

Protocole quantique d'estimation multiparamètre et acquisition comprimée d'un champ

Youcef Baamara¹, Manuel Gessner^{2,3} and Alice Sinatra^{1*}

¹ Laboratoire Kastler Brossel, ENS-Université PSL, CNRS, Université de la Sorbonne and Collège de France, 24 rue Lhomond, 75231 Paris, France

² Departamento de Física Teórica and IFIC, Universidad de Valencia-CSIC, C/ Dr. Moliner 50, 46100 Burjassot (Valencia), Spain

³ ICFO-Institut de Ciències Fotòniques, The Barcelona Institute of Science and Technology, Av. Carl Friedrich Gauss 3, 08860, Castelldefels (Barcelona), Spain

* alice.sinatra@lkb.ens.fr

May 11, 2023

Résumé

Nous montrons qu'un gain quantique significatif correspondant aux états comprimés ou surcomprimés de spin peut être obtenu dans l'estimation multiparamètre en mesurant les coefficients de Hadamard d'un signal 1D ou 2D. La plateforme physique que nous considérons est constituée d'atomes à deux niveaux dans un réseau optique dans une configuration Mott-comprimé de spin, ou plus généralement par des spins corrélés distribués dans des modes spatialement séparés. Notre protocole requiert la possibilité de retourner localement les spins, mais repose sur des mesures collectives. Nous donnons des exemples d'applications à la cartographie de champs scalaires ou vectoriels et à l'acquisition comprimée.

Contents

1	Introduction	2
2	Amélioration quantique dans la détection distribuée avec des mesures collectives et des flips de spin locaux	3
3	Cartographie d'un champ unidimensionnel : simulation avec $N = 8$	7
3.1	Champ scalaire	7
3.2	Champ vectoriel	7
4	Gain quantique pour l'acquisition comprimée d'un champ bi-dimensionnel (image)	9
5	Conclusion	11
A	Changement de signe d'un paramètre local par retournement de spin	11
B	Reformulation de notre protocole dans la méthode des moments pour l'estimation multiparamètre	12
B.1	Matrice d'information quantique de Fisher et optimalité de la mesure	13
B.2	Méthode des moments multiparamètre et observable optimale	14

C	Mesure séquentielle des trois composantes d'un champ vectoriel.	16
	References	16

1 Introduction

Les spins en précession, ou de manière équivalente les systèmes quantiques dans une superposition de deux niveaux d'énergie, sont des capteurs atomiques précis, et une distribution spatiale régulière d'atomes à deux niveaux dans un réseau optique en 1D, 2D ou 3D peut être utilisée pour mesurer les valeurs locales d'un champ étendu. Une source fondamentale de bruit dans un tel détecteur est le bruit de projection quantique qui provient de la non-commutativité des trois composantes du spin $1/2$ et qui donne une incertitude sur la direction du spin dont on veut mesurer l'angle de précession.

L'idée de cet article est de tirer parti des corrélations quantiques entre des atomes à deux niveaux dans un réseau optique pour l'estimation multiparamètres, en particulier pour les mesures de champ étendu. Pour cela, en plus de l'arrangement régulier des atomes, qui présente des avantages pour les horloges atomiques [1,2] et peut être réalisé à l'aide de pinces optiques ou grâce à une transition de Mott dans un condensat de Bose-Einstein [3], il convient de créer des corrélations de spin entre les atomes. Deux schémas possibles, qui produisent directement l'état comprimé de spin avec un atome par site, consistent à (i) élever adiabatiquement un réseau dans un condensat de Bose-Einstein à deux composants [4,5] ou (ii) à intriquer des atomes fermioniques situés sur les sites du réseau via des processus de tunnel virtuels plus un laser externe qui imprime une phase dépendante du site [6–8]. Des configurations similaires mais avec plus d'un spin sur chaque site peuvent être obtenues en séparant un condensat de Bose-Einstein dans un état comprimé de spin en modes adressables [9,10], ou avec des atomes dans une cavité où des interactions médiées par la cavité [11] ou des mesures quantiques non-destructives et non-locales [12] sont utilisées pour intriquer les ensembles. En utilisant cette dernière méthode, la détection quantique distribuée améliorée par compression de spin avec quelques modes a récemment été démontrée expérimentalement [12].

Pour tirer parti des corrélations, au lieu de mesurer le champ local avec un spin sur chaque site du réseau, nous mesurons, par des mesures collectives impliquant tous les atomes ¹, des combinaisons linéaires indépendantes des champs locaux correspondant aux coefficients de Hadamard du signal spatial discrétisé sur le réseau. Les champs locaux sont ensuite déduits de la transformation de Hadamard inverse. Pour un nombre donné d'atomes et de mesures, nous obtenons alors un gain quantique, c'est-à-dire une réduction de l'incertitude statistique sur la distribution de champ mesurée en dessous de la limite quantique standard, qui résulte des corrélations quantiques entre les atomes. Tout au long de cet article, les paramètres sont encodés dans le système via des générateurs de rotation locaux dont les directions sont choisies pour être les mêmes dans tous les sites (voir (3)). Dans le cas d'un champ magnétique, cela équivaut à mesurer une composante du champ dans une direction choisie. Le cas vectoriel, d'un champ de direction et de module inconnus, est traité dans la section 3.2.

Les capteurs spatialement distribués ont été étudiés théoriquement dans le contexte de l'estimation multiparamètre quantique, voir par exemple [13–20] et les références qui y sont mentionnées. Comparé à d'autres schémas de métrologie quantique multiparamètre qui ont

¹Par mesure collective, nous entendons la mesure d'une composante de l'opérateur de spin collectif ($\hat{S}_{\vec{m}}$ introduit après l'équation (3)), ce qui implique que la même composante de spin est mesurée pour chaque atome.

été proposés [17, 19], le nôtre présente l'avantage qu'une seule mesure collective doit être effectuée afin d'obtenir une combinaison linéaire donnée des paramètres inconnus avec un gain quantique. En effet, si l'on suppose que les retournements de spin peuvent être effectués localement [21] pour sélectionner la combinaison de paramètres, toutes les mesures dans notre protocole sont collectives². Les mesures collectives qui sont généralement effectuées dans les expériences avec des atomes froids ont l'avantage de ne pas nécessiter la résolution spatiale qui serait requise pour effectuer des mesures sur des atomes individuels (c'est-à-dire des mesures locales).

Comparé à une approche de "microscope à balayage" où l'on déplace un capteur formé par un ensemble d'atomes, par exemple un condensat de Bose-Einstein, pour sonder le champ localement à chaque site [22], notre schéma, avec N atomes dans des modes spatialement séparés, par exemple dans un réseau optique, pour estimer N paramètres, renonce dès le départ à un facteur de $1/\sqrt{N}$ sur l'écart type des estimateurs, mais il offre l'avantage d'utiliser des atomes spatialement séparés, donc sans interaction. En laissant les atomes à une position fixe plutôt que de balayer physiquement le potentiel de piégeage, nous obtenons une résolution spatiale donnée par la longueur d'onde du réseau optique utilisé pour piéger les atomes. Un autre avantage de notre configuration est qu'elle permet naturellement la "acquisition comprimée" en ne mesurant que les premiers $L_{\mathcal{H}} < N$ coefficients de Hadamard du champ discretisé sur le réseau, comme nous le montrons dans la section 4.

Dans la suite, nous développons notre protocole d'estimation multiparamètre et en dérivons le gain quantique (Sec. 2), nous étudions la reconstruction d'un champ scalaire ou vectoriel en 1D (Sec. 3), et enfin, nous combinons notre méthode avec l'échantillonnage compressé pour reconstruire le champ avec un nombre réduit de mesures (Sec. 4).

2 Amélioration quantique dans la détection distribuée avec des mesures collectives et des flips de spin locaux

Nous considérons N spins 1/2 distribués dans N modes spatialement séparés pour l'estimation de N paramètres $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$ affectant chacun un mode donné. Nous supposons que nous pouvons manipuler localement les spins, comme nous pourrions le faire pour des atomes dans un réseau optique en utilisant un microscope [21], et effectuer des mesures collectives sur l'ensemble des atomes. Les corrélations quantiques entre les atomes que nous cherchons à exploiter sont obtenues grâce à l'hamiltonien collectif de torsion à un axe (one-axis twisting (OAT)) [23],

$$\hat{H}_{\text{OAT}} = \hbar \chi \left(\sum_k \hat{s}_{k,z} \right)^2, \quad (1)$$

où $\hat{s}_k = \hat{\sigma}_k/2$, $\hat{\sigma}_k$ est le vecteur des matrices de Pauli pour l'atome sur le site k , en évoluant pendant un temps t un état initial cohérent de spin (CSS) avec tous les spins polarisés le long

²En théorie de l'estimation multiparamètre, il s'agit souvent d'estimer N paramètres au moyen de mesures répétées de N observables du système à partir de *même état quantique* (les observables peuvent éventuellement être mesurées simultanément dans une réalisation de l'expérience s'ils commutent). Dans ce cadre, la matrice de covariance des estimateurs Σ et la matrice d'information de Fisher quantique (QFIM) \mathcal{F} , qui sont reliées par l'inégalité de Cramér-Rao multiparamètre [20], sont généralement introduites. Cependant, comme nous le montrons dans la section B.1, il n'est pas possible d'obtenir un gain quantique dans l'estimation de chaque paramètre par cette stratégie pour un état de torsion à un axe unique. Pour un état quantique donné, une seule valeur propre de \mathcal{F} , correspondant à une combinaison particulière des paramètres, montre un avantage quantique, tandis que toutes les autres montrent un désavantage. Pour obtenir un avantage quantique dans une autre combinaison, il est nécessaire de changer l'état. Pour la combinaison qui montre un avantage quantique, notre méthode montre qu'il suffit de mesurer une seule observable, qui se révèle être une observable collective.

de la direction x .

$$|\psi_0\rangle = |x\rangle^{\otimes N}. \quad (2)$$

Les paramètres sont alors encodés sur l'état $|\psi_t\rangle = e^{-i\hat{H}_{\text{OAT}}t/\hbar}|\psi_0\rangle$ grâce à l'évolution unitaire

$$\hat{U}(\vec{\theta}) = e^{-i\hat{H}_{\vec{n}}\cdot\vec{\theta}}, \quad (3)$$

générée par les observables $\hat{H}_{\vec{n}} = (\hat{s}_{1,\vec{n}}, \dots, \hat{s}_{N,\vec{n}})^T$ avec $\hat{s}_{k,\vec{n}} \equiv \vec{n} \cdot \hat{s}_k$, où $\vec{n} = (0, n_y, n_z)^T$ est un vecteur unitaire que nous considérons, sans perte de généralité, dans le plan perpendiculaire à la direction de spin initiale x . Nous considérons une observable $\hat{S}_{\vec{m}}$ qui est linéaire dans les composantes du spin collectif $\hat{S}_{\vec{m}} = \sum_{j=1}^N \hat{s}_{j,\vec{m}}$ telles que $\{\vec{m}, \vec{n}, \vec{e}_x\}$ forment une base orthonormale directe. Au premier ordre de toutes les θ_k près de $\theta_k = 0$, sa moyenne dans l'état $\hat{U}(\vec{\theta})|\psi_t\rangle$ est donnée par

$$\langle \hat{U}^\dagger(\vec{\theta}) \hat{S}_{\vec{m}} \hat{U}(\vec{\theta}) \rangle \approx -i \langle [\hat{S}_{\vec{m}}, \hat{H}_{\vec{n}} \cdot \vec{\theta}] \rangle = -i \sum_{l,k} \theta_k \langle [\hat{s}_{l,\vec{m}}, \hat{s}_{k,\vec{n}}] \rangle \delta_{lk} = \langle \hat{s}_{1,x} \rangle \sum_k \theta_k, \quad (4)$$

où $\langle \dots \rangle$ représente la moyenne sur l'état $|\psi_t\rangle$ et nous avons utilisé la symétrie de l'état. En introduisant la combinaison linéaire des paramètres $\Theta \equiv \sum_k \theta_k / N$, l'équation (4) peut être écrite comme

$$\langle \hat{U}^\dagger(\vec{\theta}) \hat{S}_{\vec{m}} \hat{U}(\vec{\theta}) \rangle \approx \langle \hat{S}_x \rangle \Theta. \quad (5)$$

Cela montre qu'une observable linéaire dans les composantes du spin collectif n'est sensible, au premier ordre, qu'à la moyenne arithmétique Θ des paramètres θ_k . En utilisant la méthode des moments à un paramètre, Θ peut ainsi être estimé en comparant la moyenne de μ mesures indépendantes d'une observable linéaire de spin collectif $\bar{S}_{\vec{m}}^\mu$ avec sa valeur moyenne $\langle \hat{S}_{\vec{m}} \rangle$ obtenue théoriquement ou à partir d'un étalonnage expérimental en fonction de Θ . Dans la limite $\mu \gg 1$, la méthode des moments permet d'estimer Θ avec une incertitude $(\Delta\Theta)^2 = (\Delta\hat{S}_{\vec{m}})^2 / (\mu |\partial_\Theta \langle \hat{S}_{\vec{m}} \rangle|^2)$ où $\partial_\Theta \equiv d/d\Theta$. En utilisant le résultat (5), on obtient [24]

$$(\Delta\Theta)^2 = \frac{1}{\mu} \frac{(\Delta\hat{S}_{\vec{m}})^2}{|\langle \hat{S}_x \rangle|^2}. \quad (6)$$

Puisque le but est d'estimer tous les paramètres θ_k (avec $k = 1, \dots, N$), N combinaisons linéairement indépendantes des θ_k doivent donc être mesurées. Voyons maintenant comment, en plus de la mesure de la moyenne des paramètres $\sum_k \theta_k / N$ expliquée ci-dessus, nous pouvons mesurer d'autres combinaisons linéaires des paramètres. Comme nous le montrons dans l'Annexe A, une rotation du spin k d'un angle π autour de l'axe x avant l'encodage du paramètre θ_k , suivie d'une deuxième rotation d'angle $-\pi$ autour du même axe après l'encodage du paramètre, est équivalente à inverser le signe de θ_k

$$e^{i\pi\hat{s}_x} e^{-i\theta\hat{s}_{\vec{n}}} e^{-i\pi\hat{s}_x} = e^{i\theta\hat{s}_{\vec{n}}}. \quad (7)$$

Considérons alors le problème d'estimation de N paramètres $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ encodés par l'évolution unitaire (3), cette fois en appliquant $\hat{V} = e^{-i\sum_k \alpha_k \hat{s}_{k,x}}$ et \hat{V}^\dagger respectivement avant et après l'encodage des paramètres, où $\alpha_k = (1 - \epsilon_k)\pi/2$ et $\epsilon_k = \pm 1$. En utilisant (7), cela peut être représenté par l'évolution unitaire

$$\hat{U}' = \hat{V}^\dagger e^{-i\sum_k \theta_k \hat{s}_{k,\vec{n}}} \hat{V} = \prod_k e^{i\frac{\pi}{2}(1-\epsilon_k)\hat{s}_{k,x}} e^{-i\theta_k \hat{s}_{k,\vec{n}}} e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\epsilon_k)\hat{s}_{k,x}} = \prod_k e^{-i\epsilon_k \theta_k \hat{s}_{k,\vec{n}}} = e^{-i\sum_k \theta'_k \hat{s}_{k,\vec{n}}} \quad (8)$$

avec $\theta'_k = \epsilon_k \theta_k$, de sorte que (8) décrit l'encodage des N paramètres $\vec{\theta}' = (\epsilon_1 \theta_1, \dots, \epsilon_N \theta_N)$,

$$\hat{U}' = \hat{V}^\dagger \hat{U}(\vec{\theta}) \hat{V} = \hat{U}(\vec{\theta}') = e^{-i\hat{H}_{\vec{n}} \cdot \vec{\theta}'} \quad (9)$$

En utilisant (9) et en raisonnant de la même manière que pour obtenir (5), il peut être démontré que, au premier ordre dans les θ'_k , à proximité de $\theta'_k = 0$, la moyenne de $\hat{S}_{\vec{m}}$ dans l'état $\hat{U}'|\psi_t\rangle$ varie comme

$$\langle \hat{U}'^\dagger \hat{S}_{\vec{m}} \hat{U}' \rangle = \langle \hat{S}_x \rangle \sum_k \frac{\epsilon_k \theta_k}{N}. \quad (10)$$

Cette dernière équation généralise le résultat (5) et montre qu'en utilisant des flips de spin locaux et l'estimation mono-paramètre par la méthode des moments, la mesure d'une observable linéaire du spin collectif permet d'estimer la combinaison linéaire des paramètres

$$\Theta = \sum_k \epsilon_k \theta_k / N, \quad (11)$$

où $\epsilon_k = \pm 1$ avec la même incertitude (6). Notez que la même courbe d'étalonnage peut être utilisée pour l'estimation de toutes les combinaisons de paramètres.

Pour un système dans l'état initial CSS, l'incertitude sur la combinaison estimée Θ est limitée par le bruit de projection donné par $(\Delta\Theta)_{\text{SQL}}^2 = 1/(\mu N)$ (limite quantique standard). Dans l'état $|\psi_t\rangle$, généré par la dynamique OAT au temps t , elle peut atteindre une valeur inférieure $(\Delta\Theta)^2 = \xi^2/(\mu N)$ où ξ^{-2} quantifie le gain quantique sur l'erreur statistique de la mesure. Pour une mesure linéaire (L) dans une composante $\hat{S}_{\vec{m}}$ du spin collectif, le gain quantique est limité par $\xi_L^{-2} \leq \xi_{L,\text{best}}^{-2}$ où l'égalité est atteinte pour une direction de mesure optimale $\vec{m} = \vec{m}_{L,\text{opt}}$ et un état comprimé de spin (SSS) préparé au temps optimal $t = t_{L,\text{best}}$ [23, 25]. Une possibilité pour dépasser la limite due à la mesure d'une observable qui est linéaire dans les composantes du spin collectif, est la technique de mesure après interaction (MAI) qui consiste à ajouter une deuxième évolution OAT $\hat{U}'_\tau = e^{-i\hat{H}_{\text{OAT}} \tau / \hbar}$, avec $\tau = -t$, après l'encodage des paramètres (9) et avant la mesure de l'observable linéaire $\hat{S}_{\vec{m}}$ où \vec{m} est dans le plan yz . Cette technique est équivalente à la mesure d'une observable non linéaire de la forme $\hat{X}_{\text{MAI}} = e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}$. Il s'avère que cette mesure est optimale dans toute la plage de temps $1/N < \chi t < 1/\sqrt{N}$ dans la limite large N [26, 27]. Également dans ce cas, au premier ordre dans le θ'_k dans le voisinage de $\theta'_k = 0$, la moyenne de l'observable \hat{X}_{MAI} dans l'état $\hat{U}'|\psi_t\rangle$ est

$$\begin{aligned} \langle \hat{U}'^\dagger \hat{X}_{\text{MAI}} \hat{U}' \rangle &\approx \left(\mathbb{1} + i\hat{H}_{\vec{n}} \cdot \vec{\theta}' \right) e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2} \left(\mathbb{1} - i\hat{H}_{\vec{n}} \cdot \vec{\theta}' \right) \\ &= -i \langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{S}_{\vec{n}}] \rangle \sum_k \frac{\epsilon_k \theta_k}{N} \end{aligned} \quad (12)$$

où nous avons utilisé la symétrie de l'état $|\psi_t\rangle$. L'équation (12) montre que la technique MAI permet l'estimation de la combinaison linéaire $\Theta = \sum_k \epsilon_k \theta_k / N$. Dans un protocole d'estimation basé sur la méthode des moments, l'incertitude sur cette combinaison est donnée par [27]

$$(\Delta\Theta)^2 = \frac{1}{\mu} \frac{N/4}{|\langle [e^{i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{-i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{S}_{\vec{n}}] \rangle|^2}. \quad (13)$$

Pour un temps $\chi t_{L,\text{best}} < \chi t \leq 1/\sqrt{N}$, le gain quantique associé à (13), avec un choix optimal de \vec{n} et \vec{m} , est plus grand que le gain associé à une mesure linéaire $\xi_{\text{MAI}}^{-2} > \xi_{L,\text{best}}^{-2}$ [27]. Il atteint sa valeur maximale $\xi_{\text{MAI,best}}^{-2}$ à un temps optimal $\chi t_{\text{MAI,best}} = 1/\sqrt{N}$ dans la limite de N grand [28].

Ci-dessus, nous avons présenté la stratégie qui mesure les combinaisons linéaires de la forme $\sum_k \epsilon_k \theta_k / N$, avec $\epsilon_k = \pm 1$, d'un ensemble de paramètres θ_k avec un gain quantique significatif. Nous montrerons maintenant quelles combinaisons devraient être mesurées, ou quelles choix pour ϵ_k , afin de reconstruire le signal $\vec{\theta}$. Un signal $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$ avec $N = 2^m$, où m est un entier, peut être décomposé dans la base de fonctions orthogonales de Walsh : des fonctions qui ne prennent que les valeurs ± 1 représentées en termes d'une matrice carrée d'ordre N appelée la matrice de Hadamard \mathcal{H}_m :

$$\theta_k = \sum_j [\mathcal{H}_m]_{kj} \tilde{\theta}_j. \quad (14)$$

Les $\tilde{\theta}_j$ (pour $j = 1, \dots, N$) sont les coefficients de Hadamard associés au signal $\vec{\theta}$, et la matrice \mathcal{H}_m , qui satisfait à la propriété $[[\mathcal{H}_m]_{kj}] = 1/\sqrt{N}$, est définie par récurrence avec $\mathcal{H}_0 = 1$ et, pour $m > 0$

$$\mathcal{H}_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{m-1} & \mathcal{H}_{m-1} \\ \mathcal{H}_{m-1} & -\mathcal{H}_{m-1} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Le j^{eme} coefficient de Hadamard $\tilde{\theta}_j$ est écrit, en fonction de θ_k , comme

$$\tilde{\theta}_j = \sum_k [\mathcal{H}_m^{-1}]_{jk} \theta_k, \quad (16)$$

En comparant cette dernière équation avec (11), nous voyons que pour un choix approprié de $\epsilon_k = \pm 1$ on obtient

$$\sqrt{N}\Theta = \vec{\theta}, \quad (17)$$

telle que les combinaisons mesurées par notre stratégie sont, à un facteur \sqrt{N} près, les coefficients de Hadamard du signal $\vec{\theta}$. Une fois ces coefficients mesurés indépendamment et avec la même incertitude, nous pouvons déduire le signal d'origine en utilisant (14). Tous les paramètres mesurés θ_k ont ainsi la même incertitude

$$(\Delta\theta_k)^2 = (\Delta\tilde{\theta}_k)^2 = N(\Delta\Theta)^2 = \frac{\xi^2}{\mu} \quad \forall k. \quad (18)$$

Contrairement à l'estimation d'un seul paramètre avec l'état cohérent de spin à N atomes, l'incertitude (18) sur les paramètres estimés par notre stratégie avec l'état CSS est indépendante de la taille N du système. Cela peut s'expliquer par le fait que chaque paramètre θ_k est encodé localement sur un atome individuel. Les corrélations quantiques entre les atomes générées par la dynamique OAT nous permettent d'introduire une dépendance dans la taille du système N des incertitudes $(\Delta\theta_k)^2$ à travers le paramètre ξ . Comme nous le montrerons dans l'Annexe B, cette stratégie peut également être comprise dans le cadre de la théorie de l'estimation multiparamètre. Le gain métrologique quantique associé à chaque paramètre est alors donné, comme dans le cas d'un seul paramètre, par ξ^{-2} . La dépendance de ce paramètre en N et χt en l'absence et en présence de décohérence, avec une mesure linéaire ou par la technique MAI, est étudiée en détail dans la Réf. [27]. La question de l'optimalité de notre stratégie et une comparaison avec la matrice d'information de Fisher quantique dans le cadre de la théorie de l'estimation multiparamètre sont présentées dans l'Annexe B. Dans les sections suivantes, nous donnons deux exemples d'application de la méthode, à la cartographie d'un champ scalaire et vectoriel unidimensionnel, et à la détection comprimée.

3 Cartographie d'un champ unidimensionnel : simulation avec $N = 8$

3.1 Champ scalaire

Nous donnons ici une illustration de l'application de notre stratégie à la mesure d'un champ scalaire $\theta(x)$ qui varie le long d'une direction de l'espace. Dans notre simulation numérique ci-dessous, nous considérons un champ de la forme

$$\theta(x) = \theta_0 \sin(x) \quad (19)$$

que nous discrétisons sur $N = 8$ sites $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ avec $\theta_i \equiv \theta(x_i)$, chaque site ayant comme capteur un atome à deux niveaux. Nous supposons que l'encodage des paramètres $\vec{\theta}$ est effectué avec les générateurs $\hat{H}_{\vec{n}} = (\hat{s}_{1,\vec{n}}, \dots, \hat{s}_{N,\vec{n}})^T$, \vec{n} étant la direction optimale dans le plan yz , grâce à l'évolution unitaire (3). Selon notre protocole, pour estimer le coefficient de Hadamard $\tilde{\theta}_j$ après une évolution pendant un temps t avec le hamiltonien OAT (1) de l'état initial CSS (2), nous appliquons l'évolution unitaire

$$\hat{U}' = e^{i \sum_k \alpha_k \hat{s}_{k,x}} e^{-i \sum_k \theta_k \hat{s}_{k,\vec{n}}} e^{-i \sum_k \alpha_k \hat{s}_{k,x}} \quad \text{avec} \quad \alpha_k = (1 - \epsilon_k) \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \epsilon_k = \sqrt{N} [\mathcal{H}_3^{-1}]_{jk} \quad (20)$$

et nous mesurons, dans l'état obtenu $\hat{U}'|\psi_t\rangle$, l'observable optimale \hat{X} , qui pourrait être $\hat{S}_{\vec{m}}$ ou \hat{X}_{MAI} selon le protocole de mesure utilisé. Pour chaque $\tilde{\theta}_j$ avec $j = 1, \dots, N$, cette procédure est répétée μ fois. Dans la simulation numérique, les résultats de mesure $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$, où λ_i est l'une des valeurs propres de l'observable mesurée, sont obtenus en échantillonnant la distribution de probabilité

$$P_i = |\langle \lambda_i | \hat{U}'|\psi_t\rangle|^2, \quad (21)$$

où $|\lambda_i\rangle$ est l'état propre de \hat{X} associé à la valeur propre λ_i . À partir de ces résultats de mesure, la moyenne statistique $\bar{X}_\mu = \sum_i \lambda_i / \mu$ est calculée. En utilisant la courbe d'étalonnage Fig. 1(b) qui donne la moyenne théorique de $\langle \hat{X} \rangle$ en fonction de Θ (10) ou (12), le coefficient de Hadamard $\tilde{\theta}_j = \sqrt{N}\Theta$ est estimé en utilisant la valeur de Θ comme valeur pour laquelle $\langle \hat{X} \rangle = \bar{X}_\mu$. La variance statistique $(\Delta \tilde{\theta}_j)_\mu^2$ ³ est calculée numériquement en répétant la procédure d'estimation de $\tilde{\theta}_j$ plusieurs fois. Ainsi, tous les coefficients de Hadamard sont mesurés et les paramètres θ_k sont ensuite déduits en utilisant (14). Le champ scalaire (19) et son estimation avec l'état initial CSS, l'état comprimé SSS et l'état généré à $t = t_{\text{MAI,best}}$, où la mesure est effectuée avec la technique MAI, sont montrés dans Fig. 1(a).

3.2 Champ vectoriel

Passons maintenant au cas d'un champ vectoriel discrétisé en $N = 8$ sites comme indiqué dans Fig. 1(c), dont les composantes inconnues $\vec{\theta}_x, \vec{\theta}_y, \vec{\theta}_z$, avec $\vec{\theta}_\alpha = (\theta_{\alpha,1}, \dots, \theta_{\alpha,N})^T$ pour $\alpha = x, y, z$, sont encodées sur les atomes à travers l'évolution unitaire

$$\hat{U} = e^{-i(\hat{H}_x \cdot \vec{\theta}_x + \hat{H}_y \cdot \vec{\theta}_y + \hat{H}_z \cdot \vec{\theta}_z)} \quad (22)$$

qui représente une généralisation de (3) pour l'encodage de trois paramètres par mode. En estimation multiparamètre, la mesure de paramètres générés par des Hamiltoniens qui ne commutent pas entre elles est connue pour être difficile, en général, en raison de l'incompatibilité

³L'indice μ est ici explicite pour rappeler que $(\Delta \tilde{\theta}_j)_\mu^2$ est la variance du paramètre $\tilde{\theta}_j$ déduite des μ mesures.

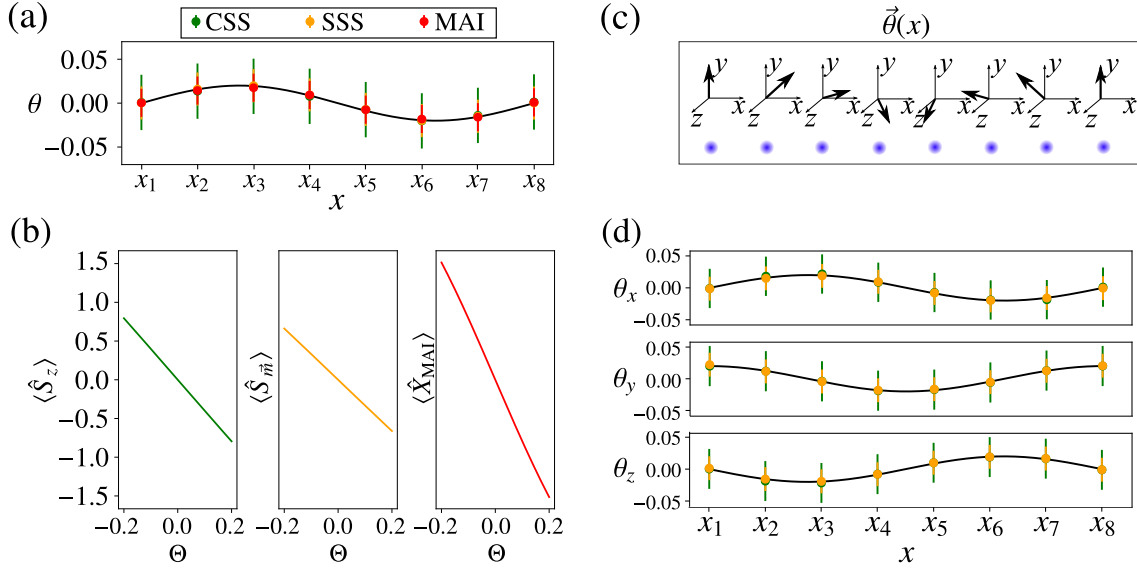


Figure 1: . Une simulation numérique de l'estimation d'un champ à 1 dimension avec $N = 8$ atomes : **(a)** champ scalaire. Le champ (19) avec $\theta_0 = 0.02$ est représenté par la ligne pleine, et sa reconstruction avec $\mu = 10^3$ mesures, pour chacun des huit coefficients de Hadamard, est représentée par les symboles. L'estimation est effectuée avec l'état cohérent de spin CSS (vert), l'état comprimé de spin SSS (orange) et l'état généré au temps $t_{\text{MAI,best}}$ de la dynamique OAT où la mesure est effectuée avec la technique MAI (rouge). Les écarts-types correspondants (lignes verticales) sont obtenus ici en répétant 500 fois la procédure d'estimation pour chaque $\tilde{\theta}_j$ et ils sont en bon accord avec la valeur théorique (18). Les courbes d'étalonnage **(b)** sont utilisées avec l'état CSS (gauche), l'état SSS (milieu) et l'état généré à $t_{\text{MAI,best}}$ (droite). Les champs vectoriels **(c)** et **(d)**. Les composantes (23) avec $\theta_0 = 0.02$ sont représentées par les lignes pleines, et leur reconstruction avec l'état CSS (vert) et l'état SSS (orange) pour $\mu = 10^3$ sont représentées par les symboles. Les lignes verticales représentent les écarts-types correspondants obtenus en répétant 500 fois la procédure d'estimation pour chaque $\tilde{\theta}_j$.

des mesures optimales respectives [16, 18, 29]. Cela peut être réalisé avec des états particuliers où la valeur moyenne de tous les commutateurs des générateurs est nulle [18]. Ici, nous évitons ces complications en estimant les trois composantes de champ séparément l'une après l'autre : d'abord, les spins sont préparés dans un état polarisé le long de la direction x et la mesure des deux composantes du champ dans le plan yz est effectuée après l'évolution OAT et l'application d'une rotation d'état afin d'aligner la direction optimale \vec{n} avec la direction z ou y pour mesurer $\tilde{\theta}_z$ ou $\tilde{\theta}_y$, puis les spins sont polarisés le long de la direction y pour mesurer $\tilde{\theta}_x$. Le point clé est que pour la mesure d'une observable de spin linéaire collectif (qui exclut l'estimation basée sur la mesure de l'observable \hat{X}_{MAI}), l'estimation d'une des composantes de champ n'est pas affectée par la présence des deux autres composantes orthogonales, comme le montre l'Annexe C. Dans la Fig. 1(d), nous montrons les résultats de l'estimation du champ vectoriel avec les composantes

$$\theta_\alpha(x) = \theta_0 \sin(x + \varphi_\alpha) \quad \text{pour} \quad \alpha = x, y, z \quad \text{et} \quad \varphi_x = 0, \varphi_y = \pi/2, \varphi_z = \pi. \quad (23)$$

et

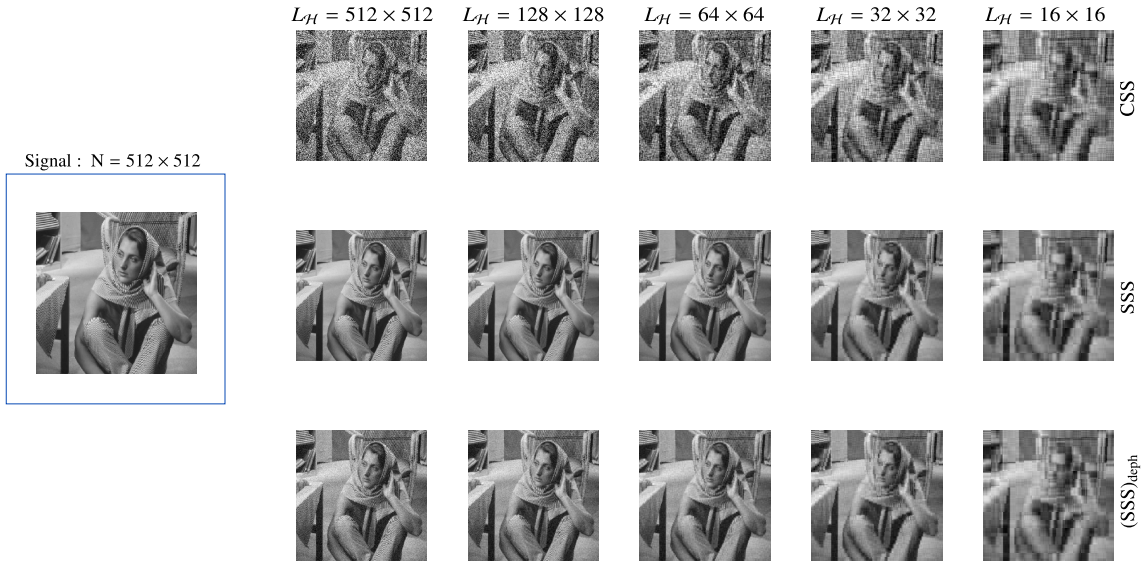


Figure 2: Exemple de compression de sensibilité avec gain quantique : un signal $2D$ (l'image de Barbara) de taille $N = 512 \times 512$ (à gauche) est reconstruit (à droite) avec $\mu = 10$ mesures indépendantes pour chacun des premiers $L_{\mathcal{H}} \leq N$ coefficients de Hadamard, les derniers coefficients $N - L_{\mathcal{H}}$ étant pris à zéro. Les coefficients non nuls sont estimés avec l'état cohérent de spin CSS (en haut), l'état de spin comprimé SSS obtenu par la dynamique OAT (1) en l'absence de décohérence (au milieu) et en présence de décohérence de déphasage (25) avec $\gamma = 5\chi$ (en bas), pour $L_{\mathcal{H}} = N = 512 \times 512, L_{\mathcal{H}} = 128 \times 128, 64 \times 64, 32 \times 32, 16 \times 16$ de gauche à droite respectivement.

4 Gain quantique pour l'acquisition comprimée d'un champ bi-dimensionnel (image)

Dans la section 2, nous avons présenté une stratégie qui nous permet de mesurer un signal scalaire $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$ par l'estimation directe des N coefficients de Hadamard correspondants. L'estimation de chaque coefficient nécessite μ mesures indépendantes. Dans cette section, nous montrerons, sur un exemple concret, l'effet de l'acquisition comprimée, c'est-à-dire l'effet de ne mesurer que les premiers $L_{\mathcal{H}} < N$ coefficients de Hadamard d'un signal de taille N , les derniers $N - L_{\mathcal{H}}$ coefficients de Hadamard étant pris nuls. Cela réduit le nombre total de mesures indépendantes à effectuer de μN à $\mu L_{\mathcal{H}}$. Nous considérons le signal $2D$ (l'image de Barbara) de taille $N = 512 \times 512$ représenté dans la figure 2 à gauche. Dans la partie droite de la figure, le signal est reconstruit avec différents états du système de N atomes et pour différentes valeurs de $L_{\mathcal{H}}$. Pour simuler les résultats expérimentaux, nous générons chacun des coefficients non nuls de Hadamard pour $j = 1, \dots, L_{\mathcal{H}}$ en échantillonnant la distribution de probabilité

$$P(x) = \mathcal{N} e^{-\frac{(x-\tilde{\theta}_j)^2}{2(\Delta\tilde{\theta}_j)^2}}, \quad (24)$$

où \mathcal{N} est une constante de normalisation, $\tilde{\theta}_j$ est le j ème coefficient de Hadamard de l'image originale et $\Delta\tilde{\theta}_j$ est l'incertitude correspondante (18) pour son estimation avec un état quantique donné des N spins. La première ligne correspond à l'état CSS (2) pour lequel $\xi = 1$. Dans la deuxième ligne, l'état SSS est utilisé où nous avons calculé la valeur exacte de ξ pour le nombre d'atomes considéré. Pour la dernière ligne, nous avons calculé le gain quantique

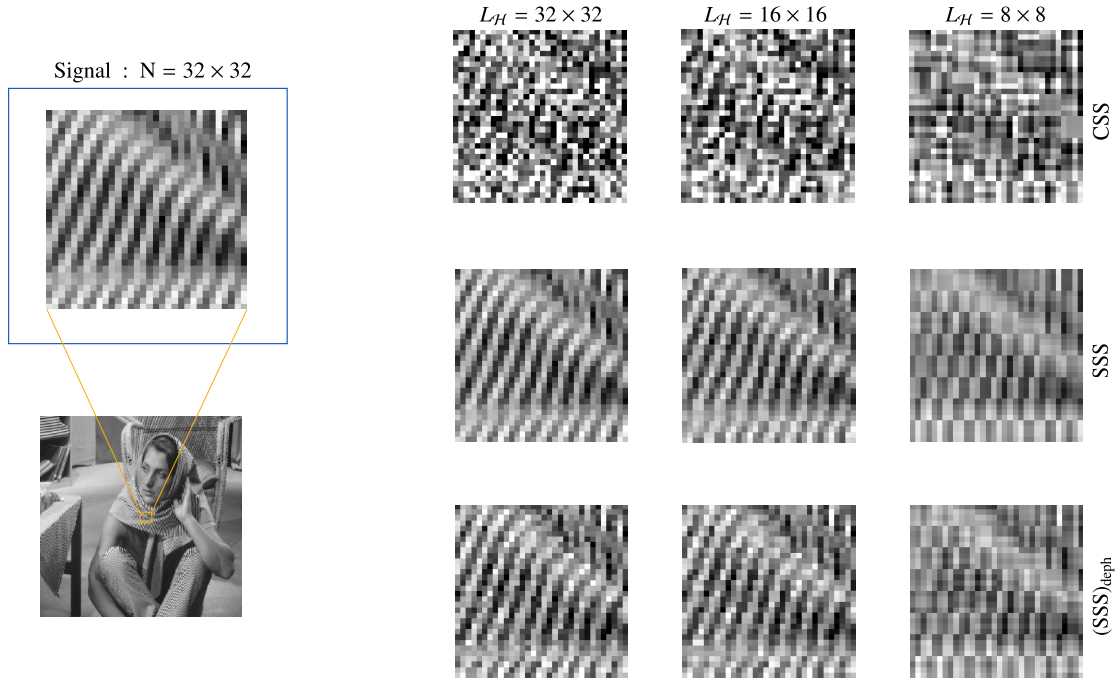


Figure 3: Exemple de compression de signal avec gain quantique : un signal $2D$ (une partie de l'image Barbara) de taille $N = 32 \times 32$ (à gauche) est reconstruit (à droite) avec $\mu = 10$ mesures indépendantes pour chacun des $L_{\mathcal{H}} \leq N$ premiers coefficients de Hadamard, les derniers $N - L_{\mathcal{H}}$ coefficients étant pris comme zéro. Les coefficients non nuls sont estimés avec l'état CSS (en haut), l'état SSS en l'absence de décohérence (au milieu) et en présence de décohérence (25) avec $\gamma = \chi$ (en bas), pour $L_{\mathcal{H}} = N = 32 \times 32, L_{\mathcal{H}} = 16 \times 16, 8 \times 8$ de gauche à droite respectivement.

dans (18) correspondant à l'état $(SSS)_{\text{deph}}$ généré par l'évolution OAT (1) en présence de processus de déphasage [27]

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_{\text{OAT}}, \hat{\rho}] + \gamma \left(\hat{S}_z \hat{\rho} \hat{S}_z - \frac{1}{2} \{ \hat{S}_z^2, \hat{\rho} \} \right), \quad (25)$$

pour $\gamma/\chi = 5$. En comparant les images obtenues par l'état SSS avec celles obtenues avec l'état CSS non corrélé, nous remarquons que le gain dû aux corrélations quantiques est significatif même avec $L_{\mathcal{H}} = 32 \times 32$ (c'est-à-dire $L_{\mathcal{H}} \approx 3.9 \times 10^{-3} N$), et en présence de décohérence. Dans la figure 3, nous montrons les résultats de l'estimation et de la compression d'un petit signal, une image de taille 32×32 . Dans ce cas également, les résultats montrent un gain significatif dû aux corrélations quantiques. Pour les résultats en présence de décohérence, nous avons utilisé la formule analytique (9) et l'annexe D de la référence [27] donnant le gain quantique obtenu avec un état OAT en présence d'un processus de déphasage (25). Les lois d'échelle du gain quantique en fonction de N , en l'absence et en présence de décohérence, sont données dans la même référence [27]. Une comparaison entre le gain quantique obtenu dans notre stratégie et le gain quantique maximal donné par la plus grande valeur propre de la matrice d'information de Fisher quantique est montrée dans la figure 4.

5 Conclusion

Nous avons proposé une méthode d'estimation multiparamètre qui utilise des atomes à deux niveaux piégés dans un réseau optique, partageant des corrélations quantiques d'état interne générées par un hamiltonien d'interaction collectif de torsion sur un axe (one-axis twisting). Un tel système peut être obtenu, par exemple, en élevant de manière adiabatique un réseau optique dans un condensat à deux composantes en interaction (état Mott-comprimé de spin) [4, 5] ou avec des atomes fermioniques dans une configuration de Mott dans un réseau en présence d'un laser externe qui imprime une phase dépendante de la position aux atomes [6–8]. Les atomes sont utilisés pour mesurer l'ensemble des valeurs qu'un champ prend à l'emplacement des différents sites. L'idée centrale de notre méthode est que, pour tirer parti des corrélations entre les atomes, nous mesurons des quantités collectives, les coefficients de Hadamard du signal, à partir desquels nous déduisons les paramètres locaux par transformation de Hadamard inverse. Bien que nous ayons considéré le cas d'un atome par site, nos résultats peuvent être facilement généralisés au cas de N atomes non interactifs distribués sur M sites avec N/M atomes par site. Des configurations de ce type peuvent être réalisées en séparant un condensat de Bose-Einstein dans un état comprimé de spin préalablement obtenu [9, 10] ou avec des atomes froids dans une cavité, où des interactions médiées par la cavité [11] ou des mesures quantiques non destructives et non locales [12] sont utilisées pour intriquer les atomes dans les différents modes.

Remerciements

Nous remercions Alan Serafin et Yvan Castin pour leur programme d'interface Latex-Deepl pour la version multilingue de cet article.

Informations de financement Y.B et A.S remercient le financement du projet macQsimal de l'EU quantum flagship. M.G. reconnaît le financement de Ministerio de Ciencia e Innovación (MCIN) /Agencia Estatal de Investigación (AEI) pour Projet No. PID2020-115761RJ-I00, soutien d'une bourse de la fondation "la Caixa" (ID 100010434), du program de recherche et innovation the European Union's Horizon 2020 sous Marie Skłodowska-Curie Grant Agreement No. 847648, code de. bourse LCF/BQ/PI21/11830025 et Generalitat Valenciana (CDEIGENT/2021/014). Ce travail a été soutenu financièrement par le ministère des Affaires économiques et de la Transformation numérique du gouvernement espagnol par le biais du programme QUANTUM ENIA project call – Quantum Spain project, et par l'Union européenne dans le cadre du plan de relance, de transformation et de résilience – NextGenerationEU dans le cadre de the Digital Spain 2025 Agenda. Ce travail a été partiellement financé par CEX2019-000910-S [MCIN/ AEI/10.13039/501100011033], Fundació Cellex, Fundació Mir-Puig, et Generalitat de Catalunya via CERCA.

A Changement de signe d'un paramètre local par retournement de spin

Dans cette annexe, nous montrons qu'une rotation locale d'angle π autour de l'axe x d'un spin suivie de l'encodage d'un paramètre θ par le générateur $\hat{s}_{\vec{n}}$ où \vec{n} est dans le plan yz et une autre rotation d'angle $-\pi$ autour de x , est équivalente à inverser le signe du paramètre encodé θ .

Nous avons

$$e^{i\pi\hat{s}_x} e^{-i\theta\hat{s}_{\bar{n}}} e^{-i\pi\hat{s}_x} = \left(\sum_j \frac{(i\pi)^j}{j!} \hat{s}_x^j \right) \left(\sum_k \frac{(-i\theta)^k}{k!} \hat{s}_{\bar{n}}^k \right) \left(\sum_l \frac{(-i\pi)^l}{l!} \hat{s}_x^l \right) \quad (26)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{(-i\theta)^k}{k!} \hat{s}_{\bar{n}}^k &= \sum_p \frac{(-i\theta)^{2p}}{(2p)!} \hat{s}_{\bar{n}}^{2p} + \sum_p \frac{(-i\theta)^{2p+1}}{(2p+1)!} \hat{s}_{\bar{n}}^{2p+1} \\ &= \sum_p (-1)^p \frac{(\theta/2)^{2p}}{(2p)!} (2\hat{s}_{\bar{n}})^{2p} \\ &\quad - 2i\hat{s}_{\bar{n}} \sum_p (-1)^p \frac{(\theta/2)^{2p+1}}{(2p+1)!} (2\hat{s}_{\bar{n}})^{2p} \\ &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbb{1} - 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{s}_{\bar{n}}, \end{aligned} \quad (27)$$

où nous avons utilisé $(2\hat{s}_{\bar{n}})^2 = \hat{\sigma}_{\bar{n}}^2 = 1$. En remplaçant (27) dans (26) et en simplifiant, nous obtenons

$$\begin{aligned} e^{i\pi\hat{s}_x} e^{-i\theta\hat{s}_{\bar{n}}} e^{-i\pi\hat{s}_x} &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbb{1} - 8i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{s}_x \hat{s}_{\bar{n}} \hat{s}_x \right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbb{1} + 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{s}_{\bar{n}} \right) \\ &= e^{i\theta\hat{s}_{\bar{n}}}, \end{aligned} \quad (28)$$

où nous avons utilisé $8\hat{s}_x \hat{s}_{\bar{n}} \hat{s}_x = \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_{\bar{n}} \hat{\sigma}_x = -\hat{\sigma}_{\bar{n}} = -2\hat{s}_{\bar{n}}$, ce qui peut être démontré comme suit :

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_{\bar{n}} \hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_{\bar{n}} + \hat{\sigma}_x [\hat{\sigma}_{\bar{n}}, \hat{\sigma}_x] = \hat{\sigma}_{\bar{n}} + [\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_{\bar{n}}] \hat{\sigma}_x, \quad (29)$$

nous permet de déduire que

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_{\bar{n}} \hat{\sigma}_x &= \hat{\sigma}_{\bar{n}} + \frac{1}{2} [\hat{\sigma}_x, [\hat{\sigma}_{\bar{n}}, \hat{\sigma}_x]] \\ &= \hat{\sigma}_{\bar{n}} + \frac{1}{2} [\hat{\sigma}_x, [(n_y \hat{\sigma}_y + n_z \hat{\sigma}_z), \hat{\sigma}_x]] \\ &= \hat{\sigma}_{\bar{n}} + \frac{1}{2} [\hat{\sigma}_x, n_y [\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_x] + n_z [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x]] \\ &= \hat{\sigma}_{\bar{n}} - i(n_y [\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z] - n_z [\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y]) \\ &= \hat{\sigma}_{\bar{n}} - 2(n_y \hat{\sigma}_y + n_z \hat{\sigma}_z) \\ &= -\hat{\sigma}_{\bar{n}}. \end{aligned} \quad (30)$$

L'équation (28) montre que nous pouvons changer le signe d'un paramètre encodé θ par une rotation d'angle π autour de l'axe x avant l'encodage de θ et une autre rotation d'angle $-\pi$ autour du même axe x après l'encodage du paramètre.

B Reformulation de notre protocole dans la méthode des moments pour l'estimation multiparamètre

B.1 Matrice d'information quantique de Fisher et optimalité de la mesure

Dans cette section, nous étudions l'optimalité de notre stratégie en l'absence et en présence de décohérence. Pour cela, nous introduisons la matrice d'information quantique de Fisher (QFIM) \mathcal{F} qui donne, dans un protocole d'estimation multiparamètre, la limite de précision de l'estimation de tous les paramètres. En particulier, les N paramètres $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$, encodés sur un état de spin $|\psi\rangle$ via les générateurs $\hat{H} = (\hat{H}_1, \dots, \hat{H}_N)^T$, sont estimés à partir des résultats de μ mesures indépendantes des N observables. La matrice de covariance Σ des estimateurs, dont les éléments sont $\Sigma_{kl} = \text{Cov}(\theta_k, \theta_l)$, satisfait l'inégalité de Cramér-Rao

$$\Sigma \geq \frac{\mathcal{F}^{-1}}{\mu}. \quad (31)$$

Le calcul de la matrice d'information quantique de Fisher \mathcal{F} nous permet donc d'évaluer la qualité de la stratégie d'estimation proposée dans cet article. Dans le cas d'un état pur, tel que l'état préparé par la dynamique OAT en l'absence de bruit, la QFIM est donnée par

$$\mathcal{F}_{kl} = 4\text{Cov}(\hat{H}_k, \hat{H}_l). \quad (32)$$

Pour les paramètres $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$ encodés sur un état OAT $|\psi_t\rangle$ via une évolution unitaire (3), avec $\hat{H}_k = \hat{s}_{k,\vec{n}}$, les éléments de la QFIM sont donnés, au premier ordre en tous les θ_k proches de $\theta_k = 0$, en fonction de \vec{n} par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{kk} &= 4(\Delta\hat{s}_{k,\vec{n}})^2 = 1 \quad \forall k \\ \mathcal{F}_{kl} &= 4\text{Cov}(\hat{s}_{1,\vec{n}}, \hat{s}_{2,\vec{n}}) = \frac{4(\Delta\hat{S}_{\vec{n}})^2}{N(N-1)} - \frac{1}{N-1} \quad \forall k, l \neq k. \end{aligned}$$

En calculant le spectre de la QFIM, nous obtenons deux valeurs propres différentes : λ_{\max} avec une multiplicité de $g = 1$, où le vecteur propre correspondant est $\lambda_{\max} = (1, \dots, 1)^T / \sqrt{N}$, et λ_{\min} avec une multiplicité de $g = N - 1$

$$\lambda_{\max} = 1 + 4(N-1)\text{Cov}(\hat{s}_{1,\vec{n}}, \hat{s}_{2,\vec{n}}) = \frac{4}{N}(\Delta\hat{S}_{\vec{n}})^2, \quad (33)$$

$$\lambda_{\min} = 1 - 4\text{Cov}(\hat{s}_{1,\vec{n}}, \hat{s}_{2,\vec{n}}) = \frac{1}{N-1}(N - \lambda_{\max}). \quad (34)$$

En choisissant la direction de rotation \vec{n} qui maximise λ_{\max} , nous trouvons $\lambda_{\max} \geq 1$ et $\lambda_{\min} \leq 1$. Cela montre qu'un état généré par la dynamique OAT ne peut réduire que la variance de la combinaison des paramètres $\vec{\theta} = \vec{\lambda}_{\max} \cdot \vec{\theta}$ avec $\xi_F^2/\mu \leq (\Delta\vec{\theta})^2 \leq 1/\mu$ où $\xi_F^2 = 1/\lambda_{\max}$. Comme expliqué dans la section 2, l'estimation d'autres combinaisons est possible via l'évolution unitaire (9). Cela équivaut à appliquer à \hat{H} la transformation unitaire $J = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$ avec $\epsilon_k = \pm 1$. La matrice d'information de Fisher quantique devient dans ce cas

$$\mathcal{F}' = J\mathcal{F}J^T, \quad (35)$$

où nous avons utilisé $\text{Cov}((J\hat{h})_k, (J\hat{h})_l) = \sum_{ij} J_{ki}J_{lj}\text{Cov}(\hat{H}_i, \hat{H}_j)$. Comme $JJ^T = J^TJ = \mathbb{1}$, le spectre de QFIM est invariant sous la transformation (35) et le vecteur propre $\vec{\lambda}'_{\max}$ de \mathcal{F}' associé à la valeur propre λ_{\max} est donné par

$$\vec{\lambda}'_{\max} = J\vec{\lambda}_{\max}. \quad (36)$$

En changeant les signes ϵ_k dans J , nous pouvons donc changer la combinaison optimale $\vec{\theta} = (J\vec{\lambda}_{\max}) \cdot \vec{\theta}$. Ainsi, nous pouvons estimer de manière indépendante N combinaisons linéaires de $\vec{\theta}$ avec un gain quantique significatif. Pour mesurer l'optimalité de la stratégie de cet article, nous comparons dans la figure 4 le gain optimal ξ_F^{-2} , associé à l'information de Fisher \mathcal{F} optimisée sur \vec{n} , aux gains quantiques associés aux états OAT comprimés (pour une mesure linéaire) en l'absence et en présence de décohérence (25).

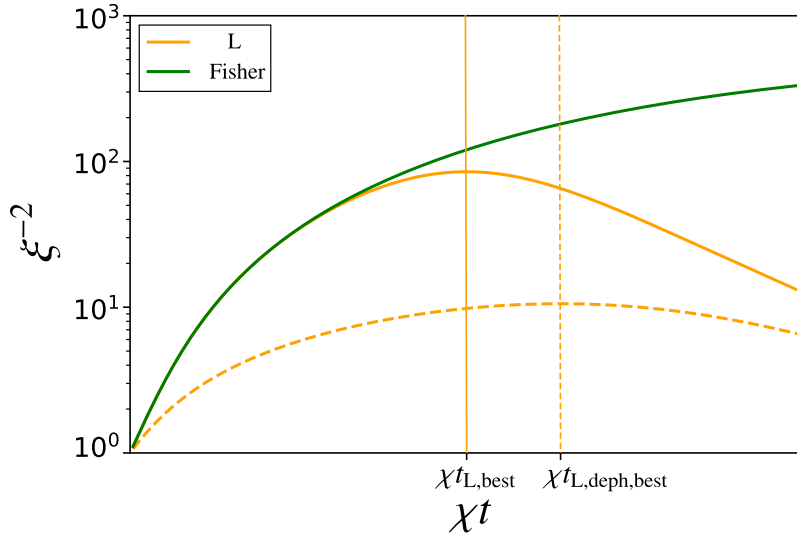


Figure 4: Gain métrologique ξ_L^{-2} sur l'estimation de chaque combinaison de paramètres associée à une mesure linéaire, en l'absence (orange solide) et en présence de décohérence décrite par l'équation (25) avec $\gamma = \chi$ (orange en pointillé) en fonction du temps, comparé au gain optimal ξ_F^{-2} associé à la valeur propre maximale de la matrice d'information de Fisher quantique (vert solide) pour $N = 10^3$. Les lignes verticales représentent les temps de compression optimaux.

B.2 Méthode des moments multiparamètre et observable optimale

Le problème étudié dans notre travail peut également être formulé dans le cadre de la théorie d'estimation multiparamètre. Ici, N paramètres $\vec{\theta}' = (\epsilon_1 \theta_1, \dots, \epsilon_N \theta_N)^T$, avec $\epsilon_j = \pm 1$, sont encodés par les générateurs $\hat{H}_{\vec{n}} = (\hat{s}_{1,\vec{n}}, \dots, \hat{s}_{N,\vec{n}})^T$ sur l'état $|\psi_t\rangle$ préparé par la dynamique OAT pendant un temps t à partir de l'état CSS (2) par l'évolution unitaire (3).

$$\hat{U}(\vec{\theta}') = e^{-i\hat{H}_{\vec{n}} \cdot \vec{\theta}'} . \quad (37)$$

Un changement de base des paramètres $\vec{\vartheta} = P\vec{\theta}'$, avec $PP^T = P^T P = \mathbb{1}$, permet de réécrire cette dernière équation comme

$$\hat{U}(\vec{\vartheta}) = e^{-i\hat{G}_{\vec{n}} \cdot \vec{\vartheta}} \quad \text{with} \quad \hat{G}_{\vec{n}} = P\hat{H}_{\vec{n}} , \quad (38)$$

qui représente l'encodage de N paramètres $\vec{\vartheta}$ générés par les observables $\hat{G}_{\vec{n}}$. Pour estimer $\vec{\vartheta}$, on peut utiliser la méthode des moments multiparamètre [17] où $\vec{\vartheta}$ sont estimés à partir des moyennes statistiques $\vec{\bar{X}}^{(\mu)} = (\bar{X}_1^{(\mu)}, \dots, \bar{X}_N^{(\mu)})^T$, résultats de μ mesures indépendantes des N observables $\hat{X} = (\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_N)^T$ en tant que valeurs pour lesquelles

$$\langle \hat{U}^\dagger(\vec{\vartheta}) \hat{X}_k \hat{U}(\vec{\vartheta}) \rangle = \bar{X}_k^{(\mu)} , \quad k = 1, \dots, N . \quad (39)$$

Pour $\mu \gg 1$, cette méthode nous permet d'estimer $\vec{\vartheta}$ avec une matrice de covariance d'estimateur

$$\begin{aligned} \Sigma &= (\mu M[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}])^{-1} \\ &= (\mu C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}]^T \Gamma[|\psi_t\rangle, \hat{X}]^{-1} C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}])^{-1} , \end{aligned} \quad (40)$$

où nous avons introduit la matrice de commutateur $C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}]_{kl} = -i\langle [\hat{X}_k, \hat{G}_{l,\vec{n}}] \rangle$ et la matrice de covariance $\Gamma[|\psi_t\rangle, \hat{X}] = \text{Cov}(\hat{X}_k, \hat{X}_l)$. En choisissant les observables $\hat{X} = \hat{X}_{\vec{m}} = \sqrt{N} P \hat{H}_{\vec{m}}$,

avec \vec{m} tels que $\{\vec{m}, \vec{n}, \vec{e}_x\}$ forment une base orthonormale, la matrice de commutateur est donnée par

$$C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\vec{m}}] = \sqrt{N} P C[|\psi_t\rangle, \hat{H}_{\vec{n}}, \hat{H}_{\vec{m}}] P^T = \sqrt{N} \langle \hat{s}_{1,x} \rangle \mathbb{1}, \quad (41)$$

où nous avons utilisé

$$C[|\psi_t\rangle, \hat{H}_{\vec{n}}, \hat{H}_{\vec{m}}]_{kl} = -i \langle [\hat{s}_{k,\vec{m}}, \hat{s}_{l,\vec{n}}] \rangle = \langle \hat{s}_{1,x} \rangle \delta_{kl} \quad (42)$$

et l'orthogonalité de P . Puisque la matrice de commutateur est diagonale, le système d'équations (39) est découplé, et le paramètre ϑ_k peut être estimé à partir des résultats de μ mesures indépendantes de l'observable \hat{X}_k avec, pour $\mu \gg 1$, l'incertitude

$$(\Delta \vartheta_k)^2 = \Sigma_{kk} = \frac{1}{\mu N} \frac{(\Delta \hat{X}_k)^2}{|\langle \hat{s}_{1,x} \rangle|^2}. \quad (43)$$

Pour un k donné (par exemple $k = 1$), nous choisissons P de sorte que $\hat{X}_k = \sqrt{N} \sum_l P_{kl} \hat{s}_{l,\vec{m}} = \sum_l \hat{s}_{l,\vec{m}} = \hat{S}_{\vec{m}}$, c'est-à-dire $P_{kl} = 1/\sqrt{N}$ pour tous les l . Avec ce choix de P et selon l'équation (43), la combinaison de paramètres $\vartheta_k = \sum_l \epsilon_l \theta_l / \sqrt{N}$ est estimée avec l'incertitude

$$(\Delta \vartheta_k)^2 = \frac{1}{\mu N} \frac{(\Delta \hat{S}_{\vec{m}})^2}{|\langle \hat{s}_{1,x} \rangle|^2} = \frac{\xi_{\vec{L}}^2}{\mu}. \quad (44)$$

Cette dernière équation est équivalente à l'équation (18) dans le cas de la mesure d'une observable linéaire de spin collectif et ϑ_k est un coefficient de Hadamard. Considérons maintenant le cas d'une mesure avec la technique MAI, où l'évolution OAT $\hat{U}_\tau = e^{-i\chi \tau \hat{S}_z^2}$ avec $\tau = -t$ est appliquée au système avant la mesure des observables $N, \hat{X}_{\vec{m}}$ ce qui équivaut à mesurer les observables

$$\hat{X}_{\text{MAI}} = e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{X}_{\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2} = \sqrt{N} P (e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{s}_{1,\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \dots, e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{s}_{N,\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2})^T. \quad (45)$$

La matrice de commutateur dans ce cas est écrite comme

$$C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\text{MAI}}] = \sqrt{N} P C[|\psi_t\rangle, \hat{H}_{\vec{n}}, e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{H}_{\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}] P^T \quad (46)$$

avec

$$\begin{aligned} C[|\psi_t\rangle, \hat{H}_{\vec{n}}, e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{H}_{\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}]_{kl} &= -i \langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{s}_{k,\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{s}_{l,\vec{n}}] \rangle \\ &= -i \langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{s}_{1,\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{s}_{1,\vec{n}}] \rangle \delta_{kl} \\ &\quad - i \langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{s}_{1,\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{s}_{2,\vec{n}}] \rangle (1 - \delta_{kl}). \end{aligned} \quad (47)$$

En cherchant la matrice P qui diagonalise $C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\text{MAI}}]$, on réalise que pour le k correspondant à la valeur propre maximale

$$C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\text{MAI}}]_{kk}^{\text{max}} = -i \frac{\langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{S}_{\vec{n}}] \rangle}{\sqrt{N}} \quad (48)$$

on a $P_{kl} = 1/\sqrt{N}$ pour tous les l . La mesure de $(\hat{X}_{\text{MAI}})_k = \sqrt{N} \sum_l P_{kl} e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{s}_{l,\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2} = e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}$ permet ainsi d'estimer la combinaison des paramètres $\vartheta_k = \sum_l P_{kl} \epsilon_l \theta_l = \sum_l \epsilon_l \theta_l / \sqrt{N}$ avec l'incertitude

$$(\Delta \vartheta_k)^2 = \frac{1}{\mu} \frac{(\Delta \hat{X}_{\text{MAI}})^2}{|\langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{S}_{\vec{n}}] \rangle|^2} = \frac{1}{\mu} \frac{N/4}{|\langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{S}_{\vec{n}}] \rangle|^2} = \frac{\xi_{\text{MAI}}^2}{\mu}, \quad (49)$$

qui est exactement l'incertitude (18) dans le cas MAI.

C Mesure séquentielle des trois composantes d'un champ vectoriel.

Ici, nous montrons comment estimer les trois composantes $\vec{\theta}_x$, $\vec{\theta}_y$ et $\vec{\theta}_z$ d'un champ vectoriel. L'encodage de ces composantes, sur l'état $|\psi_t\rangle$ après évolution avec OAT, est réalisé grâce à l'évolution unitaire

$$\hat{U} = e^{-i(\vec{\theta}_x \cdot \hat{H}_x + \vec{\theta}_y \cdot \hat{H}_y + \vec{\theta}_z \cdot \hat{H}_z)}. \quad (50)$$

Dans le voisinage de $\vec{\theta}_x = \vec{0}$, $\vec{\theta}_y = \vec{0}$ et $\vec{\theta}_z = \vec{0}$, la moyenne d'une observable linéaire de spin collectif $\hat{S}_{\vec{r}}$, avec $\vec{r} = \vec{e}_y$ ou $\vec{r} = \vec{e}_z$, dans l'état $\hat{U}|\psi_t\rangle$ est écrite comme

$$\begin{aligned} \langle \hat{U}^\dagger \hat{S}_{\vec{r}} \hat{U} \rangle &\approx -i \langle [\hat{S}_{\vec{r}}, \vec{\theta}_x \cdot \hat{H}_x + \vec{\theta}_y \cdot \hat{H}_y + \vec{\theta}_z \cdot \hat{H}_z] \rangle \\ &= -i \left(\sum_{k,j} \theta_{x,k} \langle [\hat{S}_{\vec{r},j}, \hat{S}_{x,k}] \rangle + \sum_{k,j} \theta_{y,k} \langle [\hat{S}_{\vec{r},j}, \hat{S}_{y,k}] \rangle + \sum_{k,j} \theta_{z,k} \langle [\hat{S}_{\vec{r},j}, \hat{S}_{z,k}] \rangle \right) \\ &= -i \left(\sum_{k,j} \theta_{y,k} \langle [\hat{S}_{\vec{r},j}, \hat{S}_{y,k}] \rangle + \sum_{k,j} \theta_{z,k} \langle [\hat{S}_{\vec{r},j}, \hat{S}_{z,k}] \rangle \right) \\ &= \begin{cases} \langle \hat{S}_x \rangle \left(\sum_k \theta_{y,k} / N \right) & \text{if } \vec{r} = \vec{e}_z \\ \langle \hat{S}_x \rangle \left(\sum_k \theta_{z,k} / N \right) & \text{if } \vec{r} = \vec{e}_y \end{cases}. \end{aligned} \quad (51)$$

Comme la moyenne de l'observable de spin collectif $\hat{S}_{\vec{r}}$ dépend d'une seule composante du champ vectoriel, $\vec{\theta}_y$ ou $\vec{\theta}_z$ selon le choix de \vec{r} , les deux composantes peuvent être estimées séparément. En faisant tourner l'état $|\psi_t\rangle$ afin de polariser tous les spins le long de la direction y à l'aide de la rotation $|\psi'_t\rangle = e^{-i(\pi/2)\hat{S}_z}|\psi_t\rangle$, la moyenne de \hat{S}_z sous l'évolution (50), dans le voisinage de $\vec{\theta}_x = \vec{0}$, $\vec{\theta}_y = \vec{0}$ et $\vec{\theta}_z = \vec{0}$, est donnée par

$$\begin{aligned} \langle \psi'_t | \hat{U}^\dagger \hat{S}_z \hat{U} | \psi'_t \rangle &\approx -i \sum_{k,j} \theta_{x,k} \langle \psi'_t | [\hat{S}_{z,j}, \hat{S}_{x,k}] | \psi'_t \rangle \\ &= \langle \psi'_t | \hat{S}_y | \psi'_t \rangle \left(\sum_k \theta_{x,k} / N \right) \\ &= \langle \hat{S}_x \rangle \left(\sum_k \theta_{x,k} / N \right). \end{aligned} \quad (52)$$

La mesure de \hat{S}_z dans ce cas nous permet d'estimer la composante $\vec{\theta}_x$ du champ. Ainsi, nous mesurons un champ vectoriel.

References

- [1] T. Akatsuka, M. Takamoto, H. Katori, *Three-dimensional optical lattice clock with bosonic ^{88}Sr atoms*, Phys. Rev. A **81**, 023402 (2010), doi:[10.1103/PhysRevA.81.023402](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.023402)
- [2] S. L. Campbell, R. B. Hutson, G. E. Marti, A. Goban, N. Darkwah Oppong, R. L. McNally, L. Sonderhouse, J. M. Robinson, W. Zhang, B. J. Bloom, J. Ye, *A Fermi-degenerate three-dimensional optical lattice clock*, Science, 358 (2017) 90, doi:[10.1126/science.aam5538](https://doi.org/10.1126/science.aam5538).
- [3] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger et al., *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms*, Nature **415**, 39–44 (2002), doi:[10.1038/415039a](https://doi.org/10.1038/415039a).

- [4] Dariusz Kajtoch, Emilia Witkowska, Alice Sinatra, *Spin-squeezed atomic crystal*, Europhys. Lett. **123**, 20012 (2018), doi:[10.1209/0295-5075/123/20012](https://doi.org/10.1209/0295-5075/123/20012).
- [5] M. Płodzien, M. Koscielski, E. Witkowska, A. Sinatra, *Producing and storing spin-squeezed states and Greenberger-Horne-Zeilinger states in a one-dimensional optical lattice*, Phys. Rev. A **102**, 013328 (2020), doi:[10.1103/PhysRevA.102.013328](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.102.013328).
- [6] P. He, M. A. Perlin, S. R. Muleady, R. J. Lewis-Swan, R. B. Hutson, J. Ye, and A. M. Rey, *Engineering spin squeezing in a 3D optical lattice with interacting spin-orbit-coupled fermions*, Phys. Rev. Res. **1**, 033075 (2019), doi:[10.1103/PhysRevResearch.1.033075](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.1.033075).
- [7] M. Mamaev, I. Kimchi, R. M. Nandkishore, A. M. Rey, *Tunable-spin-model generation with spin-orbit-coupled fermions in optical lattices*, Phys. Rev. Research **3**, 013178 (2021), doi:[10.1103/PhysRevResearch.3.013178](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.3.013178).
- [8] T. Hernández Yanes, M. Płodzień, M. Mackoīt Sinkevičienė, G. Žlabys, G. Juzeliūnas, E. Witkowska, *One- and Two-Axis Squeezing via Laser Coupling in an Atomic Fermi-Hubbard Model*, Phys. Rev. Lett. **129**, 090403 (2022), doi:[10.1103/PhysRevLett.129.090403](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.129.090403)
- [9] M. Fadel, T. Zibold, B. Décamps, P. Treutlein, *Spatial entanglement patterns and Einstein-Podolsky-Rosen steering in Bose-Einstein condensates*, Science **360**, 6387 (2018), doi:[10.1126/science.aao1850](https://doi.org/10.1126/science.aao1850).
- [10] P. Colciaghi, Y. Li, P. Treutlein, T. Zibold, *Einstein-Podolsky-Rosen experiment with two Bose-Einstein condensates*, arXiv:2211.05101, doi:[arXiv:2211.05101](https://doi.org/10.26434/chemrxiv-2022-05101).
- [11] A. Periwal, E. S. Cooper, P. Kunkel, J. F. Wienand, E. J. Davis, M. Schleier-Smith, *Programmable interactions and emergent geometry in an array of atom clouds*, Nature **600**, 630–635 (2021), doi:[10.1038/s41586-021-04156-0](https://doi.org/10.1038/s41586-021-04156-0)
- [12] B. K. Malia, Y. Wu, J. Martínez-Rincón, M. A. Kasevich, *Distributed quantum sensing with a mode-entangled network of spin-squeezed atomic states*, arXiv.2205.06382, doi:[10.48550/arXiv.2205.06382](https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.06382).
- [13] W. Ge, K. Jacobs, Z. Eldredge, A. V. Gorshkov, and M. Foss-Feig, *Distributed Quantum Metrology with Linear Networks and Separable Inputs*, Phys. Rev. Lett **121**, 043604 (2018), doi:[10.1103/PhysRevLett.121.043604](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.043604).
- [14] T. J. Proctor, P. A. Knott, and J. A. Dunningham, *Multiparameter Estimation in Networked Quantum Sensors*, Phys. Rev. Lett. **120**, 080501 (2018), doi:[10.1103/PhysRevLett.120.080501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.080501).
- [15] M. Gessner, L. Pezzè, and A. Smerzi, *Sensitivity Bounds for Multiparameter Quantum Metrology*, Phys. Rev. Lett. **121**, 130503 (2018), doi:[10.1103/PhysRevLett.121.130503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.130503).
- [16] F. Albarelli, M. Barbieri, M. G. Genoni, I. Gianani, *A perspective on multiparameter quantum metrology: From theoretical tools to applications in quantum imaging*, Phys. Lett. A **384**, 126311 (2020), doi:[10.1016/j.physleta.2020.126311](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2020.126311).
- [17] M. Gessner, A. Smerzi, L. Pezzè, *Multiparameter squeezing for optimal quantum enhancements in sensor networks*, Nat Commun **11**, 3817 (2020), doi:[10.1038/s41467-020-17471-3](https://doi.org/10.1038/s41467-020-17471-3).
- [18] A. Z. Goldberg, L. L. Sánchez-Soto, and H. Ferretti, *Intrinsic Sensitivity Limits for Multiparameter Quantum Metrology*, Phys. Rev. Lett. **127**, 110501 (2021), doi:[10.1103/PhysRevLett.127.110501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.110501).

- [19] M. Fadel, B. Yadin, Y. Mao, T. Byrnes, M. Gessner, *Multiparameter quantum metrology and mode entanglement with spatially split nonclassical spin states*, arXiv.2201.11081, doi:[10.48550/arXiv.2201.11081](https://doi.org/10.48550/arXiv.2201.11081).
- [20] Jing Liu, Haidong Yuan, Xiao-Ming Lu, Xiaoguang Wang, *Quantum Fisher information matrix and multiparameter estimation*, J. Phys. A: Math. Theor. **53**, 023001 (2020), doi:[10.1088/1751-8121/ab5d4d](https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab5d4d).
- [21] C. Weitenberg, M. Endres, J. Sherson, M. Cheneau, P. Schauß, T. Fukuhara, I. Bloch, S. Kuhr, *Single-spin addressing in an atomic Mott insulator*, Nature **471**, 319–324 (2011), doi:[10.1038/nature09827](https://doi.org/10.1038/nature09827).
- [22] C. F. Ockeloën, R. Schmied, M. F. Riedel, P. Treutlein, *Quantum Metrology with a Scanning Probe Atom Interferometer*, Phys. Rev. Lett. **111**, 143001 (2013), doi:[10.1103/PhysRevLett.111.143001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.143001)
- [23] M. Kitagawa and M. Ueda, *Squeezed spin states*, Phys. Rev. A. **47**, 5138 (1993), doi:[10.1103/PhysRevA.47.5138](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.47.5138).
- [24] L. Pezzè, A. Smerzi, M. K. Oberthaler, R. Schmied, and P. Treutlein, *Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles*, Rev. Mod. Phys. **90**, 035005 (2018), doi:[10.1103/RevModPhys.90.035005](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.035005).
- [25] A. Sinatra, J.-C. Dornstetter, Y. Castin, *Spin squeezing in Bose–Einstein condensates: Limits imposed by decoherence and non-zero temperature*, Front. Phys. **7**, p. 86-97 (2012), doi:[10.1007/s11467-011-0219-7](https://doi.org/10.1007/s11467-011-0219-7).
- [26] Y. Baamara, A. Sinatra, M. Gessner, *Scaling laws for the sensitivity enhancement of non-Gaussian spin states*, Phys. Rev. Lett **127**, 160501 (2021), doi:[10.1103/PhysRevLett.127.160501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.160501).
- [27] Y. Baamara, A. Sinatra, M. Gessner, *Squeezing of nonlinear spin observables by one axis twisting in the presence of decoherence: An analytical study*, Comptes Rendus. Physique, **23**, 1-26 (2022), doi:[10.5802/crphys.103](https://doi.org/10.5802/crphys.103).
- [28] E. Davis, G. Bentsen and M. Schleier-Smith, *Approaching the Heisenberg Limit without Single-Particle Detection*, Phys. Rev. Lett. **116**, 053601 (2016), doi:[10.1103/PhysRevLett.116.053601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.053601).
- [29] S. Ragy, M. Jarzyna, and R. Demkowicz-Dobrzański, *Compatibility in multiparameter quantum metrology*, Phys. Rev. A **94**, 052108 (2016), doi:[10.1103/PhysRevA.94.052108](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.94.052108).