



**HAL**  
open science

# Hyper-réduction d'ordre de modèle pour la mécanique du contact traité par multiplicateurs de Lagrange

Simon Le Berre, Isabelle Ramière, Jules Fauque, David Ryckelynck

## ► To cite this version:

Simon Le Berre, Isabelle Ramière, Jules Fauque, David Ryckelynck. Hyper-réduction d'ordre de modèle pour la mécanique du contact traité par multiplicateurs de Lagrange. 15e colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03718086

**HAL Id: hal-03718086**

**<https://hal.science/hal-03718086v1>**

Submitted on 8 Jul 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Hyper-réduction d'ordre de modèle pour la mécanique du contact traité par multiplicateurs de Lagrange.

S. Le Berre<sup>1,2</sup>, I. Ramière<sup>1</sup>, J. Fauque<sup>1</sup>, D. Ryckelynck<sup>2</sup>

<sup>1</sup> CEA,DES,IRESNE,DEC, Cadarache F-13108 St-Paul-Lez-Durance; {simon.leberre,isabelle.ramiere,jules.fauque}@cea.fr

<sup>2</sup> PSL Mines-ParisTech, Centre des matériaux, 91003 Evry; david.ryckelynck@mines-paristech.fr

---

**Résumé** — Nous proposons une méthode de réduction d'ordre de modèle pour la mécanique du contact traité par multiplicateurs de Lagrange. Nous considérons une approche par hyper-réduction avec domaine d'intégration réduit (RID). Ainsi la base duale réduite est une restriction de la base éléments finis duale au RID. Nous mettons en évidence un lien entre le conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée et la précision des solutions duales. En découlent deux stratégies d'enrichissement de la base primale réduite POD permettant de respecter la condition LBB et d'améliorer la précision de la méthode. **Mots clés** — Hyper-réduction, contact, multiplicateurs de Lagrange, condition LBB, conditionnement.

---

## 1 Introduction

La résolution de problèmes de mécanique du contact est souvent très coûteuse en temps de calcul du fait de la non-linéarité des conditions de contact. Les méthodes de réduction d'ordre de modèle sont alors une piste prometteuse. Elles sont actuellement très développées pour réduire des problèmes de mécanique non linéaire. Cependant dans le cas d'un problème de contact traité par multiplicateurs de Lagrange, la contrainte de positivité de la base duale et la non linéarité de sa représentation rendent la mise en oeuvre de ces approches plus complexe [1, 2]. En particulier, la condition de positivité de la base des multiplicateurs (condition de non-adhésion) interdit l'utilisation d'une base réduite POD pour la variable duale. Des méthodes de projection sur base réduite ont été développées pour des problèmes de contact élastique sans frottement. Ces méthodes se distinguent principalement par l'obtention d'une base duale réduite précise. Dans [7] cette base duale réduite est construite avec une orthogonalisation de snapshots duaux bien choisis, dans [1] une factorisation non-négative de matrice est utilisée, alors que dans [2] cette dernière approche a été améliorée par un algorithme glouton de projection sur cone convexe.

Nous nous intéressons à l'approche d'hyper-réduction hybride proposée dans [6] et qui est basée sur la notion de domaine d'intégration réduit (RID) [9]. Ce RID permet de limiter le traitement des non-linéarités à quelques "échantillons" du maillage complet. Il est construit à l'aide de l'algorithme de Discrete Empirical Interpolation Method (DEIM) [4] appliqué sur une ou des bases réduites POD. Comme proposé dans [6], la notion de RID permet de construire une base duale réduite précise par restriction de la base éléments finis duale au RID. Le problème de contact hyper-réduit hybride obtenu est alors également un problème de point-selle qui doit respecter la condition nécessaire LBB (Ladyzenskaia-Babuška-Brezzi) [3] ou condition inf-sup. De façon discrète, cette condition se traduit par la nécessité d'avoir une matrice de rigidité de contact projetée de rang plein en ligne. Dans [6] lorsque la condition LBB n'est pas vérifiée initialement, il est proposé d'enrichir la base primale réduite avec des fonctions de forme éléments finis. Cependant le strict respect de la condition LBB dans le modèle réduit n'est pas suffisant pour garantir la précision des solutions duales.

Nous montrons dans ce travail une relation entre le conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée et l'efficacité de l'hyper-réduction hybride pour approximer les solutions duales. Ainsi nous proposons deux stratégies d'enrichissement de la base primale réduite qui visent à réduire ce conditionnement tout en garantissant le respect de la condition LBB. Ces deux stratégies reposent sur un algorithme glouton de sélection des fonctions de forme éléments finis basé sur la minimisation du conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée.

## 2 Modèles éléments finis et hyper-réduit hybride

### 2.1 Modèle éléments finis

Une fois discrétisé par la méthode des éléments finis (EF) le problème de contact mixte (traité par multiplicateurs de Lagrange) revient à résoudre :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{U}, \underline{\Lambda}) \in \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^{N_\lambda} \text{ tel que} \\ \underline{K}\underline{U} + \underline{B}^T \underline{\Lambda} = \underline{F} \\ \underline{B}\underline{U} \leq \underline{D} \\ \underline{\Lambda}^T (\underline{D} - \underline{B}\underline{U}) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Où  $N$  est le nombre de degrés de liberté (ddl) primaux et  $N_\lambda$  le nombre de ddls duaux (nombre de contacts potentiels). Les matrices ou vecteurs  $\underline{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\underline{B} \in \mathbb{R}^{N_\lambda \times N}$ ,  $\underline{F} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\underline{D} \in \mathbb{R}^{N_\lambda}$ ,  $\underline{U} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\underline{\Lambda} \in (\mathbb{R}^+)^{N_\lambda}$ , sont respectivement la matrice de rigidité, la matrice de rigidité de contact, le terme source, le vecteur du jeu initial, le vecteur des inconnues primales (déplacements) et le vecteur des inconnues duales (forces de contact au signe près).

### 2.2 Modèle hyper-réduit hybride

Nous reprenons le modèle hyper-réduit hybride pour le contact introduit dans [6], avec un contact traité numériquement par un algorithme noeud-à-noeud. La base primale réduite est construite par POD et le RID est construit à l'aide d'un algorithme DEIM sur cette base primale réduite et sur une base duale réduite POD (uniquement utilisée pour la construction du domaine d'intégration réduit). Nous notons  $\mathcal{A}$  l'ensemble des ddls primaux qui sont à l'intérieur du RID, et on introduit  $\mathcal{A}_c$  l'ensemble des ddls de  $\mathcal{A}$  localisés sur la zone de contact et  $\mathcal{A}_\lambda$  l'ensemble des ddls duaux connectés à  $\mathcal{A}_c$  par  $\underline{B}$  :

$$\mathcal{A}_c = \{j \in \mathcal{A} \mid \exists i \in \llbracket 1, N_\lambda \rrbracket \text{ t.q. } (\underline{B})_{ij} \neq 0\}, \quad (2)$$

$$\mathcal{A}_\lambda = \{i \in \llbracket 1, N_\lambda \rrbracket \mid \exists j \in \mathcal{A}_c \text{ t.q. } (\underline{B})_{ij} \neq 0\}, \quad (3)$$

Nous notons  $N_\lambda^C$  le cardinal de  $\mathcal{A}_\lambda$ , qui est ainsi le nombre de contacts potentiels dans le RID.

On nomme  $\underline{V}$  la matrice de la base primale réduite POD, le modèle hyper-réduit hybride s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{\gamma}, \underline{\Lambda}) \in \mathbb{R}^I \times (\mathbb{R}^+)^{N_\lambda^C} \text{ tel que} \\ \underline{V}[\mathcal{A}, :]^T \underline{K}[\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup I] \underline{V}[\mathcal{A} \cup I, :] \underline{\gamma} + \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]^T \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]^T \underline{\Lambda}[\mathcal{A}_\lambda] = \underline{V}[\mathcal{A}, :]^T \underline{F}[\mathcal{A}] \\ \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :] \underline{\gamma} \leq \underline{D}[\mathcal{A}_\lambda] \\ \underline{\Lambda}[\mathcal{A}_\lambda]^T (\underline{D}[\mathcal{A}_\lambda] - \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :] \underline{\gamma}) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Avec  $\underline{\gamma}$  les inconnues primales réduites et  $\underline{\Lambda}[\mathcal{A}_\lambda]$  les inconnues duales restreintes au RID.

## 3 Condition LBB et enrichissement de la base primale réduite

### 3.1 Condition LBB

La condition LBB discrète associée au problème (4) est équivalente à ce que la matrice  $\underline{B}[\mathcal{A}_{\lambda, active}, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$  soit de rang plein en ligne, avec  $\mathcal{A}_{\lambda, active}$  l'ensemble des ddls duaux associés aux contacts actifs. Cependant, puisque les contacts actifs sont inconnus a priori, nous allons considérer une condition LBB plus forte. Nous allons imposer que la matrice de rigidité de contact projetée, i.e.  $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$ , soit de rang plein en ligne. Comme  $\underline{B}$  possède autant de lignes qu'il existe de contacts potentiels, la condition LBB (étendue) sur le modèle réduit impose que le rang de la matrice soit le nombre de contacts potentiels contenus dans le RID, i.e.  $N_\lambda^C$ .

Lorsque le RID est construit par DEIM à partir uniquement de la base primale réduite, la condition LBB est naturellement vérifiée. Cependant, le respect de la condition LBB ne suffit pas à garantir la précision obtenue sur la solution duale. Par ailleurs, il est souvent nécessaire (notamment pour plus de précision) d'élargir le RID par la contribution d'autres bases POD, dans ce cas il faut enrichir la base primale réduite pour respecter la condition LBB.

### 3.2 Relation entre précision de la solution duale et conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée

Dans le modèle EF, le conditionnement de la matrice de rigidité de contact  $\underline{\underline{B}}$ , noté  $\kappa(\underline{\underline{B}})$ , est de 1. Nous pouvons remarquer que plus le conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée, noté  $\kappa(\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_{\lambda,active}, \mathcal{A}_c]\underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :])$  est proche de 1, plus nous obtenons des solutions duales précises. En revanche, ce conditionnement joue très peu sur la qualité de la solution primale. Les résultats de la figure 1, obtenus sur le cas test de la section 4.2, confirment cette relation.

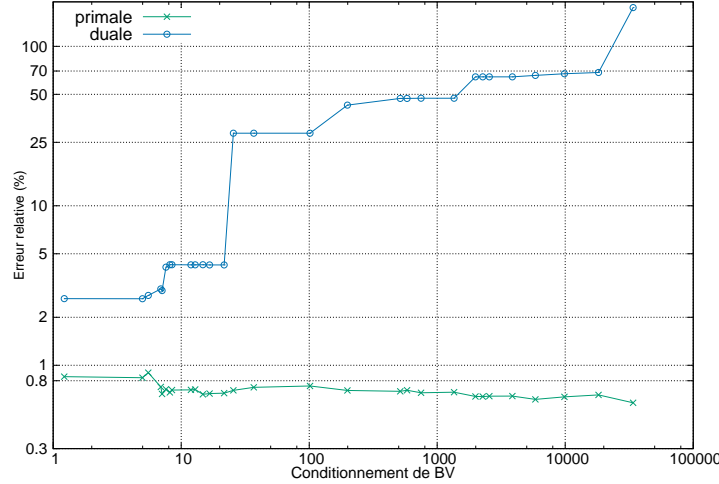


FIGURE 1 – Impact du conditionnement de la matrice de rigidité projetée sur l'erreur relative duale.

### 3.3 Enrichissement de la base primale réduite par fonctions de forme éléments finis

Nous proposons une stratégie d'enrichissement qui consiste à ajouter des fonctions de forme primales liées aux ddls de la zone de contact du RID à la matrice de la base primale réduite afin de respecter la condition LBB mais surtout d'améliorer la solution duale. Pour sélectionner ces fonctions de formes nous utilisons un algorithme glouton qui minimise le conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée et détaillé dans l'algorithme 1.

---

**Algorithme 1 :** Algorithme glouton basé sur le conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée pour enrichir la base primale réduite.

---

**Entrées :** conditionnement maximum  $\kappa_{\max}$ , matrices  $\underline{\underline{B}}$  et base réduite primale POD  $\underline{\underline{V}}$ , ensemble des ddls EF possibles sur la zone de contact  $\{i_1, \dots, i_n\}$

**Sorties :** ensemble des ddls EF à activer  $\mathcal{L} = \{i_{j_1}, \dots, i_{j_k}\}$ , base réduite enrichie  $\underline{\underline{V}}$

$\mathcal{L} = \emptyset$  ;

$\kappa_{\min} = \kappa(\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_{\lambda}, \mathcal{A}_c]\underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :])$  ;

$k = 0$  ;

$\mathcal{G} = \llbracket 1, n \rrbracket$  ;

**tant que**  $\kappa_{\min} > \kappa_{\max}$  **et**  $k \neq \text{card}(\mathcal{A}_c)$  **faire**

$k = k + 1$  ;

**pour**  $p \in \mathcal{G}$  **faire**

$\underline{\underline{V}} = [\underline{\underline{V}} \ e_{i_p}]$  ;

**si**  $\kappa(\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_{\lambda}, \mathcal{A}_c]\underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :]) < \kappa_{\min}$  **alors**

$\kappa_{\min} = \kappa(\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_{\lambda}, \mathcal{A}_c]\underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :])$  ;

$j_k = p$  ;

$\mathcal{G} = \mathcal{G} \setminus \{j_k\}$  ;

$\underline{\underline{V}} = [\underline{\underline{V}} \ e_{i_{j_k}}]$  ;

$\mathcal{L} = \{\mathcal{L} \ i_{j_k}\}$  ;

---

### 3.4 Enrichissement de la base primale réduite par des modes POD et des fonctions de forme éléments finis.

Cette stratégie utilise d'abord des modes POD afin d'enrichir la base primale réduite. Une première base réduite POD est obtenue à partir d'une troncature de la SVD sur la matrice des snapshots, et est utilisée pour la construction du RID (cf. section 2.2). Puis, cette base réduite POD est étendue à partir d'une troncature plus grande (contenant plus d'informations). Cette base réduite devient alors la base utilisée pour projeter le modèle de contact (cf. problème (4)).

Plus la base réduite POD étendue est grande, plus le conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée sera grand. Pour obtenir un bon conditionnement, et par conséquent des solutions duales de qualité, cette méthode d'enrichissement est couplée avec la méthode d'enrichissement par fonctions de forme éléments finis (cf. algorithme 1).

L'avantage de cette approche est que la base réduite primale contient plus d'informations du fait qu'elle contient plus de vecteurs POD. Elle est cependant délicate à calibrer du fait de l'overfitting possible et de l'augmentation du conditionnement.

## 4 Résultats numériques

### 4.1 Espace paramétrique unidimensionnel

Nous reprenons ici le cas test des disques de Hertz présenté dans [2]. L'espace paramétrique est composé d'un scalaire  $\mu \in [0.15, 0.45]m$ , qui est la valeur de Dirichlet imposée sur les surfaces horizontales (haut et bas). Ainsi les disques se déplacent verticalement induisant une zone de contact plus ou moins étendue en fonction de  $\mu$  (voir [2]). Nous utilisons 31 snapshots pour construire le modèle réduit :  $\mathcal{P}^{pr} = \{0.15 + 0.01i | 0 \leq i \leq 30\}$ . La base POD primale réduite contient  $l = 9$  vecteurs. Le RID minimal obtenu en appliquant une DEIM uniquement sur la base primale réduite, est représenté sur la figure 2a. Dans ce cas, la LBB étendue (cf. section 3.1) impose un rang de  $N_\lambda^C = 8$  à la matrice de rigidité de contact projetée. Ce rang est respecté dès le RID minimal. Le conditionnement est alors  $\kappa(\underline{B}[\mathcal{A}_{\lambda, active}, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]) = 3.4$ , ce qui garantit des solutions duales très bonnes.

Ce cas test ne nécessite ainsi pas d'enrichissement supplémentaire, ni du RID, ni de la base primale réduite. Ceci est dû à la simplicité de ce cas pour la réduction d'ordre de modèle (un paramètre, double symétrie du problème). Cependant, il nous permet d'illustrer la notion de RID et de montrer la précision locale des solutions duales obtenues par l'hyper-réduction hybride.

Les multiplicateurs de Lagrange des modèles éléments finis (EF) et hyper-réduit hybride (HRH) sont reportés sur la figure 2b pour différentes valeurs de  $\mu$ .

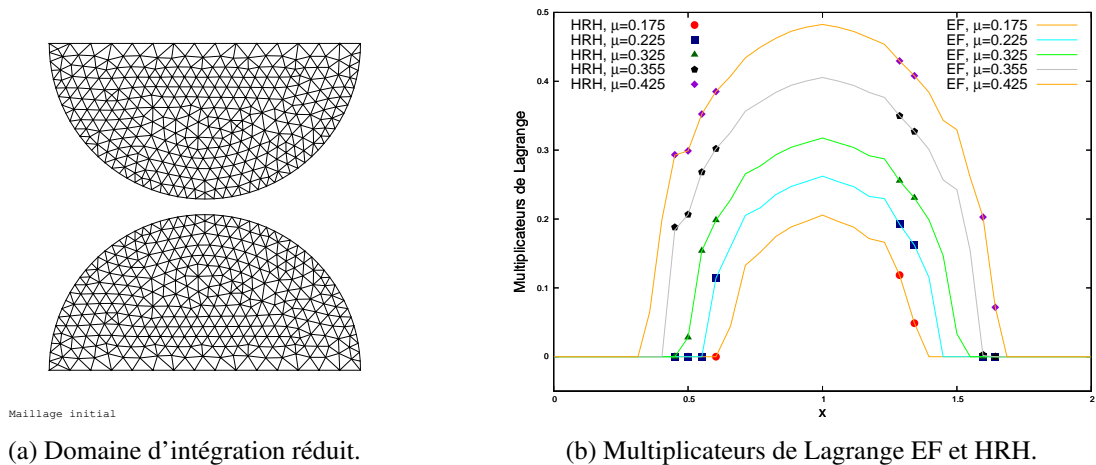


FIGURE 2 – Disques de Hertz :  $l = 9$  et  $N_\lambda^C = 8$

On remarque la très bonne approximation des multiplicateurs de Lagrange sur le RID par la solution hyper-réduite hybride, et pour des valeurs de paramètres qui ne sont pas dans l'espace d'entraînement

$\mathcal{P}^{rr}$ . Le détail des cartes d’erreurs (primale et duale) en norme 2 sur un espace paramétrique de 100 valeurs (plus grand que  $\mathcal{P}^{rr}$ ) est donné sur la figure 3. Ici la solution éléments finis est considérée comme solution de référence.

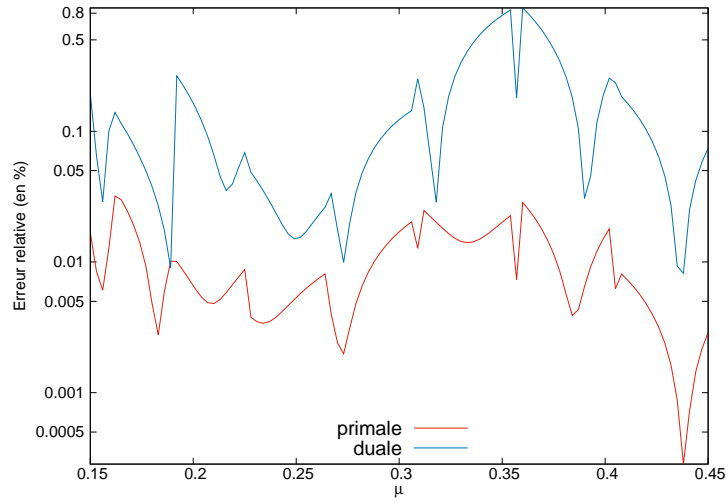


FIGURE 3 – Disques de Hertz : erreurs relatives primales et duales (en %) sur un espace paramétrique de test de 100 valeurs (avec  $l = 9$ ,  $N_\lambda^C = 8$ )

La solution primale est toujours très bien approximée, avec des valeurs d’erreurs en norme 2 toujours inférieures à 0.05%. La solution duale est également extrêmement précise avec des valeurs autour de 0.1 %, avec un maximum à 0.8 %.

## 4.2 Espace paramétrique bidimensionnel

Le second cas test est issu de [8] et présenté sur la figure 4a. On vient mettre en contact deux solides en appliquant une pression  $P_1$  sur une hauteur  $h_1$  sur l’extérieur du solide de droite. Les deux solides suivent une loi de comportement élastique isotrope avec un module de Young et un coefficient de Poisson valant  $E = 190$  GPa et  $\nu = 0.3$  pour le solide de droite, et  $E = 78$  GPa et  $\nu = 0.34$  pour le solide de gauche. Le jeu initial est de  $2\mu\text{m}$ . L’espace paramétrique considéré est  $\mathcal{P} = P_1 \times h_1 = [5, 200]\text{MPa} \times [0.6, 6]\text{mm}$ . Ce test est représentatif de l’interaction pastille-gaine se produisant en réacteur nucléaire.

Avec un maillage initial de 7070 éléments, le modèle éléments finis présente 101 contacts potentiels. L’espace paramétrique permet de couvrir également des situations sans contact.

Nous utilisons 500 snapshots réguliers. Pour ce cas test, il est nécessaire d’avoir un RID élargi pour obtenir des solutions primales satisfaisantes (cf. espace de validation). En effet, nous observons sur la figure 4b que le RID minimal construit uniquement à partir de la DEIM sur la base POD primale réduite ( $l = 36$ ) ne comporte que très peu d’éléments sur la zone de contact ( $N_\lambda^C = 12$ ). Le RID élargi à partir d’une DEIM sur une base POD duale réduite (uniquement utilisée pour la construction du RID), contenant 60 contacts potentiels ( $N_\lambda^C = 60$ ), est présenté sur la figure 4c. Il est à noter que pour ces deux RID, une zone d’intérêt correspondant à la surface externe du solide de droite, est rajoutée afin de prendre en compte correctement la condition de Neumann (condition de pression avec  $P_1$ ) dans le modèle réduit.

Les résultats présentés dans la suite se concentrent sur le RID élargi ( $N_\lambda^C = 60$ ) et sur des paramètres en dehors de l’espace d’entraînement.

### 4.2.1 Enrichissement de la base primale réduite par fonctions de forme EF

Nous nous focalisons dans cette partie sur l’algorithme glouton présenté en section 3.3. Nous présentons sur la figure 5 les résultats obtenus aux différentes itérations de l’algorithme glouton (Algorithme 1) à partir de la base primale réduite de dimension  $l = 36$  (légende ‘1’). Étant donné que  $N_\lambda^C = 60$ , la condition LBB n’est pas vérifiée initialement, ce qui explique les fortes erreurs duales. Nous pouvons voir que le strict respect de la LBB (atteint ici pour un  $\text{card}(\underline{V}) > 60$ ) n’est pas suffisant pour obtenir une précision satisfaisante sur la solution duale. Il faut enrichir plus la base primale réduite pour avoir de

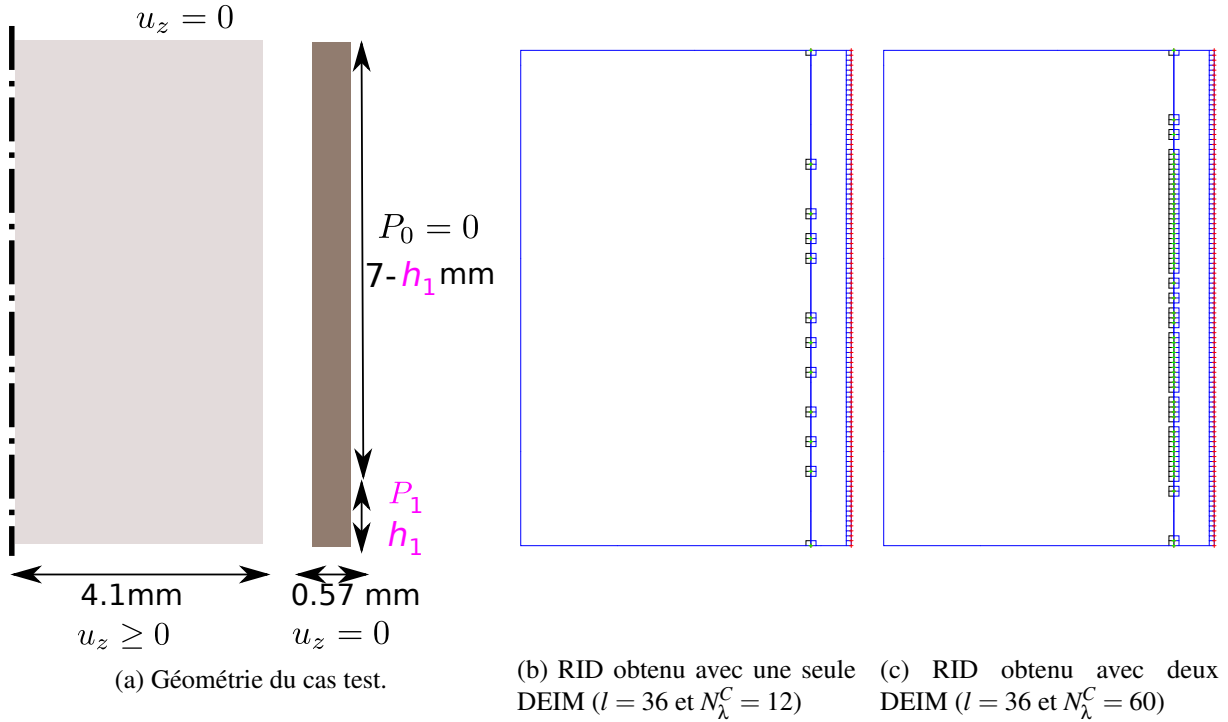


FIGURE 4 – Cas test de type interaction pastille-gaine

plus petites erreurs relatives duales, cf. figure 5a. Les erreurs relatives primales et duales en fonction du conditionnement sont données sur la figure 5b. Avec un enrichissement maximum (60 modes EF rajoutés) nous arrivons à une erreur relative duale de 2.9%. L'erreur relative duale devient significativement réduite pour un conditionnement autour de 10. Dans ce cas l'algorithme glouton conduit à  $\text{card}(\underline{V}) = 83$  et une erreur relative duale de 4.3%.

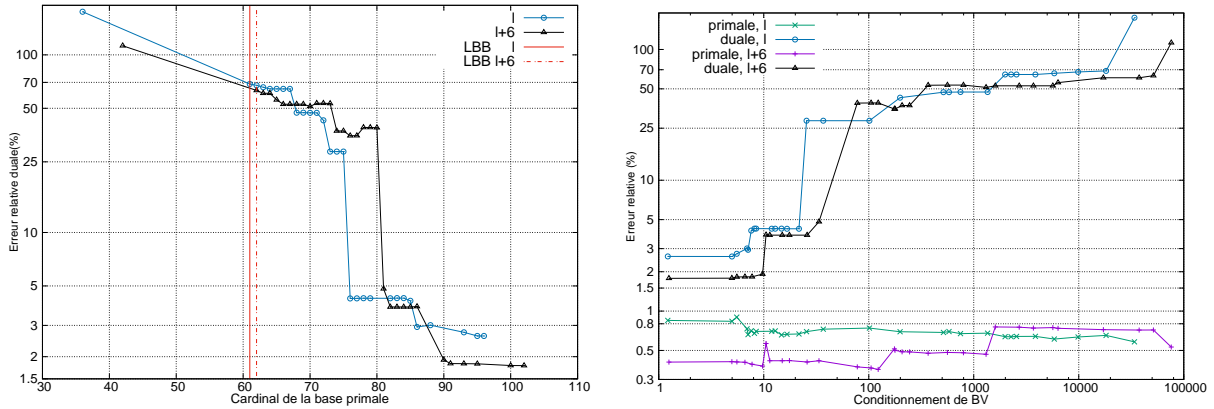


FIGURE 5 – Cas test d'interaction pastille-gaine. Étude des stratégies d'enrichissement : par modes EF uniquement ('1') et par modes POD+EF ('1+6', 6 modes POD supplémentaires), avec  $l = 36$  et  $N_\lambda^C = 60$ . Point :  $P_1 = 170\text{MPa}$  et  $h_1 = 3.2\text{mm}$

#### 4.2.2 Enrichissement de la base primale réduite par modes POD et EF

Afin d'étudier la méthode d'enrichissement introduite en section 3.4, nous allons la comparer à la méthode d'enrichissement uniquement par fonctions de forme EF (cf. section 3.3 et résultats précédents). Nous fixons  $\kappa_{\max} = 10$  dans l'algorithme 1 quelle que soit l'approche choisie. Nous reportons dans le tableau 1, les résultats obtenus pour différentes troncatures pour l'enrichissement par modes POD sur deux points de l'espace paramétrique (fort et faible contact).

				$P_1 = 170\text{MPa}$ $h_1 = 3.2\text{mm}$		$P_1 = 30\text{MPa}$ $h_1 = 5.25\text{mm}$	
	nb modes POD suppl.	$\kappa(\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]\underline{V}[\mathcal{A}_c, :])$ après enrich. POD	$\bar{l} = \text{card}(\underline{V})$ final	Err. rel.		Err. rel.	
				primale	duale	primale	duale
Enri. EF	0	$3,4 \cdot 10^4$	83	0.7%	4.3%	5.9%	46.7%
Enri. POD+EF	3	$3,6 \cdot 10^4$	83	0.5%	2.3%	3.4%	42%
Enri. POD+EF	6	$7,6 \cdot 10^4$	90	0.3%	1.9%	2.9%	21.7%
Enri. POD+EF	24	$7,8 \cdot 10^8$	97	0.3%	2.0%	0.6%	24.5%

TABLE 1 – Cas test d’interaction pastille-gaine : étude de la stratégie d’enrichissement par modes POD et fonctions de forme EF ( $l = 36$  et  $N_\lambda^C = 60$ )

Nous pouvons constater que la méthode d’enrichissement par modes POD+EF permet d’atteindre des erreurs primales et duales plus faibles que la méthode avec enrichissement EF seul. Cependant la méthode d’enrichissement, d’abord par POD étendue, revient à très vite augmenter le conditionnement initial de la matrice de rigidité de contact (cf. tableau 1), ce qui conduit à devoir ajouter plus de modes EF pour obtenir une solution duale satisfaisante (respectant un petit conditionnement). Il semblerait que cette méthode soit intéressante tant que le conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée n’est pas trop éloigné du conditionnement initial.

Pour un point de l’espace paramétrique déjà bien approximé par la méthode avec enrichissement par modes EF uniquement, peu de modes POD supplémentaires (avec la méthode d’enrichissement par modes POD+EF) sont suffisants pour diminuer rapidement l’erreur duale. Sur l’exemple du point  $P_1 = 170 \text{ MPa}$ ,  $h_1 = 3.2 \text{ mm}$ , l’erreur duale divisée par deux par ajout de 3 modes POD, avec une base primale étendue de même dimension.

Cependant lorsque les erreurs relatives duales sont plus importantes, il est utile de rajouter plus de modes POD pour diminuer l’erreur relative duale de façon conséquente. Comme le conditionnement initial de la matrice de rigidité de contact projetée est dégradé, la base primale réduite finale contient un peu plus de vecteurs. Par exemple, pour le point  $P_1 = 30 \text{ MPa}$ ,  $h_1 = 5.25 \text{ mm}$ , rajouter 6 modes POD supplémentaires permet de diviser par deux l’erreur duale finale, de réduire l’erreur primale, mais cela augmente la dimension de la base primale élargie d’environ 10%.

Dans tous les cas, il n’est pas forcément judicieux d’atteindre la LBB uniquement avec l’enrichissement par modes POD. Comme on le constate dans le tableau 1, rajouter 24 modes POD impose d’avoir une base primale élargie de 97 modes pour atteindre le conditionnement maximum fixé.

La courbe des erreurs relatives duales sur la figure 5a montre qu’à dimension de la base primale réduite équivalente, la méthode d’enrichissement par modes POD+EF, ici avec 6 modes POD rajoutés (légende ‘l+6’), donne de meilleurs résultats après un enrichissement important de la base primale réduite ( $\text{card}(\underline{V}) \geq 80$ ). Cependant, nous pouvons constater sur la figure 5b, qu’à conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée équivalent la méthode d’enrichissement par modes POD et fonction de forme EF donne toujours une solution duale (et primale) plus satisfaisante que la méthode d’enrichissement par EF.

#### 4.2.3 Cartes d’erreurs sur l’espace paramétrique

Nous nous intéressons ici aux erreurs relatives (pour les 2 stratégies d’enrichissement) sur l’ensemble de l’espace paramétrique. Pour cela nous calculons les solutions de nos modèles réduits sur 6400 points de l’espace paramétrique. Nous fixons ici encore le conditionnement maximum à  $\kappa_{max} = 10$ .

Les cartes des erreurs relatives duales pour  $l$  (enrichissement EF) et  $l + 6$  (enrichissement POD+EF) sur la figure 6 montrent que nous obtenons bien de meilleurs résultats avec  $l + 6$  (figure 6b). A conditionnement maximum fixé, la méthode d’enrichissement par modes POD et fonctions de forme EF approxime mieux les solutions duales sur l’ensemble de l’espace paramétrique  $\mathcal{P}$  que la méthode d’enrichissement par fonctions de forme EF (figure 6a). Cependant, nous pouvons constater sur les deux cartes que les erreurs relatives duales sont importantes sur la partie gauche des cartes (pour de faibles pressions  $P_1$ ), mettant en évidence la difficulté de traiter un cas de contact où l’espace paramétrique est aussi grand (contact faible et fort, étendu ou non). Cela ouvre naturellement la voie de coupler notre modèle hyper-réduit hybride



avec des approches de clustering de l'espace paramétrique [5].

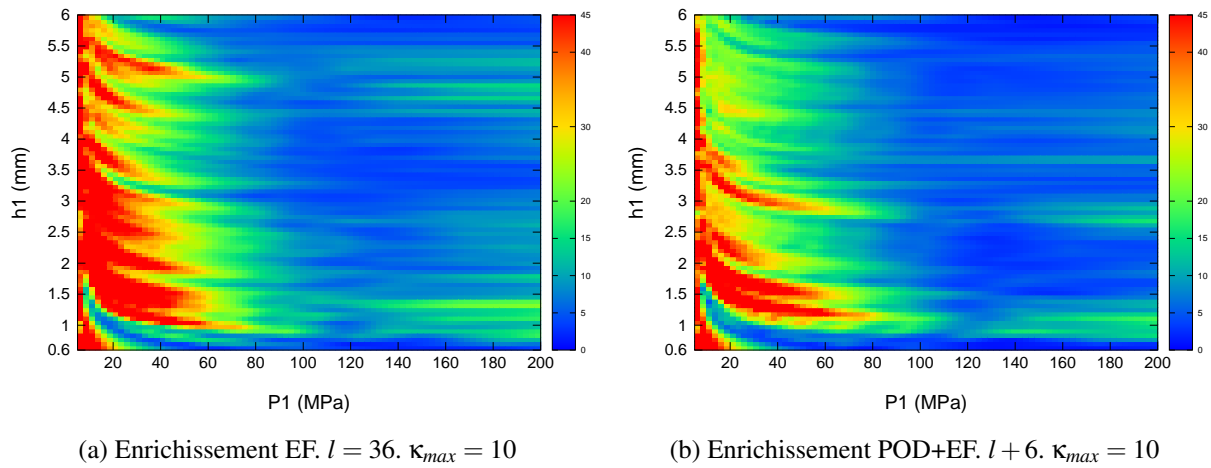


FIGURE 6 – Cas test d'interaction pastille-gaine : carte des erreurs relatives duales (en %) un espace paramétrique de test de 6400 valeurs

## 5 Conclusion et perspectives

Nous nous sommes intéressés ici à la réduction d'ordre de modèle par méthode de projection pour la mécanique du contact traité par multiplicateurs de Lagrange. Nous avons clairement montré la corrélation forte qu'il existe entre conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée et la précision de la solution duale.

Nous avons ainsi introduit dans le cadre de la méthode d'hyper-réduction hybride (basé sur un domaine d'intégration réduit), deux stratégies d'enrichissement automatique de la base réduite primale basées sur ce conditionnement. Ces stratégies permettent de respecter la condition LBB du problème de point-selle réduit et d'améliorer la précision de la méthode, en particulier sur la solution duale.

Cependant, pour des espaces paramétriques grands, nous avons montré que des enrichissements importants pouvaient être nécessaires, ce qui nuit aux performances d'accélération de la méthode. Il serait donc intéressant de combiner ces stratégies d'enrichissement avec des méthodes de clustering de l'espace paramétrique, afin de travailler sur des modèles réduits locaux de taille plus petite. Les premiers résultats obtenus par ce type d'approche sont très prometteurs.

## Références

- [1] M. Balajewicz, D. Amsallem, C. Farhat. Projection-based model reduction for contact problems. *Int. J. numer. methods eng.*, Wiley, 106 :644-663, 2015.
- [2] A. Benaceur, A. Ern, V. Ehrlacher. A reduced basis method for parametrized variational inequalities applied to contact mechanics. *Int. J. numer. methods eng.*, Wiley, 121 :1170-1197, 2019.
- [3] F. Brezzi, On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. *Math. modelling and num. analysis*, ESAIM, 8(R2) :129-151, 1974.
- [4] S. Chaturantabut, D. C. Sorensen. Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation. *J. Sci. Comput.*, SIAM, 32(5) :2737-2764, 2010.
- [5] T. Daniel, F. Casenave, N. Akkari, D. Ryckelynck. Model order reduction assisted by deep neural networks (ROM-net). *Advanced Modeling and Simulation in eng. sci.*, Springer, 7, 16, 2020
- [6] J. Fauque, I. Ramière, D. Ryckelynck. Hybrid hyper-reduced modeling for contact mechanics problems. *Int. J. numer. methods eng.* Wiley, 115(1) :117-139, 2018.
- [7] B. Haasdonk, J. Salomon, B. Wohlmuth. A reduced basis method for parametrized variational inequalities. *J. numer. anal.*, SIAM, 50(5) :2656-2676, 2012.
- [8] H. Liu, I. Ramière, F. Lebon. On the coupling of local multilevel mesh refinement and ZZ methods for unilateral frictional contact problems in elastostatics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, volume 323, pp.1-26, 2017.
- [9] D. Ryckelynck. Hyper reduction of mechanical models involving internal variables. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Wiley, 77(1) :75-89, 2009.