



**HAL**  
open science

# Analyse unidimensionnelle des effets de bords et de diffusion de l'endommagement pour des méthodes non locales avec interactions évolutives

Breno RIBEIRO NOGUEIRA, Cédric Giry, Giuseppe Rastiello, Fabrice Gatuingt

► **To cite this version:**

Breno RIBEIRO NOGUEIRA, Cédric Giry, Giuseppe Rastiello, Fabrice Gatuingt. Analyse unidimensionnelle des effets de bords et de diffusion de l'endommagement pour des méthodes non locales avec interactions évolutives. CSMA 2022 - 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, Giens, France. hal-03717979

**HAL Id: hal-03717979**

**<https://hal.science/hal-03717979>**

Submitted on 8 Jul 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyse unidimensionnelle des effets de bords et de diffusion de l'endommagement pour des méthodes non locales avec interactions évolutives

B. Ribeiro Nogueira<sup>1</sup>, C. Giry<sup>1</sup>, G. Rastiello<sup>2</sup>, F. Gatuingt<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université Paris-Saclay, LMT, ENS Paris-Saclay, CNRS, {breno.ribeiro\_nogueira,cedric.giry,fabrice.gatuingt}@ens-paris-saclay.fr

<sup>2</sup> Université Paris-Saclay, CEA, Service d'études mécaniques et thermiques, giuseppe.rastiello@cea.fr

**Résumé** — Les modèles d'endommagement non locaux classiques présentent quelques inconsistances physiques comme l'attraction aux bords et la diffusion de l'endommagement proche de la localisation des déformations. Dans cette contribution, le comportement de la méthode Eikonale dans sa forme intégrale et gradient et de la méthode intégrale basée sur l'état des contraintes est étudié. Une analyse comparative de ces approches utilisées sur un problème unidimensionnel d'écaillage est présentée.

**Mots clés** — Endommagement, non local, écaillage, effets de bords, diffusion.

## 1 Introduction

La prédiction fiable de la réponse non-linéaire de structures soumises à des chargements complexes est l'un des défis les plus importants dans le domaine de l'analyse structurelle. Par exemple, l'étude de l'initiation et de la propagation des fissures peut s'avérer essentielle pour la description précise du comportement des structures. Cette dernière est intrinsèquement liée à la durée de vie des ouvrages et par conséquent à un comportement durable.

Les comportements adoucissants sont caractéristiques des matériaux quasi-fragiles comme le béton ou certaines roches. Pour modéliser ces matériaux, une description implicite de la fissuration dans le cadre de la mécanique continue de l'endommagement est classiquement mise en oeuvre. Néanmoins, les simulations aux éléments finis de ce type de modèle présentent intrinsèquement une dépendance pathologique au maillage due au phénomène de localisation des déformations. Ainsi, des méthodes de régularisation doivent être mises en place afin de garantir une solution objective du problème.

En régime quasi-statique, cela est usuellement fait par une méthode non locale intégrale (INL) [10] ou son équivalente à gradient implicite (GNL) [9]. Dans ces approches, une longueur caractéristique  $l_c$  (ou longueur interne) liée à la taille du Volume Élémentaire Représentatif (VER) et à la zone de rupture (FPZ) est définie. Cela permet d'introduire de l'information d'une échelle plus petite dans les modèles macroscopiques.

Les interactions non-locales, souvent modélisées comme isotropes et constantes au cours du processus de dégradation, évoluent en réalité lorsque l'endommagement croît. Plusieurs méthodes non locales évolutives ont ainsi été proposées, basées sur la contrainte, l'endommagement, la déformation ou la micro-structure (e.g., [1, 11, 2, 8, 4, 3, 6]).

Dans ce travail, les méthodes suivantes sont étudiées : Eikonale non locale intégrale (ENLI) [3], Eikonale non locale à gradient (ENLG) [3] et non locale basée sur l'état de contrainte (NLSB) [5]. Dans ce contexte, un code éléments finis en dynamique explicite unidimensionnelle (1D) a été développé dans le but de comparer ces approches avec des méthodes non locales classiques (INL et GNL). Le problème d'écaillage est utilisé ici comme un outil afin de tester les propriétés de ces approches avec une maîtrise du lieu d'enclenchement des dégradations, l'intention n'étant pas pour l'instant de modéliser le comportement dynamique des matériaux.

## 2 Formulations non locales de l'endommagement

Pour les méthodes non locales, la loi de comportement est une fonction de ce qui se produit dans le corps en entier. Les interactions au voisinage d'un point (non locales) sont donc utilisées pour enrichir la description continue du domaine soit par des gradients d'ordre plus élevé soit par une moyenne spatiale.

**Loi contrainte-déformation** Dans ce travail, l'endommagement est modélisé par une variable scalaire  $D \in [0, 1]$  décrivant la dégradation du matériau et telle que la loi contraintes-déformations s'écrit :

$$\sigma = E(1 - D(\hat{\varepsilon}^{nl}))\varepsilon \quad (1)$$

avec  $\sigma$  la contrainte de Cauchy,  $\varepsilon$  la déformation infinitésimale et  $\hat{\varepsilon}^{nl}$  la déformation non-locale. La variable  $D$  évolue selon la fonction critère :

$$f = \hat{\varepsilon}^{nl} - \kappa, \quad f\dot{\kappa} = 0, \quad f \leq 0 \text{ and } \dot{\kappa} \geq 0 \quad (2)$$

et  $\kappa$  est défini par :

$$\kappa(t) = \max_{\tau \leq t} (\kappa_0, \hat{\varepsilon}^{nl}(\tau)) \quad (3)$$

avec  $\kappa_0$  un paramètre représentant le seuil d'endommagement initial. L'évolution de la variable d'endommagement suit une loi du type :

$$D = g(\kappa) = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} \exp(-B(\kappa - \kappa_0)) \quad (4)$$

où  $B$  est un paramètre du matériau.

### 2.1 Méthodes non locales classiques

**Formulation intégrale (INL)** Pijaudier-Cabot et Bazant [10] ont proposé une théorie non locale de l'endommagement, remplaçant un champ local donné  $X(x)$  par sa moyenne pondérée sur tout le volume  $\Omega$  d'un corps. Pour la déformation équivalente non locale, cela se traduit par :

$$\hat{\varepsilon}^{nl}(x) = \frac{1}{V_r(x)} \int_{\Omega} \phi(l_{x\xi}, l_c) \hat{\varepsilon}(\xi) d\xi \quad \text{et} \quad V_r(x) = \int_{\Omega} \phi(l_{x\xi}, l_c) d\Omega_{\xi} \quad (5)$$

où  $l_{x\xi} = |x - \xi|$  est la distance euclidienne entre les points  $x$  et  $\xi$ , et  $\phi$  une fonction poids généralement prise comme une distribution gaussienne et ici  $\phi = \exp(-4(l_{x\xi}/l_c)^2)$ .

**Formulation gradient (GNL)** Peerlings *et al.* [9] ont proposé une théorie non-locale à gradient implicite équivalente à celle intégrale. La déformation équivalente non locale est cette fois-ci solution d'une équation différentielle du type Helmholtz :

$$\hat{\varepsilon}^{nl}(x) - c \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}^{nl}}{\partial x^2} = \hat{\varepsilon}(x) \quad \text{dans } \Omega \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \hat{\varepsilon}^{nl}}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (6)$$

avec  $c$  un paramètre homogène au carré d'une longueur.

### 2.2 Méthode non locale Eikonale

La méthode Eikonale est une extension géométrique de la méthode non locale en temps interne introduite par Desmorat et Gatuingt [2]. Dans cette approche, le temps de propagation de l'information (interaction) d'un point à l'autre augmente et tend vers l'infini quand l'endommagement entre ces deux points tend vers l'unité. La méthode Eikonale est développée dans [3] avec la prise en compte de la distance effective  $\tilde{l}_{x\xi}$  qui augmente en fonction de l'endommagement.

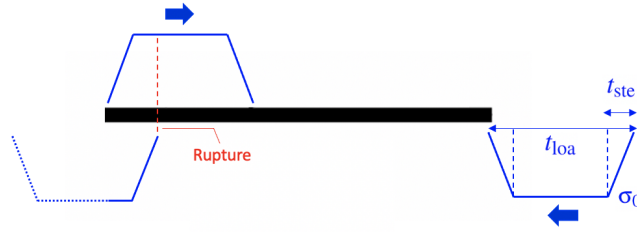


FIGURE 1 – Représentation numérique du problème de l'écaillage 1D

**Formulation intégrale (ENLI)** Dans le cas 1D pour un champ d'endommagement non homogène ( $D = D(x)$ ), le problème Eikonale est :

$$\begin{cases} \sqrt{1 - D(x')} \left| \frac{d\tilde{l}_x(x')}{dx'} \right| = 1 \\ \tilde{l}_x(x = x') = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Les distances effectives peuvent donc être calculées à partir de l'intégrale [3] :

$$\tilde{l}_{x\xi} = \int_x^\xi \frac{dx'}{\sqrt{1 - D(x')}} > l_{x\xi}. \quad (8)$$

La grande différence par rapport à INL est l'utilisation du champ de distances effectives  $\tilde{l}_{x\xi}$  à la place de  $l_{x\xi}$ . Des travaux récents ont pu montrer que la méthode ENLI modélise de manière naturelle la localisation des déformations [3, 13, 6].

**Formulation gradient (ENLG)** De manière similaire à la méthode GNL, une formulation Eikonale à gradient implicite a également été proposée par Desmorat *et al.* [3]. Dans le cas 1D, l'équation différentielle (6) devient :

$$\hat{\varepsilon}^{nl} - c\sqrt{1 - D} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{1 - D} \frac{\partial \hat{\varepsilon}^{nl}}{\partial x} \right) = \hat{\varepsilon} \quad \text{dans } \Omega \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \hat{\varepsilon}^{nl}}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (9)$$

### 2.3 Méthode non locale intégrale basée sur l'état des contraintes

L'idée principale de la méthode NLSB est de prendre en compte l'influence du champ de contrainte lors du calcul de la fonction poids. Cela est fait par l'introduction d'une longueur interne  $l_c(\xi)$  qui dépend de l'état de contrainte  $\sigma(\xi)$  au point  $\xi$  via un facteur d'influence  $\rho_{\text{fac}}(\xi) = \rho_{\text{fac}}(\sigma(\xi))$  dans la formulation non locale intégrale. Dans le cas 1D, le facteur d'influence est défini comme :

$$\rho_{\text{fac}}(\xi) = \frac{|\sigma(\xi)|}{f_t} \quad (10)$$

où  $f_t$  est la contrainte limite en traction du matériau. Le facteur d'influence vaut donc zéro dans le cas d'un bord libre, ce qui correspond à la condition de contrainte nulle. Ainsi, cette méthode résout naturellement le problème des effets de bords en présence d'un bord libre.

## 3 L'écaillage 1D

### 3.1 Résolution numérique

Une formulation variationnelle dans l'espace de l'équation de propagation des ondes a été introduite afin de mettre en place une solution aux éléments finis du problème dynamique. La barre est donc discrétisée en plusieurs éléments à fonctions d'interpolation linéaires. La discrétisation temporelle du problème est obtenue par le schéma des différences centrées et les champs non locaux sont calculés différemment pour chaque approche. Le problème numérique étudié est détaillé sur la Figure 1.

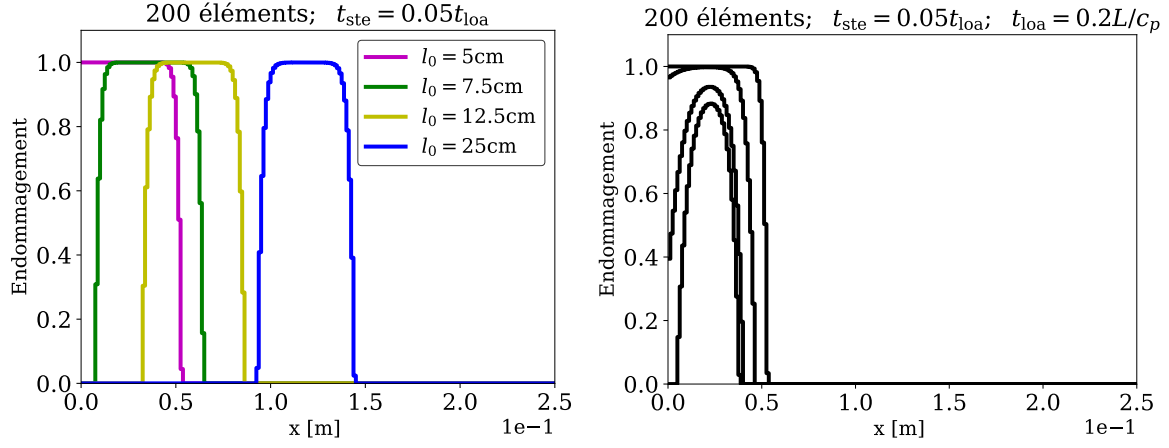


FIGURE 2 – Influence de  $l_0$  sur l'attraction de l'endommagement (gauche) et son évolution (droite)

**Méthodes intégrales** Dans le cas de la méthode Eikonale integrale, le champ des distances effectives doit être calculé. Numériquement, l'intégrale est remplacée par une somme finie sur tous les points de Gauss de la discrétisation. Jirásek et Desmorat [6] ont proposé deux schémas d'intégrations différents :

- (i) la méthode des trapèzes telle que  $\sqrt{1-D}$  est constant par élément (formulation ENLI). Dans le cadre de la méthode des éléments finis, la distance effective  $\tilde{l}_{i,j}$  entre deux points d'intégration  $x_j > x_i$  est donc calculé comme suit [6, 14] :

$$\tilde{l}_{i,j} = \tilde{l}_{i,j-1} + \frac{h}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-D_{j-1}^k}} + \frac{1}{\sqrt{1-D_j^k}} \right) \quad (11)$$

où  $D_{\bullet}^k$  est l'endommagement du pas précédent et au point d'intégration  $x_{\bullet}$  ;

- (ii) une approche modifiée qui suppose que l'endommagement est linéaire entre deux points adjacents (formulation ENLI2). Dans ce cas :

$$\tilde{l}_{i,j} = \tilde{l}_{i,j-1} + \frac{2h}{\sqrt{1-D_{j-1}^k} + \sqrt{1-D_j^k}} \quad (12)$$

Bien que Jirásek et Desmorat [6] ont proposé la méthode ENLI2 pour obtenir de meilleurs résultats sur la réponse structurale, Thierry *et al.* [14] ont montré que la méthode ENLI2 engendre inévitablement un phénomène de diffusion de l'endommagement. Ainsi, dans la suite, seule la méthode ENLI1 qui ne diffuse pas artificiellement l'endommagement sera utilisée et nommée ENLI par simplicité.

**Méthodes de type gradient** Pour les méthodes à gradient implicite, une formulation variationnelle doit être utilisée : l'équation d'équilibre et l'équation de Helmholtz définissent donc un problème couplé. Il s'agit ainsi de trouver le champ de déplacement  $u(x,t)$  qui satisfait l'équilibre dynamique et le champ non local de déformation  $\hat{\varepsilon}^{nl}(x,t)$  qui vérifie l'équation différentielle pour GNL ou ENLG.

### 3.2 Résultats

Les paramètres matériaux choisis pour les simulations sont les mêmes que ceux utilisés dans [7, 5]. En particulier, nous supposons que  $E = 1\text{MPa}$ ,  $\kappa_0 = 1$ ,  $B = 2$ ,  $L = 25\text{cm}$ ,  $f_t = 1\text{MPa}$ ,  $\sigma_0 = \alpha f_t$  et  $l_c = 3\text{cm}$ . Ici,  $\alpha$  est une constante supérieure à 1 et choisie arbitrairement afin de faire apparaître l'endommagement. Le pas de temps dépend de la taille du maillage et s'écrit  $\Delta t = 0.5\Delta t^c$  avec  $\Delta t^c$  le temps critique associé à la condition de Courant du schéma explicite. Le temps de simulation est fixé à  $T = 1.5L/c_p = 0.3750\text{ms}$ .

L'attraction de l'endommagement au bord libre va inévitablement se produire lorsque  $l_{spal} < l_c$  pour les méthodes classiques. Afin de mettre en évidence ce problème, la méthode INL a été utilisée pour différentes valeurs de  $l_0$  avec  $\alpha = 2$  et 200 éléments (Figure 2). Pour des valeurs de  $l_{spal}$  inférieures à  $l_c$ ,

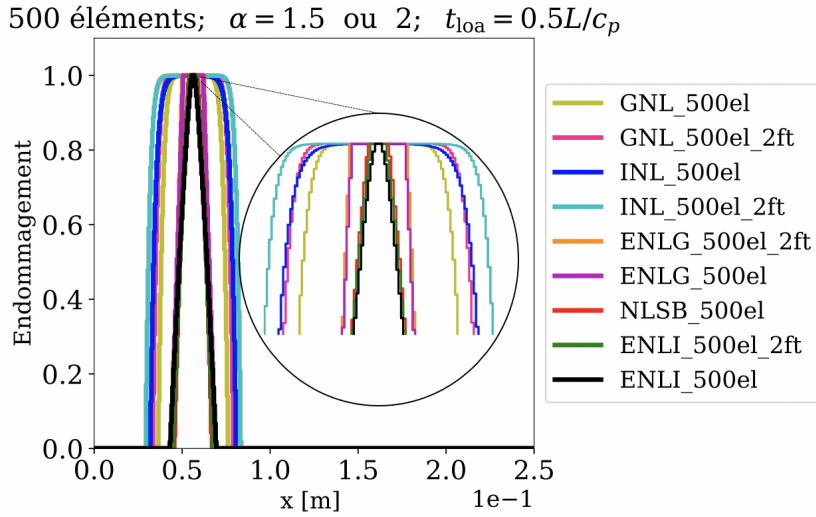


FIGURE 3 – Comparaison entre ENLI, ENLG, INL, GNL et NLSB pour 500 éléments

l'endommagement est progressivement attiré par le bord et atteint son maximum à l'extrémité du bord libre. Proche de ce bord, le domaine d'interaction est tronqué et les pondérations calculées sont donc surestimées. Cela induit une épaisseur d'écaillage qui devient infiniment petite : la distance du bord libre au point le plus endommagé devient nulle.

### 3.3 Effets de bords et diffusion de l'endommagement pour les méthodes non locales avec distances d'interaction évolutives

Dans cette partie, une analyse comparative des approches non locales avec distances d'interaction évolutives introduites ci-avant est menée. Deux cas différents seront analysés :

- (i) Cas A – endommagement loin du bord libre ( $l_{spal} = 6.250\text{cm} > l_c$ ) :  $t_{loa} = 0.5L/c_0$ .
- (ii) Cas B – endommagement très proche du bord libre ( $l_{spal} = 1.875\text{cm} < l_c$ ) :  $t_{loa} = 0.15L/c_0$ .

Dans tous les cas,  $t_{ste} = 0.1t_{loa}$ . L'effet de la vitesse de déformation sur le processus de localisation est étudié en faisant varier le paramètre de chargement  $\alpha$ .

**Diffusion de l'endommagement** Une variété de modèles sont comparés sur la Figure 3, en considérant  $\alpha = 1.5$  ou  $\alpha = 2$ . La diffusion de l'endommagement est observée pour les formulations INL et GNL, mais elle est considérablement plus petite pour les méthodes NLSB, ENLI et ENLG.

Le modèle ENLG présente le même profil d'endommagement que pour le modèle ENLI, à l'exception des zones très endommagées. En effet, l'endommagement est diffusé sur une zone importante, mais toujours plus petite que celle obtenue avec des méthodes classiques.

Le paramètre  $\alpha$  dans tous les modèles a un effet sur la diffusion de l'endommagement. Dans tous les cas, les méthodes avec interactions évolutives ont fourni des résultats plus représentatifs du processus de dégradation. La différence majeure entre ces approches est surtout liée à la description fine de la transition endommagement diffus et macro-fissure, qui est ici mieux décrite par le modèle ENLI. La Figure 4 permet de mieux quantifier l'influence de  $\alpha$  sur la diffusion de l'endommagement. On peut observer une dépendance presque linéaire entre le nombre d'éléments où l'endommagement se diffuse ( $N_\alpha$ ) et la valeur de  $\alpha$  pour tous les modèles.

**Effets de bord** Dans le but de mettre en évidence l'impact des effets de bords sur le comportement, le cas B de chargement a été analysé pour  $\alpha = 1.5$  ou  $\alpha = 1.4$ .

La Figure 5 (gauche) montre que le profil d'endommagement pour la formulation ENLG est moins affecté par l'attraction au bord libre en comparaison au modèle ENLI. Le modèle NLSB n'est pas affecté du tout. En réduisant  $\alpha$ , les effets de bords sur les modèles avec interactions évolutives sont aussi réduits (Figure 5 (droite)). Dans ce cas, le modèle ENLI est capable de localiser l'endommagement dans un seul élément, ce qui n'était pas le cas pour  $\alpha = 1.5$ . Encore une fois, le modèle ENLG montre beaucoup

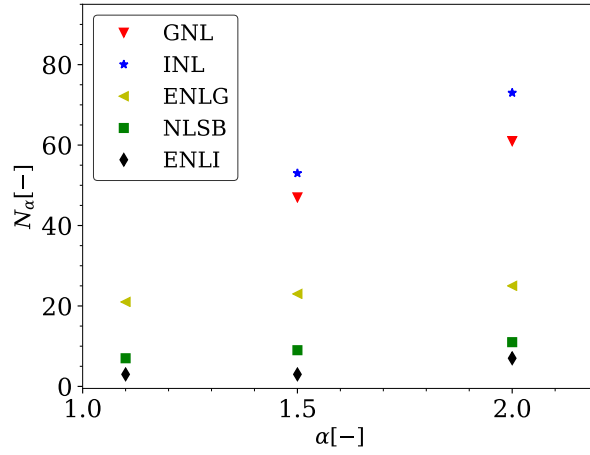


FIGURE 4 – Comparaison entre ENLI, ENLG, INL, GNL et NLSB concernant le choix de  $\alpha$  et la taille de la zone de localisation

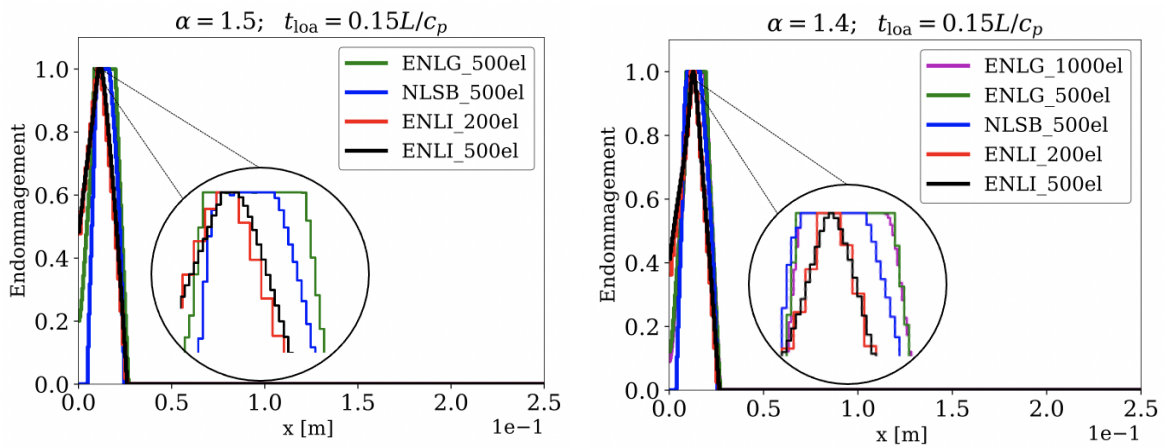


FIGURE 5 – Comparaison entre les méthodes non locales évolutives pour  $\alpha = 1.5$  et  $\alpha = 1.4$  pour le cas B

moins d'effet de bord que la formulation ENLI. Enfin, la formulation NLSB ne présente là non plus pas d'effet de bord, mais diffuse l'endommagement sur plusieurs éléments.

**ENLG numériquement modifié** Afin d'obtenir une approximation numérique du modèle ENLG qui corresponde aux hypothèses théoriques, l'équation à gradient implicite est résolue différemment. L'endommagement est considéré évoluer jusqu'à une valeur maximale critique  $D_c$ . Lorsque celui-ci est atteint sur un point de Gauss donné, les contributions matricielles issues de la formulation variationnelle sont multipliées par une valeur très importante. Cela correspond au cas où l'endommagement tend vers l'unité.

La comparaison entre les modèles avec interactions évolutives et le modèle ENLG modifié pour le cas A avec  $\alpha = 1.1$  et 500 éléments est montrée sur la Figure 6. Ici,  $\alpha = 1.1$  afin de réduire le phénomène de diffusion de l'endommagement sur les différentes approches. Le modèle ENLG modifié montre un comportement similaire aux formulations NLSB et ENLI, à part le fait qu'il localise l'endommagement sur un seul élément et présente un profil d'endommagement plus mince. Ainsi, le problème de diffusion de l'endommagement pour la méthode ENLG peut être résolu en appliquant une modification purement numérique à la méthode, avec  $D_c = 0.99$ .

Le cas B de chargement a été aussi analysé afin de comparer les modèles ENLG et ENLG modifié proche du bord libre. La Figure 7 montre que le modèle ENLG modifié localise l'endommagement sur un seul élément pour  $\alpha = 1.2$  et  $\alpha = 1.4$ , mais diffuse l'endommagement sur quatre éléments pour  $\alpha = 1.5$  et sur deux pour  $\alpha = 2$ . En revanche, la diffusion de l'endommagement est clairement présente

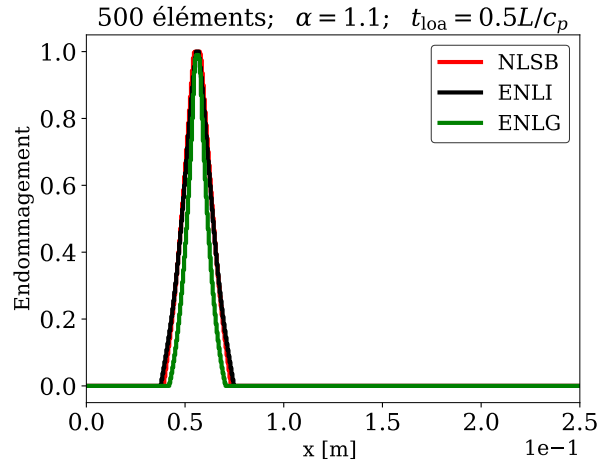


FIGURE 6 – Comparaison entre NLSB, ENLI et le ENLG modifié pour le cas A avec  $\alpha = 1.1$  et 500 éléments.

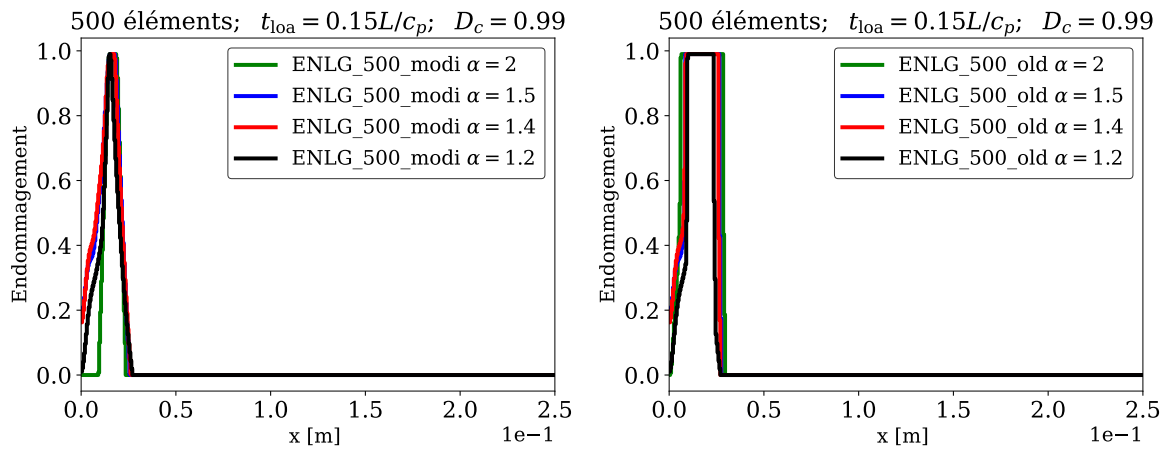


FIGURE 7 – Profil d'endommagement proche du bord libre pour ENLG modifié et initial.

pour l'ancienne méthode quel que soit la valeur de  $\alpha$ . La zone de localisation est considérablement plus importante comparée à l'approche modifiée.

Sur le bord du signal, on peut observer une attraction de l'endommagement par le bord libre. Celle-ci est strictement la même pour  $\alpha = 1.2, 1.4$  et  $\alpha = 1.5$  pour les deux modèles. En revanche, le modèle ENLG ne présente pas ce défaut pour  $\alpha = 2$  mais on peut néanmoins toujours observer un petit effet parasite. Dans ce cas, le modèle ENLG modifié fournit un profil d'endommagement parfaitement localisé sans aucun effet de bord.

## 4 Conclusion

Une analyse comparative de trois méthodes non locales évolutives a été présentée. Les modèles ont été comparés en ce qui concerne les effets de bord et la diffusion de l'endommagement. Les formulations avec interactions non-locales évolutives ont montré leur capacité à mieux décrire le processus de fissuration en comparaison avec les méthodes classiques. Le modèle ENLI montre de meilleures performances que les modèles NLSB et ENLG lorsque l'on étudie la transition vers une discontinuité forte. Néanmoins il présente toujours quelques effets parasites en ce qui concerne l'attraction aux bords. La méthode ENLG modifiée a pu non seulement permettre la localisation l'endommagement sur un seul élément, mais se comporte mieux que la formulation ENLI proche d'un bord libre. En revanche, les effets de diffusion et d'attraction aux bords changent considérablement en fonction des paramètres du signal d'entrée tels que la vitesse de déformation. Ce paramètre ne devrait pas être négligé dans l'analyse.



## Remerciements

G. Rastiello a été soutenu par l'Institut SEISM (<http://www.institut-seism.fr>). Ce travail a été également soutenu par le projet "ADI 2021" fondé par IDEX Paris-Saclay, ANR ANR-11-IDEX-0003-02.

## Références

- [1] Z. P. Bazant. *Nonlocal damage theory based on micromechanics of crack interactions.*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 593–617, 1994.
- [2] R. Desmorat, F. Gatuingt. *Introduction of an internal time in nonlocal integral theories*, Internal report LMT-Cachan, ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6/PRES Unive268, 2007.
- [3] R. Desmorat, F. Gatuingt, M. Jirásek. *Nonlocal models with damage-dependent interactions motivated by internal time.*, Engineering Fracture Mechanics, Elsevier, 255-275, 2015.
- [4] M. Geers, R. de Borst, W. Brekelmans, R. Peerlings. *Strain-based transient-gradient damage model for failure analyses*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 133-153, 1998.
- [5] C. Giry, F. Dufour, J. Mazars. *Stress-based nonlocal damage model.*, International Journal of Solids and Structures, Elsevier, 3431-3443, 2011.
- [6] M. Jirásek, R. Desmorat. *Localization analysis of nonlocal models with damage-dependent nonlocal interaction.*, International Journal of Solids and Structures, Elsevier, 174-175, 2019.
- [7] A. Krayani, G. Pijaudier-Cabot, F. Dufour. *Boundary effect on weight function in nonlocal damage model.*, Engineering Fracture Mechanics, Elsevier, 2217-2231, 2009.
- [8] G. D. Nguyen. *A damage model with evolving nonlocal interactions.*, International Journal of Solids and Structures, Elsevier, 1544-1559, 2011.
- [9] R. Peerlings, R. de Borst, W. Brekelmans, J. de Vree. *Gradient-enhanced damage model for quasi-brittle materials.*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley & Sons, 391-403, 1996.
- [10] G. Pijaudier-Cabot, Z. P. Bazant. *Nonlocal Damage Theory.*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1512-1533, 1987.
- [11] G. Pijaudier-Cabot, K. Haidar, J.-F. Dubé. *Non-local damage model with evolving internal length.*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, John Wiley & Sons, 633-652, 2004.
- [12] G. Pijaudier-Cabot, D. Grégoire. *A review of nonlocal continuum damage : Modelling of failure ?*, Networks & Heterogeneous Media, American Institute of Mathematical Sciences, 575-597, 2014.
- [13] G. Rastiello, C. Giry, F. Gatuingt, R. Desmorat. *From diffuse damage to strain localization from an Eikonal Non-Local (ENL) Continuum Damage model with evolving internal length.*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 650-674, 2018.
- [14] F. Thierry, G. Rastiello, C. Giry, F. Gatuingt. *One-dimensional Eikonal Non-Local (ENL) damage models : Influence of the integration rule for computing interaction distances and indirect loading control on damage localization.*, Mechanics Research Communications, Elsevier, 110, 2020.