A fluid-dynamical approach », in *EPL (Europhysics Letters)* 89.5, p. 53001.
- Thompson, J. D., T. G. Tiecke, A. S. Zibrov, V. Vuletic & M. D. Lukin (2013), « Coherence and Raman Sideband Cooling of a Single Atom in an Optical Tweezer », in *Phys. Rev. Lett.* 110 (13), p. 133001.
- Townsend, C. G., N. H. Edwards, C. J. Cooper, K. P. Zetie, C. J. Foot, A. M. Steane, P. Szriftgiser, H. Perrin & J. Dalibard (1995), « Phase-space density in the magneto-optical trap », in *Phys. Rev. A* 52, p. 1423.

- Ungar, P. J., D. S. Weiss, E. Riis & S. Chu (1989), « Optical molasses and multilevel atoms : Theory », in *J. Opt. Soc. Am. B* 6, p. 2058.
- Valentin, C., M.-C. Gagné, J. Yu & P. Pillet (1992), « One-Dimension Sub-Doppler Molasses in the Presence of Static Magnetic Field », in *EPL (Europhysics Letters)* 17.2, p. 133.
- Van Kampen, Nicolaas Godfried (1992), *Stochastic processes in physics and chemistry*, vol. 1, Elsevier.
- Vuletic, Vladan, Cheng Chin, Andrew J. Kerman & Steven Chu (1998), « Degenerate Raman Sideband Cooling of Trapped Cesium Atoms at Very High Atomic Densities », in *Phys. Rev. Lett.* 81 (26), pp. 5768–5771.
- Walker, T., D. Sesko & C. Wieman (1990), « Collective Behavior of Optically Trapped Neutral Atoms », in *Phys. Rev. Lett.* 64, p. 408.
- Wallis, H & W Ertmer (1989), « Broadband laser cooling on narrow transitions », in *JOSA B* 6.11, pp. 2211–2219.
- Weidemüller, M., T. Esslinger, M. A. Ol'shanii, A. Hemmerich & T. W. Hänsch (1994), « A Novel Scheme for Efficient Cooling below the Photon Recoil Limit », in *EPL (Europhysics Letters)* 27.2, p. 109.
- Wilkowski, David, Jean Ringot, Daniel Hennequin & Jean Claude Garreau (2000), « Instabilities in a Magneto-optical Trap : Noise-Induced Dynamics in an Atomic System », in *Phys. Rev. Lett.* 85 (9), pp. 1839–1842.
- Wineland, D. J. & H. Dehmelt (1975), « Proposed $10^{14} \Delta\nu < \nu$ laser fluorescence spectroscopy on Ti^+ mono-ion oscillator III », in *Bulletin of the American Physical Society* 20, p. 637.
- Wineland, D. J. & Wayne M. Itano (1979), « Laser cooling of atoms », in *Phys. Rev. A* 20 (4), pp. 1521–1540.
- Wohlleben, W., F. Chevy, K. W. Madison & J. Dalibard (2001), « An atom faucet », in *Eur. Phys. J. D* 15, pp. 237–244.
- Wolf, Steffen, Steven J. Oliver & David S. Weiss (2000), « Suppression of Recoil Heating by an Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 85 (20), pp. 4249–4252.
- Zeppenfeld, Martin, Barbara GU Englert, Rosa Glöckner, Alexander Prehn, Manuel Mielenz, Christian Sommer, Laurens D van Buuren, Michael Motsch & Gerhard Rempe (2012), « Sisyphus cooling of electrically trapped polyatomic molecules », in *Nature* 491.7425, pp. 570–573.