

Protocole quantique d'estimation multiparamètre et acquisition comprimée d'un champ

Youcef Baamara¹, Manuel Gessner² and Alice Sinatra^{1*}

¹ Laboratoire Kastler Brossel, ENS-Université PSL, CNRS, Université de la Sorbonne and Collège de France, 24 rue Lhomond, 75231 Paris, France

² ICFO-Institut de Ciències Fotòniques, The Barcelona Institute of Science and Technology, Av. Carl Friedrich Gauss 3, 08860, Castelldefels (Barcelona), Spain

* alice.sinatra@lkb.ens.fr

July 28, 2022

Résumé

Nous montrons qu'un gain quantique significatif correspondant aux états comprimés ou surcomprimés de spin peut être obtenu dans l'estimation multiparamètre en mesurant les coefficients de Hadamard d'un signal 1D ou 2D. La plateforme physique que nous considérons est constituée d'atomes à deux niveaux dans un réseau optique dans une configuration Mott-comprimé de spin, ou plus généralement par des spins corrélés distribués dans des modes spatialement séparés. Notre protocole requiert la possibilité de retourner localement les spins, mais repose sur des mesures collectives. Nous donnons des exemples d'applications à la cartographie de champs scalaires ou vectoriels et à la détection comprimée.

Contents

1	Introduction	1
2	Amélioration quantique dans la détection distribuée avec des mesures collectives et des renversements de spin locaux	2
3	Cartographie d'un champ unidimensionnel : simulation avec $N = 8$	5
3.1	Champ scalaire	6
3.2	Champ vectoriel	6
4	Gain quantique pour l'acquisition comprimée d'un champ à 2 dimensions (image)	7
5	Conclusions	9
A	Changement de signe d'un paramètre local par retournement de spin	10
B	Reformulation de notre protocole dans le cadre de la méthode des moments pour l'estimation multiparamètre	11
C	Mesure séquentielle des trois composantes d'un champ vectoriel	13
	References	13

1 Introduction

Les spins en précession, ou de manière équivalente les systèmes quantiques dans une superposition de deux niveaux d'énergie, sont des capteurs atomiques précis, et une distribution spatiale régulière d'atomes à deux niveaux dans un réseau optique 2D ou 3D peut être utilisée pour mesurer les valeurs locales d'un champ étendu. Une source fondamentale de bruit dans un tel détecteur est le bruit de projection quantique qui provient de la non-commutativité des trois composantes du spin $1/2$ et qui donne une incertitude sur la direction du spin dont on veut mesurer l'angle de précession.

L'idée de cet article est de tirer profit des corrélations quantiques entre les atomes à deux niveaux dans un réseau optique pour l'estimation multiparamètre, en particulier pour les mesures de champ étendu. À cette fin, outre la disposition régulière des atomes, qui offre des avantages pour les horloges atomiques [1, 2] et peut être réalisée au moyen de pinces optiques ou à la suite d'une transition de Mott dans un condensat de Bose-Einstein [3], il faut créer des corrélations de spin entre les atomes. Deux schémas possibles, qui permettent d'obtenir directement l'état de spin comprimé avec un atome par site, consistent à (i) élever adiabatiquement un réseau dans un condensat de Bose-Einstein à deux composants [4, 5] ou (ii) intriquer des atomes fermioniques situés aux sites du réseau via des processus d'effet tunnel virtuel et un laser externe qui imprime une phase dépendant du site [6–8]. Des configurations similaires, mais avec plus d'un spin sur chaque site, peuvent être obtenues en divisant un condensat de Bose-Einstein comprimé par le spin en modes adressables [9], ou avec des atomes dans une cavité où des interactions médiées par la cavité [10] ou des mesures quantiques non-destructives non locales [11] sont utilisées pour intriquer les modes. En utilisant cette dernière méthode, la mesure de paramètres distribués sur quelques modes améliorée par la compression de spin a été récemment démontrée expérimentalement [11].

Pour profiter des corrélations, au lieu de mesurer le champ local avec un spin dans chaque site du réseau, nous mesurons, par des mesures collectives impliquant tous les atomes, des combinaisons linéaires indépendantes des champs locaux correspondant aux coefficients de Hadamard du signal discrétisé sur le réseau. Les champs locaux sont ensuite déduits par la transformation de Hadamard inverse. Pour un nombre d'atomes et un nombre de mesures donnés, nous pouvons alors obtenir un gain quantique, c'est-à-dire une réduction de l'incertitude statistique sur la distribution du champ mesuré en dessous de la limite quantique standard, grâce aux corrélations quantiques entre les atomes.

Les capteurs spatialement distribués ont été étudiés théoriquement dans le contexte de l'estimation multiparamètre quantique, voir par exemple [12–16] et ses références. Par rapport à d'autres schémas de métrologie quantique multiparamètres qui ont été proposés [14, 16], le nôtre présente l'avantage qu'une seule mesure collective, au lieu de N mesures locales dans chaque site, doit être effectuée afin d'obtenir une combinaison linéaire donnée des paramètres inconnus avec un gain quantique. En effet, nous supposons que les retournements de spin peuvent être effectués localement [17] mais toutes les mesures de notre protocole sont collectives. Par rapport à une approche de type "microscope à balayage" où l'on déplace un capteur formé par un ensemble d'atomes intriqués, par exemple un condensat de Bose-Einstein, pour sonder localement le champ à chaque site [18], notre schéma offre l'avantage d'utiliser des atomes intriqués mais séparés dans l'espace, donc sans interaction. En laissant les atomes dans une position fixe plutôt que de balayer physiquement le potentiel de piégeage, nous obtenons une résolution spatiale donnée par la longueur d'onde du réseau optique utilisé pour piéger les atomes.

Dans la suite, nous développons notre protocole d'estimation multiparamètre et dérivons son gain quantique (Sec. 2), nous étudions la reconstruction d'un champ scalaire ou vectoriel en 1D (Sec. 3), et enfin, nous combinons notre méthode avec l'acquisition comprimée pour

reconstruire le champ avec un nombre réduit de mesures (Sec. 4).

2 Amélioration quantique dans la détection distribuée avec des mesures collectives et des renversements de spin locaux

Nous considérons N spins 1/2 distribués dans N modes spatialement séparés pour l'estimation de N paramètres $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$ affectant chacun un mode donné. Nous supposons que nous pouvons manipuler les spins localement, comme nous pourrions le faire pour des atomes dans un réseau optique à l'aide d'un microscope [17], et effectuer des mesures collectives sur l'ensemble des atomes. Les corrélations quantiques entre les atomes que nous cherchons à exploiter sont obtenues par l'hamiltonien collectif de torsion à un axe (OAT) [19],

$$\hat{H}_{\text{OAT}} = \hbar\chi \left(\sum_k \hat{s}_{k,z} \right)^2, \quad (1)$$

où $\hat{s}_k = \hat{\sigma}_k/2$, $\hat{\sigma}_k$ est le vecteur des matrices de Pauli pour l'atome dans le site k , en faisant évoluer pendant un temps t un état initial cohérent de spin (CSS) avec tous les spins polarisés selon la direction x

$$|\psi_0\rangle = |x\rangle^{\otimes N}. \quad (2)$$

Les paramètres sont ensuite encodés sur l'état $|\psi_t\rangle = e^{-i\hat{H}_{\text{OAT}}t/\hbar}|\psi_0\rangle$ par l'évolution unitaire

$$\hat{U}(\vec{\theta}) = e^{-i\hat{H}_{\vec{n}}\cdot\vec{\theta}}, \quad (3)$$

générée par les observables $\hat{H}_{\vec{n}} = (\hat{s}_{1,\vec{n}}, \dots, \hat{s}_{N,\vec{n}})^T$ avec $\hat{s}_{k,\vec{n}} \equiv \vec{n} \cdot \hat{s}_k$, où $\vec{n} = (0, n_y, n_z)^T$ est un vecteur unitaire que nous considérons, sans perte de généralité, dans le plan perpendiculaire à la direction de spin initiale x . Nous considérons une observable $\hat{S}_{\vec{m}}$ qui est linéaire dans les composantes du spin collectif $\hat{S}_{\vec{m}} = \sum_{j=1}^N \hat{s}_{j,\vec{m}}$ telles que $\{\vec{m}, \vec{n}, \vec{e}_x\}$ forment une base orthonormée. Au premier ordre dans tous les θ_k proches de $\theta_k = 0$, sa moyenne dans l'état $\hat{U}(\vec{\theta})|\psi_t\rangle$ est

$$\langle \hat{U}^\dagger(\vec{\theta}) \hat{S}_{\vec{m}} \hat{U}(\vec{\theta}) \rangle \approx -i \langle [\hat{S}_{\vec{m}}, \hat{H}_{\vec{n}} \cdot \vec{\theta}] \rangle = -i \sum_{l,k} \theta_k \langle [\hat{s}_{l,\vec{m}}, \hat{s}_{k,\vec{n}}] \rangle \delta_{lk} = \langle \hat{s}_{1,x} \rangle \sum_k \theta_k, \quad (4)$$

où $\langle \dots \rangle$ désigne la moyenne sur l'état $|\psi_t\rangle$ et nous avons utilisé la symétrie de l'état. En introduisant la combinaison linéaire des paramètres $\Theta \equiv \sum_k \theta_k/N$, l'équation (4) peut être écrite comme

$$\langle \hat{U}^\dagger(\vec{\theta}) \hat{S}_{\vec{m}} \hat{U}(\vec{\theta}) \rangle \approx \langle \hat{S}_x \rangle \Theta. \quad (5)$$

Cela montre qu'une observable linéaire dans les composantes collectives du spin est seulement sensible, au premier ordre, à la moyenne arithmétique Θ des paramètres θ_k . En utilisant la méthode des moments à un paramètre, Θ peut donc être estimée en comparant la moyenne de μ mesures indépendantes d'une observable linéaire de spin collectif $\hat{S}_{\vec{m}}^\mu$ avec sa valeur moyenne $\langle \hat{S}_{\vec{m}} \rangle$ obtenue théoriquement ou à partir d'une calibration expérimentale en fonction de Θ . Dans la limite $\mu \gg 1$, la méthode des moments permet d'estimer Θ avec une incertitude $(\Delta\Theta)^2 = (\Delta\hat{S}_{\vec{m}})^2 / (\mu |\partial_\Theta \langle \hat{S}_{\vec{m}} \rangle|^2)$ où $\partial_\Theta \equiv d/d\Theta$. En utilisant le résultat (5), nous obtenons [20]

$$(\Delta\Theta)^2 = \frac{1}{\mu} \frac{(\Delta\hat{S}_{\vec{m}})^2}{|\langle \hat{S}_x \rangle|^2}. \quad (6)$$

Puisque le but est d'estimer tous les paramètres θ_k (avec $k = 1, \dots, N$), N combinaisons linéairement indépendantes des θ_k doivent être mesurées. Voyons maintenant comment, en plus de la mesure de la moyenne des paramètres $\sum_k \theta_k/N$ expliquée ci-dessus, nous pouvons mesurer d'autres combinaisons linéaires des paramètres. Comme nous le montrons en l'appendice A, une rotation du spin k d'un angle π autour de l'axe x avant l'encodage du paramètre θ_k suivie d'une seconde rotation d'un angle $-\pi$ autour du même axe après l'encodage du paramètre, équivaut à inverser le signe de θ_k

$$e^{i\pi\hat{s}_x} e^{-i\theta\hat{s}_n} e^{-i\pi\hat{s}_x} = e^{i\theta\hat{s}_n}. \quad (7)$$

Considérons alors le problème de l'estimation des N paramètres $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ encodés par l'évolution unitaire (3), en appliquant cette fois $\hat{V} = e^{-i\sum_k \alpha_k \hat{s}_{k,x}}$ et \hat{V}^\dagger avant et après l'encodage des paramètres, où $\alpha_k = (1 - \epsilon_k)\pi/2$ et $\epsilon_k = \pm 1$. En utilisant (7), cela peut être représenté par l'évolution unitaire

$$\hat{U}' = \hat{V}^\dagger e^{-i\sum_k \theta_k \hat{s}_{k,\bar{n}}} \hat{V} = \prod_k e^{i\frac{\pi}{2}(1-\epsilon_k)\hat{s}_{k,x}} e^{-i\theta_k \hat{s}_{k,\bar{n}}} e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\epsilon_k)\hat{s}_{k,x}} = \prod_k e^{-i\epsilon_k \theta_k \hat{s}_{k,\bar{n}}} = e^{-i\sum_k \theta'_k \hat{s}_{k,\bar{n}}} \quad (8)$$

avec $\theta'_k = \epsilon_k \theta_k$, de sorte que (8) décrit l'encodage des N paramètres $\vec{\theta}' = (\epsilon_1 \theta_1, \dots, \epsilon_N \theta_N)$,

$$\hat{U}' = \hat{V}^\dagger \hat{U}(\vec{\theta}) \hat{V} = \hat{U}(\vec{\theta}') = e^{-i\hat{H}_{\bar{n}} \cdot \vec{\theta}'}. \quad (9)$$

En utilisant (9) et en raisonnant de la même manière que pour obtenir (5), on peut montrer qu'au premier ordre dans les θ'_k au voisinage de $\theta'_k = 0$, la moyenne de $\hat{S}_{\bar{m}}$ dans l'état $\hat{U}'|\psi_t\rangle$ varie comme

$$\langle \hat{U}'^\dagger \hat{S}_{\bar{m}} \hat{U}' \rangle = \langle \hat{S}_x \rangle \sum_k \frac{\epsilon_k \theta_k}{N}. \quad (10)$$

Cette dernière équation généralise le résultat (5) et montre que, en utilisant les retournements de spin locaux et l'estimation mono-paramètre par la méthode des moments, la mesure d'une observable linéaire de spin collectif permet d'estimer la combinaison linéaire des paramètres

$$\Theta = \sum_k \epsilon_k \theta_k / N, \quad (11)$$

où $\epsilon_k = \pm 1$ avec la même incertitude (6). Notez que la même courbe d'étalonnage peut être utilisée pour l'estimation de toutes les combinaisons de paramètres.

Pour un système dans l'état initial CSS, l'incertitude sur la combinaison estimée Θ est limitée par le bruit de projection donné par $(\Delta\Theta)_{\text{SQL}}^2 = 1/(\mu N)$ (limite quantique standard). Dans l'état $|\psi_t\rangle$, généré par la dynamique OAT au temps t , elle peut atteindre une valeur inférieure $(\Delta\Theta)^2 = \xi^2/(\mu N)$ où ξ^{-2} quantifie le gain quantique sur l'erreur statistique de la mesure. Pour une mesure linéaire (L) dans une composante $\hat{S}_{\bar{m}}$ du spin collectif, le gain quantique est limité par $\xi_L^{-2} \leq \xi_{L,\text{best}}^{-2}$ où l'égalité est atteinte pour une direction de mesure optimale $\bar{m} = \bar{m}_{L,\text{opt}}$ et un état comprimé de spin (SSS) préparé au temps optimal $t = t_{L,\text{best}}$ [19, 21]. Une possibilité de surmonter la limite due à la mesure d'une observable qui est linéaire dans les composantes de spin collectives, est la technique de mesure après interaction (MAI) qui consiste à ajouter une seconde évolution OAT $\hat{U}_\tau = e^{-i\hat{H}_{\text{OAT}}\tau/\hbar}$, avec $\tau = -t$, après le encodage des paramètres (9) et avant la mesure de l'observable linéaire $\hat{S}_{\bar{m}}$ où \bar{m} est dans le plan yz . Cette technique est équivalente à la mesure d'une observable non linéaire de la forme $\hat{X}_{\text{MAI}} = e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\bar{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}$. Il s'avère que cette mesure est optimale dans tout l'intervalle de temps $1/N < \chi t < 1/\sqrt{N}$ dans la limite de N grand [22, 23]. Dans ce cas également, au

premier ordre dans l'état θ'_k au voisinage de $\theta'_k = 0$, la moyenne de l'observable \hat{X}_{MAI} dans l'état $\hat{U}'|\psi_t\rangle$ est

$$\begin{aligned} \langle \hat{U}' \hat{X}_{\text{MAI}} \hat{U}' \rangle &\approx \langle (\mathbb{1} + i\hat{H}_{\vec{n}} \cdot \vec{\theta}') e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2} (\mathbb{1} - i\hat{H}_{\vec{n}} \cdot \vec{\theta}') \rangle \\ &= -i \langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{S}_{\vec{n}}] \rangle \sum_k \frac{\epsilon_k \theta_k}{N} \end{aligned} \quad (12)$$

où nous avons utilisé la symétrie de l'état $|\psi_t\rangle$. L'équation (12) montre que la technique MAI permet l'estimation de la combinaison linéaire $\Theta = \sum_k \epsilon_k \theta_k / N$. Dans un protocole d'estimation basé sur la méthode des moments, l'incertitude sur cette combinaison est donnée par [23]

$$(\Delta\Theta)^2 = \frac{1}{\mu} \frac{N/4}{|\langle [e^{i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{-i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{S}_{\vec{n}}] \rangle|^2}. \quad (13)$$

Pour un temps $\chi t_{\text{L,best}} < \chi t \leq 1/\sqrt{N}$, le gain quantique associé à (13), avec un choix optimal de \vec{n} et \vec{m} , est plus grand que le gain associé à une mesure linéaire $\xi_{\text{MAI}}^{-2} > \xi_{\text{L,best}}^{-2}$ [23]. Il atteint sa valeur maximale $\xi_{\text{MAI,best}}^{-2}$ à un temps optimal $\chi t_{\text{MAI,best}} = 1/\sqrt{N}$ dans la limite de N grand [24].

Ci-dessus, nous avons présenté la stratégie qui permet de mesurer des combinaisons linéaires de la forme $\sum_k \epsilon_k \theta_k / N$, avec $\epsilon_k = \pm 1$, d'un ensemble de paramètres θ_k avec un gain quantique significatif. Nous allons maintenant montrer quelles combinaisons doivent être mesurées, ou quels choix pour ϵ_k , afin de reconstruire le signal $\vec{\theta}$. Un signal $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$ avec $N = 2^m$, où m est un entier, peut être décomposé dans la base des fonctions orthogonales de Walsh : fonctions qui ne prennent que les valeurs ± 1 représentées en termes d'une matrice carrée d'ordre N appelée matrice de Hadamard \mathcal{H}_m :

$$\theta_k = \sum_j [\mathcal{H}_m]_{kj} \tilde{\theta}_j. \quad (14)$$

Les $\tilde{\theta}_j$ (pour $j = 1, \dots, N$) sont les coefficients de Hadamard associés au signal $\vec{\theta}$, et la matrice \mathcal{H}_m , qui satisfait la propriété $|\mathcal{H}_m]_{kj}| = 1/\sqrt{N}$, est définie par récurrence avec $\mathcal{H}_0 = 1$ et, pour $m > 0$

$$\mathcal{H}_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{m-1} & \mathcal{H}_{m-1} \\ \mathcal{H}_{m-1} & -\mathcal{H}_{m-1} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Le $j^{\text{ème}}$ coefficient de Hadamard s'écrit $\tilde{\theta}_j$, en fonction de θ_k , comme

$$\tilde{\theta}_j = \sum_k [\mathcal{H}_m^{-1}]_{jk} \theta_k, \quad (16)$$

En comparant cette dernière équation avec (11), on voit que pour un choix convenable des $\epsilon_k = \pm 1$, on obtient

$$\sqrt{N}\Theta = \tilde{\theta}, \quad (17)$$

tel que les combinaisons mesurées par notre stratégie sont, à un facteur \sqrt{N} près, les coefficients de Hadamard du signal $\vec{\theta}$. Une fois ces coefficients mesurés indépendamment et avec la même incertitude, nous pouvons déduire le signal original en utilisant (14). Tous les paramètres mesurés θ_k ont donc la même incertitude

$$(\Delta\theta_k)^2 = (\Delta\tilde{\theta}_k)^2 = N(\Delta\Theta)^2 = \frac{\xi^2}{\mu} \quad \forall k. \quad (18)$$

Contrairement à l'estimation d'un seul paramètre avec l'état cohérent de spin à N atomes, l'incertitude (18) sur les paramètres estimés par notre stratégie avec l'état CSS est indépendante de la taille N du système. Cela peut s'expliquer par le fait que chaque paramètre θ_k est encodé localement sur un atome individuel. Les corrélations quantiques entre atomes générées par la dynamique OAT nous permettent d'introduire une dépendance dans la taille N du système des incertitudes $(\Delta\theta_k)^2$ à travers le paramètre ξ . Comme nous le montrerons dans l'appendice B, cette stratégie peut également être comprise dans le cadre de la théorie de l'estimation multiparamètre. Dans les sections suivantes, nous donnons deux exemples d'application de la méthode, à la mise en correspondance d'un champ unidimensionnel scalaire et vectoriel, et à la détection comprimée.

3 Cartographie d'un champ unidimensionnel : simulation avec $N = 8$

3.1 Champ scalaire

Nous donnons ici une illustration de l'application de notre stratégie à la mesure d'un champ scalaire $\theta(x)$ qui varie le long d'une direction de l'espace. Dans notre simulation numérique ci-dessous, nous considérons un champ de la forme

$$\theta(x) = \theta_0 \sin(x) \quad (19)$$

que nous discrétisons sur $N = 8$ sites $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ avec $\theta_i \equiv \theta(x_i)$, chaque site ayant comme capteur un atome à deux niveaux. Nous supposons que l'encodage des paramètres $\vec{\theta}$ se fait avec les générateurs $\hat{H}_{\vec{n}} = (\hat{s}_{1,\vec{n}}, \dots, \hat{s}_{N,\vec{n}})^T$, \vec{n} étant la direction optimale dans le plan yz , par l'évolution unitaire (3). Selon notre protocole, pour estimer le coefficient de Hadamard $\tilde{\theta}_j$ après une évolution pendant un temps t avec l'hamiltonien OAT (1) de l'état initial CSS (2), on applique l'évolution unitaire

$$\hat{U}' = e^{i \sum_k \alpha_k \hat{s}_{k,x}} e^{-i \sum_k \theta_k \hat{s}_{k,\vec{n}}} e^{-i \sum_k \alpha_k \hat{s}_{k,x}} \quad \text{avec} \quad \alpha_k = (1 - \epsilon_k) \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \epsilon_k = \sqrt{N} [\mathcal{H}_3^{-1}]_{jk} \quad (20)$$

et on mesure, dans l'état obtenu $\hat{U}'|\psi_t\rangle$, l'observable optimale \hat{X} , qui peut être $\hat{S}_{\vec{m}}$ ou \hat{X}_{MAI} selon le protocole de mesure utilisé. Pour chaque $\tilde{\theta}_j$ avec $j = 1, \dots, N$, cette procédure est répétée μ fois. Dans la simulation numérique, les résultats de mesure $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$, où λ_i est une des valeurs propres de l'observable mesurée, sont obtenus par échantillonnage de la distribution de probabilité

$$P_i = |\langle \lambda_i | \hat{U}' |\psi_t \rangle|^2, \quad (21)$$

où $|\lambda_i\rangle$ est l'état propre de \hat{X} associé à la valeur propre λ_i . A partir de ces résultats de mesure, on calcule la moyenne statistique $\bar{X}_\mu = \sum_i \lambda_i / \mu$. En utilisant la courbe d'étalonnage Fig. 1(b) qui donne la moyenne théorique de $\langle \hat{X} \rangle$ en fonction de Θ (10) ou (12), on estime le coefficient de Hadamard $\tilde{\theta}_j = \sqrt{N} \Theta$ en utilisant la valeur de Θ pour laquelle $\langle \hat{X} \rangle = \bar{X}_\mu$. La variance statistique $(\Delta \tilde{\theta}_j)_\mu^2$ ¹ est calculée numériquement en répétant plusieurs fois la procédure d'estimation de $\tilde{\theta}_j$. Ainsi, tous les coefficients de Hadamard sont mesurés et les paramètres θ_k sont ensuite déduits en utilisant (14). Le champ scalaire (19) et son estimation avec l'état initial CSS, l'état comprimé SSS et l'état généré à $t = t_{\text{MAI,best}}$, où la mesure est effectuée avec la technique MAI, sont présentés à la Fig. 1(a).

¹L'indice μ est explicité ici pour rappeler que $(\Delta \tilde{\theta}_j)_\mu^2$ est la variance du paramètre $\tilde{\theta}_j$ déduit à partir de μ mesures.

3.2 Champ vectoriel

Considérons maintenant le cas d'un champ vectoriel discrétisé sur $N = 8$ sites comme indiqué dans la Fig. 1(c), dont les trois composantes inconnues $\vec{\theta}_x, \vec{\theta}_y, \vec{\theta}_z$, avec $\vec{\theta}_\alpha = (\theta_{\alpha,1}, \dots, \theta_{\alpha,N})^T$ pour $\alpha = x, y, z$, sont encodées sur les atomes par l'évolution unitaire

$$\hat{U} = e^{-i(\hat{H}_x \cdot \vec{\theta}_x + \hat{H}_y \cdot \vec{\theta}_y + \hat{H}_z \cdot \vec{\theta}_z)} \quad (22)$$

qui représente une généralisation de (3) à l'encodage de trois paramètres par mode. Dans l'estimation multiparamètre, la mesure des paramètres générés par des hamiltoniens qui ne commutent pas est connue pour être difficile à cause de l'incompatibilité des mesures optimales respectives [13, 15, 25]. Ici, nous évitons ces complications en estimant les trois composantes du champ séparément l'une après l'autre : d'abord les spins sont préparés dans un état polarisé le long de la direction x et la mesure des deux composantes du champ dans le plan yz est effectuée après l'évolution OAT et l'application d'une rotation de l'état de façon à aligner la direction optimale \vec{n} avec la direction z ou y pour mesurer $\vec{\theta}_z$ ou $\vec{\theta}_y$, puis les spins sont polarisés le long de la direction y pour mesurer $\vec{\theta}_x$. Le point essentiel est que pour la mesure d'une observable collective de spin linéaire (ce qui exclut l'estimation basée sur la mesure de l'observable \hat{X}_{MAI}), l'estimation de l'une des composantes du champ n'est pas affectée par la présence des deux autres composantes orthogonales, comme nous le montrons dans l'appendice C. Dans la Fig. 1(d), nous montrons les résultats de l'estimation du champ vectoriel avec des composantes

$$\theta_\alpha(x) = \theta_0 \sin(x + \varphi_\alpha) \quad \text{for} \quad \alpha = x, y, z \quad \text{and} \quad \varphi_x = 0, \varphi_y = \pi/2, \varphi_z = \pi. \quad (23)$$

4 Gain quantique pour l'acquisition comprimée d'un champ à 2 dimensions (image)

Dans la Sec. 2, nous avons présenté une stratégie qui nous permet de mesurer un signal scalaire $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$ par l'estimation directe des N coefficients de Hadamard correspondants. L'estimation de chacun de ces coefficients nécessite μ mesures indépendantes. Dans cette section, nous allons montrer, sur un exemple concret, l'effet de la compression du signal, c'est-à-dire l'effet de ne mesurer que les $L_{\mathcal{H}} < N$ premiers coefficients de Hadamard d'un signal de taille N , les $N - L_{\mathcal{H}}$ derniers coefficients de Hadamard étant pris nuls. Cela réduit le nombre total de mesures indépendantes à effectuer de μN à $\mu L_{\mathcal{H}}$. Considérons le signal 2D (l'image de Barbara) de taille $N = 512 \times 512$ représenté sur la figure 2 à gauche. Dans la partie droite de la figure, le signal est reconstruit avec différents états du système de N atomes et pour différentes valeurs de $L_{\mathcal{H}}$. Pour imiter les résultats expérimentaux, nous générons chacun des coefficients non nuls pour $j = 1, \dots, L_{\mathcal{H}}$ par échantillonnage de la distribution de probabilité

$$P(x) = \mathcal{N} e^{-\frac{(x - \tilde{\theta}_j)^2}{2(\Delta \tilde{\theta}_j)^2}}, \quad (24)$$

où \mathcal{N} est une constante de normalisation, $\tilde{\theta}_j$ est le j ème coefficient Hadamard de l'image originale et $\Delta \tilde{\theta}_j$ est l'incertitude correspondante (18) sur son estimation avec un état quantique donné des N spins. La première ligne correspond à l'état CSS (2) pour lequel $\xi = 1$. Dans la deuxième ligne, on utilise l'état SSS pour lequel nous avons calculé la valeur exacte de ξ , pour le nombre d'atomes considéré, optimisé dans le temps. Pour la dernière ligne, nous avons calculé le gain quantique en (18) correspondant à l'état (SSS)_{deph} généré par l'évolution OAT

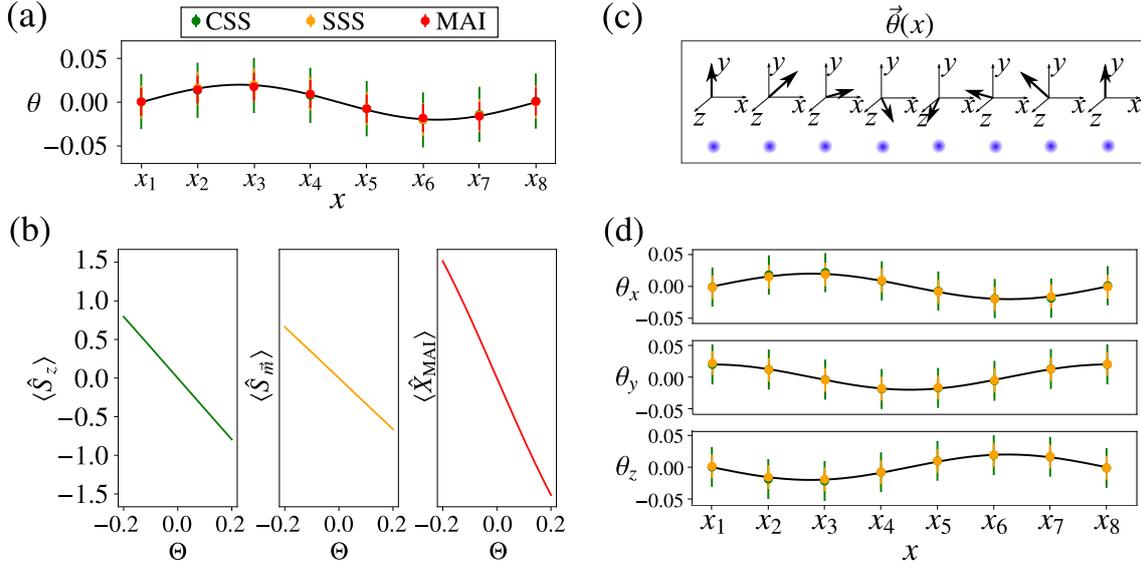


Figure 1: Simulation numérique de l'estimation d'un champ unidimensionnel avec $N = 8$ atomes : **(a)** champ scalaire. Le champ (19) avec $\theta_0 = 0.02$ est représenté par la ligne pleine, et sa reconstruction avec $\mu = 10^3$ mesures, pour chacun des huit coefficients de Hadamard, sont représentés par les symboles. L'estimation est faite avec l'état cohérent de spin CSS (vert), l'état comprimé de spin SSS (orange) et l'état généré à l'instant $t_{\text{MAI,best}}$ de la dynamique OAT où la mesure est effectuée avec la technique MAI (rouge). Les écarts types correspondants (lignes verticales) sont obtenus ici en répétant 500 fois la procédure d'estimation pour chaque $\tilde{\theta}_j$ et ils sont en bon accord avec la valeur théorique (18). **(b)** Courbes d'étalonnage utilisées avec l'état CSS (gauche), l'état SSS (milieu), et l'état généré à $t_{\text{MAI,best}}$ (droite). **(c)** et **(d)** champ vectoriel. Les composantes (23) avec $\theta_0 = 0.02$ sont représentées par les lignes pleines, et leur reconstruction avec l'état CSS (vert) et l'état SSS (orange) pour $\mu = 10^3$ sont représentés par les symboles. Les lignes verticales représentent les écarts types correspondants ainsi obtenus en répétant 500 fois la procédure de l'estimation de chaque $\tilde{\theta}_j$.

(1) en présence de processus de déphasage [23]

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_{\text{OAT}}, \hat{\rho}] + \gamma \left(\hat{S}_z \hat{\rho} \hat{S}_z - \frac{1}{2} \{ \hat{S}_z^2, \hat{\rho} \} \right), \quad (25)$$

pour $\gamma/\chi = 5$. En comparant les images obtenues par l'état SSS avec celles obtenues avec l'état CSS non corrélé, nous remarquons que le gain dû aux corrélations quantiques est significatif même avec $L_{\mathcal{H}} = 32 \times 32$ (c.-à-d. $L_{\mathcal{H}} \approx 3.9 \times 10^{-3} N$), et en présence de décohérence. Dans la figure 3, nous montrons les résultats de l'estimation et de la compression d'un petit signal, une image de taille 32×32 . Dans ce cas également, les résultats montrent un gain significatif dû aux corrélations quantiques.

5 Conclusions

Nous avons proposé une méthode d'estimation multiparamètre qui utilise des atomes à deux niveaux piégés dans un réseau optique, qui partagent des corrélations quantiques d'état interne générées par un hamiltonien d'interaction collective de torsion à un axe. Un tel système peut être obtenu, par exemple, en élevant adiabatiquement un réseau optique dans un condensat

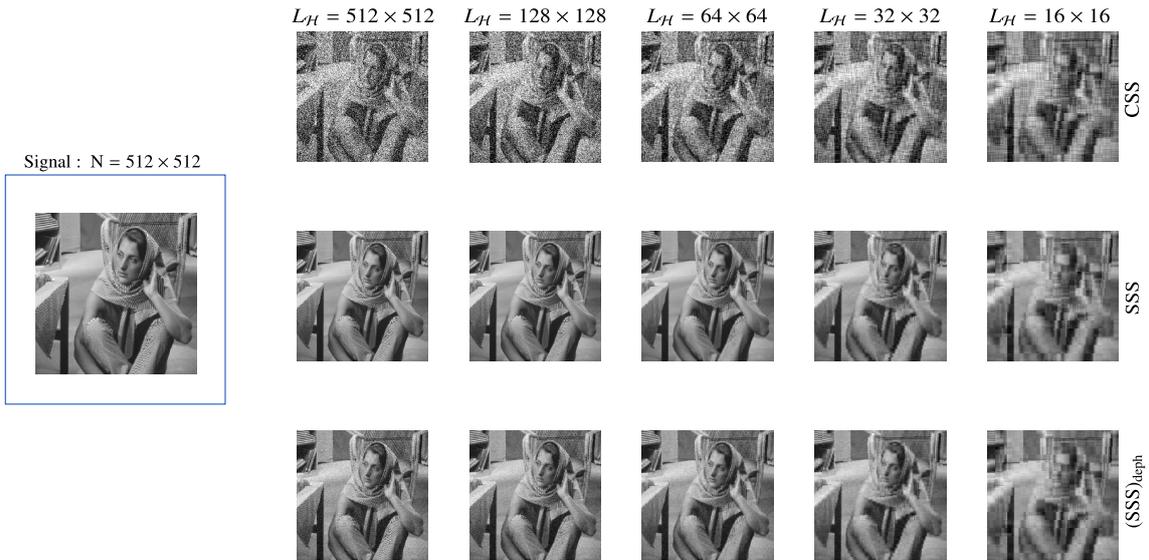


Figure 2: Exemple de compression d'image avec gain quantique : Un signal $2D$ (l'image de Barbara) de taille $N = 512 \times 512$ (à gauche) est reconstruit (à droite) avec $\mu = 10$ mesures indépendantes pour chacun des premiers $L_{\mathcal{H}} \leq N$ coefficients de Hadamard, les derniers $N - L_{\mathcal{H}}$ coefficients étant pris nul. Les coefficients non nuls sont estimés avec l'état cohérent de spin CSS (en haut), l'état comprimé de spin SSS obtenu par la dynamique OAT (1) en l'absence de décohérence (milieu) et en présence de décohérence de déphasage (25) avec $\gamma = 5\chi$ (bas), pour $L_{\mathcal{H}} = N = 512 \times 512, L_{\mathcal{H}} = 128 \times 128, 64 \times 64, 32 \times 32, 16 \times 16$ de gauche à droite respectivement.

à deux composants en interaction (état isolant de Mott comprimé de spin) [4, 5] ou avec des atomes fermioniques en configuration de Mott dans un réseau en présence d'un laser externe qui imprime aux atomes une phase dépendant de leur position [6–8]. Les atomes sont utilisés pour mesurer l'ensemble des valeurs pris par un champ à l'emplacement des différents sites. L'idée centrale de notre méthode est que, pour profiter des corrélations entre atomes, nous mesurons des quantités collectives, les coefficients de Hadamard du signal, à partir desquelles nous déduisons les paramètres locaux par transformation de Hadamard inverse. Bien que nous ayons considéré le cas d'un atome par site, nos résultats peuvent être facilement généralisés au cas de N atomes non interagissants répartis sur M sites avec N/M atomes par site. Des configurations de ce type peuvent être réalisées en divisant un condensat de Bose-Einstein [9] dont le spin a été préalablement comprimé ou dans un système d'atomes froids en cavité dans lequel des interactions médiées par la cavité [10] ou des mesures de non-démolition quantique [11] sont utilisées pour intriquer les atomes dans les différents modes.

Acknowledgements

Nous remercions Alan Serafin et Yvan Castin pour leur programme de traduction de l'interface Latex-Deepl pour la version multilingue de cet article.

Informations sur le financement Y.B et A.S reconnaissent le financement du projet mac-Qsimal de l'EU.

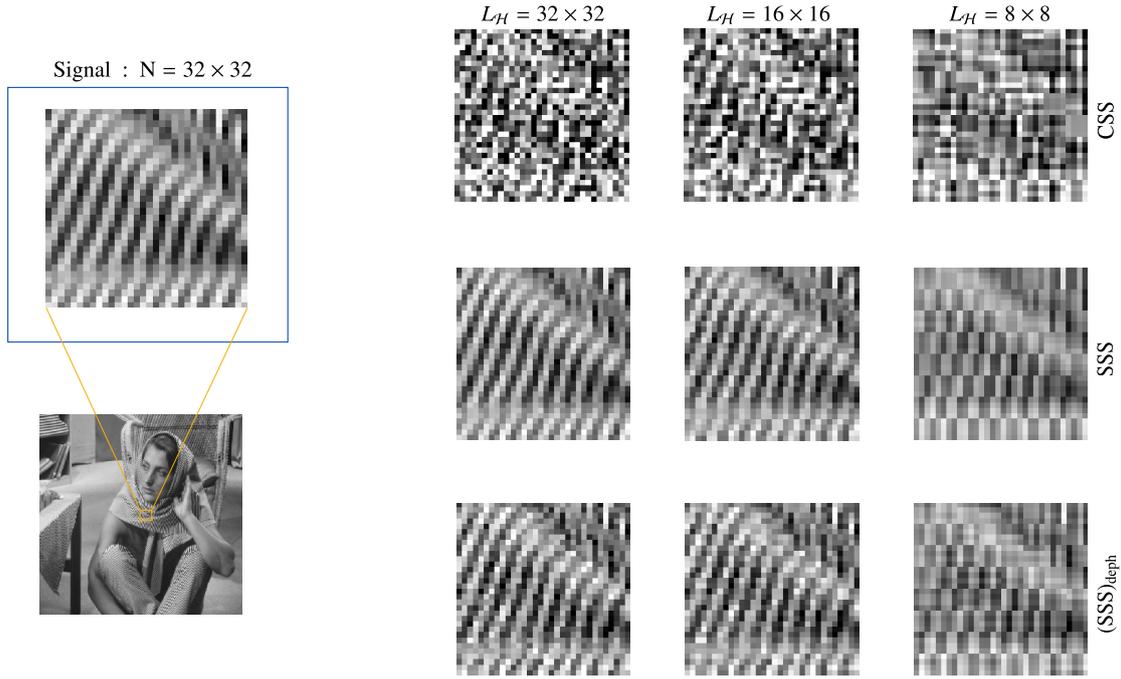


Figure 3: Exemple de compression d'image (petite image) avec gain quantique : Un signal 2D (partie de l'image de Barbara) de taille $N = 32 \times 32$ (à gauche) est reconstruit (à droite) avec $\mu = 10$ mesures indépendantes pour chacun des $L_{\mathcal{H}} \leq N$ premiers coefficients de Hadamard, les $N - L_{\mathcal{H}}$ derniers coefficients étant pris nuls. Les coefficients non nuls sont estimés avec l'état CSS (en haut), l'état SSS en absence de décohérence (au milieu) et en présence de décohérence (25) avec $\gamma = \chi$ (en bas), pour $L_{\mathcal{H}} = N = 32 \times 32$, $L_{\mathcal{H}} = 16 \times 16$, 8×8 de gauche à droite respectivement.

A Changement de signe d'un paramètre local par retournement de spin

Dans cette annexe, nous montrons qu'une rotation locale d'angle π autour de l'axe x d'un spin suivie de l'encodage d'un paramètre θ par le générateur $\hat{s}_{\vec{n}}$ où \vec{n} est dans le plan yz et d'une autre rotation d'angle $-\pi$ autour de x , est équivalente à inverser le signe du paramètre encodé θ . Nous avons

$$e^{i\pi\hat{s}_x} e^{-i\theta\hat{s}_{\vec{n}}} e^{-i\pi\hat{s}_x} = \left(\sum_j \frac{(i\pi)^j}{j!} \hat{s}_x^j \right) \left(\sum_k \frac{(-i\theta)^k}{k!} \hat{s}_{\vec{n}}^k \right) \left(\sum_l \frac{(-i\pi)^l}{l!} \hat{s}_x^l \right) \quad (26)$$

or

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{(-i\theta)^k}{k!} \hat{s}_{\vec{n}}^k &= \sum_p \frac{(-i\theta)^{2p}}{(2p)!} \hat{s}_{\vec{n}}^{2p} + \sum_p \frac{(-i\theta)^{2p+1}}{(2p+1)!} \hat{s}_{\vec{n}}^{2p+1} \\ &= \sum_p (-1)^p \frac{(\theta/2)^{2p}}{(2p)!} (2\hat{s}_{\vec{n}})^{2p} \\ &\quad - 2i\hat{s}_{\vec{n}} \sum_p (-1)^p \frac{(\theta/2)^{2p+1}}{(2p+1)!} (2\hat{s}_{\vec{n}})^{2p} \\ &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) 1 - 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{s}_{\vec{n}}, \end{aligned} \quad (27)$$

où nous avons utilisé $(2\hat{s}_{\bar{n}})^2 = \hat{\sigma}_{\bar{n}}^2 = \mathbb{1}$. En remplaçant (27) par (26) et en simplifiant, nous trouvons

$$\begin{aligned} e^{i\pi\hat{s}_x} e^{-i\theta\hat{s}_{\bar{n}}} e^{-i\pi\hat{s}_x} &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbb{1} - 8i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{s}_x\hat{s}_{\bar{n}}\hat{s}_x \right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbb{1} + 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{s}_{\bar{n}} \right) \\ &= e^{i\theta\hat{s}_{\bar{n}}}, \end{aligned} \quad (28)$$

où nous avons utilisé $8\hat{s}_x\hat{s}_{\bar{n}}\hat{s}_x = \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_{\bar{n}}\hat{\sigma}_x = -\hat{\sigma}_{\bar{n}} = -2\hat{s}_{\bar{n}}$, ce qui peut être démontré comme suit :

$$\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_{\bar{n}}\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_{\bar{n}} + \hat{\sigma}_x[\hat{\sigma}_{\bar{n}}, \hat{\sigma}_x] = \hat{\sigma}_{\bar{n}} + [\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_{\bar{n}}]\hat{\sigma}_x, \quad (29)$$

donc on déduit

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_{\bar{n}}\hat{\sigma}_x &= \hat{\sigma}_{\bar{n}} + \frac{1}{2}[\hat{\sigma}_x, [\hat{\sigma}_{\bar{n}}, \hat{\sigma}_x]] \\ &= \hat{\sigma}_{\bar{n}} + \frac{1}{2}[\hat{\sigma}_x, [(n_y\hat{\sigma}_y + n_z\hat{\sigma}_z), \hat{\sigma}_x]] \\ &= \hat{\sigma}_{\bar{n}} + \frac{1}{2}[\hat{\sigma}_x, n_y[\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_x] + n_z[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x]] \\ &= \hat{\sigma}_{\bar{n}} - i(n_y[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z] - n_z[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y]) \\ &= \hat{\sigma}_{\bar{n}} - 2(n_y\hat{\sigma}_y + n_z\hat{\sigma}_z) \\ &= -\hat{\sigma}_{\bar{n}}. \end{aligned} \quad (30)$$

L'équation (28) montre que l'on peut changer le signe d'un paramètre encodé θ par une rotation de l'angle π autour de l'axe x avant l'encodage θ et une autre rotation de l'angle $-\pi$ autour du même axe x après l'encodage du paramètre.

B Reformulation de notre protocole dans le cadre de la méthode des moments pour l'estimation multiparamètre

Le problème étudié dans notre travail peut également être formulé dans le cadre de la théorie de l'estimation multiparamètre. Ici, les N paramètres $\vec{\theta}' = (\epsilon_1\theta_1, \dots, \epsilon_N\theta_N)^T$, avec $\epsilon_j = \pm 1$, sont encodés par les générateurs $\hat{H}_{\bar{n}} = (\hat{s}_{1,\bar{n}}, \dots, \hat{s}_{N,\bar{n}})^T$ sur l'état $|\psi_t\rangle$ préparé par la dynamique OAT pour un temps t de l'état CSS (2) par l'évolution unitaire (3)

$$\hat{U}(\vec{\theta}) = e^{-i\hat{H}_{\bar{n}}\vec{\theta}'}. \quad (31)$$

Un changement de base des paramètres $\vec{\vartheta} = P\vec{\theta}'$, avec $PP^T = P^T P = \mathbb{1}$, permet de réécrire cette dernière équation comme

$$\hat{U}(\vec{\vartheta}) = e^{-i\hat{G}_{\bar{n}}\vec{\vartheta}} \quad \text{avec} \quad \hat{G}_{\bar{n}} = P\hat{H}_{\bar{n}}, \quad (32)$$

qui représente l'encodage des N paramètres $\vec{\vartheta}$ générés par les observables $\hat{G}_{\bar{n}}$. Pour estimer $\vec{\vartheta}$, on peut utiliser la méthode des moments multiparamètres [14] où les $\vec{\vartheta}$ sont estimés à partir des moyennes statistiques $\vec{X}^{(\mu)} = (\bar{X}_1^{(\mu)}, \dots, \bar{X}_N^{(\mu)})^T$, résultats de μ mesures indépendantes des N observables $\hat{X} = (\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_N)^T$ comme les valeurs pour lesquelles

$$\langle \hat{U}^\dagger(\vec{\vartheta})\hat{X}_k\hat{U}(\vec{\vartheta}) \rangle = \bar{X}_k^{(\mu)}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (33)$$

Pour $\mu \gg 1$, cette méthode nous permet d'estimer les $\vec{\vartheta}$ avec une matrice de covariance

$$\begin{aligned}\Sigma &= (\mu M[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}])^{-1} \\ &= (\mu C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}]^T \Gamma[|\psi_t\rangle, \hat{X}]^{-1} C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}])^{-1},\end{aligned}\quad (34)$$

où nous avons introduit la matrice des commutateurs $C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}]_{kl} = -i\langle[\hat{X}_k, \hat{G}_{l,\vec{n}}]\rangle$ et la matrice des covariances $\Gamma[|\psi_t\rangle, \hat{X}] = \text{Cov}(\hat{X}_k, \hat{X}_l)$. En choisissant les observables $\hat{X} = \hat{X}_{\vec{m}} = \sqrt{N}P\hat{H}_{\vec{m}}$, avec \vec{m} de sorte que $\{\vec{m}, \vec{n}, \vec{e}_x\}$ forment une base orthonormée, la matrice des commutateurs est donnée par

$$C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\vec{m}}] = \sqrt{N}PC[|\psi_t\rangle, \hat{H}_{\vec{n}}, \hat{H}_{\vec{m}}]P^T = \sqrt{N}\langle\hat{s}_{1,x}\rangle\mathbb{1},\quad (35)$$

où nous avons utilisé

$$C[|\psi_t\rangle, \hat{H}_{\vec{n}}, \hat{H}_{\vec{m}}]_{kl} = -i\langle[\hat{s}_{k,\vec{m}}, \hat{s}_{l,\vec{n}}]\rangle = \langle\hat{s}_{1,x}\rangle\delta_{kl}\quad (36)$$

et l'orthogonalité de P . La matrice des commutateurs étant diagonale, le système d'équations (33) est découplé, et le paramètre ϑ_k peut être estimé à partir des résultats de μ mesures indépendantes de l'observable \hat{X}_k avec, pour $\mu \gg 1$, l'incertitude

$$(\Delta\vartheta_k)^2 = \Sigma_{kk} = \frac{1}{\mu N} \frac{(\Delta\hat{X}_k)^2}{|\langle\hat{s}_{1,x}\rangle|^2}.\quad (37)$$

Pour un k donné (par exemple $k = 1$), on choisit P pour que $\hat{X}_k = \sqrt{N} \sum_l P_{kl} \hat{s}_{l,\vec{m}} = \sum_l \hat{s}_{l,\vec{m}} = \hat{S}_{\vec{m}}$, c'est-à-dire $P_{kl} = 1/\sqrt{N}$ pour tout l . Avec ce choix de P et selon l'équation (37), la combinaison des paramètres $\vartheta_k = \sum_l \epsilon_l \theta_l / \sqrt{N}$ est estimée avec l'incertitude

$$(\Delta\vartheta_k)^2 = \frac{1}{\mu N} \frac{(\Delta\hat{S}_{\vec{m}})^2}{|\langle\hat{s}_{1,x}\rangle|^2} = \frac{\xi_L^2}{\mu}.\quad (38)$$

Cette dernière équation est équivalente à l'équation (18) dans le cas de la mesure d'une observable linéaire de spin collectif et ϑ_k est un coefficient de Hadamard. Considérons maintenant le cas d'une mesure avec la technique MAI, où l'évolution OAT $\hat{U}_\tau = e^{-i\chi\tau\hat{S}_z^2}$ avec $\tau = -t$ est appliquée au système avant la mesure des N observables $\hat{X}_{\vec{m}}$, ce qui équivaut à mesurer les observables

$$\hat{X}_{\text{MAI}} = e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{X}_{\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2} = \sqrt{N}P(e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{s}_{1,\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2}, \dots, e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{s}_{N,\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2})^T.\quad (39)$$

La matrice des commutateurs dans ce cas s'écrit

$$C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\text{MAI}}] = \sqrt{N}PC[|\psi_t\rangle, \hat{H}_{\vec{n}}, e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{H}_{\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2}]P^T\quad (40)$$

avec

$$\begin{aligned}C[|\psi_t\rangle, \hat{H}_{\vec{n}}, e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{H}_{\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2}]_{kl} &= -i\langle[e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{s}_{k,\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2}, \hat{s}_{l,\vec{n}}]\rangle \\ &= -i\langle[e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{s}_{1,\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2}, \hat{s}_{1,\vec{n}}]\rangle\delta_{kl} \\ &\quad - i\langle[e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{s}_{1,\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2}, \hat{s}_{2,\vec{n}}]\rangle(1 - \delta_{kl}).\end{aligned}\quad (41)$$

En cherchant P qui diagonalise la matrice $C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\text{MAI}}]$, on se rend compte que pour le k correspondant à la valeur propre maximale

$$C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\text{MAI}}]_{kk}^{\text{max}} = -i \frac{\langle[e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2}, \hat{S}_{\vec{n}}]\rangle}{\sqrt{N}}\quad (42)$$

on a $P_{kl} = 1/\sqrt{N}$ pour toutes les l . La mesure de l'observable $(\hat{X}_{\text{MAI}})_k = \sqrt{N} \sum_l P_{kl} e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{l,\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2} = e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}$ permet donc d'estimer la combinaison des paramètres $\vartheta_k = \sum_l P_{kl} \epsilon_l \theta_l = \sum_l \epsilon_l \theta_l / \sqrt{N}$ avec l'incertitude

$$(\Delta\vartheta_k)^2 = \frac{1}{\mu} \frac{(\Delta\hat{X}_{\text{MAI}})^2}{|\langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{S}_{\vec{n}}] \rangle|^2} = \frac{1}{\mu} \frac{N/4}{|\langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{S}_{\vec{n}}] \rangle|^2} = \frac{\xi_{\text{MAI}}^2}{\mu}, \quad (43)$$

qui est exactement l'incertitude (18) dans le cas d'une mesure MAI.

C Mesure séquentielle des trois composantes d'un champ vectoriel

Nous montrons ici comment estimer les trois composantes $\vec{\theta}_x$, $\vec{\theta}_y$ et $\vec{\theta}_z$ d'un champ vectoriel. L'encodage de ces composantes, sur l'état $|\psi_t\rangle$ après évolution avec OAT, se fait par l'évolution unitaire

$$\hat{U} = e^{-i(\vec{\theta}_x \cdot \hat{H}_x + \vec{\theta}_y \cdot \hat{H}_y + \vec{\theta}_z \cdot \hat{H}_z)}. \quad (44)$$

Au voisinage de $\vec{\theta}_x = \vec{0}$, $\vec{\theta}_y = \vec{0}$ et $\vec{\theta}_z = \vec{0}$, la moyenne d'une observable linéaire de spin collectif $\hat{S}_{\vec{r}}$, avec $\vec{r} = \vec{e}_y$ ou $\vec{r} = \vec{e}_z$, dans l'état $\hat{U}|\psi_t\rangle$ s'écrit

$$\begin{aligned} \langle \hat{U}^\dagger \hat{S}_{\vec{r}} \hat{U} \rangle &\approx -i \langle [\hat{S}_{\vec{r}}, \vec{\theta}_x \cdot \hat{H}_x + \vec{\theta}_y \cdot \hat{H}_y + \vec{\theta}_z \cdot \hat{H}_z] \rangle \\ &= -i \left(\sum_{k,j} \theta_{x,k} \langle [\hat{S}_{\vec{r},j}, \hat{S}_{x,k}] \rangle + \sum_{k,j} \theta_{y,k} \langle [\hat{S}_{\vec{r},j}, \hat{S}_{y,k}] \rangle + \sum_{k,j} \theta_{z,k} \langle [\hat{S}_{\vec{r},j}, \hat{S}_{z,k}] \rangle \right) \\ &= -i \left(\sum_{k,j} \theta_{y,k} \langle [\hat{S}_{\vec{r},j}, \hat{S}_{y,k}] \rangle + \sum_{k,j} \theta_{z,k} \langle [\hat{S}_{\vec{r},j}, \hat{S}_{z,k}] \rangle \right) \\ &= \begin{cases} \langle \hat{S}_x \rangle \left(\sum_k \theta_{y,k} / N \right) & \text{si } \vec{r} = \vec{e}_z \\ \langle \hat{S}_x \rangle \left(\sum_k \theta_{z,k} / N \right) & \text{si } \vec{r} = \vec{e}_y \end{cases}. \end{aligned} \quad (45)$$

Comme la moyenne de l'observable de spin collectif $\hat{S}_{\vec{r}}$ ne dépend que d'une composante du champ vectoriel, $\vec{\theta}_y$ ou $\vec{\theta}_z$ selon le choix de \vec{r} , les deux composantes peuvent être estimées séparément. En faisant tourner l'état $|\psi_t\rangle$ afin de polariser tous les spins selon la direction y à l'aide de la rotation $|\psi'_t\rangle = e^{-i(\pi/2)\hat{S}_z} |\psi_t\rangle$, la moyenne de \hat{S}_z sous l'évolution (44), au voisinage de $\vec{\theta}_x = \vec{0}$, $\vec{\theta}_y = \vec{0}$ et $\vec{\theta}_z = \vec{0}$, est donnée par

$$\begin{aligned} \langle \psi'_t | \hat{U}^\dagger \hat{S}_z \hat{U} | \psi'_t \rangle &\approx -i \sum_{k,j} \theta_{x,k} \langle \psi'_t | [\hat{S}_{z,j}, \hat{S}_{x,k}] | \psi'_t \rangle \\ &= \langle \psi'_t | \hat{S}_y | \psi'_t \rangle \left(\sum_k \theta_{x,k} / N \right) \\ &= \langle \hat{S}_x \rangle \left(\sum_k \theta_{x,k} / N \right). \end{aligned} \quad (46)$$

La mesure de \hat{S}_z dans ce cas nous permet d'estimer la composante $\vec{\theta}_x$ du champ. Ainsi, nous mesurons un champ vectoriel.

References

- [1] T. Akatsuka, M. Takamoto, H. Katori, *Three-dimensional optical lattice clock with bosonic ^{88}Sr atoms*, Phys. Rev. A **81**, 023402 (2010), doi:[10.1103/PhysRevA.81.023402](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.023402)
- [2] S. L. Campbell, R. B. Hutson, G. E. Marti, A. Goban, N. Darkwah Oppong, R. L. McNally, L. Sonderhouse, J. M. Robinson, W. Zhang, B. J. Bloom, J. Ye, *A Fermi-degenerate three-dimensional optical lattice clock*, Science, 358 (2017) 90, doi:[10.1126/science.aam5538](https://doi.org/10.1126/science.aam5538).
- [3] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger et al., *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms*, Nature **415**, 39–44 (2002), doi:[10.1038/415039a](https://doi.org/10.1038/415039a).
- [4] Dariusz Kajtoch, Emilia Witkowska, Alice Sinatra, *Spin-squeezed atomic crystal*, Europhys. Lett. **123**, 20012 (2018), doi:[10.1209/0295-5075/123/20012](https://doi.org/10.1209/0295-5075/123/20012).
- [5] M. Płodzien, M. Koscielski, E. Witkowska, A. Sinatra, *Producing and storing spin-squeezed states and Greenberger-Horne-Zeilinger states in a one-dimensional optical lattice*, Phys. Rev. A **102**, 013328 (2020), doi:[10.1103/PhysRevA.102.013328](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.102.013328).
- [6] P. He, M. A. Perlin, S. R. Muleady, R. J. Lewis-Swan, R. B. Hutson, J. Ye, and A. M. Rey, *Engineering spin squeezing in a 3D optical lattice with interacting spin-orbit-coupled fermions*, Phys. Rev. Res. **1**, 033075 (2019), doi:[10.1103/PhysRevResearch.1.033075](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.1.033075).
- [7] M. Mamaev, I. Kimchi, R. M. Nandkishore, A. M. Rey, *Tunable-spin-model generation with spin-orbit-coupled fermions in optical lattices*, Phys. Rev. Research **3**, 013178 (2021), doi:[10.1103/PhysRevResearch.3.013178](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.3.013178).
- [8] T. Hernández Yanes, M. Płodzień, M. Mackoīt Sinkevičienė, G. Žlabys, G. Juzeliūnas, E. Witkowska, *One- and two-axis squeezing via laser coupling in an atomic Fermi-Hubbard model*, arXiv:2204.06065, doi:[10.48550/arXiv.2204.06065](https://doi.org/10.48550/arXiv.2204.06065)
- [9] M. Fadel, T. Zibold, B. Décamps, P. Treutlein, *Spatial entanglement patterns and Einstein-Podolsky-Rosen steering in Bose-Einstein condensates*, Science **360**, 6387 (2018), doi:[10.1126/science.aao1850](https://doi.org/10.1126/science.aao1850).
- [10] A. Periwal, E. S. Cooper, P. Kunkel, J. F. Wienand, E. J. Davis, M. Schleier-Smith, *Programmable interactions and emergent geometry in an array of atom clouds*, Nature **600**, 630–635 (2021), doi:[10.1038/s41586-021-04156-0](https://doi.org/10.1038/s41586-021-04156-0)
- [11] B. K. Malia, Y. Wu, J. Martínez-Rincón, M. A. Kasevich, *Distributed quantum sensing with a mode-entangled network of spin-squeezed atomic states*, arXiv.2205.06382, doi:[10.48550/arXiv.2205.06382](https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.06382).
- [12] M. Gessner, L. Pezzè, and A. Smerzi, *Sensitivity Bounds for Multiparameter Quantum Metrology*, Phys. Rev. Lett. **121**, 130503 (2018), doi:[10.1103/PhysRevLett.121.130503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.130503).
- [13] F. Albarelli, M. Barbieri, M. G. Genoni, I. Gianani, *A perspective on multiparameter quantum metrology: From theoretical tools to applications in quantum imaging*, Phys. Lett. A **384**, 126311 (2020), doi:[10.1016/j.physleta.2020.126311](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2020.126311).
- [14] M. Gessner, A. Smerzi, L. Pezzè, *Multiparameter squeezing for optimal quantum enhancements in sensor networks*, Nat Commun **11**, 3817 (2020), doi:[10.1038/s41467-020-17471-3](https://doi.org/10.1038/s41467-020-17471-3).

- [15] A. Z. Goldberg, L. L. Sánchez-Soto, and H. Ferretti, *Intrinsic Sensitivity Limits for Multiparameter Quantum Metrology*, Phys. Rev. Lett. **127**, 110501 (2021), doi:[10.1103/PhysRevLett.127.110501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.110501).
- [16] M. Fadel, B. Yadin, Y. Mao, T. Byrnes, M. Gessner, *Multiparameter quantum metrology and mode entanglement with spatially split nonclassical spin states*, arXiv.2201.11081, doi:[10.48550/arXiv.2201.11081](https://doi.org/10.48550/arXiv.2201.11081).
- [17] C. Weitenberg, M. Endres, J. Sherson, M. Cheneau, P. Schauß, T. Fukuhara, I. Bloch, S. Kuhr, *Single-spin addressing in an atomic Mott insulator*, Nature **471**, 319–324 (2011), doi:[10.1038/nature09827](https://doi.org/10.1038/nature09827).
- [18] C. F. Ockeloen, R. Schmied, M. F. Riedel, P. Treutlein, *Quantum Metrology with a Scanning Probe Atom Interferometer*, Phys. Rev. Lett. **111**, 143001 (2013), doi:[10.1103/PhysRevLett.111.143001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.143001)
- [19] M. Kitagawa and M. Ueda, *Squeezed spin states*, Phys. Rev. A. **47**, 5138 (1993), doi:[10.1103/PhysRevA.47.5138](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.47.5138).
- [20] L. Pezzè, A. Smerzi, M. K. Oberthaler, R. Schmied, and P. Treutlein, *Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles*, Rev. Mod. Phys. **90**, 035005 (2018), doi:[10.1103/RevModPhys.90.035005](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.035005).
- [21] A. Sinatra, J.-C. Dornstetter, Y. Castin, *Spin squeezing in Bose–Einstein condensates: Limits imposed by decoherence and non-zero temperature*, Front. Phys. **7**, p. 86-97 (2012), doi:[10.1007/s11467-011-0219-7](https://doi.org/10.1007/s11467-011-0219-7).
- [22] Y. Baamara, A. Sinatra, M. Gessner, *Scaling laws for the sensitivity enhancement of non-Gaussian spin states*, Phys. Rev. Lett **127**, 160501 (2021), doi:[10.1103/PhysRevLett.127.160501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.160501).
- [23] Y. Baamara, A. Sinatra, M. Gessner, *Squeezing of nonlinear spin observables by one axis twisting in the presence of decoherence: An analytical study*, Comptes Rendus. Physique, **23**, 1-26 (2022), doi:[10.5802/crphys.103](https://doi.org/10.5802/crphys.103).
- [24] E. Davis, G. Bentsen and M. Schleier-Smith, *Approaching the Heisenberg Limit without Single-Particle Detection*, Phys. Rev. Lett. **116**, 053601 (2016), doi:[10.1103/PhysRevLett.116.053601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.053601).
- [25] S. Ragy, M. Jarzyna, and R. Demkowicz-Dobrzański, *Compatibility in multiparameter quantum metrology*, Phys. Rev. A **94**, 052108 (2016), doi:[10.1103/PhysRevA.94.052108](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.94.052108).