



**HAL**  
open science

## Simulation numérique d'avalanches de grains allongés

Nathan Coppin, Jonathan Lambrechts, Miguel Angel Cabrera, Emilien Azéma, Frédéric Dubois, Vincent Legat

► **To cite this version:**

Nathan Coppin, Jonathan Lambrechts, Miguel Angel Cabrera, Emilien Azéma, Frédéric Dubois, et al.. Simulation numérique d'avalanches de grains allongés. 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717962

**HAL Id: hal-03717962**

**<https://hal.science/hal-03717962v1>**

Submitted on 8 Jul 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Simulation numérique d'avalanches de grains allongés

N. Coppin<sup>1</sup>, J. Lambrechts<sup>1</sup>, M. Cabrera<sup>3</sup>,  
E. Azéma<sup>2,4</sup>, F. Dubois<sup>2</sup>, V. Legat<sup>1</sup>

<sup>1</sup> MEMA, iMMC, UCLouvain, {nathan.coppin,jonathan.lambrechts,vincent.legat}@uclouvain.be

<sup>2</sup> LMGC, Université de Montpellier, {frederic.dubois,emilien.azema}@umontpellier.fr

<sup>3</sup> Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental, Universidad de los Andes, ma.cabrera140@uniandes.edu.co

<sup>4</sup> Institut Universitaire de France (IUF), Paris, France

---

**Résumé** — L'avalanche de grains allongés immergés dans un fluide est étudiée au moyen d'un modèle numérique hybride couplant la Dynamique des Contacts (NSCD) pour les grains et les éléments finis (FEM) pour le fluide. Nos données numériques montrent que la mobilité de la colonne dépend fortement de l'orientation initiale des grains : elle décroît à mesure que les grains tendent à être initialement alignés avec l'horizontale. La dépendance en loi de puissance de la mobilité au rapport d'aspect est conservée à la fois dans le cas sec et dans le cas immergé, mais nous notons qu'en présence d'un fluide, elle décroît.

**Mots clés** — Grains allongés, MigFlow, Avalanches

---

### 1 Introduction

Les matériaux granulaires, caractérisés par leur nature divisée, sont impliqués dans de nombreux phénomènes naturels et industriels. Leur modélisation est dès lors d'un intérêt conséquent, et ce malgré leur complexité. A cette fin, l'effondrement de colonnes de grains tend à s'imposer comme cas de référence [12]. Dans ces expériences, la mobilité de la colonne est une variable importante. Elle se définit comme l'extension maximale de celle-ci après effondrement, en excluant les grains éjectés qui ne sont plus en contact avec la masse de la colonne. De nombreux travaux ont montré une dépendance en loi de puissance de la mobilité avec le rapport d'aspect de la colonne [10, 15, 9]. A chaque fois, la relation peut être divisée en deux régimes distincts selon que la colonne est d'un rapport d'aspect inférieur ou supérieur à une certaine valeur critique. Lorsqu'un fluide extérieur influence la dynamique de la phase granulaire, l'avalanche est dite immergée. Dans ce cas, des études montrent que la loi de puissance est toujours observée, mais que les deux régimes ne sont plus distingués [12]. D'autres travaux suggèrent que, plus que le rapport d'aspect, c'est la compacité initiale de la colonne qui influencerait la mobilité. Une faible compacité donne un effondrement rapide et une grande mobilité, tandis qu'une compacité élevée donne une dynamique plus lente et une mobilité moindre [14]. Concernant les colonnes de grains allongés, leur dynamique d'effondrement reste similaire à celle des grains de forme sphérique [18, 6]. La relation entre la mobilité de la colonne et son rapport d'aspect n'est pas affectée par le rapport d'aspect des grains [16], tant que celui-ci ne reste faible. A mesure qu'il augmente, il devient possible que la colonne ne s'effondre pas en dessous d'une certaine hauteur critique. Jusqu'à une valeur de rapport d'aspect des grains de 24, il existe un couple de valeurs de hauteur minimale d'effondrement et maximale de stabilité, la probabilité d'effondrement variant linéairement entre ces deux valeurs [18]. Azéma et Radjaï ont par ailleurs montré que la résistance au cisaillement d'un matériaux composé de grains allongés augmente avec l'élongation des grains [2]. L'influence de l'orientation des grains dans la colonne n'est pas encore bien déterminée, bien qu'une configuration parallèle (perpendiculaire) présente une plus grande (faible) stabilité [16]. Cette orientation est modifiée par l'effondrement de la colonne : les grains tendent à s'aligner avec l'horizontale. La présence d'un fluide environnant favorise l'apparition de clusters de grains alignés lors de l'effondrement, influençant de cette façon plus encore l'orientation finale des grains [6]. L'objectif de ce travail est d'investiguer numériquement les avalanches de grains allongés dans les cas sec et immergé. Plus précisément, il s'agit d'étudier l'influence de différents paramètres – tels que l'orientation des grains, leur rapport d'aspect ou les propriétés du fluide – sur des propriétés mesurables d'un effondrement d'une colonne de grains – telles que la mobilité ou la dynamique d'effondrement.

## 2 Méthode numérique

Les méthodes numériques présentent un certain attrait car elles surmontent les difficultés inhérentes aux expériences, telles que l'accès aux forces de contacts entre les grains ou la fixation des paramètres de frottement ou de viscosité du fluide. Pour avoir un aperçu de la physique à l'échelle des grains, il est nécessaire d'utiliser des méthodes lagrangiennes. Parmi ces méthodes, celle de la dynamique des contacts (NSCD) développée dans les années 1990 par Moreau et Jean se démarque par son caractère implicite [7]. Capable de modéliser le frottement, la cohésion et les corps rigides ou déformables, elle se base sur un bilan des impulsions lors des contacts. Elle présente l'avantage de permettre de grands pas de temps et de garantir la non-interpénétrabilité des grains, propriété utile dans le cas immergé. Là encore pour ce dernier, diverses possibilités existent, notamment la simulation numérique directe [17] ou les méthodes à deux fluides [11]. Une autre possibilité permettant de combiner les avantages de ces deux approches consiste à considérer une échelle fluide plus grossière que celle de la phase granulaire. Les équations de la phase fluide sont résolues sur base de la fraction volumique moyenne de fluide, la porosité [1]. Ainsi, pour un coût calcul modéré, une précision raisonnable peut-être obtenue. C'est cette approche hybride, couplée à la dynamique des contacts pour les grains, qui est choisie dans le logiciel MigFlow utilisé dans le présent travail. Le lien entre les deux modèles se fait via une force dont la valeur est basée sur une formule empirique validée pour différents régimes d'écoulement. Cette force étant formulée pour des disques en deux dimensions, les grains allongés sont modélisés comme un assemblage de particules en forme de disque. Cela a l'avantage de ne pas devoir reparamétriser une loi pour la force de traînée.

### 2.1 Phase granulaire

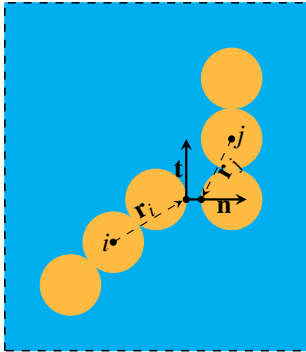


FIGURE 1 – Contact entre deux grains composés chacun de trois particules.

La méthode de la dynamique des contacts étant lagrangienne, la position  $\mathbf{x}_k$  et l'orientation  $\theta_k$  de chaque grain est suivie dans un vecteur  $\mathbf{q}$ . Sa dérivée est le vecteur  $\mathbf{u}$  dans lesquels sont stockées la vitesse  $\mathbf{u}_k$  et la vitesse angulaire  $\omega_k$  de chacun des grains :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{x}_i \\ \theta_i \\ \mathbf{x}_j \\ \theta_j \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{u}_i \\ \omega_i \\ \mathbf{u}_j \\ \omega_j \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

La dynamique des grains suit la deuxième loi de Newton :

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}_e + \mathbf{r}$$

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(\tau) + \int_{\tau}^t \mathbf{u} dt,$$

avec  $\mathbf{M}$  la matrice de masse,  $\mathbf{f}_e$  la résultante des forces externes – comme la gravité ou la force d'interaction avec le fluide – et  $\mathbf{r}$  les forces de contact. Ce sont ces forces de contact qu'il est nécessaire de déterminer pour tous les grains à chaque pas de temps. Soit une paire de grains, respectivement  $i$  et  $j$  dans la Fig. 1. Ils sont dits en contact potentiel si, étant donné leurs vitesses et leurs positions, il est possible que les particules dont ils sont constitués s'interpénètrent au pas de temps suivant. On peut construire un repère local avec un vecteur normal et un vecteur tangent. C'est dans ce dernier que sont exprimées les lois de contact, sur base desquelles sera résolu le contact en question. Ainsi, on peut obtenir un vecteur vitesse relative  $\mathbf{U} = (U_n, U_t)$  sur base d'une transformation  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  telle que  $\mathbf{U} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{u}$ . Le contact entre deux particules est considéré comme étant unilatéral, signifiant qu'aucune interpénétration ne peut avoir lieu (compression) ainsi qu'aucune cohésion (traction). Cela s'exprime en prescrivant que la distance entre les deux points de contacts  $d$  est toujours positive.

Puisque  $U_n$  correspond à la dérivée de  $d$ , il est possible d'écrire cette condition dite de Signorini en vitesse :

$$\begin{aligned} \text{Si } d \leq 0 : \\ U_n^+ \geq 0, \quad R_n \geq 0, \quad U_n^+ R_n = 0, \end{aligned}$$

où l'indice + correspond à la valeur juste après le contact, et où  $R_n$  est la composante normale de la force de contact. En tant que telle, la condition de Signorini n'est pas suffisante pour déduire  $U_n^+$  de  $R_n$ . Une loi de choc parfaitement inélastique est donc choisie telle que  $U_n^+ = 0$ . Ce choix permet une dissipation de l'énergie sans avoir recours à de l'amortissement global. En ce qui concerne le frottement, il est modélisé par une loi de Coulomb :

$$|R_t| \leq \mu R_n, \quad |U_t^+| \neq 0 \Rightarrow R_t = -\mu R_n \frac{U_t^+}{|U_t^+|}.$$

L'équation du mouvement dans le repère local s'écrit :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{lf} + \mathbf{W}R\Delta t,$$

où  $\mathbf{W} = \mathbf{H}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{H}^*$  est l'opérateur de Delassus et  $\mathbf{U}_{lf}$  est la vitesse libre au point de contact en prenant en compte les réactions dues à tous les autres contacts qui impliquent les deux grains. En deux dimensions, résoudre le problème du contact revient à trouver l'intersection entre des hyperplans et la solution peut être discutée comme suit [8] :

$$\text{Si } U_{lft}(-W_{nn} + \mu W_{nt}) \geq U_{lfn}(-W_{tn} + \mu W_{tt}) :$$

$$R_t = -\mu R_n, \quad \Delta t R_n = \frac{-U_{lfn}}{W_{nn} - \mu W_{nt}},$$

$$\text{Si } U_{lft}(W_{nn} + \mu W_{nt}) \geq U_{lfn}(W_{tn} + \mu W_{tt}) :$$

$$R_t = \mu R_n, \quad \Delta t R_n = \frac{-U_{lfn}}{W_{nn} + \mu W_{nt}},$$

Sinon :

$$\Delta t R_t = J_t, \quad \Delta t R_n = J_n,$$

où  $\mathbf{J} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{U}_{fl}$ .

Chaque contact est ainsi résolu de la façon présentée ci-dessus. Puisque la résolution d'un contact affecte celle d'un autre, il est nécessaire d'itérer sur tous les contacts à chaque pas de temps jusqu'à satisfaire un certain critère de convergence. Pour ce faire, un système de queue est utilisé [4]. Cela permet un gain de temps considérable par rapport à une méthode classique de Gauss-Seidel Non Linéaire.

## 2.2 Phase fluide

Pour permettre la résolution du fluide à une échelle plus grande, les champs du fluide sont moyennés sur un certain volume de contrôle sur base de la porosité  $\phi$ . Les équations de Navier-Stokes s'écrivent alors [1] :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_f \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{\rho_f \mathbf{v} \mathbf{v}}{\phi} = \nabla \cdot \left( 2\eta \phi \mathbf{d} \left( \frac{\mathbf{v}}{\phi} \right) - p \mathbf{I} \right) + \mathbf{f} + \phi \rho_f \mathbf{g}, \tag{2}$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse moyennée du fluide,  $\rho_f$  sa masse volumique,  $\eta$  sa viscosité dynamique,  $\mathbf{d}$  le tenseur des taux de déformation,  $p$  la pression,  $\mathbf{I}$  le tenseur identité,  $\mathbf{f}$  la force d'interaction entre le fluide et les particules et  $\mathbf{g}$  l'accélération due à la gravité. Le volume de contrôle correspond à un élément du maillage, ce qui nécessite des éléments plus grands que les particules. La méthode d'éléments finis utilise des éléments P1-P1 parce qu'ils permettent une précision suffisante pour un coût calcul raisonnable. Elle



est stabilisée sur base d'un PSPG-SUPG et corrigée pour l'incompressibilité à l'aide d'un terme LSIC [5]. Quant à la force d'interaction, elle tient uniquement compte du gradient de pression et de la traînée :

$$\mathbf{f} = -\gamma \left( \mathbf{u}_p - \frac{\mathbf{v}}{\phi} \Big|_{\mathbf{x}_p} \right) - V \nabla p,$$

avec  $\mathbf{u}_p$  le vecteur des vitesses des particules (à ne pas confondre avec celui des grains), et  $\mathbf{x}_p$  le vecteur de leurs positions. Le coefficient  $\gamma$  est adapté pour prendre le nombre de Reynolds et la porosité en compte de telle sorte qu'il soit valide pour différents régimes d'écoulement et fractions volumiques de fluide [19, 13] :

$$\gamma = \phi^{-1.8} \Big|_{\mathbf{x}_p} d_p \frac{\rho_f}{2} \left( 0.63 \|\mathbf{u}_p - \frac{\mathbf{v}}{\phi} \Big|_{\mathbf{x}_p}\|^{\frac{1}{2}} + \left[ \frac{\eta}{d_p \rho_f \phi \Big|_{\mathbf{x}_p}} \right]^{\frac{1}{2}} \right)^2,$$

où  $d_p$  est le diamètre de la particule. Pour éviter un coût-calcul trop important, les deux solveurs sont couplés explicitement. Afin d'éviter de possibles instabilités dues à ce couplage, un schéma prédicteur-correcteur décrit dans [5] est utilisé. Pour le calcul de la force d'interaction un schéma de Patankar, reposant sur une prédiction de la vitesse des particules au prochain pas de temps, est également mis en place.

### 3 Résultats

Les simulations explorent différents rapports d'aspect de la colonne de grains, pour une largeur basale initiale  $R_i = 10$  cm. Chaque simulation a été réalisée 5 fois avec des positions et des rayons de particules aléatoirement variés dans un souci de significativité statistique. Les simulations ont montré que l'on obtenait des résultats fiables pour une tolérance géométrique de  $10^{-6}$  m concernant la résolution des contacts. Le coefficient de frottement entre les grains et le sol  $\mu_s$  est de 0.3 et celui entre les grains  $\mu_g$  est de 0.9. Les paramètres utilisés pour les grains s'inspirent de [6]. Leur rapport d'aspect moyen est  $A_g = 3.21$ . Comme ces grains sont composés d'un nombre entier de particules, des grains de rapport d'aspect 3 et 4 ont été mélangés dans des proportions adéquates pour obtenir le rapport d'aspect moyen désiré. Les grains ont une densité  $\rho_g = 1840$  kg/m<sup>3</sup>. Le diamètre des particules est de  $d_p = 2.15$  mm. Toutes les particules d'un même grain ont le même diamètre, mais une petite polydispersité a été introduite entre les grains pour éviter des effets de cristallisation inhérents aux problèmes en deux dimensions. Dans le cas immergé, le fluide choisi est l'eau. La Fig. 2 donne un exemple de l'effondrement d'une colonne de grain de rapport d'aspect  $A = 2$  à différents instants. Les histogrammes présentent la distribution de l'orientation des grains par rapport à l'horizontale. La hauteur de chaque bâtonnet correspond au nombre de grains orientés dans un delta d'angle  $\delta\theta$  centré autour de l'angle de référence du bâtonnet, normalisé par le nombre total de grains et par  $\delta\theta$ . La courbe en orange représente la fonction de densité de probabilité. Comme expliqué plus haut, l'utilisation de méthodes numériques permet de prescrire une distribution d'orientation donnée, et ensuite d'étudier son évolution et son influence sur la dynamique de l'effondrement, la stabilité et la mobilité de la colonne. On constate que l'effondrement de la colonne mène à une distribution plus éparpillée et la moyenne  $\mu_\theta$  se déplace vers  $0^\circ$ , comme observé dans [6]. La mobilité  $R_f - R_i$  est calculée sur base du réseau des contacts entre grains, afin d'exclure les grains éjectés de la masse de la colonne. Celui-ci est converti en une matrice d'adjacence d'un graphe, dont on recherche le plus grand sous-graphe connexe. Ensuite, on obtient  $R_f$  comme étant la position de la particule du grain appartenant à ce sous graphe qui se situe le plus à droite. La Fig. 3 représente l'évolution de la mobilité adimensionnelle  $R^* = \frac{R_f - R_i}{R_i}$  d'une colonne de grains de rapport d'aspect  $A = 1.1$  en fonction de la distribution d'orientation  $\mathcal{N}(\mu_\theta, \sigma_\theta)$  des grains.

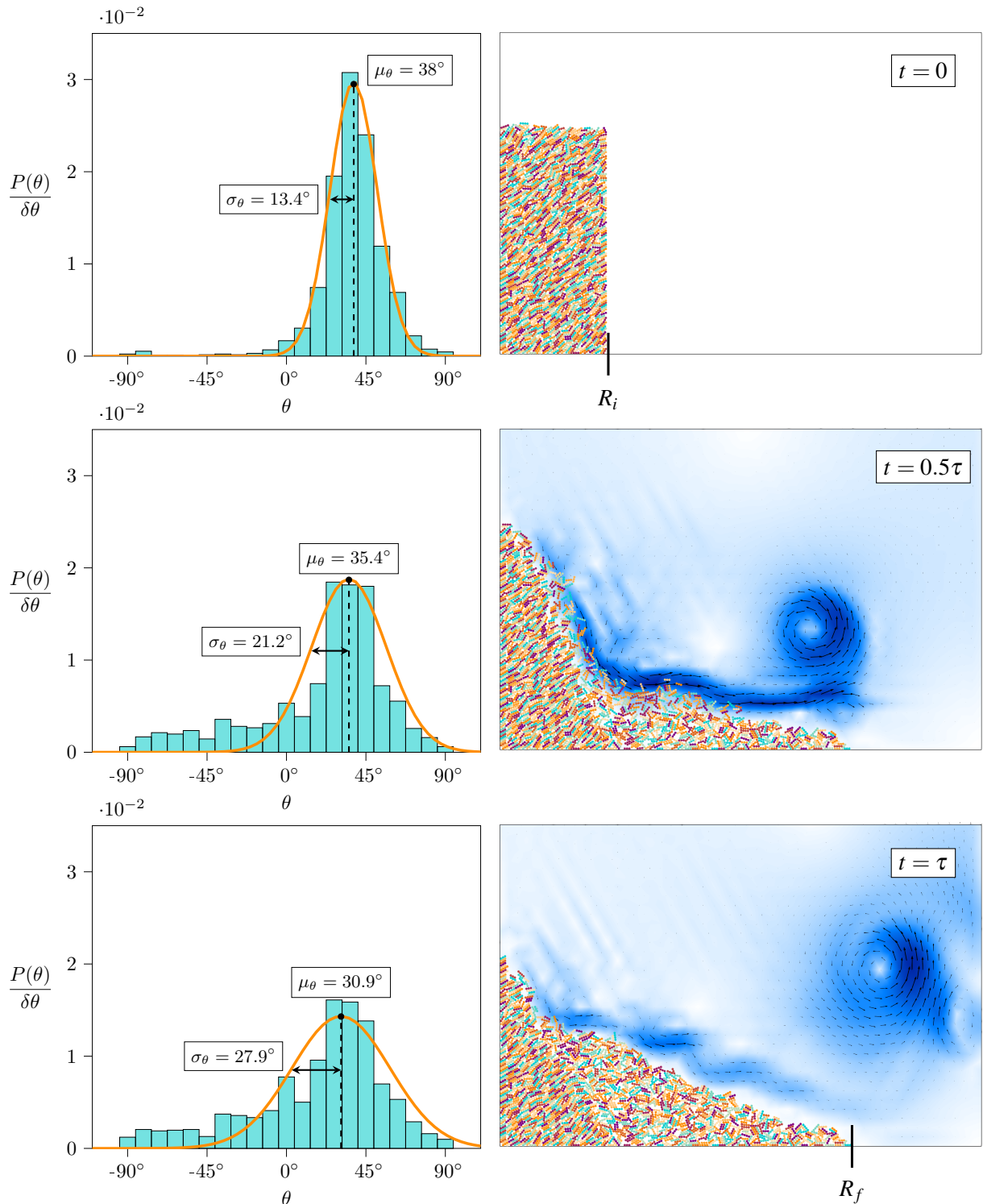


FIGURE 2 – Effondrement d’une colonne de rapport d’aspect  $A = 2$  immergée dans de l’eau. La variable  $\tau$  correspond au temps d’effondrement. Sur la gauche, les histogrammes représentent la distribution de l’orientation des grains.

Sur l’axe des  $x$  sont représentées les orientations moyennes de la colonne, et les différents symboles sont utilisés pour différencier les écarts types des distributions. Pour des distributions d’orientation à faible écart-type, on constate que les colonnes dont l’orientation moyenne est plus proche de zéro ont une mobilité moindre et sont donc plus stables. On remarque également une certaine asymétrie de la courbe, qui peut s’expliquer par le fait que les grains ont une orientation moyenne qui les place en appui ou non sur la paroi de gauche.

A mesure que l'écart-type de la distribution augmente, les différences de mobilité entre les angles moyens diminuent jusqu'à obtenir la courbe représentée par des carrés violets.

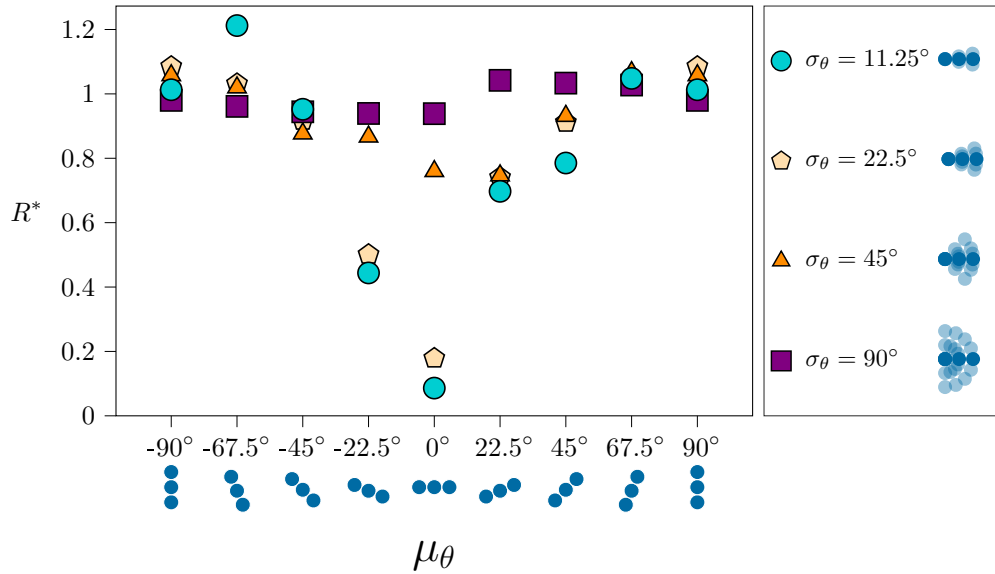


FIGURE 3 – Mobilité adimensionnelle  $R^*$  en fonction de l'angle moyen  $\mu_\theta$  des grains dans la colonne de départ pour différents écarts types  $\sigma_\theta$ .

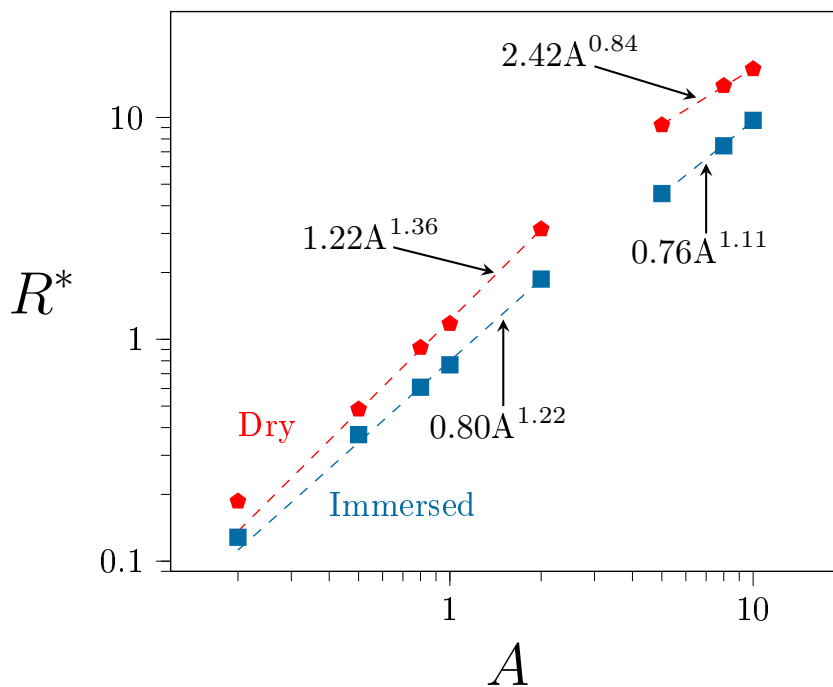


FIGURE 4 – Mobilité adimensionnelle  $R^*$  en fonction du rapport d'aspect  $A$  de la colonne pour le cas sec (en rouge) et immergé (en bleu).

La Fig. 4 représente l'évolution de  $R^*$  en fonction de  $A$  pour les cas sec et immergé. On remarque que dans le premier cas, le comportement typique en loi de puissance est reproduit, avec une valeur critique de changement de pente entre 2 et 5 ce qui se rapproche de résultats déjà observés dans d'autres travaux avec des grains sphériques [12]. Les valeurs observées pour les pentes sont proches de celles de Trepanier et al. [18]. Dans le cas immergé, un changement de pente se présente également, mais nettement plus faible. Un tel résultat a déjà été retrouvé dans le cas de particules sphériques [12].

## 4 Conclusion et perspectives

Le modèle numérique qui allie résolution des grains avec la dynamique des contacts et résolution du fluide à plus grande échelle sur base d'éléments finis permet de retrouver des comportements clés des colonnes de grains, que ce soit dans le cas sec ou immergé. La modélisation de grains allongés par un assemblage de grains sphérique semble satisfaisante. Il reste à réaliser les simulations sur des systèmes de plus grande taille afin d'éviter des effets de taille des grains. Pour cela, une taille de colonne d'au moins 75 fois celle des grains est recommandée [3]. Il est également possible d'étudier l'influence de la distribution d'orientation des grains sur la relation entre la mobilité adimensionnelle et le rapport d'aspect. Le rapport d'aspect des grains peut également être investigué. Il sera aussi intéressant d'étudier et de décrire la dynamique d'effondrement des colonnes en fonction des paramètres précités. Enfin, l'influence du fluide sur la dynamique d'effondrement et sur la distribution finale de l'orientation des grains reste à caractériser précisément.

### Références

- [1] T. B. Anderson, R. Jackson. *A fluid mechanical description of fluidized beds*, Industrial and engineering chemistry fundamentals, ACS Publications, 527-539, 1967.
- [2] E. Azema, F. Radjaï. *Stress-strain behavior and geometrical properties of packings of elongated particles*, Physical Review E, APS, 051304, 2010.
- [3] M.A. Cabrera, N. Estrada. *Granular column collapse : Analysis of grain-size effects*, Physical Review E, APS, 012905, 2019.
- [4] M. Constant, F. Dubois, J. Lambrechts, V. Legat. *Implementation of an unresolved stabilised FEM-DEM model to solve immersed granular flows*, Computational Particle Mechanics, Springer, 1-14, 2018.
- [5] M. Constant, N. Coppin, F. Dubois, V. Vidal, V. Legat, J. Lambrechts. *Simulation of air invasion in immersed granular beds with an unresolved FEM-DEM mode*, Computational Particle Mechanics, Springer, 535-560, 2021.
- [6] A. Jara, M.A. Cabrera. *Planar column collapse of elongated grains*, EPJ Web of Conferences, EDP Sciences, 06006, 2021.
- [7] M. Jean. *The nonsmooth contact dynamics method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, Elsevier, 235-257, 1999.
- [8] M. Jean. *Méthode de dynamique des contacts*, Modélisation numérique discrète des matériaux granulaires, Hermès-Lavoisier, 51-82, 2010.
- [9] L. Lacaze, J.C. Phillips, R.R. Kerswell. *Planar collapse of a granular column : Experiments and discrete element simulations*, Physics of Fluids, AIP, 063302, 2008.
- [10] G. Lube, H.E. Huppert, R.S.J Sparks, A. Freundt. *Collapses of two-dimensional granular columns*, Physical Review E, APS, 041301, 2005.
- [11] M.V. Papalexandris. *A two-phase model for compressible granular flows based on the theory of irreversible processes*, Journal of Fluid Mechanics, Cambridge University Press, 103-112, 2004.
- [12] G. Pinzon, M. A. Cabrera. *Planar collapse of a submerged granular column*, Phys. Fluids, AIP, 086603, 2019.
- [13] J. Richardson, W. Zaki. *The sedimentation of a suspension of uniform spheres under conditions of viscous flow*, Chemical engineering science, Elsevier, 65-73, 1954.
- [14] L. Rondon, O. Pouliquen, P. Aussillous. *Granular collapse in a fluid : Role of the initial volume fraction*, Physics of Fluids, AIP, 073301, 2011.
- [15] L. Staron, E.J. Hinch. *The spreading of a granular mass : role of grain properties and initial conditions*, Granular Matter, Springer-Verlag, 205-217, 2007.
- [16] H. Tapia-McClung, R. Zenit. *Computer simulations of the collapse of columns formed by elongated grains*, Physical Review E, APS, 061304, 2012.
- [17] V. Topin, F. Dubois, Y. Monerie, F. Perales, A. Wachs. *Micro-rheology of dense particulate flows : Application to immersed avalanches*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Elsevier, 63-72, 2011.
- [18] M. Trepanier, S.V. Franklin. *Column collapse of granular rods*, Physical Review E, APS, 011308, 2010.
- [19] C. Y. Wen, H. Y. Yu. *Mechanics of fluidization*, Chemical Engineering progress symposium series, American Institute of Chemical Engineers, 100-111, 1966.