



HAL
open science

Positionnement optimal de couches minces piézoélectriques dans un objectif de maximisation de couplages modaux

Boris Lossouarn

► **To cite this version:**

Boris Lossouarn. Positionnement optimal de couches minces piézoélectriques dans un objectif de maximisation de couplages modaux. 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717951

HAL Id: hal-03717951

<https://hal.science/hal-03717951>

Submitted on 8 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Positionnement optimal de couches minces piézoélectriques dans un objectif de maximisation de couplages modaux

B. Lossouarn

LMSSC, Conservatoire national des arts et métiers, boris.lossouarn@lecnam.net

Résumé — L'objectif de cette étude est de proposer une démarche de positionnement optimal de patches piézoélectriques pour des applications de contrôle vibratoire. Connaissant le mode de vibration à contrôler, supposé peu dépendant de l'ajout de couches piézoélectriques en surface, l'analyse du champ de contraintes permet de définir des zones maximisant le couplage piézoélectrique. L'extension surfacique d'un patch peut alors être optimisée et les performances d'amortissement vibratoire estimées à partir d'un modèle éléments finis standard, sans ajout d'éléments piézoélectriques spécifiques.

Mots clés — Couplage piézoélectrique, Positionnement optimal, Analyse modale.

1 Introduction

Les techniques d'amortissement par shunt piézoélectrique peuvent fournir des solutions passives et robustes pour le contrôle vibratoire de structures de géométries complexes [2, 4, 5]. Cependant, le choix du nombre et de la position des patches piézoélectriques est souvent une étape critique dans la phase de prédimensionnement dès que l'on s'écarte de géométries académiques [3]. En effet, l'utilisation d'un modèle éléments finis incluant des éléments piézoélectriques peut rapidement conduire à des temps de calculs prohibitifs en cas d'optimisation à grand nombre de paramètres. Malgré la possibilité d'utiliser des algorithmes d'optimisation dédiés [2, 4, 7, 5, 8], la complexité des méthodes et des modèles couplés qui en dépendent reste un frein pour les utilisateurs non spécialistes. Cette étude propose donc de définir des critères de positionnement directement applicables après calcul des modes de la structure à contrôler. On fait pour cela l'hypothèse que l'ajout des patches a une influence négligeable sur les déformées modales. Cette hypothèse a déjà été utilisée par Rose [6], Rossi et al. [4] ou encore Sénéchal et al. [4] pour fournir un positionnement initial à un algorithme d'optimisation sous couplage piézoélectrique. En l'associant à un critère local directement issu du champ de contraintes, on peut alors définir des zones optimales de géométries complexes et même calculer des coefficients de couplage modaux sans avoir à modéliser le matériau piézoélectrique.

La première partie de l'étude détaille les équations de la piézoélectricité 3D et leur simplification sous hypothèse de plaque mince collée en surface de la structure à contrôler. La géométrie étudiée est fournie ainsi que les modes ciblés. Trois critères utiles à l'optimisation du placement des patches sont ensuite proposés et validés numériquement. L'ensemble des calculs numériques est réalisé sous COMSOL Multiphysics 5.6 qui permet de modéliser le couplage piézoélectrique mais également d'implémenter des procédures d'intégration surfacique sur les composantes du champ de contraintes.

2 Cadre de l'étude

2.1 Piézoélectricité linéaire 3D

Les équations constitutives d'un milieu piézoélectrique linéaire [1] peuvent être formulées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= s_{ijkl}^E \sigma_{kl} + d_{kij} E_k \\ D_i &= d_{ikl} \sigma_{kl} + \epsilon_{ik}^\sigma E_k \end{aligned} \quad (1)$$

où ε_{ij} , σ_{ij} , D_i and E_k représentent respectivement le tenseur des déformations, le tenseur des contraintes, le champ de déplacement électrique et le champ électrique. Les constantes s_{ijkl}^E font référence à la sou-

TABLE 1 – Notation tensorielle et notation de Voigt.

| | Contraintes | | | | | | Déformations | | | | | |
|---------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--------------------|--------------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Tenseur | σ_{11} | σ_{22} | σ_{33} | σ_{23} | σ_{13} | σ_{12} | ε_{11} | ε_{22} | ε_{33} | $2\varepsilon_{23}$ | $2\varepsilon_{13}$ | $2\varepsilon_{12}$ |
| Voigt | σ_1 | σ_2 | σ_3 | σ_4 | σ_5 | σ_6 | ε_1 | ε_2 | ε_3 | ε_4 | ε_5 | ε_6 |

TABLE 2 – Propriétés du matériau PIC 255.

| | Constantes élastiques (10^{-12} m ² /N) | Constantes piézoélectriques (10^{-12} C/N) | Permittivités relatives (-) | Densité (kg/m ³) | | | | | |
|------------|--|--|--------------------------------|---------------------------------|------|---|------|----------|------|
| s_{11}^E | 16.06 | s_{33}^E | 19.09 | d_{31} | -187 | $\varepsilon_{11}^\sigma/\varepsilon_0$ | 1852 | ρ_p | 7800 |
| s_{12}^E | -5.69 | $s_{44}^E = s_{55}^E$ | 46.99 | d_{33} | 400 | $\varepsilon_{33}^\sigma/\varepsilon_0$ | 1751 | | |
| s_{13}^E | -7.45 | s_{66}^E | 43.50 | d_{15} | 617 | | | | |

plasse à champ électrique nul, d_{kij} correspond aux constantes piézoélectriques et ε_{ik}^σ est la permittivité sous contraintes nulles. On se focalise ici sur l'utilisation de plaques en matériau PZT dont le comportement est isotrope dans le plan orthogonal à la direction de polarisation. En utilisant la notation de Voigt définie dans le Tableau 1 et en considérant que la céramique piézoélectrique est polarisée selon la direction '3', (1) est simplifiée sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{12}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^\sigma & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}.$$

Le matériau utilisé dans cette étude est la céramique PIC 255 dont les propriétés sont définies dans le Tableau 2.

2.2 Plaques minces collées en surface

Pour une plaque mince en surface d'une structure élastique, l'hypothèse d'un état de contraintes planes selon les directions principales '1' et '2' engendre $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$. De plus, pour une polarisation selon l'épaisseur du patch, les composantes du champ électrique peuvent être considérées nulles dans le plan, i.e $E_1 = E_2 = 0$. On obtient donc la matrice réduite

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & 0 & d_{31} \\ s_{12}^E & s_{11}^E & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & s_{66}^E & 0 \\ d_{31} & d_{31} & 0 & \varepsilon_{33}^\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

qui conduit aux équations couplées

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= (s_{11}^E + s_{12}^E)(\sigma_1 + \sigma_2) + 2d_{31}E_3 \\ D_3 &= d_{31}(\sigma_1 + \sigma_2) + \varepsilon_{33}^\sigma E_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Dans le cas d'un patch bloqué selon des directions '1' et '2', i.e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, une permittivité électrique équivalente peut être définie à partir de la relation $D_3 = \varepsilon_{33}^{\varepsilon^*} E_3$ qui conduit à

$$\varepsilon_{33}^{\varepsilon^*} = \varepsilon_{33}^\sigma - \frac{2d_{31}^2}{s_{11}^E + s_{12}^E} = \varepsilon_{33}^\sigma (1 - k_p^2), \quad (3)$$

exprimée à partir des coefficients de couplage du matériau [1], $k_p^2 = \frac{2k_{31}^2}{1 + s_{12}^E/s_{11}^E}$ et $k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{\varepsilon_{33}^\sigma s_{11}^E}$.

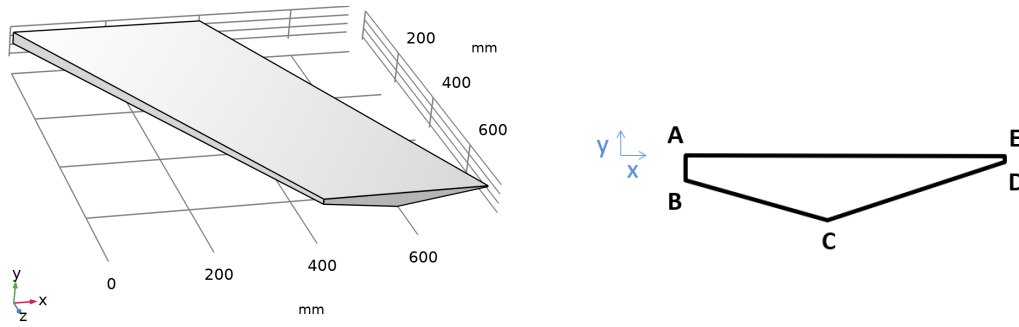


FIGURE 1 – Géométrie de la structure : les deux sections aux extrémités sont toutes deux définies par 5 points dont les positions sont données dans le Tableau 3.

TABLE 3 – Définition de la géométrie à partir de deux sections droites, positions (x, y) en mm.

| | Point A | Point B | Point C | Point D | Point E |
|---|-----------|---------------|-------------|--------------|-----------|
| Section encastrée (à $z = 0$ mm) | (0,0) | (0,-25) | (177,-67) | (393,-3.7) | (393,0) |
| Section libre (à $z = 760$ mm) | (404.1,0) | (404.1,-10.5) | (551.1,-28) | (730.1,-1.5) | (730.1,0) |

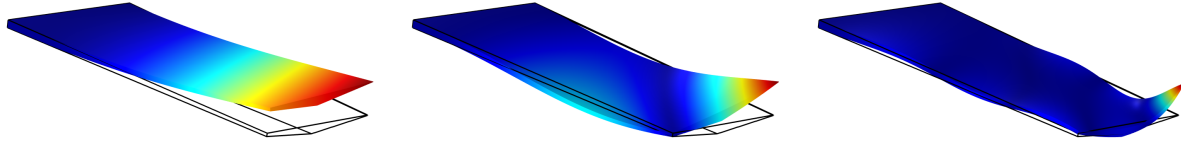


FIGURE 2 – Déformées modales considérées pour l'analyse de placement de patches : de gauche à droite, mode 1 à 76 Hz, mode 2 à 307 Hz et mode 10 à 1605 Hz.

2.3 Structure considérée et choix des modes cibles

La méthode d'optimisation du positionnement de patches piézoélectriques est validée numériquement sur une structure élancée dont la géométrie est présentée sur la Figure 1. Celle-ci est définie par les deux sections droites décrites dans le Tableau 3. On considère un matériau homogène et isotrope de type acier avec un module de Young $Y_s = 211$ GPa, un coefficient de Poisson $\nu_s = 0.3$ et une densité $\rho_s = 7820$ kg/m³. Concernant les conditions aux limites, la section de plus grande surface est encastrée alors que l'autre extrémité est laissée libre. Une analyse modale par éléments finis permet d'obtenir les déformées de la Figure 2 qui représentent les modes ciblés dans cette étude, à savoir les premiers, deuxièmes et dixièmes modes de la structure encastrée-libre.

3 Méthode d'optimisation du positionnement des patches piézoélectriques

3.1 Maximisation locale du coefficient de couplage

Le couplage piézoélectrique peut être défini comme la capacité à générer de l'énergie électrique à partir d'une sollicitation mécanique imposée. Imaginons un petit patch de surface dS soumis à un champ de contraintes uniforme. Si ce patch n'est connecté à aucun circuit électrique extérieur alors $D_3 = 0$. De plus, sur une surface libre, la contrainte normale étant nulle, le premier invariant du tenseur des contraintes $I_1^\sigma = \text{Tr}(\sigma)$ est égal à $\sigma_1 + \sigma_2$. Par conséquent, (2) implique

$$E_3 = -\frac{d_{31}}{\epsilon_{33}^\sigma} I_1^\sigma .$$

Le champ électrique E_3 étant directement lié à l'énergie électrique stockée dans l'élément piézoélectrique, une maximisation du couplage nécessite d'identifier les zones associées au maximum de $|I_1^\sigma|$ au sein d'une couche mince piézoélectrique qui serait déposée en surface de la pièce considérée. Une hypothèse importante consiste à supposer que les déformées modales sont peu modifiées par l'ajout de la couche

mince, c'est à dire que l'analyse peut se faire directement sur le champ de contrainte de la pièce nue. Un premier critère peut donc être utilisé dans le but d'identifier les zones les plus favorables au couplage piézoélectrique en fonction du mode considéré :

$$\text{Crit}_1 = |I_1^\sigma|.$$

Contrairement à Rose [6] qui propose de travailler sur le champ de déformations, on utilise ici le premier invariant du tenseur des contraintes qui permet de s'affranchir des problématiques de base locale afin de faciliter de futures applications de la méthode à des structures courbes. Le critère est ici calculé sur la surface plane de la pièce et représenté sur la Figure 3 qui permet déjà d'envisager un positionnement de différents patchs au niveau des zones de plus fortes valeurs, représentées en rouge. Plusieurs patchs peuvent éventuellement être connectés en parallèle en respectant les polarités comme par exemple pour le mode 2 dont les deux zones cibles correspondent à des champs électriques opposés. Cette représentation ne permet cependant pas de définir la surface optimale à recouvrir. En effet, une augmentation trop importante de la surface des zones de patchs peut conduire à une diminution des coefficients de couplage. Un second critère est donc nécessaire.

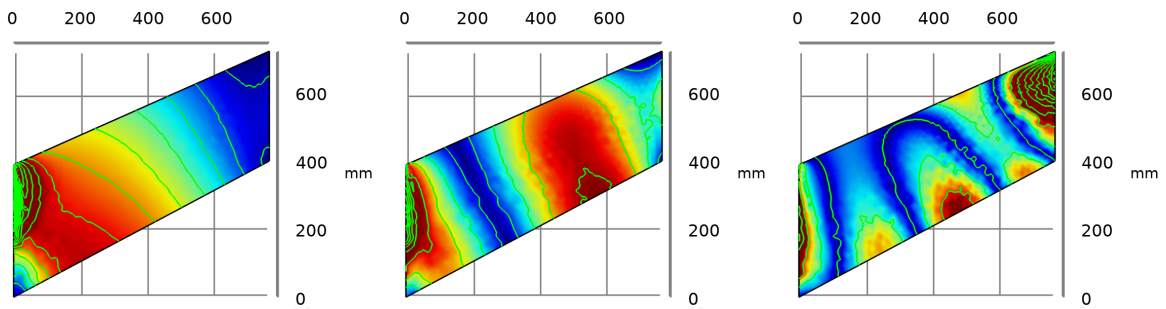


FIGURE 3 – Représentation de $|I_1^\sigma|$ sur la surface plane de la pièce pour les modes 1, 2 et 10, la couleur rouge correspond aux valeurs maximales, le bleu aux valeurs nulles et les lignes vertes correspondent aux iso-valeurs.

3.2 Optimisation globale pour l'extension surfacique des patchs

Du point de vue macroscopique, le couplage piézoélectrique k_c est généralement défini pour chaque mode de vibration à partir des fréquences propres en configuration court-circuit (f_{cc}) et en circuit ouvert (f_{co}) :

$$k_c^2 = \frac{f_{co}^2 - f_{cc}^2}{f_{cc}^2}. \quad (4)$$

On peut ensuite écrire $f_{co} = \sqrt{K^D/m}$ et $f_{cc} = \sqrt{K^E/m}$, où m représente la masse modale, K^D la raideur modale en circuit ouvert et K^E la raideur modale en court-circuit. De plus en notant les énergies potentielles $U_{co} = K^D X_{co}^2/2$ et $U_{cc} = K^E X_{cc}^2/2$ et en considérant que les déplacements modaux ne dépendent pas des conditions aux limites électriques, i.e. $X_{co} = X_{cc}$, on trouve

$$k_c^2 = \frac{K^D - K^E}{K^E} = \frac{U_{co} - U_{cc}}{U_{cc}} = \frac{\Delta U_p}{U_{cc}}. \quad (5)$$

Le couplage piézoélectrique peut donc être défini à partir de la différence d'énergie potentielle ΔU_p entre les configurations court-circuit et circuit ouvert. Dans le cas de patchs piézoélectriques considérés fins par rapport à la structure étudié, les déformées modales sont similaires avec ou sans ajout de matériau piézoélectrique. La différence d'énergie ΔU_p dépend alors exclusivement de l'énergie stockée dans le patch en configuration circuit ouvert, à la fois sous forme électrique (capacitive) et mécanique (déformation du patch dans la direction orthogonale à la surface de la pièce). Cette énergie peut être calculée à partir de la permittivité équivalente définie en (3) et du champ électrique E_3 en posant

$$\Delta U_p = \frac{1}{2} \epsilon_{33}^* E_3^2 S h, \quad (6)$$

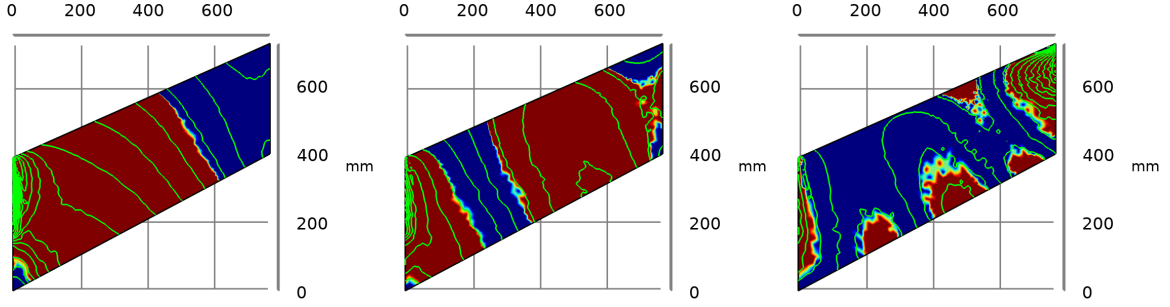


FIGURE 4 – Extension optimale (surface en rouge) permettant de maximiser Crit_2 pour les modes 1, 2 et 10. Les lignes vertes correspondent aux isovaleurs de $|I_1^\sigma|$.

où S est la surface du patch et h son épaisseur.

Comme (5) et (6) montrent que le coefficient de couplage est proportionnel à $E_3\sqrt{S}$, il convient de définir cette quantité dans le cas où un patch s'étend sur un champ de contraintes non uniforme. Dans une configuration circuit ouvert avec deux électrodes qui recouvrent la totalité des surfaces supérieures et inférieures d'un patch fin, on a un courant nul et un champ électrique constant, i.e. $\iint D_3 dS = 0$ et $\iint E_3 dS = E_3 S$. En appliquant ces conditions à l'expression du champ de déplacement électrique en (2), on trouve

$$E_3 = -\frac{d_{31}}{\epsilon_{33}^\sigma} \frac{\iint I_1^\sigma dS}{S} . \quad (7)$$

Sachant que k_c est proportionnel à $E_3\sqrt{S}$, il est alors possible de définir un nouveau critère associé à l'évolution du coefficient de couplage en fonction de l'extension d'un patch de surface S :

$$\text{Crit}_2 = \frac{\iint |I_1^\sigma| dS}{\sqrt{S}} .$$

Ce critère est calculé en considérant une surface S qui suit les lignes d'isovaleurs du premier invariant du tenseur des contraintes, ici uniquement sur la face plane de la structure considérée. Une condition de borne inférieure sur $|I_1^\sigma|$ permet de définir une surface d'intégration qui s'agrandit à mesure que la borne inférieure est réduite. En observant l'évolution de Crit_2 lors de l'augmentation de la surface, on note un maximum obtenu pour des extensions de patches telles que celles présentées sur la Figure 4. Alors que le mode 1 conduit à recouvrir environ les deux tiers de la pièce avec un seul patch, le mode 2 nécessite deux surfaces disjointes et le mode 10 conduit à six surfaces plus localisées. Celles-ci peuvent tout à fait être connectées en parallèle en respectant les polarités de manière à ne constituer qu'un seul patch par zone à contrôler. La Figure 4 montre cependant que des compromis doivent être trouvés si l'on souhaite réaliser un contrôle simultané de plusieurs modes. L'intersection des zones proposées étant non nulle, il peut être nécessaire de réduire l'extension surfacique ou donner la priorité à certaines zones. Un nouveau critère exprimant directement la valeur du coefficient de couplage piézoélectrique à partir du champ de contraintes et de l'extension surfacique devient alors nécessaire.

3.3 Estimation du coefficient de couplage sans modélisation des patches

En reprenant l'expression de la différence d'énergie entre les configurations circuit ouvert et court-circuit telle qu'exprimée en (6) ainsi que le champs électrique (7) et la permittivité équivalente (3), on obtient

$$\Delta U_p = \left(1 - k_p^2\right) \frac{d_{31}^2}{2\epsilon_{33}^\sigma} h \frac{\left(\iint |I_1^\sigma|_p dS\right)^2}{S} . \quad (8)$$

Jusqu'à présent aucune différence n'avait été faite entre le champs de contrainte en surface de la pièce nue et celui au sein d'un patch fin déposé en surface de cette même pièce car ils sont supposés proportionnels. La distinction devient cependant nécessaire lorsqu'il s'agit de calculer des valeurs de coefficients de couplage à partir du premier invariant du tenseur des contraintes $|I_1^\sigma|_p$ au sein du patch. Pour cela, la

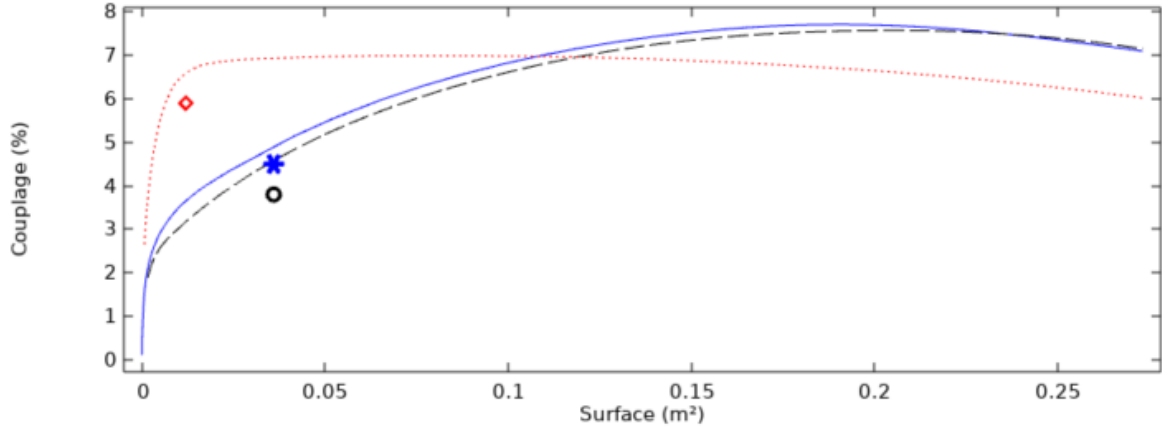


FIGURE 5 – Couplage modal k_c en fonction de la surface S recouverte pour des couches piézoélectriques de $h = 1$ mm : mode 1 (—), mode 2 (---), mode 10 (···). Les couplages obtenus à partir du modèle couplé sont représentés par l’astérisque bleu, le rond noir et le losange rouge, respectivement pour les modes 1, 2 et 10.

première équation du système (2) associée à une hypothèse de champ de déformations identique en surface de la pièce nue et dans la couche piézoélectrique selon les directions '1' et '2' implique

$$|I_1^\sigma|_p = \frac{[s_{11} + s_{12}]_s}{\left[s_{11}^E + s_{12}^E - 2 \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^\sigma} \right]_p} |I_1^\sigma|_s$$

où l'indice s est associé aux différentes quantités en surface de la structure élastique de module de Young Y_s et coefficient de poisson ν_s . En exprimant le module de Young du matériau piézoélectrique en court-circuit par $Y_p^E = 1/s_{11}^E$, le premier invariant du tenseur des contraintes au sein de la couche piézoélectrique peut être calculé via

$$|I_1^\sigma|_p = \frac{Y_p^E}{Y_s} \frac{1 - \nu_s}{2k_{31}^2 \left(\frac{1}{k_p^2} - 1 \right)} |I_1^\sigma|_s.$$

Ainsi, l'expression (8) devient

$$\Delta U_p = \frac{1}{8} \left(\frac{1 - \nu_s}{Y_s} \right)^2 \frac{Y_p^E}{k_{31}^2} \frac{k_p^4}{1 - k_p^2} h \frac{\left(\iint |I_1^\sigma|_s dS \right)^2}{S}, \quad (9)$$

et un troisième critère, directement égal au coefficient de couplage piézoélectrique, est défini par

$$\text{Crit}_3 = k_c = \sqrt{\frac{\Delta U_p}{U_m}}, \quad (10)$$

où $U_m \approx U_{cc}$ est égal à l'énergie potentielle mécanique stockée dans la pièce nue sous déformation correspondant au mode considéré.

Grâce à ce dernier critère, il devient possible de représenter le couplage atteignable pour chacun des modes en fonction de la surface recouverte par un patch piézoélectrique d'épaisseur h . Les résultats pour $h = 1$ mm sont représentés sur la Figure 5. Des maxima sont observés pour des surfaces proches de 0.2 m^2 pour les modes 1 et 2 et 0.07 m^2 pour le mode 10. On remarque qu'une diminution de la surface ne conduit pas nécessairement à une forte diminution du couplage. Par exemple, pour les modes 1 et 2, les deux tiers du couplage maximal sont maintenus avec une surface environ quatre fois plus faible. Ce maintien des performances est encore plus marqué pour le mode 10 qui conserve un couplage quasi-identique jusqu'à une surface d'environ 0.02 m^2 . Ces considérations poussent à proposer des extensions de couches piézoélectriques sur des surfaces limitées, comme celles illustrées sur la Figure 6. Même si elles

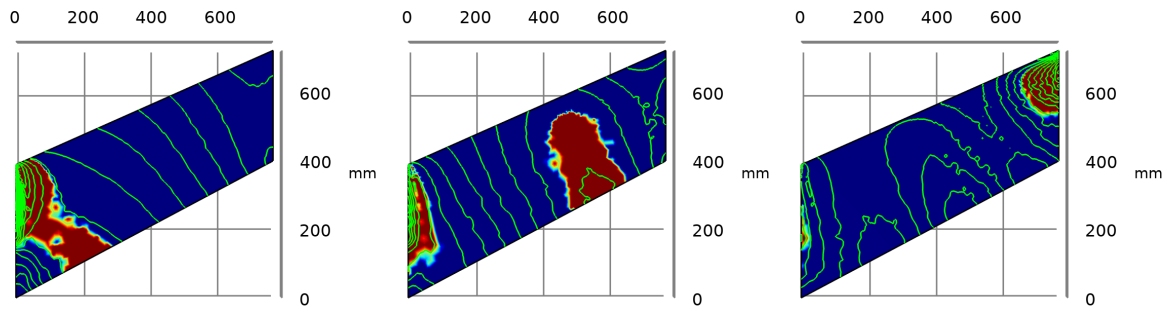


FIGURE 6 – Positionnement optimal (surface en rouge) en cas de borne supérieure sur la surface des patches pour les modes 1, 2 et 10. Les lignes vertes correspondent aux isovaleurs de $|I_1^\sigma|$.

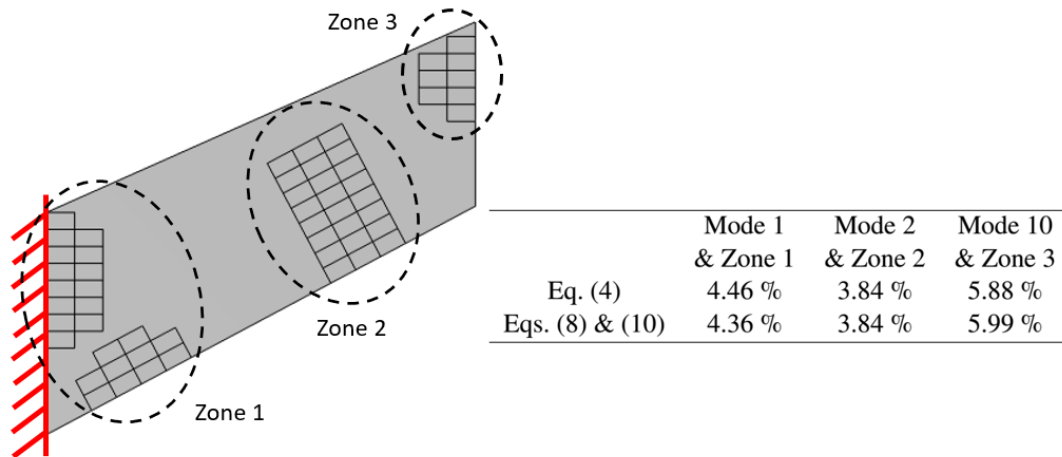


FIGURE 7 – Calcul des coefficients de couplage pour les modes 1, 2 et 10 par utilisation respective des trois zones de patches.

s'éloignent du maximum atteignable, ces zones représentent un optimum de positionnement à surface imposée en suivant les isovaleurs du premier invariant du tenseur des contraintes. Ces surfaces restreintes réduisent la quantité de matériau piézoélectrique à utiliser et limitent les intersections entre zones, ce qui est favorable à la mise en œuvre simultanée de plusieurs patches destinés au contrôle de modes différents. Par exemple, les modes 1, 2 et 10 peuvent conduire à la définition de trois zones de patches distinctes situées respectivement proche de l'encastrement, dans la partie centrale de la pièce et à son extrémité (voir Figure 7). La géométrie de chaque zone se base ici sur une mosaïque de patches rectangles de 50 mm par 30 mm de côté. Ces approximations conduisent à s'éloigner légèrement des surfaces optimales mais les couplages restent proches des valeurs obtenues lors de la phase d'optimisation comme le montre la suite de l'étude.

3.4 Validation par modèle éléments finis couplé

Des patches piézoélectriques en matériau PIC 255 sont ajoutés sur la structure afin de vérifier la validité de la méthode quant au calcul des coefficients de couplage. Après modélisation des électrodes sur toute la surface des patches et mise en œuvre de conditions aux limites électriques de type circuit ouvert et court-circuit, un modèle de structure piézoélectrique permet de calculer le couplage pour chacun des modes à partir de l'expression (4). Les valeurs obtenues sont représentées sur la Figure 5 en les associant à la surface réellement recouverte. Bien que nécessairement en deçà des valeurs optimales à surface équivalente, les couplages obtenus montrent que l'approximation des surfaces de la Figure 6 n'a pas un impact trop important sur les couplages finalement observés. La réduction la plus importante concerne le mode 2 associé à la zone 2 pour laquelle la portion de surface optimale proche de l'encastrement n'a pas été utilisée car déjà destinée au mode 1.

La Figure 7 fournit également les coefficients de couplage calculés à partir de l'expression énergétique

en (10). On se base ici sur le champ de contraintes au niveau de l'électrode supérieure des patchs donc le modèle rend directement accessible $|I_1^\sigma|_p$ pour le calcul de (8). La très bonne adéquation avec les valeurs de couplage issues des fréquences en court-circuit et circuit ouvert valide la formulation proposée dans cette étude pour un calcul direct sans modélisation des patchs piézoélectriques supposés fins par rapport à la structure considérée.

4 Conclusions

L'étude proposée vise à simplifier la méthode de positionnement de patchs piézoélectriques fins en surface d'une structure élancée de géométrie complexe. On se place dans un cadre de contrôle vibratoire où l'on souhaite maximiser des coefficients de couplage modaux. Il est montré ici qu'une hypothèse consistant à négliger l'influence des patchs sur les déformées modales donne accès à une solution directe en ce qui concerne l'optimisation du positionnement. Trois critères sont alors proposés :

- Crit₁ = $|I_1^\sigma|$ permet de visualiser les zones les plus favorables à l'utilisation d'un ou plusieurs patchs piézoélectriques fins en surface de la structure d'intérêt. Le calcul nécessite seulement d'avoir accès au champ de contraintes pour chaque mode considéré. Ce critère ne permet cependant pas de définir la zone optimale à recouvrir.
- Crit₂ = $\iint |I_1^\sigma| dS / \sqrt{S}$ permet quant à lui de définir un optimum en se basant sur l'extension de la surface de patch selon les isovaleurs de Crit₁. Il faut alors pouvoir intégrer le premier invariant du tenseur de contraintes sur une surface, elle-même définie à partir d'une borne inférieure sur cet invariant.
- Crit₃ = $\sqrt{\Delta U_p / U_m}$ repose sur les mêmes conditions de calcul que Crit₂ mais l'ajout d'une constante matériau et l'accès à l'énergie potentielle totale pour chaque mode permettent de calculer directement le coefficient de couplage k_c . Ceci est utile pour l'estimation des performances et la comparaison entre modes avant même d'intégrer les patchs piézoélectriques au modèle.

La mise en œuvre de ces critères permet à un utilisateur non spécialiste d'anticiper la conception d'une structure piézoélectrique sans même avoir à maîtriser la modélisation du couplage. L'analyse de Crit₃ est souvent souhaitable quand le code utilisé permet de le calculer mais Crit₁ fournit déjà de très nombreuses informations sans même avoir à définir de constantes piézoélectriques. Il convient tout de même de garder en mémoire les limites de la méthode proposée qui peut s'éloigner des optimums de positionnement pour des patchs trop épais (ici à partir de $h = 4$ mm environ). Malgré tout, des optimisations paramétriques en domaine restreint peuvent être menées dans un second temps sur un modèle couplé intégrant des patchs piézoélectriques de manière à proposer un positionnement plus fin.

Références

- [1] ANSI/IEEE. *IEEE Standard on Piezoelectricity*, ANSI/IEEE Std, 176-1987, 1988.
- [2] A. Belloli, P. Ermanni. *Optimum placement of piezoelectric ceramic modules for vibration suppression of highly constrained structures*, Smart Materials and Structures, 16(5), 1662, 2007.
- [3] J. Ducarne, O. Thomas, J.-F. Deü. *Placement and dimension optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction*, Journal of Sound and Vibration, 331(14), 3286-3303, 2012.
- [4] A. Sénéchal, O. Thomas, J.-F. Deü. *Optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction of complex structures : application to a turbojet fan blade*, International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Vol. 44137, pp. 695-704, 2010.
- [5] L. Pereira da Silva, W. Larbi, J.-F. Deü. *Topology optimization of shunted piezoelectric elements for structural vibration reduction*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 26(10), 1219-1235, 2015.
- [6] M. Rose. *Modal based correction methods for the placement of piezoceramic modules*, ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Vol. 4210, pp. 209-218, 2005.
- [7] G. Rosi, R. Paccapeli, F. Ollivier, J. Pouget. *Optimization of piezoelectric patch positioning for passive sound radiation control of plates*, Journal of Vibration and Control, 19(5), 658-673, 2013.
- [8] M. A. Trindade, A. Benjeddou. *Effective electromechanical coupling coefficients of piezoelectric adaptive structures : critical evaluation and optimization*, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 16(3), 210-223, 2009.