



HAL
open science

Analyse dynamique de la tour Taipei 101

Guillaume Debregeas, Paul Chombart

► **To cite this version:**

Guillaume Debregeas, Paul Chombart. Analyse dynamique de la tour Taipei 101. [0] Utc compiègne. 2022. hal-03721076

HAL Id: hal-03721076

<https://hal.science/hal-03721076>

Submitted on 12 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse dynamique de la tour Taipei 101

Partie 1

Guillaume DEBREGES, Paul CHOMBART

Résumé—Ce document concerne l'étude dynamique de la tour Taipei 101. La première partie porte sur le calcul des modes et fréquences propres de la tour à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz, tenant compte de la présence ou non d'un absorbeur passif de vibrations. La seconde partie présente l'analyse par éléments finis de la réponse spectrale et temporelle de la tour durant une sollicitation par un séisme et un typhon.

I. INTRODUCTION

Ce rapport porte sur l'étude dynamique de la tour Taipei 101, à Taïwan. Cette tour haute de 509,2 mètres est la 6ème plus haute du monde. Sa situation géographique l'expose aux tremblements de terre ou encore aux typhons, c'est pourquoi l'architecture a été imaginée pour résister à ces contraintes. Un absorbeur de vibration passif a été placé dans la tour, sous la forme d'un pendule géant suspendu sur 4 étages qui oscille en opposition de phase par rapport à la tour. Dans cette première partie de l'étude, nous avons tout d'abord modélisé la structure simplifiée de la tour. Nous avons alors pu, à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz, déterminer les fréquences propres et déformées modales associées. Enfin, nous avons ajouté au modèle l'absorbeur passif afin de mesurer son impact sur les fréquences propres et les déformées modales de la tour.

II. ETUDE DE LA TOUR SANS ABSORBEUR PASSIF

A. Modèle de la structure de la tour

Nous étudions la tour en flexion autour d'un axe (ici \vec{x}) perpendiculaires à la longueur principale de la poutre selon \vec{z} . Les éléments que nous considérons dans cette étude sont les poutres verticales ainsi que les planchers des 101 étages qui composent la tour. La position des poutres, leur géométrie et leurs compositions sont principalement issues des références [1] et [2].

Afin de simplifier l'étude, la rigidité des plancher n'est pas prise en compte, en revanche leur masse est assimilée à des masses ponctuelles. De plus, les étages reliant chaque poutre entre elles, la tour peut alors être assimilée à une seule poutre de Bernoulli.

La tour est constituée de 36 colonnes de 4 types placées de manière symétrique par rapport aux deux axes de flexion. Les calculs réalisés selon un axe seront donc valables selon l'autre axe. Ces colonnes ont une section très faible par rapport à leur longueur, nous les considérerons donc comme des poutres de Bernoulli. Les colonnes sont toutes de section rectangulaire creuse en acier et parfois remplies de béton à l'intérieur selon les étages. L'écartement au centre de la tour

et la section des colonnes varient selon les étages de la tour. Les caractéristiques des deux matériaux utilisés dans cette étude sont les suivants :

Acier :

- Module de Young = 270 000 Mpa
- Coefficient de poisson = 0,29
- Masse volumique = 7850 kg.m⁻³

Béton :

- Module de Young = 30 000 Mpa
- Coefficient de poisson = 0,30
- Masse volumique = 2500 kg.m⁻³

B. Degrés de libertés et fonctions de formes

Nous avons réalisé l'étude dynamique avec quatre degrés de liberté que nous noterons q_i . Ces degrés de libertés sont non physiques et sont fonction du temps.

Le déplacement horizontal de chaque point de la tour selon la méthode de Rayleigh-Ritz se décrit donc comme la somme du produit d'une fonction d'espace (fonction de forme) par une fonction de temps.

$$v(z, t) = \sum \varphi(z)q(t) \quad (1)$$

Nous utiliserons quatre fonctions de forme, celles-ci doivent respecter les critères suivants :

- Linéairement indépendantes entre elles
- De classe au moins C²
- Cinématiquement admissibles

La tour est modélisée par une poutre encastree au sol et libre au sommet. Le déplacement et la rotation au sol doivent être nuls. C'est-à-dire que :

$$v(0, t) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i(0)q_i(0) = 0 \quad (2)$$

$$v_{,z}(0, t) = \sum_{i=1}^4 \varphi_{,zi}(0)q_i(0) = 0 \quad (3)$$

Plus les fonctions de forme sont proches des modes de déformation de la tour, plus le résultat sera proche des déformées réelles. Autrement dit, il est possible d'obtenir des déformées modales réalistes avec peu de fonctions de forme si celles-ci sont pertinemment choisies.

Ainsi, nous avons décidé de choisir des fonctions de forme correspondantes aux solutions analytiques des quatre premiers modes de déformations d'une poutre encastree, de

section et matériau constants. Nous nous sommes appuyés sur les travaux de Martin Träsch [3] pour définir les fonctions de formes conformes à ces conditions cinématiques :

$$\forall j \in [1, 4], \forall z \in [0, H],$$

$$\varphi_j(z) = 1/2 \left[\cosh\left(k_j \frac{z}{H}\right) - \cos\left(k_j \frac{z}{H}\right) - \sigma_j \left(\sinh\left(k_j \frac{z}{H}\right) - \sin\left(k_j \frac{z}{H}\right) \right) \right] \quad (4)$$

Où σ_j est défini tel que :

$$\sigma_j = \frac{\sinh(k_j) - \sin(k_j)}{\cosh(k_j) + \cos(k_j)} \quad (5)$$

k_j est le nombre d'onde naturel de la poutre encastree-libre du mode j :

$$k_j = [1.876, 4.695, 7.855, 10.996]$$

H correspond à la hauteur de la tour.

Ces fonctions respectent bien les critères définis précédemment et valident notamment les équations (2) et (3) :

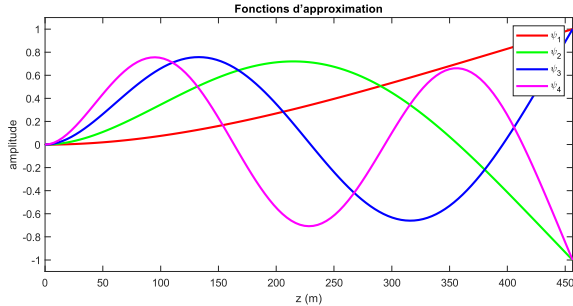


Figure 1: Fonctions d'approximation

Notons pour la suite :

- $\langle \varphi \rangle = [\varphi_1(z) \ \varphi_2(z) \ \varphi_3(z) \ \varphi_4(z)]$
- $q^t = [q_1(t) \ q_2(t) \ q_3(t) \ q_4(t)]$

C. Obtention de la matrice de masse

Le mouvement est régi par l'équation suivante :

$$\mathbb{M}\ddot{q} + \mathbb{C}\dot{q} + \mathbb{K}q = F$$

Pour le calcul des modes, F est nul et \mathbb{C} est négligé. Afin de déterminer la matrice masse \mathbb{M} , nous devons calculer l'énergie cinétique de la tour constituée des colonnes et des planchers. Nous avons fait le choix de faire une approche masse concentrée.

La tour est donc modélisée par des masses ponctuelles à chaque étage, réparties le long de la hauteur de la tour auxquelles on ajoute la masse des planchers propre à chaque étage. Le calcul sur le logiciel Excel de la masse concentrée équivalente par étage et par poutre donne le résultat suivant :

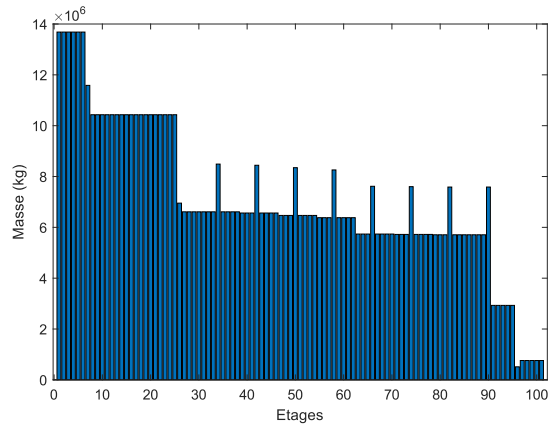


Figure 2 : Masse concentrée équivalente des poutres et du plancher, par étage

Les résultats de ces calculs ont ensuite été importés dans Matlab à l'aide de la commande :

`[vecteur1,vecteur2,vecteur3]=readvars('nom_du_document_Excel.xlsx')`

Les trois vecteurs récupérés sont les suivants :

- Masses concentrées par étage
- Moments quadratiques des poutres en aciers par étage
- Moments quadratiques des poutres en béton par étage

Afin de déterminer l'énergie cinétique, nous séparons le calcul en trois parties, correspondantes aux trois hauteurs d'étages différentes :

$$2E_c = 2E_{c1} + 2E_{c2} + 2E_{c3} \quad (7)$$

Avec :

$$2E_{c1} = \sum_{i=1}^{i=7} \dot{q}^t \cdot m_{eq,i} \cdot \langle \varphi(6,4i) \rangle^t \cdot \langle \varphi(6,4i) \rangle \cdot \dot{q} \quad (8)$$

$$2E_{c2} = \sum_{i=8}^{i=95} \dot{q}^t \cdot m_{eq,i} \cdot \langle \varphi(44,8 + 4,2(i-7)) \rangle^t \cdot \langle \varphi(44,8 + 4,2(i-7)) \rangle \cdot \dot{q} \quad (9)$$

$$2E_{c3} = \sum_{i=96}^{i=101} \dot{q}^t \cdot m_{eq,i} \cdot \langle \varphi(414,4 + 7(i-95)) \rangle^t \cdot \langle \varphi(414,4 + 7(i-95)) \rangle \cdot \dot{q} \quad (10)$$

Avec $m_{eq,i}$ la masse équivalente des poutres et colonnes de l'étage i . De plus :

$$2E_c = \dot{q}^t \cdot \mathbb{M}_{Masse} \cdot \dot{q} \quad (11)$$

On obtient donc par identification la matrice masse du système étudié. Cette matrice est symétrique, cependant, les approximations informatiques peuvent « casser » cette symétrie, ainsi, la nouvelle matrice de masse est définie :

$$\mathbb{M} = \frac{\mathbb{M}_{Masse}^t + \mathbb{M}_{Masse}}{2} \quad (12)$$

Après calcul sur Matlab, on obtient :

$$\mathbb{M} = 10^7 \begin{bmatrix} 10.8 & 5.14 & -3.04 & 2.46 \\ 5.14 & 14.4 & 4.78 & -1.27 \\ -3.04 & 4.78 & 17.0 & 5.16 \\ 2.46 & -1.27 & 5.16 & 18.7 \end{bmatrix} \quad (13)$$

D. Obtention de la matrice de rigidité

Afin de calculer la matrice de rigidité \mathbb{K} , nous avons déterminé l'expression de l'énergie de déformation de la tour en flexion, de plus :

$$2E_d = q^t \cdot \mathbb{K} \cdot q \quad (14)$$

On obtiendra donc par identification la matrice de rigidité \mathbb{K} . Dans le cas d'une poutre en flexion :

$$2E_d = q^t \cdot \int_0^L (EI)(z) \langle \varphi_{,z}(z) \rangle^t \langle \varphi_{,z}(z) \rangle dz \cdot q \quad (15)$$

Le produit EI est une fonction de z en raison de la variation de la composition du nombre de colonnes, de leur géométrie et de leur composition. Nous avons alors considéré que les poutres en acier remplies de béton étaient l'équivalent de deux poutres distinctes, l'une en béton et l'autre en acier. Ce qui revient à sommer la matrice de rigidité liée à la contribution de l'acier avec la matrice de rigidité liée à la contribution du béton. Il a donc fallu déterminer la valeur du produit EI par étage et par composition des poutres. Ainsi, pour chaque étage, on calcule $(EI)_{acier}$ et $(EI)_{béton}$. Nous avons par la suite déplacé chaque moment quadratique sur la ligne neutre de la tour à l'aide du théorème de transport de Huygens

$$I_{\Delta} = I_{\Delta'} + Sd^2 \quad (16)$$

Cette valeur est ensuite multipliée par le module de Young correspondant. L'ensemble des calculs ont été réalisés sur le logiciel Excel :

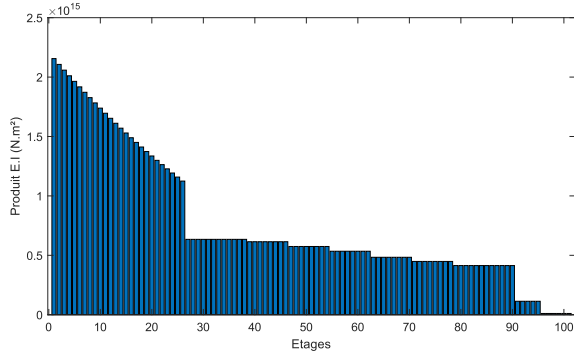


Figure 3 : Produit E.I (Acier) en fonction des étages

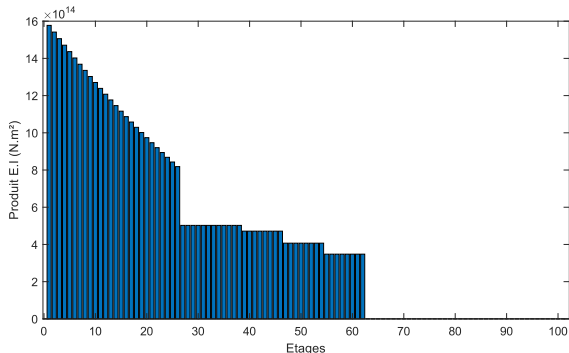


Figure 4 : Produit E.I (Béton) en fonction des étages

Ainsi :

$$2E_d = 2E_{d1} + 2E_{d2} + 2E_{d3} \quad (17)$$

Avec :

$$2E_{d1} = q^t \sum_{i=1}^{i=7} \left(\int_{6,4(i-1)}^{6,4i} EI_{acier}(i) \langle \varphi_{,z}(z) \rangle^t \langle \varphi_{,z}(z) \rangle dz \right) \cdot q \quad (18)$$

$$2E_{d2} = q^t \sum_{i=8}^{95} \left(\int_{44,8+4,2(i-8)}^{44,8+4,2(i-7)} EI_{acier}(i) \langle \varphi_{,z}(z) \rangle^t \langle \varphi_{,z}(z) \rangle dz \right) \cdot q \quad (19)$$

$$2E_{d2} = q^t \sum_{i=96}^{101} \left(\int_{414,4+7(i-96)}^{414,4+7(i-95)} EI_{acier}(i) \langle \varphi_{,z}(z) \rangle^t \langle \varphi_{,z}(z) \rangle dz \right) \cdot q \quad (20)$$

De manière analogue :

$$2E_{d1} = q^t \sum_{i=1}^{i=7} \left(\int_{6,4(i-1)}^{6,4i} EI_{béton}(i) \langle \varphi_{,z}(z) \rangle^t \langle \varphi_{,z}(z) \rangle dz \right) \cdot q \quad (21)$$

$$2E_{d2} = q^t \sum_{i=8}^{95} \left(\int_{44,8+4,2(i-8)}^{44,8+4,2(i-7)} EI_{béton}(i) \langle \varphi_{,z}(z) \rangle^t \langle \varphi_{,z}(z) \rangle dz \right) \cdot q \quad (22)$$

$$2E_{d2} = q^t \sum_{i=96}^{101} \left(\int_{414,4+7(i-96)}^{414,4+7(i-95)} EI_{béton}(i) \langle \varphi_{,z}(z) \rangle^t \langle \varphi_{,z}(z) \rangle dz \right) \cdot q \quad (23)$$

Par identification nous obtenons \mathbb{K}_{acier} et $\mathbb{K}_{béton}$ que nous sommes puis symétrisons par une méthode équivalente à l'équation (12). Nous obtenons alors la matrice finale \mathbb{K} .

$$\mathbb{K} = 10^8 \begin{bmatrix} 0.81 & 1.85 & 2.02 & 1.23 \\ 1.85 & 20.0 & 25.9 & 18.3 \\ 2.02 & 25.9 & 132 & 141 \\ 1.23 & 18.3 & 141 & 523 \end{bmatrix} \quad (24)$$

E. Résolution du problème aux valeurs propres

Maintenant que les matrices masses et raideurs sont connues, nous pouvons calculer les pulsations propres de notre système à l'aide de l'équation suivante :

$$\det(\mathbb{K} - w^2 \mathbb{M}) = 0 \quad (25)$$

On obtient ainsi les quatre premières pulsations et les quatre premières fréquences propres :

$$w[\text{rad. s}^{-1}] = [0.798 \ 3.643 \ 8.685 \ 17.781] \quad (26)$$

$$f[\text{Hz}] = [0.127 \ 0.580 \ 1.382 \ 2.83] \quad (27)$$

La fréquence fondamentale $f_1 = 0.127 \text{ Hz}$ est proche de la fréquence $f_1' = 0.15 \text{ Hz}$ mesurée durant le séisme de Tōhoku en 2011 [4]. Les autres fréquences mesurées s'éloignent plus de nos résultats bien que les ordres de grandeur soient relativement similaires. Toutefois, il est à noter que notre modèle ne prend en compte que des modes de flexions tandis que les mesures réalisées lors du séisme notamment peuvent correspondre à d'autres types de déformées (torsion notamment).

Après avoir calculé les différentes pulsations propres (au carré) solutions de l'équation précédente, nous pouvons écrire l'équation suivante afin de trouver les vecteurs propres :

$$\forall i \in [1,4], \quad [\mathbb{K} - w_i^2 \mathbb{M}] \phi_i = 0 \quad (28)$$

Sous Matlab, ce processus se fait automatiquement à l'aide de la commande $\text{eig}(\mathbb{K}, \mathbb{M})$. Afin d'interpréter les résultats, les déformées modales sont tracées pour chaque mode. Notons $V_j(z)$ la déformée modale de la tour concernant le mode j .

$$\forall z \in [0, H], \quad V_j(z) = \langle \varphi(z) \rangle \cdot \phi_j \quad (29)$$

Nous obtenons les déformées modales suivantes.

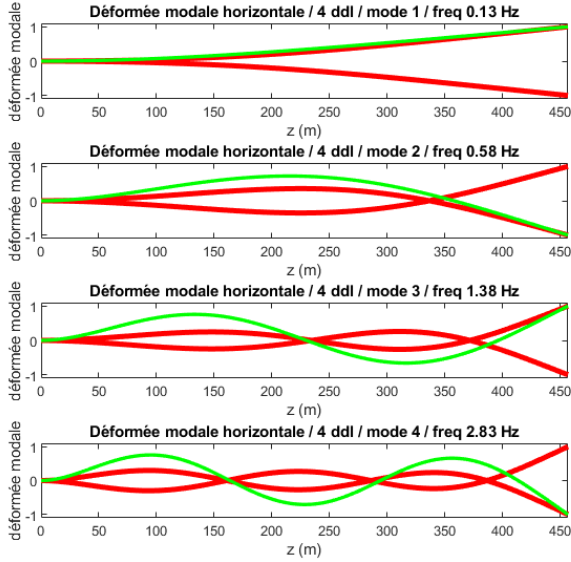


Figure 5 : Déformée modale de la tour en fonction de la distance

A chaque mode i , a été tracée en vert la fonction de forme $\varphi_i(z)$ sur la Figure 5. On peut ainsi voir que les courbes des déformées modales sont très proches de leur fonction de forme « associée ».

III. ETUDE DE LA TOUR AVEC ABSORBEUR PASSIF

Dans un second temps et afin que notre modèle se rapproche le plus possible de la réalité, l'absorbeur passif a été ajouté dans les model.

A. Modèle de la structure de la tour

L'absorbeur passif est composé d'un pendule avec une masse m_a de 660 tonnes. La masse est également reliée à des amortisseurs. Ce modèle cherche à « absorber » le plus possible le premier mode de vibration de la tour, de ce fait la longueur du pendule a été calculée de telle façon à ce que sa fréquence d'oscillation soit égale à la fréquence du premier mode, de manière à le compenser.

Dans un souci de simplification du système nous avons décidé de ne pas modéliser un système pendule mais plus simplement un système masse ressort qui oscille suivant une direction perpendiculaire à la tour et ce afin de réduire la déformée du premier mode. Ce système masse ressort se situe au 88ème étage à 385m de haut, là où est concentrée la masse du pendule. Ainsi, le système est le même que le paragraphe II à l'exception de l'ajout d'un ressort perpendiculaire à l'axe \vec{z} . Le ressort est fixé d'un côté à la tour à l'étage 88 et de l'autre à la masse m_a .

Afin d'atténuer le 1er mode w_1 de la tour, il est nécessaire que la raideur k_a du ressort soit égale à :

$$k_a = m_a w_1^2 \quad (30)$$

Cette équation est valable uniquement si $m_a \ll m_{tour}$ ce qui est bien le cas ici, la tour étant plus lourde que l'absorbeur d'un facteur 10^3 . On obtient donc :

$$k_a = 660 \cdot 10^3 \cdot 0,798^2 \simeq 4,2 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \quad (31)$$

B. Degrés de libertés et fonctions de formes

Soit B le centre de la masse m , A un point fixé sur la fibre neutre de la tour à l'étage 88 et $u(t)$ le déplacement horizontal de la masse m par rapport à A, $u(t)$ représente donc la longueur du ressort, c'est le 5ème degré de liberté du système. On définit la vitesse horizontale du point B par rapport au repère général :

$$V_B(t) = V_A(t) + u'(t) \quad (32)$$

$$V_B(t) = \langle \varphi(385) \rangle \cdot \dot{q} + u'(t) \quad (33)$$

Notons pour la suite :

- $\langle \varphi_{tour} \rangle = [\varphi_1(z) \ \varphi_2(z) \ \varphi_3(z) \ \varphi_4(z) \ 0]$
- $\langle \varphi_{absorb} \rangle = [\varphi_1(385) \ \varphi_2(385) \ \varphi_3(385) \ \varphi_4(385) \ 1]$
- $q^t_{tot} = [q_1(t) \ q_2(t) \ q(t) \ q_4(t) \ u(t)]$

Ainsi :

$$V_B(t) = \langle \varphi_{absorb} \rangle \cdot q^t_{tot} \quad (34)$$

C. Obtention de la matrice de masse

On définit la nouvelle énergie cinétique totale du système égale à l'énergie cinétique E_c du paragraphe II combinée à la contribution de la masse m_a :

$$2E_{cTot} = 2E_c + 2E_{absorb} \quad (35)$$

La matrice de masse du paragraphe II doit être modifiée pour que celle-ci soit de taille 5×5 .

$$\mathbb{M} = 10^7 \begin{bmatrix} 10.8 & 5.14 & -3.04 & 2.46 & 0 \\ 5.14 & 14.4 & 4.78 & -1.27 & 0 \\ -3.04 & 4.78 & 17.0 & 5.16 & 0 \\ 2.46 & -1.27 & 5.16 & 18.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Afin d'obtenir la matrice de masse totale, il convient ensuite de sommer \mathbb{M} à la matrice \mathbb{M}_{absorb} que nous allons calculer ci-dessous. Dans le cadre des petits mouvements, l'énergie de rotation de la masse est négligée.

$$2E_{absorb} = m_a \cdot V_B(t)^2 \quad (37)$$

$$2E_{absorb} = m_a \cdot (\langle \varphi_{absorb} \rangle \cdot q^t_{tot})^2 \quad (38)$$

$$2E_{absorb} = q^t_{tot} \cdot m_a \cdot \langle \varphi_{absorb} \rangle^t \cdot \langle \varphi_{absorb} \rangle \cdot q_{tot} \quad (39)$$

$$2E_{absorb} = q^t_{tot} \cdot \mathbb{M}_{absorb} \cdot q_{tot} \quad (40)$$

La matrice de masse totale est :

$$\mathbb{M}_{Tot} = \mathbb{M} + \mathbb{M}_{absorb} \quad (41)$$

$$\mathbb{M}_{Tot} = 10^5 \begin{bmatrix} 1080 & 514 & -304 & 246 & 5.18 \\ 514 & 1444 & 478 & -127 & -1.73 \\ -304 & 478 & 1700 & 516 & -1.03 \\ 246 & -127 & 5160 & 1870 & 3.16 \\ 5.18 & -1.73 & -1.03 & 3.16 & 6.6 \end{bmatrix} \quad (42)$$

On remarque que seule la dernière ligne et la dernière colonne sont modifiées ce qui est cohérent.

D. Obtention de la matrice de rigidité

Similairement à l'équation (36), la matrice de rigidité sans absorbeur est modifiée afin que sa taille soit de 5×5 , à l'aide de colonnes « à droite » et de lignes de 0 « en bas ». On a de plus :

$$2E_{dTot} = 2E_c + 2E_{absorb} \quad (43)$$

$$2E_{absorb} = k_a \cdot u(t)^2 \quad (44)$$

$$2E_{absorb} = u(t)^t \cdot k_a \cdot u(t) \quad (45)$$

La matrice de rigidité totale est alors :

$$\mathbb{K}_{Tot} = \mathbb{K} + \mathbb{K}_{absorb} \quad (46)$$

$$\mathbb{K}_{Tot} = 10^5 \begin{bmatrix} 0.81 & 1.85 & 2.02 & 1.23 & 0 \\ 1.85 & 20.0 & 25.9 & 18.3 & 0 \\ 2.02 & 25.9 & 132 & 141 & 0 \\ 1.23 & 18.3 & 141 & 523 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_a \end{bmatrix} \quad (47)$$

E. Résolution du problème aux valeurs propres

La résolution du problème se fait de manière analogue au paragraphe II :

$$\det(\mathbb{K}_{Tot} - w^2 \mathbb{M}_{Tot}) = 0 \quad (48)$$

On obtient ainsi les cinq premières pulsations et les cinq premières fréquences propres et les vecteurs propres :

$$w[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}] = [0.772 \ 0.8241 \ 3.642 \ 17.78] \quad (49)$$

$$f'[\text{Hz}] = [0.123 \ 0.131 \ 0.580 \ 1.382 \ 2.83] \quad (50)$$

$$\forall i \in [1,5], \quad [\mathbb{K}_{Tot} - w_i^2 \mathbb{M}_{Tot}] \phi_i = 0 \quad (51)$$

On rappelle les fréquences trouvées dans le paragraphe II :

$$f[\text{Hz}] = [0.127 \ 0.580 \ 1.382 \ 2.83] \quad (52)$$

En analysant ϕ_i , on remarque que le premier mode correspond à un mode de flexion dans lequel la tour et le ressort se déplacent en phase. Le deuxième mode correspond lui aussi à un mode de flexion mais dans lequel les déplacements de la tour et du ressort sont en opposition de phase. Ces comportements sont cohérents car la raideur du ressort a été calculée afin d'obtenir cet effet.

La première fréquence propre $f'1$ correspond à la nouvelle période fondamentale de la tour, celle-ci est très proche de la période $f1$ trouvée dans le paragraphe II. Les fréquences $f'3$ à $f'5$ sont également quasiment identiques aux fréquences $f2$ à $f4$ de la tour sans absorbeur. Ainsi, l'absorbeur impacte peu les pulsations propres de la tour.

Le rôle de l'absorbeur étant de limiter la déformé de la

tour durant des sollicitations sismiques, il faudrait calculer la réponse $v(z, t)$ de la tour afin de s'assurer de la validité de notre modèle. En effet, les déformées modales étant normées, il est difficile de voir le rôle de l'amortisseur ainsi. On peut tout de même les tracer afin de voir que celle-ci sont très proches des résultats obtenus au paragraphe II.

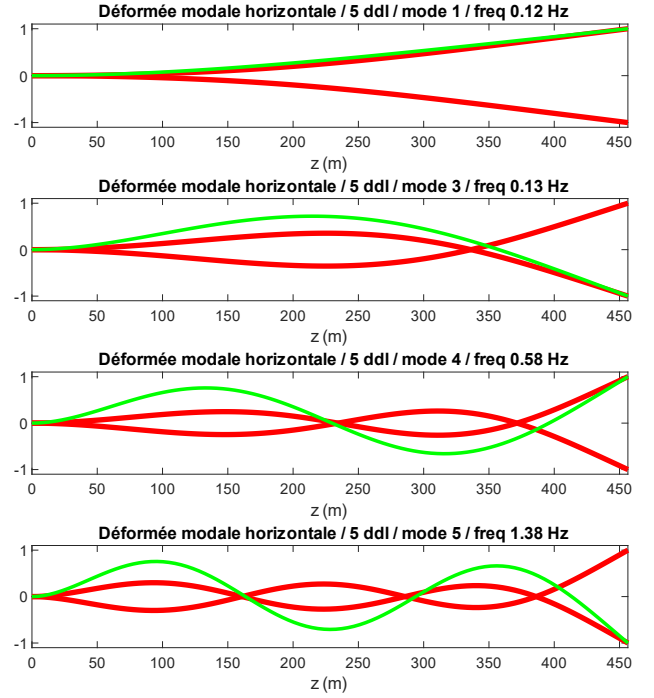


Figure 6 : Déformée modale de la tour en fonction de la distance

On notera que la déformée du mode 2 n'a pas été affichée car la déformée est très proche du mode 1.

IV. CONCLUSION

En conclusion, les fréquences propres et les déformées modales trouvées semblent cohérentes avec les mesures empiriques. Cependant, l'efficacité de l'absorbeur ne peut être évaluée qu'en étudiant la réponse de la tour face à différents cas de charge, ce qui est l'objet de la partie 2.

Partie 2

Réponse spectrale et temporelle par éléments finis

Guillaume DEBREGES, Paul CHOMBART

Résumé— Cette seconde partie présente l'analyse par éléments finis de la réponse spectrale et temporelle de la tour durant une sollicitation par un séisme et un typhon.

I. INTRODUCTION

Dans cette seconde partie, nous allons étudier à l'aide de la méthode des éléments finis, la réponse de la structure face à un séisme El Centro mais également face à un Typhon, en régime transitoire et permanent. Notre modèle sera créé et calculé sur Abaqus. Nous avons tout d'abord abordé le problème de la tour de Taipei par un modèle d'une seule poutre 1D équivalente, avec et sans absorbeur passif, qui présente donc des similarités avec le modèle de Ritz réalisé précédemment sur Matlab. Dans un second temps, nous avons modélisé une géométrie plus complexe représentant l'intégralité des poutres ainsi que les planchers en surfacique afin de recréer la forme globale de la tour, encore une fois avec et sans absorbeur. Dans l'ensemble de l'étude, le second modèle sera abusivement appelé "modèle surfacique" tandis que le premier sera nommé "modèle unifilaire". Dans les deux modélisations, l'intégralité du fichier Abaqus.inp été générée à l'aide d'une code Python (Géométrie, modélisation, maillage, assemblage, efforts, masses nodales...). Les deux codes présentent de nombreuses similarités, seul le code de la modélisation surfacique sera sommairement présenté au paragraphe III.

II. MODELE DE LA TOUR 1D

A. Modélisation

a) Géométrie

Le modèle que nous avons retenu pour cette première étude est une poutre 1D proche du modèle réalisé en première partie, mais se déformant en 3D. Notons que, les cas de charge étant tous sur \vec{x} , il aurait été possible de réaliser le modèle uniquement dans le plan, mais il a été décidé de réaliser notre étude en 3D afin de vérifier que les modes de flexion hors plan (\vec{x}, \vec{z}) sont bien négligeables dans la contribution de la réponse de la tour. La structure est donc modélisée par la fibre neutre d'une seule poutre équivalente, considérée comme une poutre de Bernoulli, nous avons dû dimensionner la poutre afin que celle-ci possède le même comportement que la tour de Taipei. Lors de l'étude avec la méthode de Ritz, nous avons calculé les moments quadratiques et les surfaces totales de chaque étage à partir des données géométriques de la tour. Nous avons utilisé ces valeurs pour le calcul des matrices de masse et de raideur avec les produits $\rho \cdot S$ et $E \cdot I$. La valeur de ces produits

nous servira de référence afin de calculer l'aire et le module de Young des sections à chaque étage. Pour cela nous avons tout d'abord fixé de manière pseudo-arbitraire une masse volumique moyenne équivalente, entre celle de l'acier et celle du béton (respectivement 7800 kg.m^{-3} et 2500 kg.m^{-3}). Nous avons choisi 2700 kg.m^{-3} car les données montrent que la masse de béton est beaucoup plus importante que celle de l'acier. Nous obtenons alors $2700 \cdot S = A$ avec A la valeur du produit $\rho \cdot S$ réel trouvée lors de l'étude avec la méthode de Ritz (qui varie selon les étages). Afin de respecter l'équation précédente et en choisissant des sections carrées pleines de côté a , l'équation suivante doit être nécessairement respectée.

$$a = \sqrt{\frac{A}{2700}} \quad (53)$$

Afin de calculer le module de Young équivalent à chaque section, nous avons utilisé la même méthode que précédemment avec B la valeur de référence du produit $E \cdot I$, variant à chaque étage, calculée en partie 1.

$$EI = B \Leftrightarrow E = \frac{12B}{a^4} \quad (54)$$

Enfin, dans le cadre des petits mouvements, les planchers ont été modélisés comme des masses nodales que nous avons placées à chaque étage de la tour. La tour a alors été générée automatiquement sur Python, à l'aide du fichier Excel utilisé en partie 1 qui résumait les différentes variations de géométrie. On obtient la géométrie de la tour suivante.



Figure 7: Géométrie de la tour

b) Maillage

La tour possède 101 étages, le nombre d'éléments minimum du maillage est donc de 101 car chaque étage possède son propre matériau équivalent ainsi qu'une section unique.

Nous avons alors réalisé une étude de convergence sur le nombre d'éléments du maillage pour le calcul des fréquences propres de la tour. Nous avons réalisé un maillage avec 101, 303, 505 et 909 éléments.

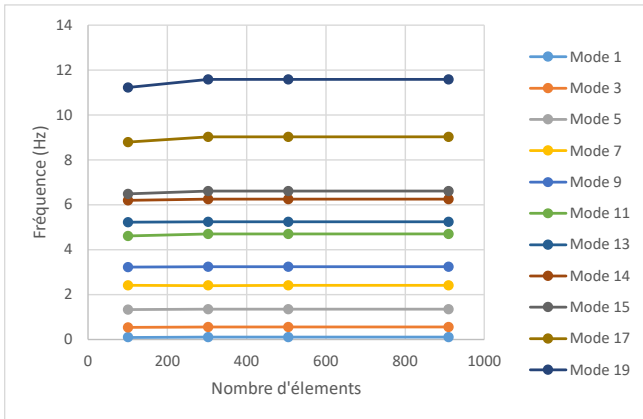


Figure 8 : Fréquences de chaque mode en fonction du nombre d'éléments du maillage

On observe sur la Figure 8 que les fréquences de chaque mode convergent très rapidement. En effet, nous avons une différence de moins de 1% entre 101 éléments et 909 éléments pour les 9 premiers modes. Pour les modes suivants, l'écart avec le maillage à 101 éléments n'excède pas les 3%. Nous avons tout de même retenu 303 éléments et 304 nœuds pour le calcul des fréquences propres afin de trouver un compromis entre temps de calcul et fiabilité des résultats. Nous maillons notre structure avec des éléments *Beam* et la formulation *Cubic Formulation* (éléments B33).

B. Fréquences propres et modes propres

La poutre est encastree à sa base sans amortisseur dynamique pour le calcul des fréquences propres et des modes propres. Les fréquences propres trouvées sont proches de celles calculées en partie 1.



Figure 9 : Premier mode de flexion de la tour - $f = 0.12178$ Hz

C. Comparaison avec le modèle de Ritz

Comparons les fréquences propres des 4 premiers modes du modèle éléments finis avec les 4 premières fréquences propres obtenues avec la méthode de Ritz dans la première partie du projet. Le modèle de la poutre en éléments finis se déformant en 3D nous constatons l'apparition de modes doubles dû à la flexion selon les deux plans orthogonaux au sol. Afin d'être cohérent et de pouvoir comparer avec les fréquences obtenues à l'aide de la méthode de Ritz, nous retiendrons ici les 4 premières fréquences propres de la structure différentes les unes des autres.

Mode	Méthode Eléments finis	Méthode de Ritz	Ecart relatif
1	0,122	0,127	3,9 %
2	0,564	0,580	2,8 %
3	1,360	1,382	1,6 %
4	2,415	2,830	14,6 %

Les fréquences propres sont proches entre les deux méthodes. Notre modèle éléments fini nous permet bien de retomber sur des fréquences propres cohérentes pour notre problème, notamment lorsqu'on les compare à la bibliographie [4].

Les couples de modes (1,2), (3,4), (5,6), (7,8), (9,10), (11,12) sont des modes doubles de flexion avec les mêmes fréquences propres. Ils ont les mêmes déformées mais dans des plans différents : (\vec{x}, \vec{y}) et (\vec{y}, \vec{z}) . Le mode 14 est quant à lui un mode de traction/compression. On remarque que les déformées se complexifient au fur à mesure que les fréquences augmentent avec une augmentation de ventres de vibration notamment.

D. Modélisation de l'absorbeur passif

Similairement à la partie 1, l'absorbeur dynamique est assimilé à un système masse ressort. Le but de l'absorbeur est de réduire l'amplitude de la déformée de la tour lorsqu'elle est excitée par différentes sollicitations. La tour étant plus lourde que l'absorbeur d'un facteur 10^3 , la fréquence propre de ce système masse ressort doit être réglée sur la première fréquence propre de la tour. En effet c'est ce mode en particulier de fréquence très faible pouvant être dévastateur pour ce type de structure qui doit être "amorti" par la présence de l'absorbeur passif de masse m_a . De plus, le contenu fréquentiel de sollicitation étudié sera centré globalement autour du premier mode de flexion de la tour. Le mouvement de la masse se fait selon l'axe \vec{x} perpendiculaire à l'axe de la poutre afin d'amortir les modes de flexion qui sont prépondérants dans la réponse globale de la tour. Pour cela, nous avons joué sur la raideur k du ressort.

$$w = \sqrt{\frac{k}{m_a}} \Rightarrow k = w^2 \cdot m_a \quad (55)$$

$$k = (2 \cdot \pi \cdot 5,68 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 660000 = 387814 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \quad (56)$$

Sur Abaqus, l'amortisseur dynamique peut être modélisé en créant une nouvelle *Part Deformable Point*, à laquelle nous avons appliqué une inertie de 660 tonnes. De plus, nous

avons ajouté une *Boundary Condition* bloquant l'ensemble des mouvements de la masse sauf sur un axe (ici l'axe \vec{x}). Ces conditions aux limites permettent de supprimer l'apparition de modes non désirés tel qu'une translation de la boule dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) . En revanche, ces conditions créent également un comportement non réaliste pour les déplacements de la tour hors plan (\vec{x}, \vec{z}) , cela ne pose cependant pas de problème car comme nous le verrons par la suite, seuls les modes de flexion sur (\vec{x}, \vec{z}) ne sont pas négligeables dans la réponse de la tour face au vent et aux séismes.



Figure 10 : Représentation de l'absorbeur passif modélisé par un ressort sur ABAQUS

E. Modes de vibration

Une fois les détails de modélisation de l'absorbeur réglé, nous pouvons lancer le calcul de la base modale sur Abaqus. Nous constatons que, de manière analogue au calcul de la base modale avec présence de l'amortisseur par la méthode de Ritz, deux modes propres ont enrichi la base modale après l'ajout de l'amortisseur en remplaçant le premier mode de flexion dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) . Ces deux modes se situent autour de la première fréquence propre du mode de flexion sans amortisseur. Le premier mode de fréquence 0.118 Hz correspond à un mode de flexion dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) dans lequel la tour et le ressort se déplacent en phase sur \vec{x} . Le deuxième mode de fréquence 0.126 Hz correspond lui aussi à un mode de flexion dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) mais dans lequel les déplacements de la tour et du ressort sont en opposition de phase sur \vec{x} . Les modes de flexion dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) , inutiles dans cette étude, sont quant à eux susceptibles d'être faussés par l'ajout du ressort, qui agit dans ce plan, mais pour lequel la masse ne peut pas se déplacer.

Pour résumer, l'ajout d'un absorbeur de vibration a pour conséquence la création de deux modes propres situés de part et d'autre de la fréquence propre initiale sans absorbeur. Les calculs de réponses temporelles seront faits à partir de cette nouvelle base modale

F. Modélisation du séisme

Le séisme est modélisé à l'aide du *Step Modal Dynamic* d'Abaqus qui permet, à l'aide de la base modale tronquée, d'obtenir la réponse de la structure en fonction du temps face à un séisme, ici El Centro. Le fichier d'entrée est un accélérogramme que nous avons implémenté sur Abaqus à l'aide de l'outil *base motion*. L'amortissement de la tour sera introduit avec un pourcentage d'amortissement critique 2% identique pour chaque mode.

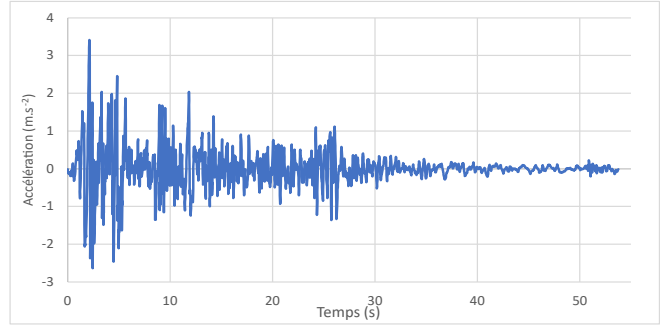


Figure 11 : Accélérogramme du séisme El Centro

L'équation du mouvement à résoudre est la suivante :

$$\mathbb{M}\ddot{q} + \mathbb{C}\dot{q} + \mathbb{K}q = 0 \quad (57)$$

Le séisme étant un chargement inertiel, sa contribution dans l'équation est un vecteur force :

$$\mathbb{M}[\ddot{q} + Xa(t)] + \mathbb{C}\dot{q} + \mathbb{K}q = 0 \quad (58)$$

$$\mathbb{M}\ddot{q} + \mathbb{C}\dot{q} + \mathbb{K}q = -\mathbb{M}Xa(t) \quad (59)$$

Le produit $\mathbb{M}X$ permet de distribuer le chargement uniquement sur les degrés de liberté dont le mouvement est une translation sur l'axe \vec{x} . L'équation du mouvement est projetée dans la base modale :

$$q = \Phi.r(t) \quad (60)$$

Avec r les coordonnées modale, fonction du temps, cela conduit à :

$$\Phi^t \mathbb{M} \Phi \ddot{r} + \Phi^t \mathbb{C} \Phi \dot{r} + \Phi^t \mathbb{K} \Phi r = -\Phi^t \mathbb{M} X a(t) \quad (61)$$

$$\tilde{\mathbb{M}}\ddot{q} + \tilde{\mathbb{C}}\dot{q} + \tilde{\mathbb{K}}q = -\mu_x a(t) \quad (62)$$

Avec μ_x , le vecteur des masses effectives.

a) Troncature modale

Seul les p premiers modes sont conservés, les modes $p + 1$ à n sont inclus sous forme d'une contribution statique :

$$q = \sum_{i=1}^p \Phi_i.r_i(t) + \sum_{i=1}^n \frac{-\Phi_i^t \mu_x a(t)}{\Phi_i^t \tilde{\mathbb{K}} \Phi_i} \Phi_i \sin(\omega t) \quad (63)$$

Le choix de la troncature modale sera basé sur le critère des masses effectives selon l'axe horizontal \vec{x} , correspondant à l'axe de sollicitation du séisme. Un premier calcul sur une courte durée à l'aide des 50 premiers modes, permet d'obtenir un aperçu des masses effectives :

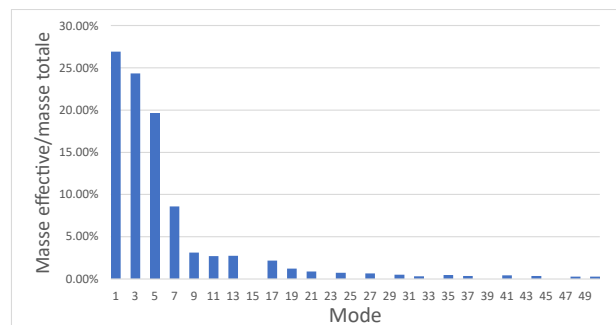


Figure 12 : Masse effective par mode (modèle avec absorbeur)

La totalité des modes ayant une masse effective non nulle sont des modes de flexion dans le plan (\vec{x}, \vec{z}) ce qui est cohérent avec la direction d'application du séisme. Afin de limiter les temps de calcul, il a été choisi de conserver les 37 premiers modes, ce qui correspond à une participation de plus de 95% de la masse dans la direction \vec{x} , ce qui nous semble acceptable.

b) Critère de pas de temps

Afin d'avoir des résultats cohérents et réalistes, nous devons choisir un pas de temps Δt , trois critères seront utilisés :

- Le pas de temps de la réponse doit être inférieur ou égal à celui de l'accélérographe qui est dans notre cas de 0,02s.
- Le pas de temps doit être assez fin pour prendre en compte les modes qui jouent un rôle important dans la réponse à l'excitation. Dans le cas du séisme El Centro, l'excitation est selon l'axe \vec{x} . Le mode 37 étant le mode à la fréquence la plus élevée de notre base modale et dans la direction du séisme, nous devons avoir un pas de temps inférieur à $\frac{1}{(10 \cdot 30,292)} = 0,0033s$ en prenant un minimum de 10 points par sinusoïde.

A. Analyse de l'accélérogramme

Afin d'appréhender au maximum le rôle de l'absorbeur passif et de voir les modes les plus susceptibles d'être excités par le séisme El Centro, nous avons réalisé une transformée de Fourier discrète (TFD) de l'accélérogramme fournie avec les données du projet. Ce calcul a été réalisé sous python à l'aide de l'algorithme de la FFT (Transformée de Fourier rapide) permettant de réaliser le calcul de la TFD à l'aide du module numpy.fft. Le résultat est le suivant :

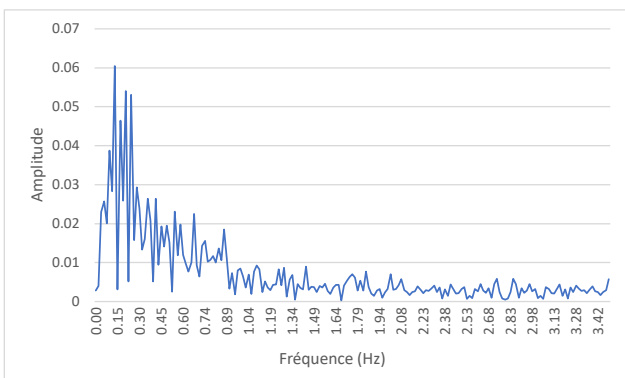


Figure 13 : Transformée de Fourier de l'accélérogramme du séisme El Centro

On observe que jusqu'à 0.2 Hz, l'amplitude de l'accélération est conséquente par rapport au reste des fréquences avec un pic d'amplitude pour une fréquence de 0.13 Hz. Cette plage de fréquence excitera donc le premier mode de flexion de la tour. On voit donc ici la nécessité de l'ajout d'un amortisseur dynamique qui a une fréquence propre réglée sur le premier mode de flexion.

c) Projection de l'accélération sur la base modale

Afin d'évaluer la participation de chaque mode sur la réponse de la tour, la réponse en accélération sur la troncature

modale est projetée. Ci-dessous, uniquement la projection des modes 1, 3, 5 et 7 a été affichée afin de faciliter la lecture, les autres modes ont des participations bien plus faibles. Nous nous sommes également restreints aux 60 premières secondes pour améliorer la lisibilité.

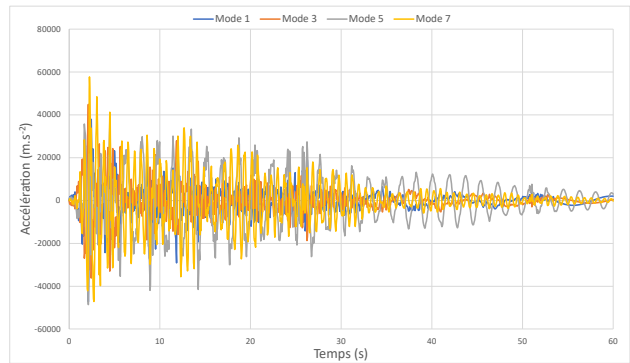


Figure 14 : Projection de l'accélération sur les modes 1, 3, 5 et 7

On voit tout d'abord que toutes les courbes sont continues ce qui conforte notre choix de pas de temps.

d) Analyse des résultats

La réponse de la tour en déplacement à l'étage 95 est la suivante :

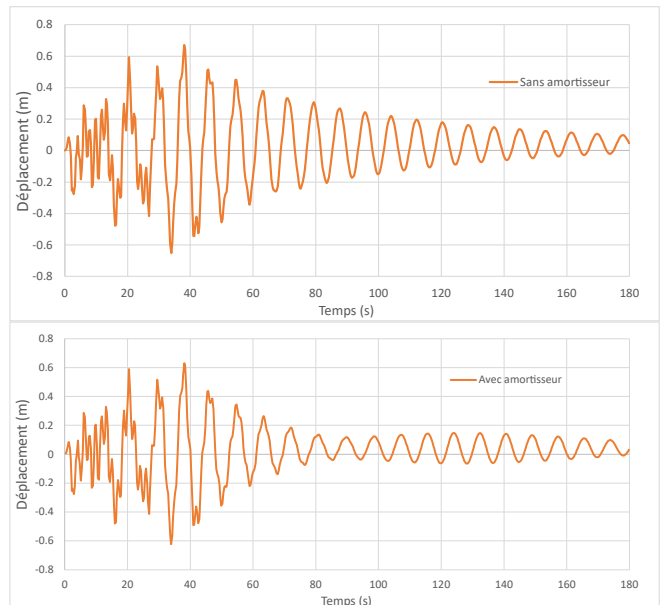


Figure 15 : Amplitude de déplacement de l'étage 95, avec et sans absorbeur

On peut observer que le déplacement du sommet de la tour avec et sans amortisseur est très semblable au début, en phase transitoire. Le déplacement maximum au sommet de la tour est de l'ordre de 0,6 m. L'amortisseur ne joue pas un rôle important dans cette phase, ce qui s'explique probablement par le fait que lors du régime transitoire, la réponse est complexe et la déformée de la tour implique plusieurs modes simultanément. Ce résultat est également potentiellement attribuable à notre modélisation simplifiée de l'amortisseur par rapport au système réel, composé d'un ensemble pendule + vérin. La réponse en régime quasi permanent pour la tour sans amortisseur prend la forme d'une sinusoïde décroissante ce qui s'explique par le pourcentage d'amortissement critique de 2%. Pour la tour avec amortisseur, la réponse en régime permanent est composée princi-

palement des modes 1 et 3, c'est-à-dire des deux premiers modes de flexion dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) dus à la présence de l'absorbeur. On remarque qu'un effet de battement se met en place aux alentours de 90 secondes, en effet l'amplitude de la réponse ré-augmente. Ce battement est dû au fait que les deux fréquences des modes dominants dans la réponse sont très proches ($f=0.118$ Hz et $f=0.126$ Hz).

Bien que faible en régime transitoire, l'amortisseur dynamique a bien un rôle dans l'amortissement de la réponse de la tour. L'amplitude de la réponse avec amortisseur est diminuée. On remarque également un retour à l'équilibre plus rapide pour la réponse avec amortisseur. Afin de faire apparaître plus clairement le contenu fréquentiel du déplacement du haut de la tour lorsque celle-ci est soumise au séisme El Centro, nous avons calculé le spectre du déplacement de la tour avec et sans absorbeur par transformée de Fourier de la même manière que pour le spectre de l'excitation.

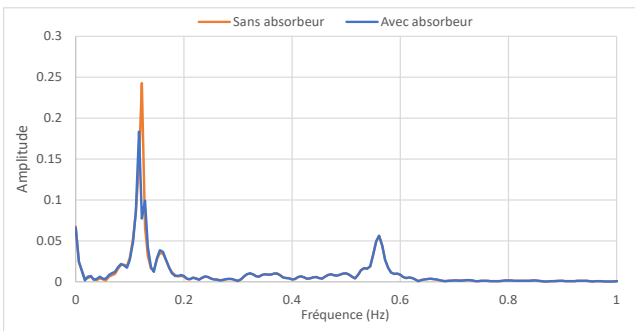


Figure 16 : Spectre du déplacement du haut de la tour

Nous remarquons que sans absorbeur, le spectre de la réponse en déplacement de la tour contient principalement une composante harmonique ayant comme fréquence $f=0.12$ Hz. Le résultat est donc en accord avec l'analyse modale de la tour sans absorbeur faite précédemment car cela correspond au premier mode de flexion de la tour sans absorbeur. Aussi, il est cohérent que ce soit l'une des seules composantes harmoniques présentes dans le spectre car l'analyse de Fourier du séisme El Centro a révélé que l'excitation était maximale pour une fréquence de 0.13 Hz et qu'ensuite elle devenait négligeable après 0.20 Hz.

De plus, l'analyse du spectre de la réponse en déplacement de la tour après ajout de l'absorbeur nous amène à deux constats. Le premier est que dans la globalité du contenu fréquentiel de la réponse, les amplitudes ont diminué. L'efficacité de l'absorbeur est donc visible ici. Enfin, nous voyons apparaître la transformation du pic centré autour de la fréquence $f=0.12$ Hz en deux pics centrés autour des fréquences égales à 0.11 Hz et 0.12 Hz. Ceci explique donc le phénomène de battement présent dans la réponse temporelle du déplacement du haut de la tour avec absorbeur et concorde avec l'enrichissement de la base modale après ajout de l'absorbeur.

La réponse de la tour en accélération à l'étage 95 est la suivante :

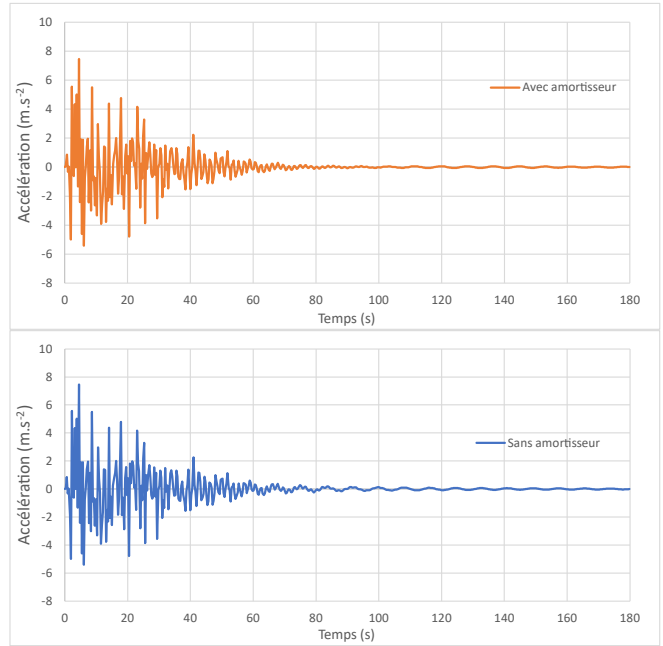


Figure 17 : Accélération du sommet de la tour en fonction du temps avec et sans amortisseur

Concernant la réponse en accélération du sommet de la tour, nous observons que l'impact du ressort est négligeable. En effet, les deux courbes sont similaires tant au niveau du temps de retour à une accélération nulle qu'au niveau des amplitudes. L'amplitude d'accélération maximale, d'environ $7,5 \text{ m.s}^{-2}$ est très importante, bien supérieure aux ordres de grandeur trouvés par l'étude [5] durant le séisme de Wenchuan, dans lequel l'accélération au sommet de la tour était d'environ 0.0129 m.s^{-2} . En revanche, l'accélération au sol était bien plus faible, environ 0.012 m.s^{-2} contre 3.42 m.s^{-2} dans notre étude, il est donc difficile de conclure quant au réalisme de nos résultats à l'aide de la littérature sur la tour de Taïpei, car l'accélérogramme utilisé dans notre étude est bien plus extrême. Toutefois, l'accélération maximale à l'étage 95 est du même ordre de grandeur que l'accélérogramme ce qui est rassurant.

Notons que malgré une amplitude en accélération très importante, la variable la plus limitante dans le dimensionnement d'une structure en génie civil est la contrainte évoluant dans la structure et celle-ci est fonction du déplacement de la tour. Or, la Figure 15 indique que le déplacement au sommet de la tour est inférieur au mètre, ce qui semble tout à fait cohérent et acceptable, bien qu'il faudrait récupérer les contraintes dans la structure afin de s'en assurer, ce qui n'a pas été effectué dans cette étude. Les accélérations peuvent toutefois impacter la loi de comportement des matériaux utilisés, avec l'apparition d'un facteur de majoration dynamique, mais les ordres de grandeur des limites élastiques et à la rupture du béton restent tout de même similaires [6], les résultats en déplacement sont donc rassurants.

G. Modélisation du vent

Nous allons maintenant nous intéresser à la réponse de la tour lors d'une excitation par du vent. La charge dynamique du vent est définie par :

$$q(z, t) = \rho_{\text{air}} \cdot B(z) \cdot v(z)^2 \cdot f(t) \quad (64)$$

Nous avons calculé la vitesse de la rafale de vent pour les 101 étages à l'aide de l'expression du gradient de vitesse selon l'altitude.

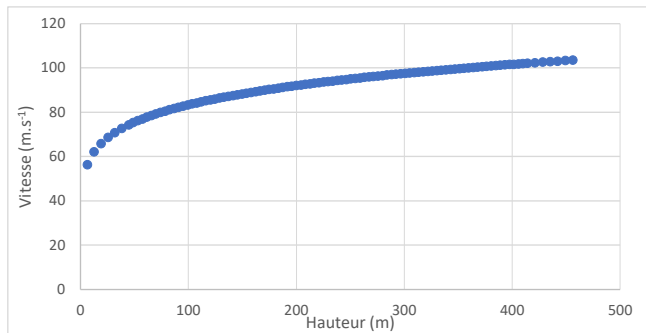


Figure 18 : Amplitude par mètre par seconde de la force du vent par étage de la tour

La valeur de la charge dynamique est également fonction de la largeur de la tour. Celle-ci varie en fonction de l'altitude également. Nous avons finalement calculé la valeur de la charge dynamique en fonction de l'altitude sur Excel.

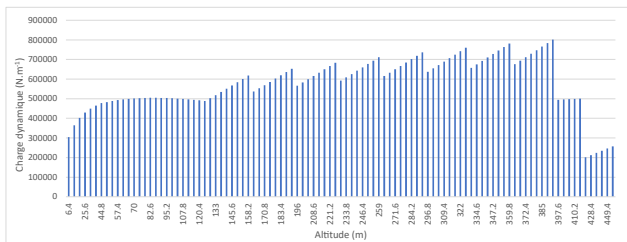


Figure 19 : Charge dynamique en fonction de l'altitude

Ensuite, à l'aide du programme Python, nous avons pu importer directement les valeurs de charge dynamique moyenne du vent pour chaque étage sur Abaqus. La force du vent est alors considérée comme une série de *Concentrated Force* sur chaque étage. Nous aurions pu utiliser l'outil *Analytical Fields* d'Abaqus afin d'obtenir un chargement continu et plus réaliste, mais nous avons estimé qu'un chargement discret en 101 éléments constants constituait une très bonne approximation et était plus rapide à modéliser.

a) Réponse de la tour à une rafale de vent en régime transitoire

Dans un premier temps, nous avons modélisé une rafale de vent pendant une durée de 3 secondes. La fonction de temps pendant cet intervalle est égale à 1. Comme pour le séisme, nous allons utiliser le step *Modal Dynamics* afin de simuler la réponse temporelle de la tour avec un pas de temps de 0.007 secondes.

Notre modèle étant constitué de 304 nœuds qui chacun possèdent 6 ddl, le nombre de fréquences propres du modèle est très élevé. Comme pour l'excitation du séisme, nous avons réalisé une troncature modale afin d'étudier la réponse de la tour au vent avec les modes participant le plus à la réponse de la tour. Nous avons calculé la réponse de la tour avec l'absorbeur dynamique avec plusieurs troncatures modales composées d'un nombre de modes différents : 5, 10, 20, 30, 40 et 50 modes.

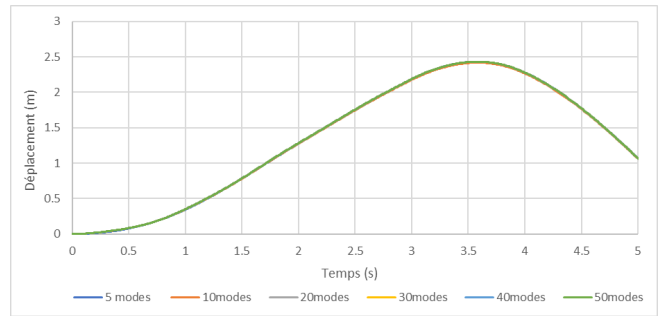


Figure 20 : Déplacement du haut de la tour en fonction du temps pour une troncature de 5 à 50 modes

On observe que les courbes de déplacement du sommet de la tour sont confondues. La force du vent provoque une réponse de la tour moins complexe et fait intervenir moins de modes que celle du séisme. Le vent va engendrer principalement une flexion simple dans le plan du vent (\vec{x}, \vec{y}), ce qui est très proche des déformées des 5 premiers modes. En régime transitoire, il suffit donc de 5 modes pour décrire précisément le déplacement de la tour.

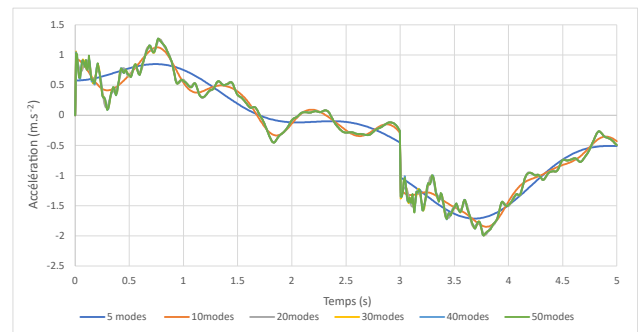
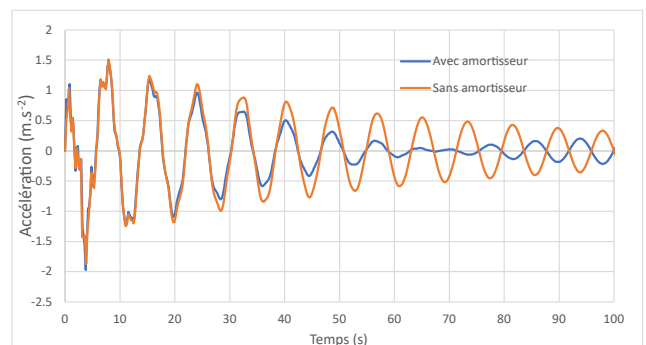


Figure 21 : accélération du haut de la tour en fonction du temps pour différentes troncatures modales

Sans surprises, une troncature modale plus complète est nécessaire pour décrire l'accélération. En effet, la réponse en accélération de la tour fait intervenir plus de modes. On observe sur la Figure 21 qu'une troncature à 5 modes ne décrit que très partiellement l'accélération du haut de la tour. Les courbes des troncatures de 30, 40 et 50 modes sont ici confondues. 30 modes sont alors suffisants pour décrire avec précision la réponse de la tour en accélération et à fortiori en déplacement.

Nous pouvons ainsi calculer la réponse de la tour sur une durée de 100 secondes avec 30 modes.



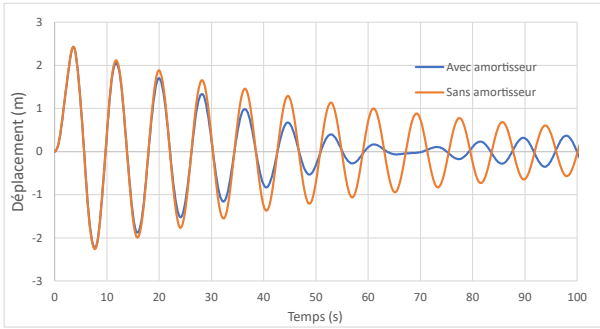


Figure 22 : Amplitude du déplacement et accélération du haut de la tour en fonction du temps

L'accélération maximale enregistrée est de 1.5 m.s^{-2} ce qui semble être un ordre de grandeur important. A titre d'exemple, le l'article suivant [7] annonce une accélération maximale mesurée à l'étage 101 durant les typhons Masta et Talim de 0.077 m.s^{-2} . Toutefois, le typhon utilisé dans notre étude est associé à une période de retour de 50 ans, contre six mois dans l'étude citée précédemment, qui n'indique pas la vitesse de vent associée, il est donc difficile de conclure quant à la pertinence de nos résultats.

Mis à part l'ordre de grandeur, les courbes semblent cohérentes, l'amortisseur possède une efficacité modérée mais non négligeable, cette efficacité est d'autant plus importante à partir d'environ 30 secondes, durant les oscillations libres de la tour. Cela semble cohérent car l'oscillation libre visible sur les Figure 22 a, sans surprises, une fréquence très proche de celle de la période fondamentale de la tour, c'est précisément à ces fréquences que nous nous attendons à voir un effet à l'aide de l'amortisseur. Nous pouvons également noter le phénomène de battement bien visible à partir d'environ 65 secondes pour l'accélération comme pour le déplacement. Concernant la réponse en déplacement, l'amplitude maximale est tout à fait cohérente avec la littérature [8] qui observe un déplacement horizontal maximal de 3m sous l'action de Typhons.

b) Réponse de la tour à une rafale de vent en régime permanent

Nous allons à présent déterminer la réponse de la tour en régime permanent face à des rafales de vent assimilées à des forces harmoniques, avec une fréquence d'excitation comprise entre 0 et 25 Hz. Le modèle éléments finis est très proche du modèle en régime transitoire, la seule différence étant l'utilisation du step *Steady-state dynamics, Modal*. Pour les *concentrated forces*, Abaqus demande deux paramètres à savoir les valeurs des forces et une amplitude en fonction de la fréquence. La force finale, à fréquence f fixée, sera le produit de ces deux valeurs, multipliée par une sinusoïde de fréquence f . Les valeurs rentrées sont donc similaires aux valeurs du modèle transitoire et l'amplitude est considérée comme constante. Nous optons pour 40 points avec un *biais* de 3 dans un premier temps, nous modifierons la plage de fréquence, le nombre de points et le biais par la suite afin d'analyser les zones qui nous intéressent.

Concernant le choix de la troncature modale, les modes susceptibles de contribuer fortement à la réponse sont tous les modes de flexion dans le plan (\vec{x}, \vec{z}) dont la fréquence est comprise entre 0 et 25 Hz. Nous devons alors aller jusqu'au mode 32 dont la fréquence est 23.046 Hz. Nous ajouterons

également les modes de flexion 35 et 37 dont les fréquences étant respectivement de 26.880 Hz et 30.292 Hz, ceux-ci sont susceptibles de participer à la réponse de manière non négligeable car leur amplitude maximale est proche de 25 Hz. S'il s'avère que ces modes participent bien à la réponse, il sera nécessaire d'ajouter le mode de flexion suivant (mode 41, fréquence : 34.949 Hz) afin de vérifier également sa contribution. Nous décidons donc dans un premier temps de choisir les modes compris entre 1 et 37. Ci-dessous, les modes dont la participation est négligeable ont été supprimés afin de faciliter la lecture.

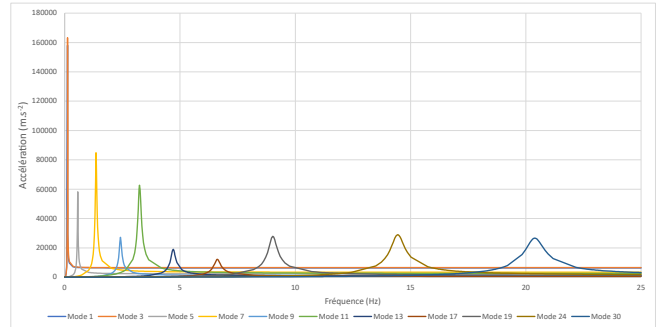


Figure 23 : Projection de l'accélération sur la troncature modale

Nous remarquons que comme prévu, seuls les modes de flexion dans le plan (\vec{x}, \vec{z}) ont une participation importante, de plus, la participation des modes supérieurs à 30 est négligeable. Notons que la participation du mode 1 n'est pas lisible sur le graphique car sa courbe est quasiment confondue avec celle du mode 3. Ces deux modes correspondent aux modes de flexion en phase et en opposition de phase de la tour et de l'amortisseur. Nous pouvons alors afficher la réponse du sommet de la tour en accélération et en déplacement, avec et sans amortisseur.

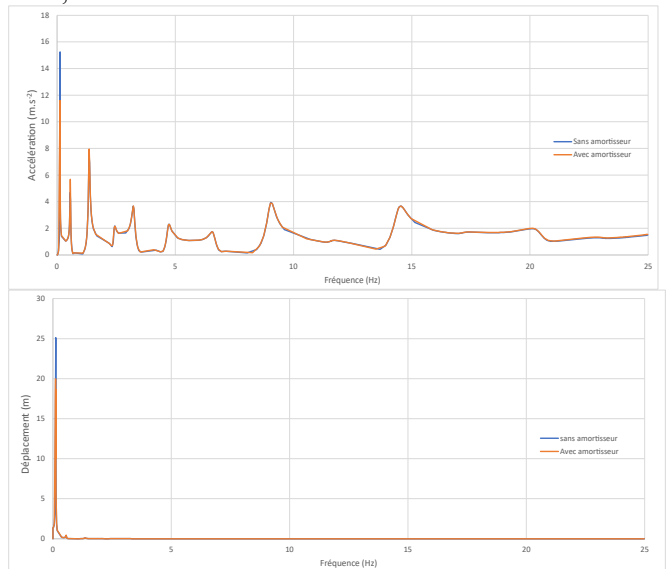


Figure 24 : Accélération et déplacement du sommet de la tour avec et sans amortisseur

On remarque, que le maximum des courbes de réponse avec et sans amortisseur est situé dans la zone proche de la fréquence fondamentale de la tour, ce qui est cohérent. Afin d'analyser plus précisément cette zone, nous relançons le modèle mais pour un intervalle de fréquence compris entre 0 et 0.25 Hz, nous n'utilisons alors que 5 modes pour cet intervalle, le mode étant égal à 0.56 Hz.

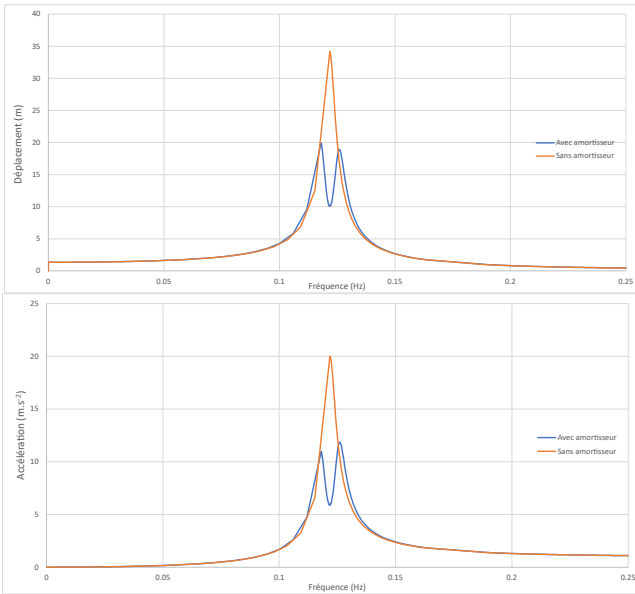


Figure 25 : Accélération et déplacement du sommet de la tour avec et sans amortisseur

Nous remarquons que le rôle de l’amortisseur est incontestable avec une réduction relative de 40.7% pour l’accélération et de 41.5% pour le déplacement. Toutefois, l’absorbeur présente un intérêt sur un intervalle de fréquence extrêmement limité (entre 0.12 et 0.13Hz) comparé à la plage d’étude de 0 à 25Hz.

Les valeurs des déplacements et des accélérations sont très élevées, cela peut potentiellement s’expliquer par le fait que l’excitation que nous avons prise en compte dans notre modèle est sinusoïdale. En conditions réelles, le vent est rarement parfaitement harmonique ce qui limitera l’amplitude des déformations. Une situation météorologique exceptionnelle pourrait expliquer de telles amplitudes.

III. MODELISATION DE LA TOUR EN 3D

En complément du premier modèle unifilaire, un modèle plus réaliste de la tour a été réalisé, celui-ci est composé d’éléments 3D surfaciques représentant chaque plancher, ainsi qu’un élément 3D filaire pour chaque colonne constituant la structure de la tour.

Cette modélisation a pour intérêt d’obtenir la réponse de la tour en tout point de la structure et d’identifier des modes de déformée qui n’étaient pas trouvables avec le premier modèle (mode de torsion notamment). Il est également possible de récupérer les contraintes dans les poutres, bien que cela n’est pas l’objet de l’étude. Une comparaison entre les deux modélisations sera effectuée par la suite, il sera ainsi possible d’évaluer la pertinence du modèle simplifié à une poutre de Bernoulli pour caractériser la réponse de la tour aux différentes sollicitations étudiées. De nombreux éléments abordés dans ce paragraphe sont similaires avec le modèle précédent, certains détails seront donc évoqués plus rapidement.

A. Modélisation

a) Création des colonnes

Chaque colonne a été individuellement modélisée par des éléments 3D filaires, les variations géométriques linéaires en fonction de \vec{z} ont été discrétisées par des géométries constantes à chaque étage. Ainsi, les poutres sont une suite de segments pouvant varier à chaque étage. Les caissons en acier remplis de béton sont modélisés par deux poutres en acier et en béton indépendantes, afin de s’assurer que chaque couple de poutre béton/acier (représentant une seule et même colonne) se déplacent au même endroit dans l’espace, ceux-ci sont “attachés” à l’ensemble des planchers ce qui permet d’obtenir des déplacements égaux à chaque étage. La modélisation des attaches sera précisée par la suite.

Ainsi, pour le premier étage, constitué de 36 super colonnes toutes remplies de béton, 72 poutres ont été modélisées par leur fibre neutre. Afin d’optimiser le temps de modélisation, seulement quatre super colonnes (C1, C2, C3 et C4) ont été modélisées. Les autres colonnes étant similaires à un déplacement ou une rotation prêt, celles-ci ont été créées avec les outils *radial pattern* et *translate instance* dans le module *Assembly* d’Abaqus. Contrairement à la modélisation précédente qui nécessitait 101 matériaux “équivalents” (un pour chaque étage), ce modèle n’en nécessite que trois :

- Acier : pour la partie extérieure des poutres
- Béton : pour les poutres représentant le remplissage béton
- Plancher : ce matériau sera explicité par la suite.

La modélisation des colonnes terminées a l’allure suivante :

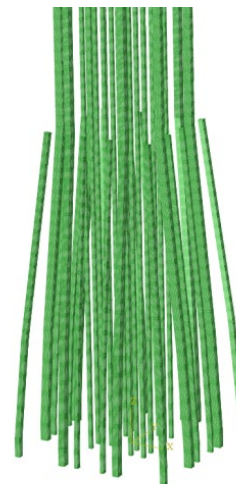


Figure 26 : Modélisation des poutres de la tour en surfacique

Les géométries variant à chaque étage, la modélisation finale est constituée de plus de 4100 éléments de type poutre.

b) Création des planchers

Les planchers, dont la géométrie à deux directions privilégiées est considérée comme infiniment rigide et indéformable, se prêtent parfaitement à des éléments 3D surfaciques. Nous avons alors utilisé des éléments surfaciques 3D déformables dont la rigidité infinie a été approchée à l’aide

d'un module de Young très supérieur à celui de l'acier et du béton. Celui-ci ne peut toutefois pas être choisi de manière totalement arbitraire car des valeurs trop importantes induisent des approximations numériques et des erreurs de calcul. Après plusieurs essais, nous avons retenu des parts *Planar* avec les propriétés suivantes :

- Epaisseur : 0.01m
- Module de Young : $E = 10^{23} \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson $\nu = 0,3$
- Masse volumique $\rho : \rho = 172500 \text{ kg. m}^{-3}$

Ces propriétés respectent bien la masse surfacique des planchers égale à 1725 kg.m^{-3} . Nous nous sommes également assurés par la suite que de telles propriétés impliquent des déformées négligeables des planchers durant les différentes réponses face aux cas de charges.

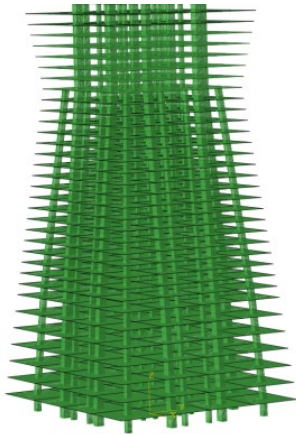


Figure 27 : Vue détaillée de la modélisation

c) Assemblage et conditions aux limites

L'assemblage entre les tours et les planchers a été réalisé à l'aide de l'outil *Tie* dans le module *Interaction* d'Abaqus. Les planchers ont été sélectionnés comme *main surface* et les nœuds des poutres appartenant au plan du plancher sont les *secondary surfaces*, ces dernières n'ont pas à être ajustées. De plus, l'épaisseur des éléments coques a été exclue.

Dans un premier temps, nous nous retrouvons avec pour premier mode de déformation un mode de torsion à très faible fréquence (10^{-2} Hz) alors que nous nous attendions à obtenir un premier mode de flexion à environ 0.12 Hz. Après visualisation de la déformée, nous avons remarqué que les poutres opposaient très peu de résistance à la torsion, nous en avons déduit cela était dû au fait que l'interaction entre les planchers et les poutres était assimilée à un rotulage et non à un encastrement. Pour remédier à ce problème, il est nécessaire de cocher l'option "*Tie rotational DOFs if applicable*" afin de bloquer les degrés de libertés des colonnes et des planchers les uns par rapport aux autres. Finalement, le modèle comporte 4376 interactions de type *Tie*.

Concernant les conditions aux limites, les 72 poutres ont été encastrees à la base :

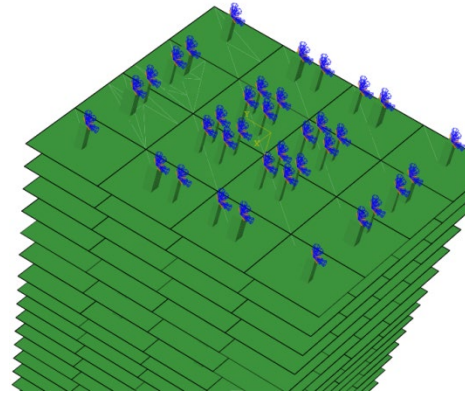


Figure 28 : Vue des encastresments

d) Modélisation de l'absorbeur passif

La modélisation de l'absorbeur est analogue au modèle précédent, la raideur du ressort a été déterminée en fonction de la première fréquence propre de la tour sans absorbeur. Le ressort est attaché à un *Deformable Point* ainsi qu'au nœud au centre du plancher de l'étage 88.

B. Modélisation sur Python et maillage

Au vu de la très grande quantité de *Parts* et de géométries variant sur tous les étages, il n'est pas envisageable de modéliser la géométrie "à la main", nous avons alors décidé de générer le fichier *Abaqus.inp* automatiquement à l'aide d'un code Python (Géométrie, modélisation, maillage, assemblage, efforts, masses nodales...). Le fichier INP génère une géométrie "orpheline", cela signifie qu'il n'est pas possible de la modifier par la suite dans Abaqus et qu'il est également impossible de la mailler. Le maillage doit donc être réalisé manuellement en créant autant de points que nécessaire. A titre d'exemple, pour générer un plancher, il est nécessaire d'indiquer la totalité des points ainsi que leurs coordonnées. Pour mailler plus finement, il faut alors régénérer entièrement le fichier INP en ajoutant les coordonnées. Ainsi, pour chaque étage, le programme génère une matrice de coordonnées de points, dont la taille varie en fonction d'un paramètre *k*. En modifiant celui-ci, on modifie le nombre de points et donc le maillage. Il est donc possible de raffiner notre maillage en faisant varier *k* et en régénérant le fichier INP.

De manière analogue aux planchers, les 72 poutres sont générées en créant la totalité des points nécessaires à la géométrie des colonnes. Ce nombre de points varie en fonction d'un paramètre *m* ce qui permettra de raffiner et d'effectuer une étude de convergence par la suite. Les 4376 interactions de type *Tie* et les 101 *Concentrated Forces* provenant du vent sont également automatiquement créées. Une fois le programme terminé, celui-ci génère automatiquement un fichier INP comportant environ 75 000 lignes pour un maillage grossier et plusieurs millions pour un maillage plus fin.

C. Modes de vibration

a) Sans amortisseur dynamique

Nous avons également réalisé une étude de convergence sur le nombre d'éléments du maillage. Cette étude est simi-

laire à la modélisation unifilaire. Nous avons remarqué que le modèle convergeait rapidement même avec un maillage grossier sur les planchers. Ce résultat était attendu car les planchers ont une rigidité très élevée et n'induisent donc pas de déformées critiques pour la tour. Nous avons donc retenu 5994 éléments pour les études qui suivront sur le modèle surfacique. Nous avons calculé les modes propres qui nous donnent par exemple les déformées suivantes :

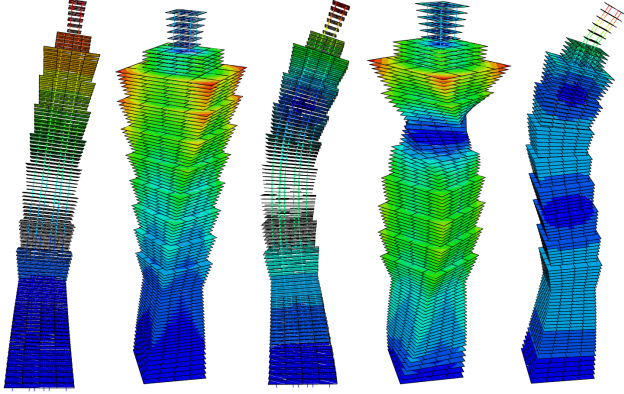


Figure 29 : Déformée des modes 1, 3, 4, 6 et 7, respectivement de fréquence 0.12, 0.38, 0.47, 0.87 et 0.96Hz

Les couples de modes (1,2), (4,5), (7,8), (10,11)... sont des modes doubles de flexion. Leurs fréquences propres sont égales car la géométrie et les matériaux sont répartis de manière symétrique. Les déformées sont similaires, mais l'une est dans le plan (\vec{x}, \vec{z}) tandis que l'autre est dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) .

b) Avec amortisseur dynamique

Tout comme le modèle précédent, l'ajout de l'amortisseur crée deux modes proches de la première fréquence propre de la tour, $f_1 = 0,11761 \text{ Hz}$ et $f_2 = 0,12518 \text{ Hz}$. Dans le premier mode, la tour et le ressort se déplacent en phase tandis que dans le second, ils se déplacent en opposition de phase.

D. Modélisation du séisme

a) Troncature modale

La modélisation du séisme est analogue au modèle unifilaire, le choix de la troncature modale sera basé sur le critère des masses effectives selon l'axe horizontal \vec{x} correspondant à l'axe de sollicitation du séisme. Un premier calcul sur une courte durée à l'aide des 50 premiers modes permet d'obtenir un aperçu des masses effectives :

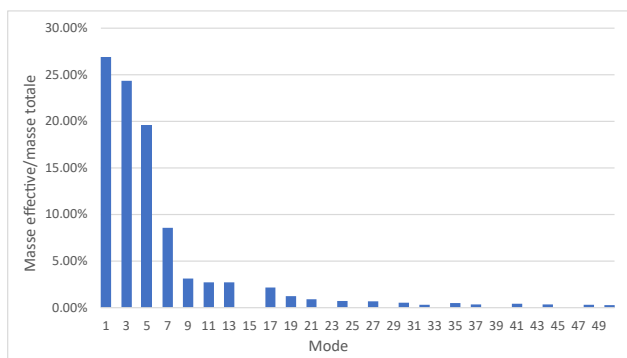


Figure 30 : Critère de masse effective avec l'amortisseur

On remarque que les deux premiers modes représentant plus de 50% de la masse effective correspondent aux deux premiers modes de flexion de la poutre avec déplacement du ressort en phase et en opposition de phase. La totalité des modes ayant une masse effective non négligeable sont des modes de flexion dans le plan (\vec{x}, \vec{z}) ce qui est cohérent avec la direction du séisme. Pour la modélisation avec l'amortisseur, nous retiendrons 21 modes pour un total de 95.64% de "masse embarquée".

b) Choix du pas de temps

De même que pour l'étude de la tour en 1D, le critère du pas de temps est primordial afin d'analyser la réponse dynamique de la tour en fonction du temps. Les critères de choix sont alors les mêmes que précédemment :

- Le pas est inférieur ou égal à celui de l'accélérographe, ici de 0,02s.
- Le pas doit permettre d'observer l'ensemble des modes participant à la réponse de la tour. Ici, nous avons conservé 21 modes (environ 95% de la masse embarquée). Le mode 21 a une fréquence de 2,9026 Hz, ce qui impose alors un pas de temps inférieur à $\frac{1}{(10 \cdot 2,9026)} = 0,0345\text{s}$ pour le décrire correctement avec au moins 10 points par sinusoïde.

Pour des raisons de temps de calcul, nous avons opté pour un pas de temps de 0.07 secondes, permettant de garder des temps de calcul raisonnables (environ 50 minutes). De plus, la durée de la réponse a été limitée à 75 secondes pour la même raison.

c) Résultat du calcul temporel

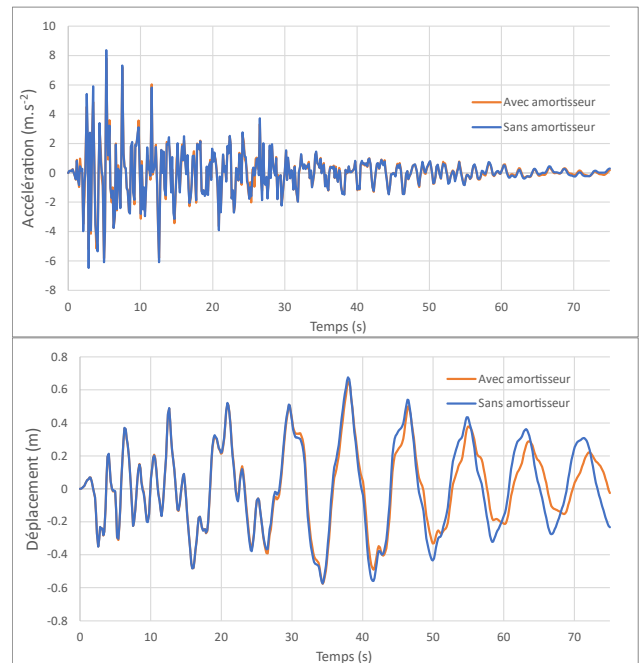


Figure 31 : Réponse en déplacement et accélération du modèle surfacique

On remarque que l'efficacité de l'amortisseur en accélération est négligeable, il aurait de plus fallu réaliser le calcul sur une plus longue durée afin de commencer à voir une réduction plus rapide des amplitudes d'oscillation en régime quasi-permanent avec l'amortisseur. Sur le modèle filaire,

cette réduction était visible à partir de 65 secondes et, très prononcée dès 80 secondes (voir Figure 15). Il n'a pas été possible d'étudier cet intervalle sur ce modèle par manque de puissance de calcul.

d) Comparaison avec le modèle unifilaire

Afin de comparer les modèles unifilaire et surfacique, nous avons, sur le même graphe, tracé les réponses en déplacement et en accélération des deux modèles.

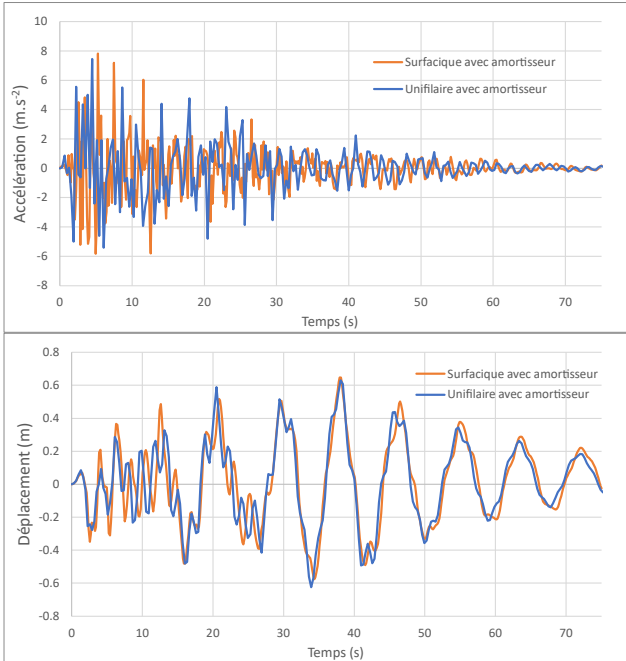


Figure 32 : Comparaison de la réponse en déplacement et en accélération des deux modèles

En régime transitoire, les courbes sont assez différentes ce qui est normal car les phases transitoires sont assez aléatoires au niveau des déformées modales. Néanmoins, l'amplitude des accélérations et des déplacements sont du même ordre de grandeur. À partir de 30 secondes, lorsque la réponse passe en régime permanent, les deux réponses sont presque identiques en accélération et en déplacement. Le modèle surfacique de la tour étant plus réaliste, cela confirme que la première modélisation de la tour uniquement à partir de sa fibre neutre est valide pour une excitation sismique dans le plan. Nous avons également comparé les deux modélisations sans amortisseur, les différences sont sensiblement les mêmes que les deux figures précédentes.

E. Modélisation du vent en régime transitoire

La modélisation du vent est analogue au modèle unifilaire, seul le point d'application change. A chaque étage, la *concentrated force* a été appliquée sur le nœud représentant le centre du plancher. La rigidité très importante des planchers permet alors de redistribuer ces efforts de manière relativement uniforme sur l'ensemble des poutres. Afin de s'assurer de la validité de cette hypothèse, nous avons, à étage *i* fixé, tracé l'évolution de l'effort du plancher *i* sur la poutre *j*, en fonction du temps. Les courbes étaient bien confondues pour plusieurs poutres *j*. Les réponses sont les suivantes :

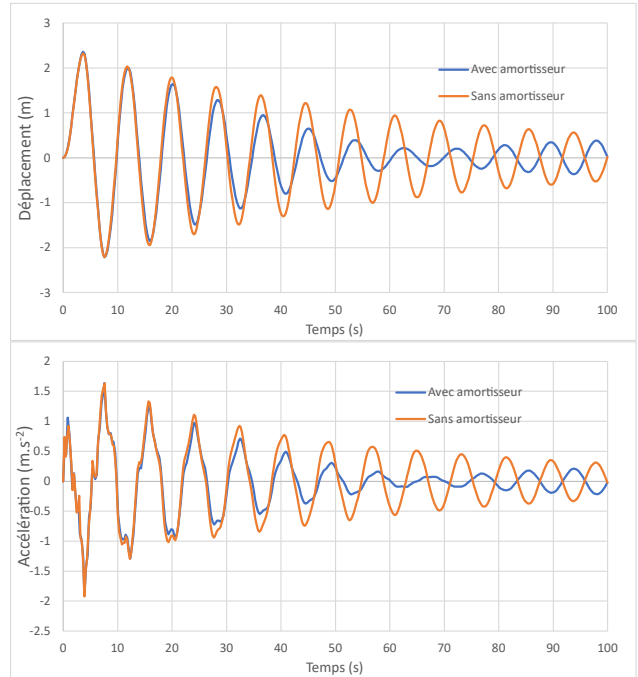


Figure 33 : Réponse de la tour à une rafale de vent en régime transitoire

Nous pouvons également comparer la réponse avec le modèle filaire :

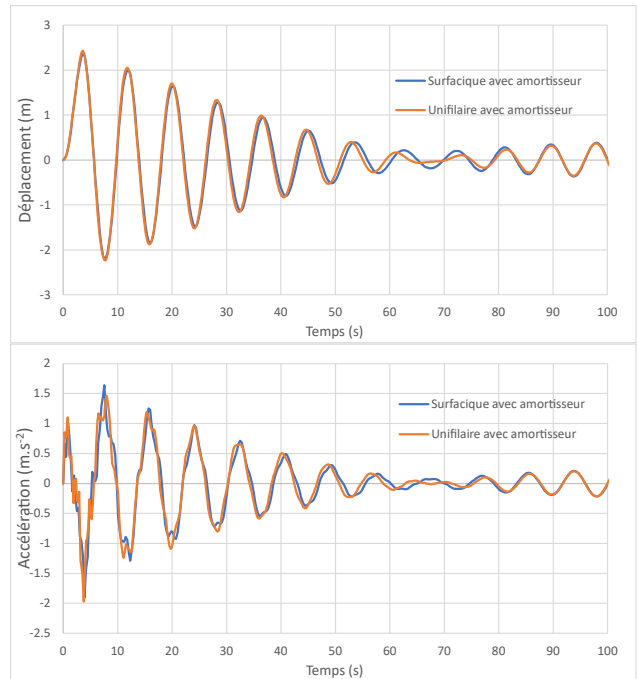


Figure 34 : Comparaison de la réponse en déplacement et en accélération des deux modèles

Le phénomène de battement est bien visible sur les réponses, de plus, la réponse en régime permanent est à nouveau très proche du modèle unifilaire.

F. Modélisation du vent en régime permanent

La modélisation est une fois de plus analogue au modèle unifilaire, nous avons cherché à déterminer le nombre de modes de flexion dans le plan (\vec{x}, \vec{z}) dont la fréquence est comprise entre 0 et "un peu plus" de 25 Hz. Nous trouvons qu'il est nécessaire de sélectionner les 460 premiers modes.

Une telle troncature modale n'est pas envisageable avec les puissances de calcul à notre disposition.

Afin de limiter le nombre de modes inutiles à notre étude, nous avons décidé de bloquer la translation sur \vec{y} et la rotation sur \vec{x} et \vec{y} de la totalité des nœuds, cela permet de limiter le nombre de déformées possibles pour laisser place de manière quasi exclusive à de la flexion et de la traction/compression dans le plan d'intérêt. Ainsi, après un nouveau calcul, le premier mode de flexion supérieur à 25 Hz est le mode 89, cette méthode réduit donc considérablement les temps de calculs.

Malheureusement, il n'a pas été possible de lancer à temps un calcul avec 89 modes, nous avons toutefois réalisé une troncature modale jusqu'au 34^{ème} mode dont la fréquence est 10.51 Hz. Nous nous attendons donc à obtenir des résultats peu cohérents au-dessus de cette fréquence. Il est à noter que la méthode d'encadrement a tout de même été utile car sans cette méthode, le 34^{ème} mode correspondrait à la fréquence 4.09 Hz et donc à puissance de calcul égale, l'intervalle de calcul en aurait été réduit.

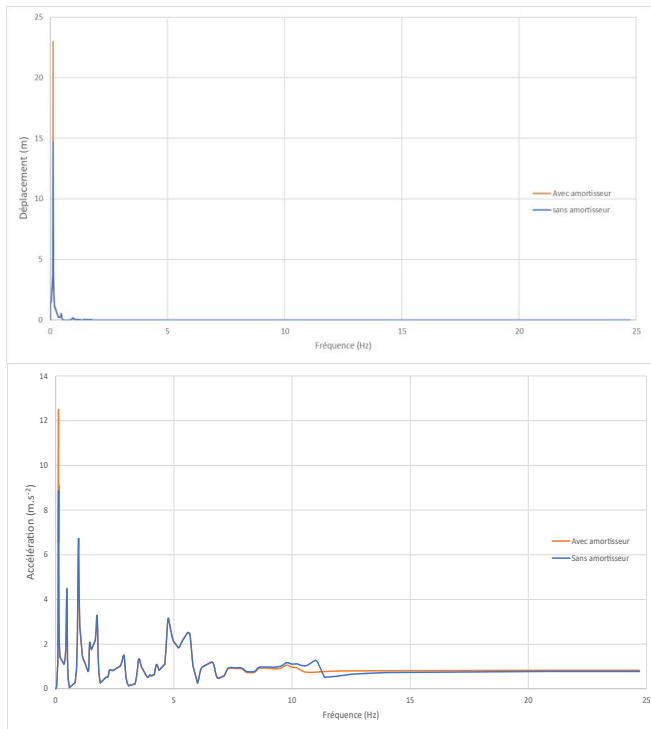


Figure 35 : Accélération et déplacement du sommet de la tour avec et sans amortisseur

Comme attendu, nous ne retrouvons plus les pics de résonance en accélération que nous avons observés sur le modèle unifilaire de la Figure 24 entre 10 et 25 Hz. Nous pouvons également voir, que, similaire au modèle unifilaire, le seul pic de résonance atténué par l'amortisseur est celui à la fréquence fondamentale de la tour.

Nous relançons donc le modèle mais pour un intervalle de fréquence compris entre 0 et 0.25 Hz. Nous n'utilisons alors que 3 modes pour cet intervalle, le mode 3 étant égal à 0.47397 Hz.

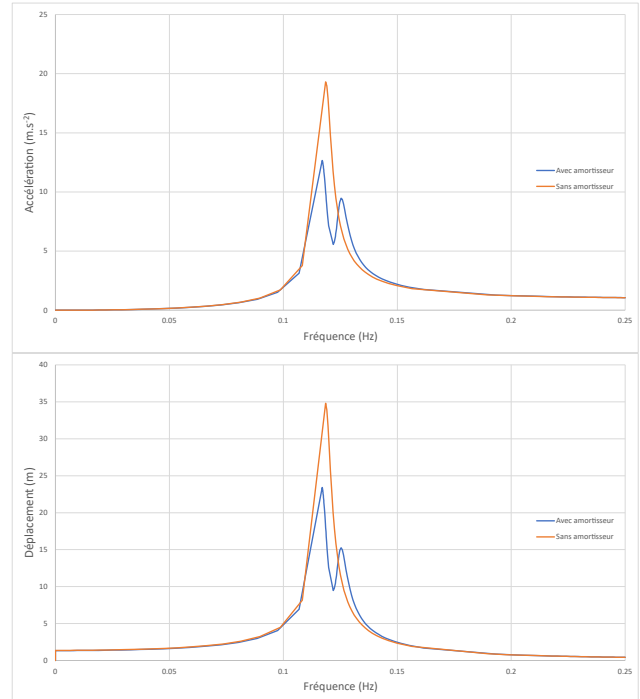


Figure 36 : Accélération et déplacement du sommet de la tour avec et sans amortisseur

A nouveau, la réponse aux alentours de la fréquence fondamentale est proche du modèle unifilaire. L'efficacité de l'amortisseur est également très similaire. Notons que le choix de bloquer la translation sur \vec{y} et la rotation sur \vec{x} et \vec{y} aurait pu être effectué sur la totalité des études, que ce soit pour le modèle filaire comme surfacique.

Cette méthodologie aurait permis d'accélérer considérablement les temps de calculs. Il a cependant été décidé de ne pas le réaliser afin d'essayer les deux modélisations et d'évaluer leur pertinence. Cela a permis par exemple de vérifier que les modes autres que la flexion sur le plan (\vec{x} , \vec{y}) sont bien négligeables dans la totalité des études.

IV. CONCLUSION

En conclusion, pour les cas de charge étudiés, le modèle unifilaire bien plus rapide à modéliser et nécessitant moins de ressources pour effectuer les calculs, offre une excellente approximation de la réponse de la tour. Le second modèle présenterait un intérêt si l'étude ou les cas de charge étaient plus poussés. En effet, contrairement au modèle unifilaire, celui-ci permet de solliciter la structure en torsion, de post-traiter les contraintes ou encore de récupérer les efforts à chaque encastrement.

Enfin, l'amortisseur dynamique présente une efficacité dans l'ensemble des cas de charge, mais celle-ci est parfois modérée en régime transitoire. Ce phénomène s'explique notamment parce que dans ces régimes, les réponses, parfois complexes, sollicitent de nombreux modes tandis que l'amortisseur est efficace sur un intervalle de fréquence extrêmement réduit, situé autour de la fréquence fondamentale de la tour.

L'efficacité parfois réduite de l'absorbeur passif peut potentiellement s'expliquer par la simplicité du modèle masse-ressort, comparé à l'ensemble pendule + vérin du système réel.

V. REFERENCES

- [1] S.-S. SHIEH, C.-C. CHANG et J.-H. JONG, «Structural design of composite super-columns for the Taipei 101 tower».
- [2] L. M. JOSEPH, D. POON et S.-s. SHIEH, «Ingredients of High-Rise Design - Taipei 101 the World's Tallest Building,» *Structuremag*, 2006.
- [3] M. Träsch, «Caractérisation expérimentale et numérique du comportement hydrodynamique d'une hydrolienne à membrane ondulante,» *Archive ouverte HAL*, p. 133, 2019.
- [4] J.-H. W. B.-S. H. C.-C. L. W.-G. H. K.-C. Chen, «Vibrations of the TAIPEI 101 skyscraper caused by the 2011 Tohoku earthquake, Japan, p. 5, 2013.,» Institute of Earth Sciences.
- [5] M. Q. S. Li, L.-H. Zhi², A. Y. Tuan³, C.-S. Kao⁴, S.-C. Su⁵ et a. C.-F. Wu⁶, «Dynamic Behavior of Taipei 101 Tower: Field Measurement, 2011,» journal of structural engineering.
- [6] L. PARIS, «Comportement des structures soumises à des projectiles, 2012,» Techniques de l'Ingénieur, SE5067 v1.
- [7] B. B. J. R. J. K. T. Haskett, «TUNED MASS DAMPERS UNDER EXCESSIVE STRUCTURAL EXCITATION,» Motioneering Inc., Guelph, Ontario, Canada N1K 1B8.
- [8] I. Kourakis, «Ioannis Kourakis, Structural Systems and Tuned Mass Dampers of Super-Tall Buildings : Case Study of Taipei 101, 2007,» MIT.