



HAL
open science

Une méthode mixte IA/”Inherent Strain” pour prédire les déformations en fabrication additive

Nicolas Pistenon, Hilal Sami, Sofiane Hendili, Djamel Missoum Benziane,
Pierre Kerfriden

► To cite this version:

Nicolas Pistenon, Hilal Sami, Sofiane Hendili, Djamel Missoum Benziane, Pierre Kerfriden. Une méthode mixte IA/”Inherent Strain” pour prédire les déformations en fabrication additive. 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717730

HAL Id: hal-03717730

<https://hal.science/hal-03717730>

Submitted on 8 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une méthode mixte IA/"Inherent Strain" pour prédire les déformations en fabrication additive

N. Pistenon^{1,*}, S. Hilal^{1,2}, S. Hendili², D. Missoum-Benziane¹, P. Kerfriden^{1,*}

✉ Nicolas Pistenon nicolas.pistenon@mines-paristech.fr

✉ Pierre Kerfriden pierre.kerfriden@mines-paristech.fr

¹ Mines Paris, PSL University, CNRS, Centre des matériaux BP 87, 91003 Evry, France

² Électricité de France Research & Development and Innovation (EDF R&D), 6 Quai Watier, 78400 Chatou, France

Résumé — Une méthodologie d'assimilation de données géométriques expérimentales est mise en place dans le but d'avoir un modèle de déformation sans contrainte. Elle repose sur un modèle mathématique de calage entre un scan 3D et un maillage. L'assimilation de données est étudiée à travers trois modèles neuronaux traitant des séries temporelles, correspondants à l'évolution simulée de la température dans la structure lors de la fabrication. Les réseaux récurrents se montrent les plus prometteurs de part un bon apprentissage des données avec un faible nombre de paramètres à optimiser.

Mots clés — Apprentissage profond, champs de déformation, série temporelle.

1 Introduction

L'une des principales difficultés limitant les simulations numériques actuelles est la nature multi-échelle et multi-physique des procédés de fabrication additive et tout particulièrement la fabrication additive par fusion de matière. Pour rendre ces simulations possibles, il est généralement proposé d'adopter un point de vue macroscopique simplifié, thermo-mécanique, négligeant les phénomènes présents dans l'arc électrique, le bain fondu et l'apport de matière [4].

La forme des cordons est ainsi mal prédite par la simulation qui permet cependant d'approcher les grandeurs telles que la température avec une bonne précision. L'originalité de la méthode proposée est d'essayer de prédire toutes les déformations par un modèle du type "Inherent Strain" reposant sur une déformation libre in-homogène et apprise par réseau de neurones artificiels.

Cet apprentissage est fait par assimilation de données expérimentales de pièces fabriquées en WAAM¹ (section 3). Cette assimilation présuppose de pouvoir faire le lien entre la pièce fabriquée et le maillage des simulations numériques utilisés. Pour cela, une méthodologie de reconstruction des déformations entre le scan 3D de la surface d'une pièce et un maillage volumique a été mis en place (section 2).

2 Algorithme de reconstruction des déformations à partir de scans 3D des surfaces de composants

2.1 Définition du problème

Tout d'abord, il est décrit dans cette section la mise en place d'un algorithme de reconstruction des déformations entre un scan 3D de la surface d'un composant et un maillage volumique. C'est-à-dire, un modèle permettant d'obtenir une déformation d'un maillage volumique de façon à ce que la peau du maillage déformé corresponde au scan 3D. Ce modèle a trois contraintes :

1. une bonne reconstruction de l'objet, c'est-à-dire, il est souhaité que la surface du maillage déformé approche au mieux le scan 3D. Pour cela il s'agit de définir une distance entre les deux objets, maillage et scan 3D. Il faut pouvoir choisir à quelle précision approcher le scan. En effet, il s'agit d'éviter de capturer les erreurs de mesures du scan. De plus les rugosités de surfaces des pièces fabriquées ne sont pas toujours pertinentes à approcher ;

1. Wire Arc Additive Manufacturing

2. une bonne qualité² [5] du maillage déformé obtenu. En effet, avoir un maillage de bonne qualité est très important en élément fini pour que les calculs puissent s'effectuer avec une bonne précision, obtenir une bonne stabilité des solutions mais également une convergence des calculs ;
3. un champ de déformation réaliste. En effet, on cherche à obtenir un champ qui puisse par la suite être expliqué physiquement puisqu'il devra être prédit par un réseau de neurones, il ne doit donc pas présenter de trop grosses discontinuités entre deux éléments adjacents du maillage.

La littérature se concentre essentiellement sur l'approche de nuages de points qui cherchent à approcher des nuages de points, ou des nuages de points avec des arêtes qui cherchent à approcher des nuages de points. Au niveau maillage pour le *template*, le problème est très peu exploré. De plus, il est cherché à caler les noeuds du bord du maillage à un nuage de points, et les points intérieurs au maillage doivent pouvoir suivre le mouvement, ce qui est beaucoup moins exploré dans la littérature [6].

Définition du problème Le maillage initial est noté $\Omega = \{\mathbf{v}, \varepsilon\}$. Il est notamment constitué de N sommets \mathbf{v} et de M arêtes ε . Une arête $E \in \varepsilon$ est définie comme étant une fonction linéaire de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^3 reliant deux noeuds du maillage. Les sommets sur la frontière du maillage sont appelées *sommets de peau* ou *noeuds de peau*, $\tau = \{x \in \mathbb{R}^3; x \in \partial\Omega \cap \mathbf{v}\}$. Cet ensemble est un ensemble discret de points de \mathbb{R}^3 de cardinal N_{skin} . La cible π est un nuage de points de \mathbb{R}^3 .

En notant $X \in \mathbb{R}^{N \times 3}$ la position des sommets dans le maillage initial, le maillage déformé cherché dont les positions de tous les noeuds $x \in \mathbb{R}^{N \times 3}$ sont sous la forme :

$$x = U + X \quad (1)$$

avec $U \in \mathbb{R}^{N \times 3}$ est le déplacement de chaque sommet du maillage.

Le déplacement U correspond au minimum obtenu de l'énergie $E(U)$:

$$E(U) = E_{data}(U) + E_{reg}(U) = E_{data}(U) + \alpha E_{jump}(U) + \gamma E_{solid}(U) \quad (2)$$

- E_{data} vise à minimiser la distance entre les sommets de peau du maillage et le nuage de points cible ;
- E_{reg} est un terme de régularisation qui vise à avoir un mouvement interne des sommets du maillage et qui doit permettre de respecter les différents critères évoqués précédemment.

Plus proche voisin La pénalisation de l'écart aux données passe par la définition d'une distance entre un noeud de peau du maillage et le nuage de points cible. Il est défini alors une correspondance entre les noeuds de peau et les points du nuages cible. L'ensemble des noeuds de peau du maillage permet de définir une partition de Voronoï dans lequel on peut classer tous les points du nuage cible. Dans chaque Voronoï se trouve alors un ensemble de points cible³ dont il est calculé le centre de masse. La distance entre un noeud x et le nuage de points est ainsi définie à partir de ce centre de masse $\mathcal{A}x$.

Ce terme d'écart aux données ne vise de plus qu'à pénaliser la distance normale entre la peau du maillage et le nuage de points pour avoir des mouvements tangentiels non contraint et donc un "glissement" de la peau sur le nuage cible. La notion de normale associée à chaque noeud de peau est définie comme étant la moyenne⁴ des normales de la rosace ayant pour centre le noeud de peau considéré. C'est-à-dire pour un noeud de peau $x_i \in \tau$, l'ensemble des triangles de peau où x_i en est l'un des sommets est noté \mathbf{T}_i . Un triangle de peau, \mathbf{t} est un triangle du maillage de Ω tel que l'ensemble des points qui le composent appartiennent à $\partial\Omega$.

2. la qualité est définie à partir du critère de radius-ratio

3. dans le cas où cet ensemble est vide, alors une définition alternative de la cible est utilisée en considérant plus simplement le point du nuage cible le plus proche en norme 2 du noeud de peau considéré

4. sauf dans le cas où les normales de la rosace ont une dispersion trop importante, caractéristique par exemple des noeuds sur le segment entre deux faces du mur à 90°. Dans ce cas, une telle définition de la normale n'est pas justifiée, ce qui peut conduire à des comportements très irréguliers dans ce problème. C'est pourquoi dans ces cas limites, la pénalisation est faite sur l'ensemble de la distance avec toutes ces composantes sans distinctions entre composante normale et composante tangentielle. Mais pour simplifier les notations dans toute la suite, \vec{n}_i sera également utilisée mais il sera entendu que, dans ce cas, ce vecteur n'est pas une normale mais simplement un vecteur unitaire dans la même direction que $x_i - \mathcal{A}x_i$

Pour chaque triangle de peau t , sa normale \vec{n}_t est définie comme étant unitaire et sortante de Ω . Ainsi, la normale \vec{n}_i du noeud de peau x_i est définie comme étant la moyenne des normales des triangles de peau de \mathbf{T}_i :

$$\vec{n}_i = \frac{1}{\#\mathbf{T}_i} \sum_{t \in \mathbf{T}_i} \vec{n}_t \quad (3)$$

On peut ainsi poser l'énergie à minimiser suivante :

$$E_{data} = \frac{1}{2} \sum_{x_i \in \tau} k_i \|(x_i - \mathcal{A}x_i) \cdot \vec{n}_i\|_2^2 \quad (4)$$

Dans ce problème, le déplacement U qui conduit à minimiser l'énergie $E(U)$ est cherché. Ainsi, le terme $\mathcal{A}x_i = \mathcal{A}(U_i + X_i)$ est une inconnue du problème. Amberg et al. [2] propose de résoudre cela en faisant des correspondances locales de manière itératives jusqu'à converger. Pour cela, un problème de point fixe est introduit où partant de $U^{[0]} = 0$, $(\mathcal{A}x_i^{[j]})_{i \in \llbracket 1, N_{skin} \rrbracket}$ est utilisé pour déterminer $U^{[j+1]}$ tel que :

$$\begin{cases} x^{[j+1]} &= U^{[j+1]} + X \\ U^{[j+1]} &\text{ minimise } \tilde{E}^{[j+1]}(U) = \tilde{E}_{data}^{[j+1]}(U) + E_{reg}(U) \end{cases} \quad (5)$$

dont $\tilde{E}_{data}^{[j+1]}$ est définie comme étant une variante de l'énergie d'écart aux données de (4)

$$\tilde{E}_{data}^{[j+1]}(U) = \frac{1}{2} \sum_{x_i \in \tau} k_i \|(x_i - \mathcal{A}x_i^{[j]}) \cdot \vec{n}_i\|_2^2 \quad (6)$$

avec $x_i = U_i + X_i$ pour tout $i \in \tau$. Ainsi dans l'équation (6), le terme $\mathcal{A}x_i^{[j]}$ est entièrement connu et indépendant de U . Le point fixe consiste à trouver un état où la nouvelle assignation $(\mathcal{A}x_i^{[j+1]})_{i \in \llbracket 1, N_{skin} \rrbracket}$ associée à $x^{[j+1]}$ est la même que la précédente $(\mathcal{A}x_i^{[j]})_{i \in \llbracket 1, N_{skin} \rrbracket}$.

Terme de régularisation Le terme de régularisation permet à l'ensemble de la structure de se déformer en accord avec les contraintes imposées sur la peau du maillage tout en garantissant une bonne qualité du maillage. Pour cela, il est utilisé deux termes énergétiques distincts. Le premier, E_{jump} , vise à pénaliser les discontinuités dans le champ de déformation, c'est-à-dire en pénalisant les discontinuités du gradient de déplacement. Dans le cadre de la méthode de Galerkin, la solution $u \in H^1(\Omega)$ est approchée par une fonction U_h d'un sous-espace de dimension finie V_h . Cette fonction est alors formée par une combinaison linéaire des fonctions de forme, dans le cas des éléments fini \mathbb{P}_1 . Les discontinuités du gradient sont définis comme étant la différence sur la frontière entre deux éléments, T^+ et T^- :

$$\llbracket \nabla U_h \rrbracket = (\nabla U_h^+ - \nabla U_h^-) \cdot \vec{n} \quad (7)$$

avec \vec{n} normale unitaire orientée de T^+ vers T^- . La quantité E_{jump} est alors cherchée à être minimisée :

$$E_{reg}(U_h) = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{int}} \int_e \llbracket \nabla U_h \rrbracket \cdot \llbracket \nabla U_h \rrbracket dS \quad (8)$$

Le terme, E_{solid} pénalise quant-à lui les dégradations de la qualité du maillage. Pour cela, il est utilisé l'énergie d'un solide hyper-élastique dont le formalisme est issu de l'étude présentée dans la documentation de *Fenisc Project*[1] :

$$E_{solid}(u) = \int_{\Omega} \psi(u) dx \quad (9)$$

La densité d'énergie ψ d'un solide compressible est donnée par

$$\psi(u) = \frac{\mu}{2}(I_c - 3) - \mu \ln(J) + \frac{\lambda}{2} \ln(J)^2 \quad (10)$$

avec λ, μ les coefficients de Lamé, et I_c, J deux invariants.

Résolution du problème Pour une correspondance noeuds de peau-points du nuage cible fixée, c'est-à-dire pour j fixé, le problème s'écrit

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \text{ minimisant } \tilde{E}^{[j]}(U) \\ \tilde{E}^{[j]}(U) = \tilde{E}_{data}^{[j]}(U) + E_{reg}(U) = \tilde{E}_{data}^{[j]}(U) + \alpha E_{jump}(U) + \gamma E_{solid}(U) \end{cases} \quad (11)$$

Ceci est un problème non linéaire à cause notamment de l'expression de $\psi(u)$. Pour le résoudre, la méthode de Newton est utilisée.

2.2 Résultats numériques

La figure 1 présente le maillage déformé avec l'algorithme de calage et une précision de 0,25mm.

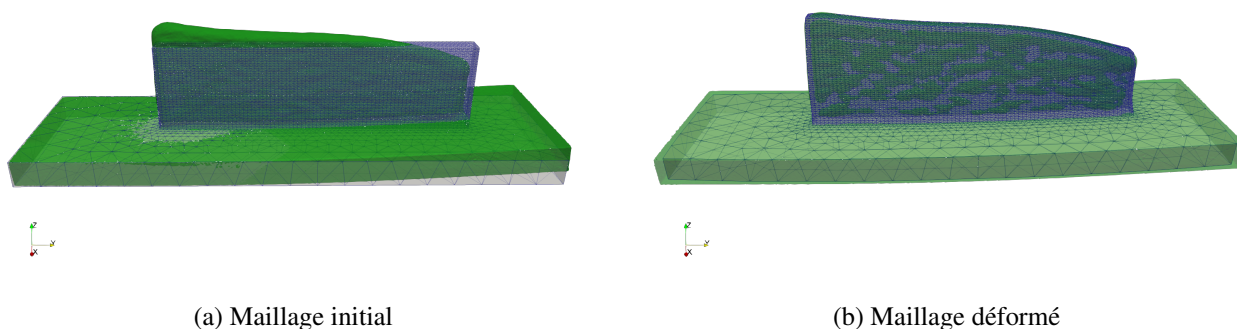


FIGURE 1 – Déformation induite sur le maillage du mur, représenté initialement sur la figure 1a, et après calage sur la figure 1b avec le modèle décrit

La figure 2 présente la qualité obtenue sur à la déformation du maillage calculée avec l'algorithme de calage, qualité qui est comparée celle initiale. La figure 3 présente le champ de déformation calculé.

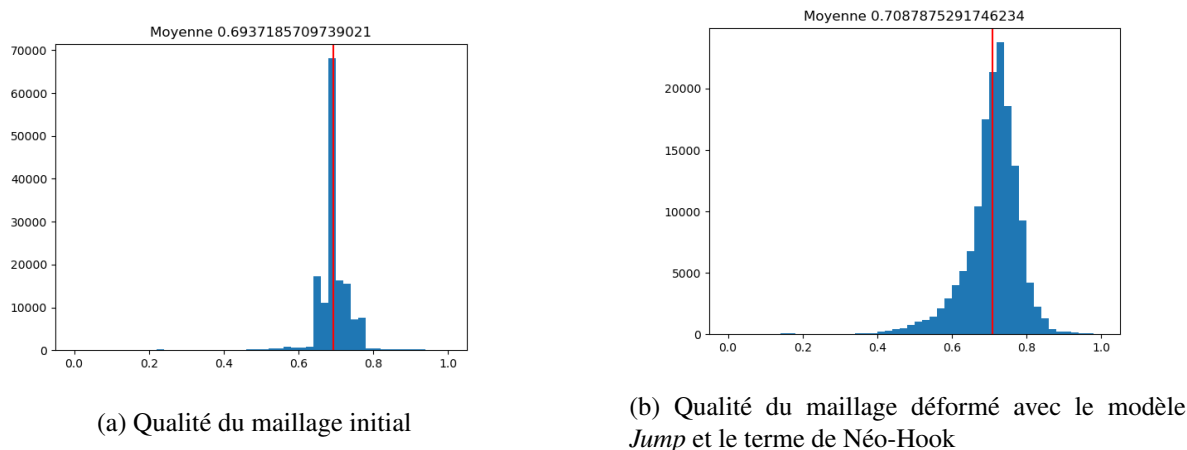


FIGURE 2 – Qualité des maillages du mur

3 Construction d'un modèle de réseaux de neurones artificiels pour prédire le terme d'"Inherent Strain"

3.1 Positionnement du problème

La mise en place du modèle d'"Inherent Strain" vise à pouvoir prédire toutes les déformations d'un nouveau composant dans l'objectif de décider si elles sont, *a priori* acceptables.

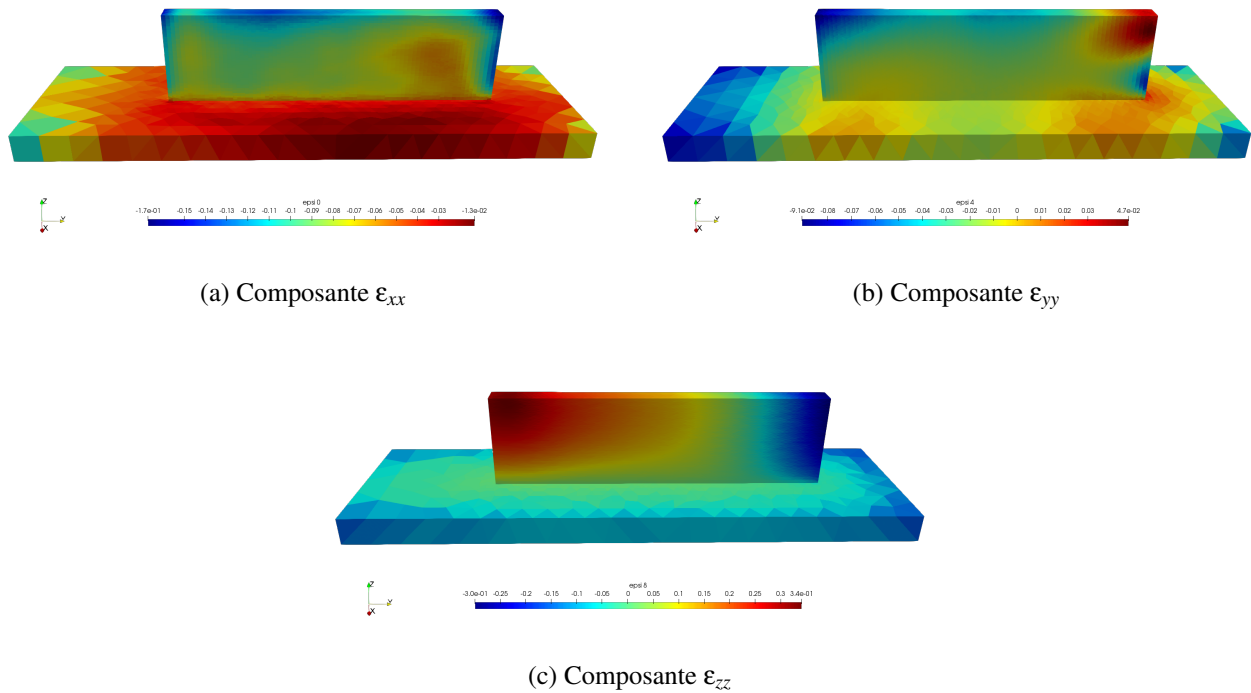


FIGURE 3 – Champ de déformation obtenu avec le modèle *Jump* et le terme de Néo-Hook

On part du postulat de base que les déformations géométriques sont issues de l’histoire thermique de la matière lors de la fabrication. En effet, le *zigzag*⁵ atteint des températures bien plus hautes que le *raster* comme l’illustre les courbes de la figure 4 montrant l’évolution de la température en un point du mur pour les deux stratégies de fabrication. Le mur résultant en est plus affaissé.

Ceci peut s’expliquer par le fait qu’un métal avec une température initiale basse va se solidifier rapidement. Cependant, au cours du processus de fabrication la pièce accumule de la chaleur augmentant ainsi la taille du bain de fusion. Le métal d’apport plus chaud s’écoule et s’affaisse donc plus facilement sous l’action de la gravité.

Le modèle cherché prend ainsi en entrée l’évolution de température d’un point du maillage dans l’objectif de prédire la valeur du champ de déformation en ce point.

3.2 Traiter des séries temporelles par deeplearning

Un champ de déformations a théoriquement 9 composantes dont 6 différentes par symétrie du tenseur. Cependant, M.Buggati et al. [4] montrent que pour les champs de déformations n’engendrant pas de contrainte, seul les trois composantes diagonales prédominent. Ainsi pour chaque noeud du maillage, il y a :

- en entrée, une courbe de la température en fonction du temps ;
- en sortie, trois composantes de déformations correspondant à ϵ_{xx} , ϵ_{yy} et ϵ_{zz} .

Deux approches sont présentées ici. La première consiste à simplifier la donnée d’une courbe de température en une ou plusieurs caractéristiques résumant les courbes de températures. La deuxième méthode consiste à utiliser entièrement le profil de température sans chercher à le simplifier.

Les cas d’études utilisés sont :

1. utiliser uniquement du raster dans la phase d’apprentissage. Dans ce cas 8% environ des noeuds de l’essai sont sélectionnés aléatoirement pour l’apprentissage. Il y a ainsi deux sets de test : l’ensemble des autres noeuds dans le raster, et l’essai *zigzag*.

5. nom donné à une des stratégies de dépôts de la matière lors de la construction du mur en WAAM, l’autre utilisé ici est le *raster*

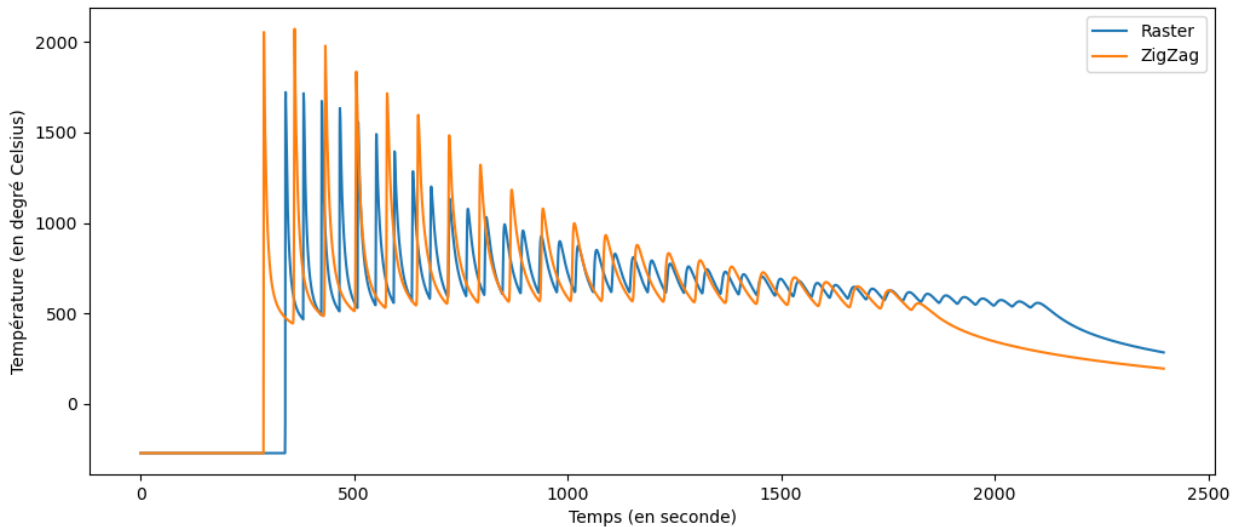


FIGURE 4 – Simulation de température d'un point du mur au cours de fabrication pour le *raster* et le *zigzag* au noeud de coordonnées $(x = -0.75, y = 49., z = 6.03)$

Le premier set permet d'étudier la qualité de la reproduction. On dit reproduction car les courbes de températures de l'entraînement sont très proches des courbes du set de test au vue de la densité de noeud dans le mur et l'inertie des phénomènes physiques mis-en-jeu (diffusion, convection). Le deuxième set permet d'étudier la qualité de la prédiction. En effet, il est intéressant d'étudier les résultats du modèle appris à partir du raster sur les données du zigzag.

2. utiliser uniquement du zigzag dans la phase d'apprentissage. Les tests suivent la même logique que dans le point précédent.
3. utiliser à la fois du raster et du zigzag dans la phase d'apprentissage. Dans ce cas tous les noeuds sont mélangés, et il est pris aléatoirement 8% dans l'ensemble. Les résultats sur tous les autres noeuds mélangés sont étudiés ainsi que les cas disjoints du raster et du zigzag.

Isotherme Le premier modèle part du principe que plus du métal est chaud, et plus il est visqueux et donc a une tendance à se déformer. 20 isothermes de températures sont alors définies. Il est déterminé pour chaque noeud du maillage le temps passé sous la température palier. Ce qui permet de synthétiser en 20 valeurs les courbes de températures qui correspondent alors aux entrées du réseau neuronal. Ce réseau est constitué de trois couches cachées. Le tableau 1 présente le résultat avec 140 neurones sur chaque couche.

Convolution 1D Le second modèle consiste à utiliser les convolutions sur séries temporelles pour que le réseau apprenne les caractéristiques à étudier dans la corrélation avec le champs de déformation. Dans ce cas, le réseau utilisé consiste à un encodage en quatre couches de filtres avec diminution de la dimension et augmentation des caractéristiques étudiées. Ces caractéristiques sont ensuite combinées en deux couches pour prédire le champ de déformation. Une des configuration d'hyperparamètre est présentée dans le tableau 1.

Réseaux récurrents La dernière approche présentée ici étudie l'importance de l'histoire de la température à travers l'utilisation des réseaux récurrents. Ces réseaux permettent d'avoir des sorties influencées par la mémorisation de caractéristiques "vues" dans les temps précédents. La figure 5 illustre la structure du réseau utilisé.

Il est constitué de deux couches cachées récurrentes et d'une couche à trois neurones de sorties. Pour diminuer la taille des séries temporelles permettant d'une part de réduire les temps de traitements et d'autre part d'éviter de saturer les LSTM avec des séries trop longues[3], les séries temporelles sont

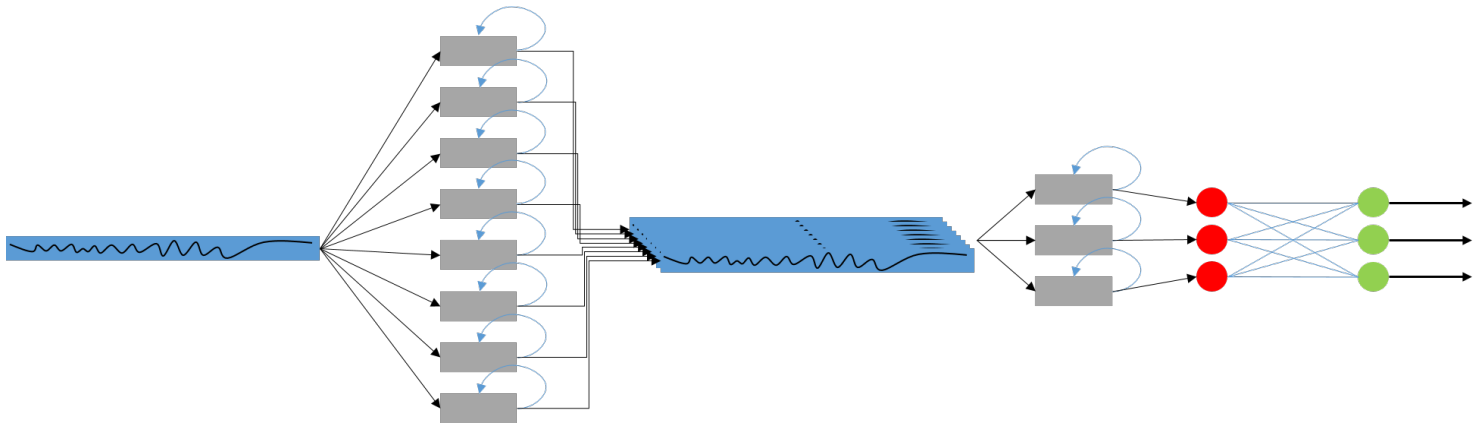


FIGURE 5 – Structure du réseau neuronal pour le modèle récurrent

échantillonnées avec un taux de 1/25. Le tableau 1 permet de comparer les résultats avec ce modèle par rapport aux deux précédents.

Type de réseau	Hyper-paramètres ⁴	Numéro cas d'étude	Erreur							
			Train		Test ¹		Raster		Zigzag	
			Moy abs. ²	Med rela. ³	Moy abs.	Med rela.	Moy abs.	Med rela.	Moy abs.	Med rela.
Isotherme	140,140,140	1	$2,3e-3$	2,3%	$2,9e-3$	2,6%	$2,9e-3$	2,6%	$2,0e-1$	5,3e2%
Convolution	3,1,6,1	1	$2,2e-3$	2,0%	$3,1e-3$	2,7%	$3,0e-3$	2,6%	$7,7e-2$	2,5e2%
Récurrent	1/25,12,3	1	$2,8e-3$	2,7%	$3,0e-3$	2,8%	$3,0e-3$	2,8%	$9,0e-2$	3,0e2%
Isotherme	140,140,140	2	$1,8e-3$	4,9%	$2,4e-3$	5,7%	$2,8e-1$	3,7e2%	$2,3e-3$	5,6%
Convolution	3,1,6,1	2	$1,9e-3$	4,7%	$2,7e-3$	6,2%	$8,2e-1$	7,3e2%	$2,6e-3$	6,1%
Récurrent	1/25,12,3	2	$4,3e-3$	1,1e1%	$1,8e-2$	3,3e1%	$1,4e-1$	2,0e2%	$9,7e-3$	1,6%
Isotherme	140,140,140	3	$3,7e-3$	5,2%	$4,0e-3$	5,5%	$3,5e-3$	3,2%	$4,4e-3$	1,0e1%
Convolution	3,1,6,1	3	$2,0e-3$	2,8%	$2,9e-3$	4,0%	$2,9e-3$	2,3%	$2,7e-3$	6,7%
Récurrent	1/25,12,3	3	$4,2e-3$	6,8%	$4,3e-3$	6,9%	$4,8e-3$	5,0%	$1,6e-2$	3,7e1%

TABLE 1 – Résultats numériques des différents modèles

¹ Pour le cas d'étude 1 (respectivement le cas d'étude 2), le set de test correspond aux noeuds du raster (resp. zigzag) qui ne sont pas dans le set d'entraînement.

² Moy abs. = Moyenne des écarts en valeurs absolues entre les valeurs théoriques et les valeurs prédites.

³ Med rela. = Médiane des erreurs relatives entre les valeurs théoriques et les valeurs prédites.

⁴ Les hyperparamètres sont pour chaque modèle respectivement :

isotherme le nombre de neurones sur chacune des couches cachées ;

convolution la taille des noyaux des filtres de chacune des couches ;

récurrent l'échantillonnage effectuée sur les séries temporelles, le nombre de LSTM dans la première couche, puis dans la seconde couche cachée.

Ces résultats permettent de mettre en évidence la présence d'une forte corrélation entre l'évolution temporelle de la température avec le champs de déformation. On observe de plus que de manière générale le modèle basé sur les convolutions a des résultats bien meilleurs que les deux autres modèles. Cependant, ce résultat est à nuancer en considérant le nombre de paramètres à optimiser lors de l'apprentissage comme illustré dans le tableau 2.

Le modèle récurrent apparaît ainsi comme étant près de dix fois moins paramétré que le modèle convolutionnel. Les résultats numériques à la lumière de cette information apparaisse alors plus encourageant pour le modèle récurrent. A nombre de paramètres semblables, le modèle récurrent de meilleurs résultats numériques et une approche plus fidèle du *raster*.

Type de réseau	Hyperparamétrage	Nbre de couches cachées	Nbre de paramètres
Isotherme	140,140,140	3	42 843
Convolution	3,1,6,1	5	71 888
Récurrent	_,12,3	2	936

TABLE 2 – Comparaisons paramétriques des différents modèles

4 Conclusion

Il a été étudié une méthodologie d'assimilation de données géométriques de déformations de composants expérimentaux construit par fabrication additive. Partant du scan 3D de la surface de la pièce, il est reconstruit un champs de déformation sur le maillage volumique. Le champ de pré-déformation est par la suite prédit par un modèle de réseau de neurones artificiels.

Ce terme d'"Inherent Strain" peut servir de terme correctif dans les simulations thermo-mécanique pour remplacer toute la physique non modélisée. La prédiction de la déformation, *a priori*, d'une nouvelle pièce peut permettre ensuite d'optimiser les paramètres procédés du WAAM pour obtenir la géométrie nominale souhaitée.

Remerciement

Ces travaux ont été réalisés avec le soutien du consortium *Addictive Factory Hub (AFH)*.

Références

- [1] M. S. Alnaes, J. Blechta, J. Hake, A. Johansson, B. Kehlet, A. Logg, C. Richardson, J. Ring, M. E. Rognes, G. N. Wells. *The FEniCS Project Version 1.5*, Archive of Numerical Software 3, 2015.
- [2] B. Amberg, S. Romdhani, T. Vetter. *Optimal Step Nonrigid ICP Algorithms for Surface Registration*, Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, IEEE, 2007.
- [3] M. Arjovsky, A. Shah, Amar, Y. Bengio. *Unitary Evolution Recurrent Neural Networks*, Proceedings of The 33rd International Conference on Machine Learning, PMLR, 1120-1128, 2016.
- [4] M. Bugatti, Q. Semeraro. *Limitations of the inherent strain method in simulating powder bed fusion processes*, Additive Manufacturing, ELSEVIER, 329-346, 2018.
- [5] P. Pebay, T. Baker. *Analysis of triangle quality measures*, Mathematics of computation, American Mathematical Society, Volume 72, Number 244, Pages 1817-1839, 2003.
- [6] G. K. L. Tam, Z. Cheng, Y. Lai, F. C. Langbein, Y. Liu, D. Marshall, R. R. Martin, X. Sun, P. L. Rosin. *Registration of 3D Point Clouds and Meshes : A Survey from Rigid to Nonrigid*, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, IEEE, Volume 19, Number 7, Pages 1199-1217, 2013.