



**HAL**  
open science

## Utilisation d'une méthode de perturbation pour l'intégration temporelle des équations du mouvement

Jean-Marc Cadou, Bertille Claude, Gregory Girault, Yann Guevel, Bruno  
Leble, Cynthia Tayeh

► **To cite this version:**

Jean-Marc Cadou, Bertille Claude, Gregory Girault, Yann Guevel, Bruno Leble, et al.. Utilisation d'une méthode de perturbation pour l'intégration temporelle des équations du mouvement. 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717859

**HAL Id: hal-03717859**

**<https://hal.science/hal-03717859>**

Submitted on 8 Jul 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Utilisation d'une méthode de perturbation pour l'intégration temporelle des équations du mouvement

J.M. Cadou<sup>1</sup>, B. Claude<sup>2</sup>, G. Girault<sup>1,3</sup>, Y. Guevel<sup>1</sup>, B. Leblé<sup>4</sup>, C. Tayeh<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institut de Recherche Dupuy de Lôme, CNRS UMR 6027, IRDL, F-56100 Lorient, France.

*jean-marc.cadou@univ-ubs.fr*

<sup>2</sup> MECA, F-44000 Nantes, France.

*bertille.claude@gmail.com*

<sup>3</sup> Centre de recherche, Académie Militaire de Saint-Cyr Coëtquidan, F-56381 Guer, France.

*gregory.girault@univ-ubs.fr*

<sup>4</sup> CESMAN / ERD, Naval Group, F-44340 Bouguenais, France.

*bruno.leble@naval-group.com*

---

**Résumé** — Cette étude porte sur l'application d'une méthode de perturbation d'ordre élevé pour l'intégration numérique des équations du mouvement. La méthode repose sur l'utilisation de la Méthode Asymptotique Numérique avec le temps comme paramètre de perturbation. Deux problèmes classiques en calcul des structures sont étudiés. Le premier problème porte sur la propagation d'ondes dans une barre élastique. Le second problème porte sur le flambage dynamique d'un panneau cylindrique. Une attention particulière est portée sur la reformulation des équations nécessaire à la résolution numérique.

**Mots clés** — Méthode Asymptotique Numérique, Algorithme d'intégration temporelle, Propagation d'onde, Flambage dynamique.

---

## 1 Introduction

Cette étude porte sur l'utilisation de la Méthode Asymptotique Numérique pour l'intégration temporelle des équations du mouvement rencontrées en calcul de structures.

Il existe de nombreuses stratégies d'intégration adaptées aux équations du mouvement telles que les méthodes implicites de Newmark [21] ou la méthode HHT établie pour améliorer la précision d'intégration et le contrôle de l'amortissement numérique [17]. Citons également la  $\alpha$ -méthode [9] qui permet de généraliser les méthodes précédentes par le choix adéquat du paramètre  $\alpha$ . Les méthodes de résolution doivent respecter les bilans énergétiques et notamment la conservation de l'énergie au cours de la transformation. A cet effet, des méthodes spécifiques ont été proposées [18]. Plus récemment, des études ont été menées sur l'utilisation de schémas implicites pour la simulation des propagations d'ondes dans les solides [22].

Toutes ces approches conduisent à des solutions discrètes en temps. Une alternative consiste à déterminer une solution continue en temps par une méthode de perturbation. Celle-ci utilise alors le temps comme paramètre de perturbation. Cette stratégie a été utilisée, par exemple, pour résoudre les équations différentielles ordinaires rencontrées en neutronique des coeurs nucléaires [2].

La Méthode Asymptotique Numérique (MAN) permet également d'obtenir des solutions continues en temps. Elle a été appliquée pour la résolution des équations différentielles ordinaires qui interviennent dans le calcul de trajectoire d'un pendule [16] ou la résolution numérique de l'équation de Duffing [25].

En calcul des structures, la MAN a permis d'étudier le flambement dynamique d'une coque cylindrique [4]. Dans cette étude, un intégrateur temporel implicite est associée à une technique d'homotopie et la MAN. Cette association a pour objectif de maintenir la matrice jacobienne valide pour plusieurs pas de temps. Cette stratégie permet de détecter parfaitement l'instant de flambement. Malheureusement, elle échoue à calculer l'intégralité de la réponse car la matrice jacobienne devient singulière une fois le flambement apparu. Les premières tentatives d'utilisation de la MAN comme intégrateur temporel explicite sont [5, 11]. Les auteurs ont proposé l'étude d'un système discret à un degré de liberté et d'une structure de type ossature modélisant un pont. Dans le premier cas, la sollicitation est harmonique. Dans le second

cas, la structure est soumise à une sollicitation représentative d'un séisme. Dans ce cas, les auteurs ont considéré la décomposition en série de Fourier du signal temporel.

Dans la présente étude, il est proposé d'appliquer la méthodologie introduite par [11, 25] pour calculer les réponses transitoires de structures déformables. Les problèmes de propagation d'ondes dans une barre élastique et de flambement dynamique d'une coque cylindrique sont abordés. Le solveur temporel associe la MAN à une discrétisation spatiale par éléments finis. L'objectif de cette étude est le calcul de solutions semi-analytiques continues en temps. Ainsi, dans la section (2), les équations de mouvement sont présentées ainsi que la méthode d'intégration temporelle basée sur la MAN. La section (3) présente les résultats obtenus et met en évidence l'influence des paramètres numériques. Une discussion est menée sur la pertinence et l'efficacité de la méthode. En conclusion des recommandations sont proposées pour enrichir la méthodologie.

## 2 Modélisation

### 2.1 Formulation du problème

Dans cette étude,  $t$  désigne la variable temporelle et  $\mathbf{q}$  est le vecteur des inconnues nodales associées au modèle discrétisé par éléments finis. On note  $\frac{d^*}{dt} = *$  la dérivation temporelle. Pour une structure élastique déformable, possédant un amortissement interne (viscosité,...) et soumise à une sollicitation extérieure, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{L}(\mathbf{q}) + \mathbb{D}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbb{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) - \mathbf{F}(t) = \mathbf{0} \quad (1)$$

Dans l'équation (1),  $\mathbb{L}$  et  $\mathbb{D}$  désignent des opérateurs linéaires associés aux propriétés élastiques et dissipatives et  $\mathbb{M}$  est l'opérateur de masse. L'opérateur non-linéaire  $\mathbb{Q}$  contient les termes non-linéaires liés aux grands déplacements. Enfin, l'opérateur  $\mathbf{F}$  contient les sollicitations extérieures appliquée à la structure. Les vecteurs  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  et  $\ddot{\mathbf{q}}$  désignent, respectivement, les champs de déplacement, de vitesse et d'accélération en tout noeud du modèle. Une méthode de résolution associant une perturbation d'ordre élevé (appliquée au paramètre temporel  $t$ ) à une technique de continuation est proposée pour l'intégration temporelle de (1).

### 2.2 Méthode de résolution basée sur la MAN

L'utilisation de la MAN pour la résolution de problèmes non-linéaires quasi-statiques est bien établie. La MAN associe une perturbation d'ordre élevé à une technique de continuation afin de déterminer une solution semi-analytique [3, 10]. Cette procédure, également utilisée en mécanique des fluides [13], permet de déterminer très précisément les instabilités élastiques globales et locales [6, 8] et de calculer les solutions post-bifurquées. La MAN peut être associée à toute technique de discrétisation spatiale comme les différences finies [20], les éléments finis [6] ou les méthodes sans maillage [26].

La perturbation temporelle est introduite selon  $t = t_0 + \hat{t}$ . Les vecteurs  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{F}$  sont cherchés comme des séries entières du paramètre de perturbation  $\hat{t}$  jusqu'à l'ordre de troncature  $N$ . De plus, les solutions  $\mathbf{q}_0$  et  $\mathbf{F}_0$  à l'instant  $t_0$  sont supposées connues. Ainsi, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}(\hat{t}) = \sum_{i=0}^N \hat{t}^i \mathbf{q}_i \\ \mathbf{F}(\hat{t}) = \sum_{i=0}^N \hat{t}^i \mathbf{F}_i \end{array} \right. \quad (2)$$

Les expressions (2) sont introduites dans l'équation (1). Après avoir identifié les termes selon les puissances croissantes de  $\hat{t}$ , un ensemble de  $N$  systèmes linéaires est obtenu. Un point essentiel dans l'application de la MAN est la reformulation dite "quadratique" des termes non-linéaires contenus dans l'opérateur  $\mathbb{Q}$  (pour plus de détails, le lecteur est invité à lire [15]).

Les vecteurs  $\mathbf{q}_0$  et  $\mathbf{q}_1$  étant supposés connus, l'identification des termes selon les puissances croissantes de  $\hat{t}$  conduit à la définition du vecteur  $\mathbf{q}_2$  d'ordre 2 :

$$2\mathbb{M}\mathbf{q}_2 + \mathbb{L}(\mathbf{q}_0) + \mathbb{D}(\mathbf{q}_1) + \mathbb{Q}(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0) - \mathbf{F}_0 = \mathbf{0} \quad (3)$$

De plus, en définissant l'opérateur  $\mathbb{L}_{\mathbf{q}_0}(\mathbf{q}_k) = \mathbb{L}(\mathbf{q}_k) + \mathbb{Q}(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_k) + \mathbb{Q}(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_0)$ , les termes d'ordre supérieur ( $k = 1, \dots, N-2$ ) peuvent être calculés :

$$(k+2)(k+1)\mathbb{M}\mathbf{q}_{k+2} + \mathbb{L}_{\mathbf{q}_0}(\mathbf{q}_k) + (k+1)\mathbb{D}\mathbf{q}_{k+1} + \sum_{r=1}^{k-1} \mathbb{Q}(\mathbf{q}_r, \mathbf{q}_{k-r}) - \mathbf{F}_k = \mathbf{0} \quad (4)$$

La progression temporelle s'effectue au moyen d'une technique de continuation. La validité d'un pas MAN est évaluée selon le critère (5) adapté des travaux antérieurs [10] dans lequel  $\delta$  est un paramètre numérique défini par l'utilisateur :

$$\hat{t}_{\max} = (\delta \|\mathbf{q}_1\| / \|\mathbf{q}_N\|)^{\frac{1}{N-1}} \quad (5)$$

Formellement, en notant  $\mathbf{X} = \{\mathbf{q}_0^{\text{new}}, \mathbf{q}_1^{\text{new}}, \mathbf{F}_0^{\text{new}}\}$ , un nouveau pas de continuation est initialisé à partir de la solution obtenue au pas précédent selon la procédure (6) :

$$t_0^{\text{new}} = t_0 + \hat{t}_{\max} \quad \mathbf{X}_0^{\text{new}} = \sum_{i=0}^N \hat{t}_{\max}^i \mathbf{X}_i \quad (6)$$

La solution  $\mathbf{q}$  reposant sur un développement en séries entières, le calcul de la vitesse et de l'accélération par différentiation s'effectue très facilement. Enfin notons que ce processus est initialisé, lors du tout premier pas MAN avec la connaissance des conditions initiales  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_{\text{ini}}$  et  $\mathbf{q}_1 = \dot{\mathbf{q}}_{\text{ini}}$ .

### 2.3 Reformulation du chargement extérieur $\mathbf{F}$

Dans cette étude, la structure est sollicitée par une force extérieure  $\mathbf{F}(t)$ . Les modèles de forçage s'appuient, par exemple, sur une (ou plusieurs) fonction(s) élémentaire(s) de type Dirac ou Heaviside. De tels modèles imposent une reformulation, dite "quadratique", pour effectuer un développement en série de la force  $\mathbf{F}$  et calculer les termes  $\mathbf{F}_i$ .

Dans l'étude du panneau cylindrique, l'évolution temporelle de la sollicitation suit une rampe (Fig.3). L'introduction d'un paramètre de régularisation  $\eta$  est nécessaire pour tenir compte du changement de pente dans l'évolution temporelle. Cette procédure s'inspire de la méthodologie définie dans des travaux antérieurs pour le calcul des contraintes lors d'un flambement plastique [1]. Dans ces conditions, le forçage est défini par :

$$st = f(t) + \eta \frac{f_c^2}{f_c^2 - f(t)} f(t) \quad (7)$$

Dans l'équation (7), les paramètres  $s = f_c/t_c$ ,  $t_c$  and  $f_c$  désignent, respectivement, la pente de la rampe, la durée et la force maximale du forçage. La reformulation quadratique conduit à la définition de la variable auxiliaire  $g(t) = f(t)^2$  et des paramètres  $\xi = f_c^2$ ,  $\zeta = s\xi$  et  $\gamma = \eta\xi$ . Ainsi, l'expression (7) peut s'écrire sous la forme suivante :  $(t_0 + \hat{t})\zeta - (\xi - g)f - \gamma g - (t_0 + \hat{t})sg = 0$ .

Dans ce cas, il est possible de procéder au développement en série des fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  puis d'identifier les termes selon les puissances croissantes de  $\hat{t}$  :

$$\text{Ordre 0 : } \begin{cases} g_0 - f_0 f_0 = 0 \\ \zeta t_0 - \xi f_0 + 2g_0 f_0 - \gamma g_0 - s t_0 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{Ordre 1 : } \begin{cases} g_1 - 2f_0 f_1 = 0 \\ \zeta - \xi f_1 + g_0 f_1 + g_1 f_0 - (\gamma + s t_0) g_1 - s g_0 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{Ordre } k \in [2, N] : \begin{cases} g_k - \sum_{r=0}^k f_r f_{k-r} = 0 \\ -\xi f_k + \sum_{r=0}^k g_r f_{k-r} - (\gamma + s t_0) g_k - s g_{k-1} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

La connaissance du terme  $f_0$  permet alors la résolution des équations (8, 9, 10).

Enfin, tout développement en série entière possède un domaine de validité devant être estimé selon (5). Deux durées de validité  $\hat{t}_{\max}^{\mathbf{q}}$  et  $\hat{t}_{\max}^{\mathbf{F}}$  peuvent être définies à partir de leur série respective et la valeur la plus faible doit être retenue. Dans la pratique, l'évolution temporelle de  $\mathbf{F}(t)$  présente des variations moins marquées que celles de la réponse structurelle  $\mathbf{q}(t)$ . La valeur de  $\hat{t}_{\max}^{\mathbf{F}}$  est ainsi plus élevée que celle de  $\hat{t}_{\max}^{\mathbf{q}}$ . Par conséquent, la continuation s'effectue en tenant compte de cette dernière valeur.

### 3 Résultats numériques

Deux études sont proposées. La première étude porte sur la propagation d'ondes élastiques dans une barre (voir, par ex., [12] pour la solution exacte). La seconde étude porte sur le flambement dynamique d'un panneau cylindrique, étudié dans [4, 18].

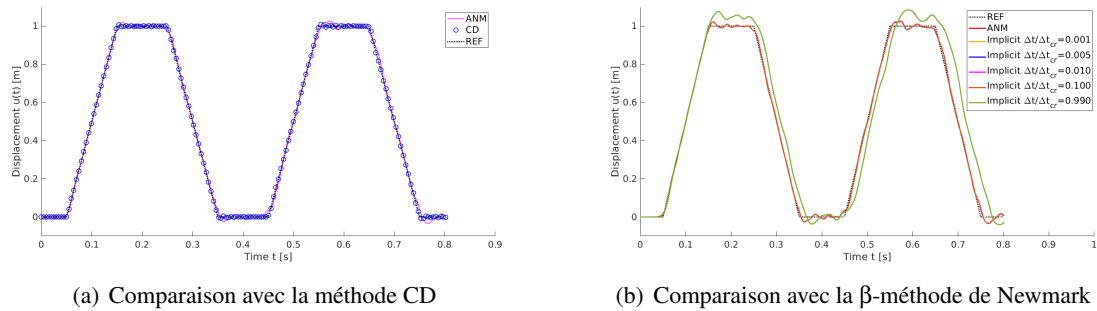


FIGURE 1 – Problème de propagation d'ondes : comparaison du déplacement longitudinal relevé en  $x = 0.5$  m avec la MAN, la méthode explicite en différences finies centrées (CD) et la méthode implicite de Newmark ( $\beta = 1/4, \gamma = 1/2$ ). Les paramètres MAN sont :  $N = 10$  et  $\delta = 10^{-8}$ . REF indique la solution exacte [12]. Propagation d'onde dans une barre.

#### 3.1 Propagation d'onde dans une barre

Le modèle considéré est une barre de longueur  $L = 1$  m, encastée en  $x = 0$  m, dont l'extrémité en  $L$  est soumise à une force d'intensité constante  $f(t) = F_0$  (pour  $t \geq 0$ ). Cette intensité et la section transversale de la barre sont égales à  $F_0 = 1$  N et  $A = 0.01$  m<sup>2</sup>, respectivement. Un matériau élastique purement théorique est défini avec un module d'Young  $E = 100$  Pa et une masse volumique  $\rho = 1$  kg/m<sup>3</sup>. Ainsi, la célérité des ondes longitudinales  $c_0 = \sqrt{E/\rho}$  est égale à  $10$  m.s<sup>-1</sup>. La durée de la simulation, fixée à  $T_{max} = 0.8$  s, permet aux ondes incidentes et réfléchies de parcourir une distance égale à  $4L$  à la vitesse  $c_0$ . La discrétisation spatiale repose sur 20 éléments finis. Les éléments finis possèdent 2 noeuds et font appel à une interpolation de Lagrange linéaire. Pour cette étude, une matrice de masse diagonale est adoptée (lumped mass matrix).

En adoptant la notation de [12], le solveur MAN est comparé au schéma aux différences finies centrées (schéma CD,  $\gamma = 1/2, \beta = 0$ ) et le schéma de Newmark implicite à accélération constante ( $\gamma = 1/2, \beta = 1/4$ ). Le pas de temps constant  $\Delta t$  est adopté et calculé en pourcentage du pas de temps critique  $\Delta t_{cr}$ . Ce dernier correspond au temps nécessaire à une onde longitudinale pour parcourir un élément fini de longueur  $L/20$  à la vitesse  $c_0$  et vaut  $\Delta t_{cr} = 5 \times 10^{-3}$  s.

TABLE 1 – Problème de propagation d'ondes : influence de l'ordre de troncature  $N$  sur le nombre de pas MAN et sur la valeur moyenne  $\langle \hat{t}_{max} \rangle$  du domaine de validité. Résultats obtenus avec  $\delta = 10^{-5}$ .

Ordre $N$	5	10	15	20	30
Nb. de pas MAN	916	162	83	56	34
valeur moy. $\langle \hat{t}_{max} \rangle (\times 10^{-3} \text{ s})$	0.87	4.95	9.70	1.45	2.38

Pour les comparaisons, la solution MAN est obtenue avec un ordre de troncature  $N = 10$  et un paramètre de continuation  $\delta = 10^{-8}$ . Dans la figure 1(a), les réponses transitoires obtenues en  $x = 0.5$  m avec le solveur MAN et le schéma CD sont comparées à la solution exacte. La propagation et la réflexion des ondes sont bien observées. Rappelons qu'avec la matrice de masse diagonale, le schéma CD permet de calculer la solution exacte pour  $\Delta t = \Delta t_{cr}$ . Ici, la solution CD est calculée avec  $\Delta t = 0.99 \times \Delta t_{cr}$ . Par conséquent, cette solution ne présente ni atténuation de l'amplitude ni déphasage temporel et seuls de petits sursauts peuvent être remarqués. La solution MAN quant à elle décrit bien la propagation des ondes

mais présente une atténuation des amplitudes et un déphasage.

TABLE 2 – Problème de propagation d’ondes : influence du paramètre  $\delta$  sur le nombre de pas de continuation et sur la valeur moyenne  $\langle \hat{t}_{\max} \rangle$  du domaine de validité. Résultats obtenus avec  $N = 10$ .

Paramètre $\delta$	$10^{-03}$	$10^{-04}$	$10^{-05}$	$10^{-06}$	$10^{-08}$	$10^{-10}$
Nb. de pas MAN	86	125	162	209	348	579
valeur moy. $\langle \hat{t}_{\max} \rangle (\times 10^{-3} \text{ s})$	9.33	6.43	4.95	3.84	2.30	1.38

La figure 1(b) permet de mieux appréhender le comportement de la solution MAN. Celle-ci est comparée aux solutions implicites calculées avec cinq valeurs du pas de temps  $\Delta t$  variant de 99% à 0,1% du pas de temps critique  $\Delta t_{cr}$ . La nature implicite du solveur de Newmark implique des solutions moins influencées par la valeur du pas de temps. Ainsi, pour les valeurs inférieures à 1% de  $\Delta t_{cr}$ , aucune différence significative entre solutions implicites et solution MAN n’est visible. Seule une observation très fine permet de distinguer les solutions numériques. Dans cet exemple, la solution MAN correspond à la solution de Newmark calculée avec le pas de temps le plus faible. Cette valeur de pas de temps est alors de trois ordres de grandeur inférieure à la valeur moyenne du pas de continuation MAN  $\langle \hat{t}_{\max} \rangle$ .

Dans les tableaux 1 et 2, l’influence des paramètres  $N$  et  $\delta$  est étudiée. Ainsi, la minimisation de  $\delta$  et l’augmentation de  $N$  assurent un très haut niveau de précision de la solution MAN. L’augmentation de  $N$  entraîne une augmentation de  $\langle \hat{t}_{\max} \rangle$  et donc une diminution du nombre de pas de continuation. A contrario, la diminution de  $\delta$  entraîne une diminution de la plage de validité  $\hat{t}_{\max}$  et une augmentation du nombre de pas de continuation.

### 3.2 Flambement dynamique d’un panneau cylindrique

La géométrie du panneau et l’évolution temporelle de la force appliquée au centre de celui-ci sont montrées sur la figure 2. Grâce aux symétries, seul un quart du panneau est discrétisé avec 16 éléments finis EAS (*Enhanced Assumed Strain*). Il s’agit d’un élément fini de type "coque", à huit noeuds et six degrés de liberté par noeud, géométriquement exact et décrivant un état de déformation supposée [7]. Cet élément fini a été utilisé par le passé [18, 4] pour traiter cet exemple. Dans ces deux études, la GEMM (*Generalized Energy-Momentum Method*) est également utilisée pour l’intégration temporelle des équations du mouvement avec un pas de temps respectif égal à  $1 \times 10^{-3}$  s et  $5 \times 10^{-4}$  s.

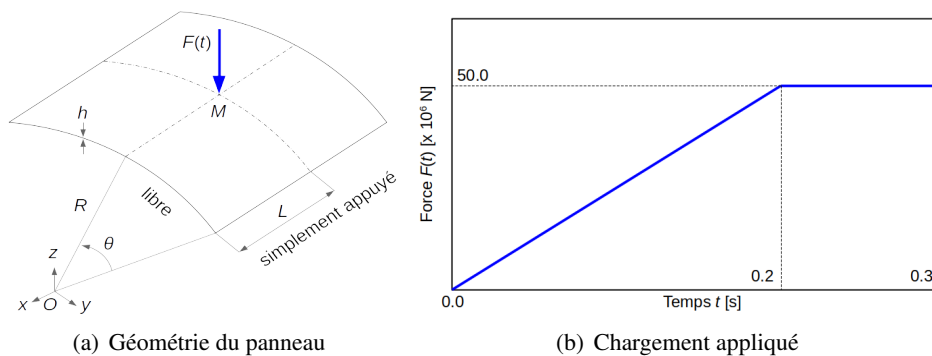


FIGURE 2 – Problème du panneau cylindrique : géométrie du panneau et définition du chargement. Seul le 1/4 du panneau est discrétisé. Valeurs des paramètres :  $R=5\text{m}$ ,  $L=2.5\text{m}$ ,  $h=0.1\text{m}$  et  $\theta = 30^\circ$ . La force nodale est appliquée au centre du panneau.

La figure 3 présente l’évolution temporelle du déplacement au point  $M$  obtenue avec la MAN pour sept valeurs du paramètre de régularisation  $\eta$  comprises entre  $10^{-5}$  et  $10^{-15}$ . Les résultats mettent en évidence son influence avec la difficulté de décrire précisément la transition de la force à l’instant 0,2 s. Ces résultats indiquent qu’une valeur inférieure à  $10^{-10}$  doit être adoptée pour une représentation satisfaisante du flambage dynamique.

La figure 3 montre que l’instant d’apparition du flambement calculé avec la MAN est inférieur à ceux obtenus précédemment [18, 4]. Cette différence est également présente avec la solution obtenue avec le logiciel Abaqus/Explicit [14] en utilisant 25 éléments finis S4R. Pour expliquer cet écart, plusieurs calculs ont été effectués avec Abaqus pour un nombre croissant d’éléments finis, allant de 25 à 506. Les solutions calculées avec Abaqus convergent vers la solution MAN lorsque le nombre d’éléments finis est supérieur à 300. Ainsi, la solution MAN, obtenue avec 16 éléments finis EAS, semble être la bonne. Remarquons qu’il s’agit du même nombre d’éléments finis que celui utilisé dans l’étude [18]. Par conséquent, on en déduit que la différence entre cette solution [18] et la solution MAN obtenue dans cette étude est uniquement due à la méthode d’intégration temporelle.

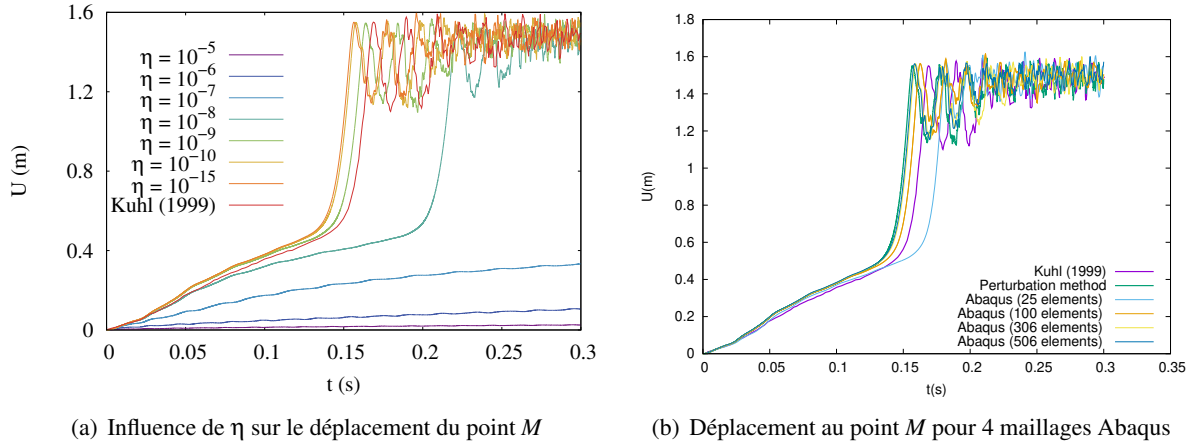


FIGURE 3 – Problème du panneau cylindrique : influence du paramètre de régularisation  $\eta$  sur le déplacement du point  $M$  et comparaison entre les déplacements du point  $M$  obtenus avec la MAN, Abaqus [14] et par Kuhl & al. [18]. Les paramètres MAN sont  $N = 20$  et  $\delta = 10^{-6}$ .

L’un des avantages de la méthode de perturbation est que la prédiction calculée est analytique en temps. Cette propriété peut expliquer le fait que, même avec un petit nombre d’éléments, les développements asymptotiques suivent la bonne solution. A contrario, les schémas classiques d’intégration temporelle procèdent de manière itérative avec un très grand nombre de pas de temps, de très faibles valeurs. A chaque itération, des erreurs sont introduites. Ceci peut expliquer l’écart qui existe entre l’instant de déclenchement du flambement prédit avec la MAN et les prédictions obtenues avec Abaqus pour différents maillages.

On sait que les méthodes classiques d’intégration temporelle souffrent également d’une dépendance au maillage : la condition CFL pour le schéma explicite (voir, par ex., [12]) et le conditionnement des opérateurs algébriques obtenus après discrétisation pour le schéma implicite (voir, par ex., [27]). Ainsi, des essais complémentaires ont été menés pour étudier la sensibilité au maillage du solveur MAN. L’évolution du pas de temps MAN, quantifié par la valeur de  $\hat{t}_{\max}$ , a été observée pour trois maillages différents constitués de 16, 25 et 100 éléments finis EAS. Les résultats ont montré que la valeur moyenne de  $\hat{t}_{\max}$  est approximativement la même pour les trois maillages. Elle coïncide avec la valeur  $4.5 \times 10^{-5}$  s du pas de temps utilisé dans les simulations Abaqus avec 100 éléments finis. Cette valeur chute à  $2,8 \times 10^{-5}$  s avec 306 éléments finis S4R. Ainsi, même si la valeur du paramètre  $\hat{t}_{\max}$  évolue au cours de la continuation, cette évolution ne semble pas dépendre de la taille du maillage comme peut le faire le pas de temps avec les schémas classiques d’intégration en temps.

Enfin, l’influence de l’ordre de troncature  $N$  et du paramètre  $\delta$  sur la solution MAN pour calculer la réponse jusqu’au temps  $T_{\max} = 0.3$  s a été étudiée. Le constat est similaire au précédent : une augmentation de l’ordre de troncature conduit à une diminution du nombre de pas de continuation. Ceci est principalement dû au fait que le domaine de validité  $\hat{t}_{\max}$  dépend de l’ordre de troncature. Ainsi, plus la valeur de  $N$  est élevée, plus celle de  $\hat{t}_{\max}$  l’est aussi. Ainsi, pour  $N = 16$ , le nombre de pas de continuation est égal à 10667. Cette valeur correspond alors au nombre d’itérations nécessaires pour effectuer la même simulation avec 306 éléments S4R avec Abaqus/Explicit.

D’un point de vue algorithmique, comme pour un schéma d’intégration explicite classique, la MAN ne nécessite qu’une seule triangulation de la matrice de masse par pas de continuation. Néanmoins,

chacun de ces pas nécessite un nombre de substitutions avant/arrière égal à  $N-1$ . Plus l'ordre de troncature est élevé, plus le temps de calcul est élevé. Or, en pratique, l'ordre de troncature  $N$  doit être supérieur à 10 pour réduire le nombre de pas de continuation. Ce qui peut entraîner une augmentation considérable du temps de calcul, en particulier pour les modèles impliquant un nombre élevé de degrés de liberté.

## 4 Conclusion

Dans cette étude, une méthode de perturbation temporelle d'ordre élevé est proposée pour la résolution de deux problèmes dynamiques classiquement rencontrés en calcul des structures. Le premier problème porte sur la propagation d'ondes élastiques dans une barre. Le second problème porte sur le flambement dynamique d'un panneau cylindrique.

Les résultats montrent que les solutions obtenues avec la MAN sont cohérentes avec les résultats de référence. Pour le premier problème, le phénomène de propagation des ondes est bien décrit. Pour un maillage identique, les résultats montrent que la solution MAN correspond à la solution obtenue avec un schéma implicite de Newmark pour lequel le pas de temps est extrêmement faible. Pour le deuxième problème, l'influence du paramètre de régularisation utilisé pour définir la sollicitation est mise en évidence. Une valeur très faible de ce paramètre est nécessaire pour décrire convenablement le phénomène de flambement. De plus, la solution MAN décrit convenablement la dynamique non linéaire du panneau. En particulier, l'amplitude du déplacement post-bifurcation et l'instant où le flambement se déclenche sont prédits correctement. Pour obtenir, avec Abaqus ([14]), des résultats similaires à ceux obtenus avec la MAN, il est nécessaire d'utiliser un nombre d'éléments finis bien supérieur à celui utilisé avec la MAN.

Enfin, les résultats montrent que la MAN peut être considérée comme un intégrateur temporel explicite "pur" qui ne souffre pas d'un critère de stabilité de type CFL. Pour obtenir des solutions similaires, les méthodes classiques nécessitent un maillage très fin et un pas de temps extrêmement faible.

Cependant, pour rendre le solveur MAN compétitif, des développements supplémentaires sont nécessaires. En effet, la solution MAN requiert un ordre de troncature élevé, ce qui nécessite un temps de calcul important et peut devenir problématique pour les modèles à grand nombre d'inconnues.

L'utilisation d'un accélérateur de convergence peut constituer une réponse tels que les approximants de Padé []. Malheureusement, les premiers essais ont échoué.

Ainsi, pour augmenter le domaine de validité des séries et réduire le nombre de pas de continuation, une solution consisterait à recourir aux techniques de resommation des séries divergentes, telles que la sommation de Borel [24, 25], les séries factorielles généralisées ou les fonctions hypergéométriques généralisées comme la fonction Meijer-G [19].

## Références

- [1] H. Abichou, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, *Asymptotic numerical method for problems coupling several nonlinearities*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 191, Elsevier, 5795–5810, 2002.
- [2] A.E. Aboanber, Y.M. Hamada, *Power series solution (PWS) of nuclear reactor dynamics with Newtonian temperature feedback*, Annals of Nuclear Energy 30 (10), Elsevier, 1111–1122, 2003.
- [3] L. Azrar, B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, *An asymptotic-numerical method to compute the post-buckling behaviour of elastic plates and shells*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 36, Wiley, 1251–1277 1993.
- [4] S. Baguet, B. Cochelin, *Méthode Asymptotique Numérique adaptative pour la dynamique transitoire non-linéaire*, 10ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France, 2011.
- [5] N. Berrahma-Chekroun, M. Fafard, J.J. Gervais, *Resolution of the transient dynamic problem with arbitrary loading using the asymptotic method*, Journal of sound and vibration 243 (3) Elsevier, 475–501, 2001.
- [6] H. Boutyour, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, M. Boudi, *Bifurcation points and bifurcated branches by an asymptotic numerical method and Padé approximants*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 60, Wiley, 1987–2012, 2004.
- [7] N. Büchter, E. Ramm, D. Roehl, *Three dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 37, Wiley, 2551–2568, 1994.



- [8] F. Xu, M. Potier-Ferry, *A multi-scale modeling framework for instabilities of film/substrate systems*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 86 150–172, Elsevier, 2016.
- [9] J. Chung, G.M. Hulbert, *A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation : the generalized- $\alpha$  method*, Journal of Applied Mechanics, 60 (2), ASME, 371–375, 1993.
- [10] B. Cochelin, *A path-following technique via an asymptotic-numerical method*, Computers & structures 53 1181–1192, Elsevier, 1994.
- [11] M. Fafard, K. Henchi, G. Gendron, S. Ammar, *Application of an asymptotic method to transient dynamic problems*, Journal of sound and vibration 208 (1), Elsevier, 73–99, 1997.
- [12] M. Géradin, D.J. Rixen, *Mechanical vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics*, John Wiley & Sons, 2014.
- [13] Y. Guevel, H. Boutyour, J.M. Cadou, *Automatic detection and branch switching methods for steady bifurcation in fluid mechanics*, Journal of Computational Physics 230 (9) 3614–3629, Elsevier, 2011.
- [14] Hibbitt, Karlsson, Sorenson, *ABAQUS, Theory and users manuals*, version 5.8, Pawtucket, RI 02860-4847, USA, 1998.
- [15] L. Guillot, B. Cochelin, C. Vergez, *A generic and efficient Taylor series-based continuation method using a quadratic recast of smooth nonlinear systems*, International Journal for numerical methods in Engineering 119 (4) 261–280, Wiley, 2019.
- [16] L. Guillot, B. Cochelin, C. Vergez, *A Taylor series-based continuation method for solutions of dynamical systems*, Nonlinear Dynamics 98 (4), Springer, 2827–2845, 2019.
- [17] T.J.R. Hughes, *Analysis of transient algorithms with particular reference to stability behavior*, Computational methods for transient analysis, Amsterdam, North-Holland, 67–155, 1983.
- [18] D. Kuhl, and E. Ramm, *Generalized energy-momentum method for non-linear adaptive shell dynamics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 178 (3-4), Elsevier, 343–366, 1999.
- [19] H. Mera, T.G. Pedersen, B.K. Nikolic, *Fast summation of divergent series and resurgent transseries from Meijer-G approximants*, Physical Revue D 97, American Physical Society, 105027, 2018.
- [20] S. Mordane, *Calcul du problème de la houle non-linéaire et instationnaire par une méthode asymptotique numérique*, Thesis, Université HASSAN II, Faculté des sciences BEN M'SIK Casablanca, Morocco, 1995.
- [21] N.M. Newmark, *A method of computation for structural dynamics*, Journal of the engineering mechanics division 85 (3), ASCE Library, 67–94, 1959.
- [22] G. Noh, S. Ham, K.J. Bathe, *Performance of an implicit time integration scheme in the analysis of wave propagations*, Computers & Structures 123 (2013), Elsevier, 93–105, 2013.
- [23] M. Potier-Ferry, N. Damil, B. Braikat, J. Descamps, J.M. Cadou, H.L. Cao, A. Elhage-Hussein, *Traitements des fortes non-linéarités par la méthode asymptotique numérique*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, t. 324, Série II b, Elsevier, 171–177, 1997.
- [24] D. Razafindralandy, A. Hamdouni, *Time integration algorithm based on divergent series resummation for ordinary and partial differential equations*, Journal of Computational Physics, 236, Elsevier, 56–73, 2013.
- [25] C. Tayeh, G. Girault, Y. Guevel, J.M. Cadou, *Numerical time perturbation and resummation methods for nonlinear ODE*, Nonlinear Dynamics 103 (1), Springer, 617–642, 2021.
- [26] A.Tri, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, *High order continuation algorithm and meshless procedures to solve nonlinear Poisson problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements 36 (11), Elsevier, 1705–1714, 2012.
- [27] G. Noh, K.J. Bathe, *For direct time integrations : A comparison of the Newmark and  $\rho_\infty$ -Bathe schemes*, Computers & Structures, Volume 225, Elsevier, 106079, 2019.