HAL
open science

Transfert radiatif en domaine borné avec prise en compte de la cohérence des ondes liée aux réflexions.

Adel Messaoudi, Régis Cottereau, Christophe Gomez

To cite this version:

Adel Messaoudi, Régis Cottereau, Christophe Gomez. Transfert radiatif en domaine borné avec prise en compte de la cohérence des ondes liée aux réflexions.. 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717725

HAL Id: hal-03717725

https://hal.science/hal-03717725v1

Submitted on 8 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2022
15ème Colloque National en Calcul des Structures
16-20 Mai 2022, Presqu'île de Giens (Var)

Transfert radiatif en domaine borné avec prise en compte de la cohérence des ondes liée aux réflexions.

A. Messaoudi[1,2], R. Cottereau[1], C. Gomez[2]

[1] *Laboratoire de mécanique et d'acoustique (LMA), Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, LMA UMR 7031, Marseille, France*
[2] *Institut de mathématiques de Marseille (I2M), Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M UMR 7373, Marseille, France*

Résumé — Dans ce rapport nous nous concentrons sur l'obtention de modèles de transfert radiatif pour des champs d'ondes scalaires, dans un régime haute fréquence, se propageant dans des milieux avec frontières. Pour cela, on étend notre problème dans un espace tout entier, puis on introduit la transformée de Wigner. Après une analyse asymptotique nos modèles de transfert radiatif sont obtenus. Enfin, dans la dernière partie nous nous concentrons sur la résolution numérique des équations de transfert radiatif à l'aide des méthodes de Monte-Carlo.
Mots clés — transfert radiatif, haute fréquence, frontières, transformée de Wigner, Monte-Carlo.

1 Introduction

Dans ce papier nous nous intéressons aux ondes acoustiques se propageant dans un demi-espace hétérogène, délimité par une frontière. La propagation de ces ondes peut être modélisée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_{tt} p(t,\mathbf{x}) - c^2(\mathbf{x})\Delta p(t,\mathbf{x}) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ p(t,\mathbf{x}) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \mathbf{x} \in \delta\Omega, \\ p(0,\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

sur le demi-espace $\Omega = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*_-$, où la variable $\mathbf{x}$ est décomposée comme suit :

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_\perp, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_-.$$

L'inconnue est la pression p et $c^2(\mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{x})\rho_0$. κ est la rigidité du milieu et ρ_0 est la densité du milieu. On admet également que $\mathrm{supp}(p_0) = \bar{\Omega}$.

Cette équation permet de modéliser la propagation d'une onde acoustique dans un demi-espace hétérogène, délimité par une frontière d'équation $\{z = 0\}$, avec une condition de surface libre sur cette frontière. Notre objectif est de modéliser la densité énergétique transportée par cette onde, en régime haute fréquence. C'est à dire lorsque la longueur d'onde, la taille des hétérogénéités sont du même ordre de grandeur, mais petits devant la longueur de propagation. Les amplitudes des fluctuations du milieu sont également faibles.
Quand Ω est le domaine tout entier, on peut reprendre la démarche effectuée dans [1], [2]. Après avoir considéré la transformée de Wigner et regardé le comportement asymptotique, la densité énergétique transportée par notre onde peut être modélisée par une équation de transfert radiatif.

Nous sommes confrontés à deux difficultés. La première est liée à la prise en compte des frontières dans notre analyse. La seconde est liée aux difficultés de résolution numérique de notre équation. Nous nous attaquons dans ce papier à ces deux verrous. Si κ et ρ étaient constants on aurait pu utiliser les travaux réalisés dans [4]. Dans cet article les auteurs étudient l'évolution de la densité énergétique transportée par une onde plane se propageant dans un demi-espace, en régime haute-fréquence. Mais dans notre étude les paramètres du milieu fluctuent, nous devons adopter une stratégie différente. Pour cela dans un premier temps nous étendons notre problème à l'espace tout entier pour pouvoir reprendre les travaux de [1] et [2]. Dans la partie qui suit on introduit la transformée de Wigner de la solution afin de regarder le comportement asymptotique et obtenir notre modèle de transfert radiatif. Enfin nous nous concentrons sur l'interprétation probabiliste et la résolution numérique de ces équations à partir des travaux réalisés dans [3].

2 Équivalence des formulations demi-espace et espace tout entier

2.1 Problème initial

Notre objectif est de modéliser la densité énergétique transportée par la solution de l'équation d'onde (1) en régime haute-fréquence. On effectue alors le changement de variable $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}/\varepsilon$, $t \mapsto t/\varepsilon$ pour être dans le régime qui nous convient et on note :

$$p^\varepsilon(t,\mathbf{x}) = p\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right).$$

On a alors :

$$\begin{cases} \partial_{tt} p^\varepsilon(t,\mathbf{x}) - c^2\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\Delta p^\varepsilon(t,\mathbf{x}) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ p^\varepsilon(t,\mathbf{x}) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \mathbf{x} \in \delta\Omega, \\ p^\varepsilon(0,\mathbf{x}) = p_0^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Il nous faut effectuer une analyse asymptotique, regarder ce qui se passe lorsque $\varepsilon \mapsto 0$. Les travaux dans [1], [2] nous donnent l'analyse dans un milieu infini. Nous étendons alors notre problème initial sur l'espace tout entier pour pouvoir utiliser ces résultats.

2.2 Extension du problème initial dans l'espace tout entier

On étend ρ et κ comme des fonctions paires par rapport à z sur l'espace tout entier et on considère l'équation d'onde suivante :

$$\begin{cases} \partial_{tt} q_-^\varepsilon(t,\mathbf{x}) - c^2\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\Delta q_-^\varepsilon(t,\mathbf{x}) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ q_-^\varepsilon(0,\mathbf{x}) = p_0^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{3}$$

Le milieu de propagation est cette fois-ci le domaine tout entier $\mathbb{R}^3$.

On introduit le symétrique de q_-^ε qu'on note $q_+^\varepsilon(t,\mathbf{x}_\perp,z) = -q_-^\varepsilon(t,\mathbf{x}_\perp,-z)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ et on considère

$$\tilde{p^\varepsilon}(t,\mathbf{x}) = q_+^\varepsilon(t,\mathbf{x}_\perp,z) + q_-^\varepsilon(t,\mathbf{x}_\perp,z), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Ainsi $\tilde{p}_\varepsilon$ peut être vu comme la superposition de deux ondes. On en déduit, du fait que $\mathrm{supp}(p_0) = \bar{\Omega}$ et de la symétrie de $\tilde{p^\varepsilon}$, que

$$\tilde{p^\varepsilon}(t,\mathbf{x}) = p^\varepsilon(t,\mathbf{x}), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_-.$$

$\tilde{p^\varepsilon}$ peut être vu comme une extension de p^ε sur $\mathbb{R}^3$, tel que $\tilde{p^\varepsilon}(t,x,z) = -\tilde{p^\varepsilon}(t,x,-z)$.

Notre problème initial, dans un demi-espace, avec une seule source p_0 peut donc s'étendre comme un problème dans l'espace tout entier avec deux sources symétriques par rapport à l'axe $\{z=0\}$. Dorénavant nous pouvons appliquer les travaux effectués dans [1] ou [2] et faire l'analyse asymptotique dans le domaine tout entier. Il reste tout de même une difficulté à lever liée au fait que le milieu n'est plus à corrélation courte car la symétrisation du problème a recréé une corrélation à longue distance.

3 Analyse asymptotique

Nous devons dans un premier temps introduire la transformée de Wigner qui sera l'outil essentiel de notre analyse.

3.1 Transformée de Wigner

La transformée de Wigner de deux applications f et g de $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ est définie comme suit :

$$W[f,g](t,\mathbf{x},\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} f\left(\mathbf{x} - \frac{\varepsilon\mathbf{y}}{2}\right) g\left(\mathbf{x} + \frac{\varepsilon\mathbf{y}}{2}\right) \frac{d\mathbf{y}}{(2\pi)^3}.$$

On considère $W[\tilde{p}^\varepsilon, \tilde{p}^\varepsilon]$ la transformée de Wigner de $\tilde{p}^\varepsilon$, qu'on peut décomposer comme suit :

$$W[\tilde{p}^\varepsilon, \tilde{p}^\varepsilon](t,\mathbf{x},\mathbf{k}) = W_\varepsilon^{--}(t,\mathbf{x},\mathbf{k}) + W_\varepsilon^{++}(t,\mathbf{x},\mathbf{k}) + W_\varepsilon^{-+}(t,\mathbf{x},\mathbf{k}) + W_\varepsilon^{+-}(t,\mathbf{x},\mathbf{k}), \tag{4}$$

avec

$$W_\varepsilon^{ij}(t,\mathbf{x},\mathbf{k}) = W[q_i^\varepsilon, q_j^\varepsilon](t,\mathbf{x},\mathbf{k}) \quad i,j \in \{-,+\}. \tag{5}$$

Nous devons déterminer une équation pour $W_0 := \lim_{\varepsilon\to 0} W[\tilde{p}^\varepsilon, \tilde{p}^\varepsilon]$ qui modélise l'évolution de la densité énergétique transportée par l'onde. Plus exactement nous séparons le problème en deux parties. Nous traitons dans un premier temps les termes W_0^{--} et W_0^{++} qui modélisent la densité énergétique transportée par q_- et q_+, sans prendre en compte le rôle des interférences entre ces deux ondes. Nous traitons ensuite les deux termes croisés qui modélisent la densité énergétique due aux interférences.

3.2 Équation de transfert radiatif obtenus à partir de W_ε^{--} et W_ε^{++}

Comme $q_+^\varepsilon(t,\mathbf{x}_\perp,z) = -q_-^\varepsilon(t,\mathbf{x}_\perp,-z)$ on en déduit à partir de l'équation (5) que :

$$W_\varepsilon^{--}(\mathbf{x},\mathbf{k}) = W_\varepsilon^{++}(\mathbf{x}^*,\mathbf{k}^*),$$

avec $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_\perp, -z)$ et $\mathbf{k}^* = (\mathbf{k}_\perp, -k_z)$.

On obtient ainsi une condition de symétrie. Il nous suffit de déterminer une équation vérifiée par W_0^{--}. En effet l'équation vérifiée par W_0^{++} est la même que celle de W_0^{--}, avec un terme source symétrique et se propageant dans une direction opposée par rapport à l'axe $\{z=0\}$. Dorénavant on ne fait plus de distinction entre W_0^{--} et W_0^{++} qu'on notera w_0.

Pour déterminer l'équation de transfert radiatif obtenue à partir de w_0 nous procédons de manière classique en reprenant les travaux effectués dans [1] ou [2]. On considère le développement asymptotique suivant :

$$w_\varepsilon = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2. \tag{6}$$

L'ordre 0 nous donne une équation sur w_0 et une base de projection. L'ordre 1 nous donne une relation entre w_0 et w_1. L'ordre 2 nous donne une équation sur w_0. Lorsqu'on projette sur la base obtenue à l'ordre 0 on obtient une équation sur w, la projection de w_0. Il s'agit de notre modèle de transfert radiatif.
Après toutes ces étapes, dans un milieu isotrope nous pouvons obtenir l'équation suivante :

$$\partial_t w(t,\mathbf{x},\mathbf{k}) + c\mathbf{k}\cdot\nabla_\mathbf{x} w(t,\mathbf{x},\mathbf{k}) = -cl^{-1} w(t,\mathbf{x},\mathbf{k}) + cl^{-1}\int w(t,\mathbf{x},\mathbf{k}')\frac{d\mathbf{k}'}{\Omega_d} + S(t,\mathbf{x},\mathbf{k}). \tag{7}$$

Il s'agit d'une équation de transfert radiatif. $w(t,\mathbf{x},\mathbf{k})$ est la densité énergétique à l'instant t, à la position $\mathbf{x}$ et suivant le vecteur d'onde $\mathbf{k}$. c est la célérité de l'onde, l le libre parcours moyen et S un terme source. On obtient une formule explicite pour ces trois paramètres à partir de statistiques sur les paramètres de l'équation d'ondes de départ.

3.3 Analyse asymptotique pour les W_ε^{-+} et W_ε^{+-}

On constate qu'à l'instant $t=0$ on a :

$$W_\varepsilon^{-+}(0,\mathbf{x},\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} q_-^\varepsilon\left(0,\mathbf{x}-\frac{\varepsilon\mathbf{y}}{2}\right) q_+^\varepsilon\left(0,\mathbf{x}+\frac{\varepsilon\mathbf{y}}{2}\right)\frac{d\mathbf{y}}{(2\pi)^d}.$$

Si on considère que $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_\perp, y_3)$, sachant que $\mathrm{supp}(p_0) = \bar{\Omega}$, alors cette intégrale est non nulle uniquement si la condition suivante est vérifiée :

$$\begin{cases} \frac{z}{\varepsilon} - \frac{y_3}{2} \le 0 \\ et \\ -\frac{z}{\varepsilon} - \frac{y_3}{2} \le 0. \end{cases} \tag{8}$$

La condition est vérifiée si $y_3 \ge \frac{2|z|}{\varepsilon}$. Cependant $\frac{2|z|}{\varepsilon} \to +\infty$ lorsque $\varepsilon \to 0^+$ et $y_3 \in \mathbb{R}^3$. De ce fait il faut que z soit de la forme εz pour que la condition (8) soit vérifiée. Cela signifie que nous devons

regarder des points très proche du bord $z = 0$, du même ordre de grandeur que la longueur d'onde. En effet si on regarde pour des points très éloignés du bord, à l'instant $t = 0$ les termes W_0^{-+} et W_0^{+-} seront nuls dans cette configuration, nous aurons alors une densité énergétique nulle à tout instant. Il faut alors regarder ce qui se passe lorsque $z \mapsto \varepsilon z$.

À partir de la formule de Taylor-Young et de la symétrie de q_-^ε et q_+^ε on en déduit que :

$$W_\varepsilon^{-+}(t, \mathbf{x}_\perp, \varepsilon z, \mathbf{k}) = -w_0(t, \mathbf{x}_\perp, 0, \mathbf{k}) + \mathrm{O}(\varepsilon) \tag{9}$$

On a alors :

$$W_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) = w_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) + w_0(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{k}^*) - \delta(z)\left(w_0(t, \mathbf{x}_\perp, 0, \mathbf{k}) + w_0(t, \mathbf{x}_\perp, 0, \mathbf{k}^*)\right). \tag{10}$$

Ainsi la densité énergétique totale est la superposition de la densité énergétique transportée par q_- et q_+. À la frontière la densité énergétique totale est nulle car les ondes q_- et q_+ se compensent.

4 Interprétation probabiliste des équations de transfert radiatif

Après avoir introduit la transformée de Wigner et regardé le comportement asymptotique, les équations obtenues pour modéliser la densité énergétique transportée par notre onde sont des équations de transfert radiatif. Comme nous pouvons le voir dans (7), nous sommes donc confrontés à des équations à $7D$. On comprend alors la difficulté de résolution numérique de ces équations. De plus les équations de transfert radiatif sont des équations de transport particulières avec un terme intégral représentant la densité énergétique échangée entre les différentes directions. Ce terme intégral va ajouter une difficulté supplémentaire à notre résolution numérique.

Dans un cadre plus simple, en dimension 1 par exemple, la densité énergétique transportée par l'onde peut être modélisée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t w + ck\partial_x w + cl^{-1} w = -cl^{-1} \int w(t,x,k') \frac{dk'}{\Omega_1} \\ w(0,.) = S, \end{cases} \tag{11}$$

où $w = w(t,x,k)$ avec t le temps, x la position, $x \in \mathcal{D}$ un domaine ouvert délimité par une frontière. k le nombre d'onde $k \in \mathcal{V}$, un borélien de $\mathbb{R}$. Notre source $S = S(x,k)$ est positive bornée.

L'analyse probabiliste effectuée dans [3] nous permet, à partir des formules de Feymann-Kac, d'en déduire une interprétation probabiliste de la solution de l'équation (11) qu'on approxime grâce à la Loi des grands nombres. Nous cherchons à adapter cette démarche pour notre modèle de transfert radiatif afin d'obtenir une approximation numérique de la densité énergétique transportée par notre onde. Pour cela nous résolvons dans un premier temps l'équation de transfert radiatif vérifiée par w puis autour du bord, dans un rayon d'ordre de grandeur ε, nous soustrayons la valeur prise par w afin d'avoir une densité énergétique nulle à la frontière comme le décrit la formule (10). De plus lorsque nous avons une condition de Neumann au bord dans l'équation (1) nous pouvons reprendre le même raisonnement sauf que cette fois-ci nous rajouterions la valeur prise par w autour du bord, dans un rayon d'ordre de grandeur ε.

Dans la partie qui suit, nous présentons l'évolution de la densité énergétique transportée par une onde se propageant dans un demi-espace isotrope, avec une condition de surface libre sur la frontière.

5 Simulation numérique de la densité énergétique dans un cas particulier

On considère une onde acoustique se propageant dans le demi-espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-$, dont le comportement des matériaux est supposé isotrope, avec une condition de surface libre sur la frontière. Ainsi la propagation de sa densité énergétique peut être modélisée par l'équation (7). On considère également que la source est de la forme

$$S(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) = \delta(t)\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|).$$

D'après la formule (10) on en déduit que la solution de notre équation est de la forme :

$$W(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) = w(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) + w(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{k}^*) - \delta(z)\left(w(t, \mathbf{x}_\perp, 0, \mathbf{k}) + w(t, \mathbf{x}_\perp, 0, \mathbf{k}^*)\right).$$

Ainsi si on regarde suivant toutes les directions et qu'on note $w(t,\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} w(t,\mathbf{x},\mathbf{k})d\mathbf{k}$, l'article [5] nous donne :

$$w(t,\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{e}^{-ct/l}}{2\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}\delta(ct-|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|) + \frac{1}{2\pi lct}\left(1-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2}{c^2t^2}\right)^{-1/2} \times \exp\left[l^{-}1\sqrt{c^2t^2-|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2}-ct\right] 1_{[0,+\infty[}(ct-|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|). \quad (12)$$

Nous pouvons alors donner l'évolution sur notre demi-espace $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-$ de $W(t,\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} W(t,\mathbf{x},\mathbf{k})d\mathbf{k}$ qui représente la densité énergétique dans toute les directions. On considère $c=1$, $l=10$ et $\mathbf{x}_0=[0,-2]$. Voici la simulation obtenue :

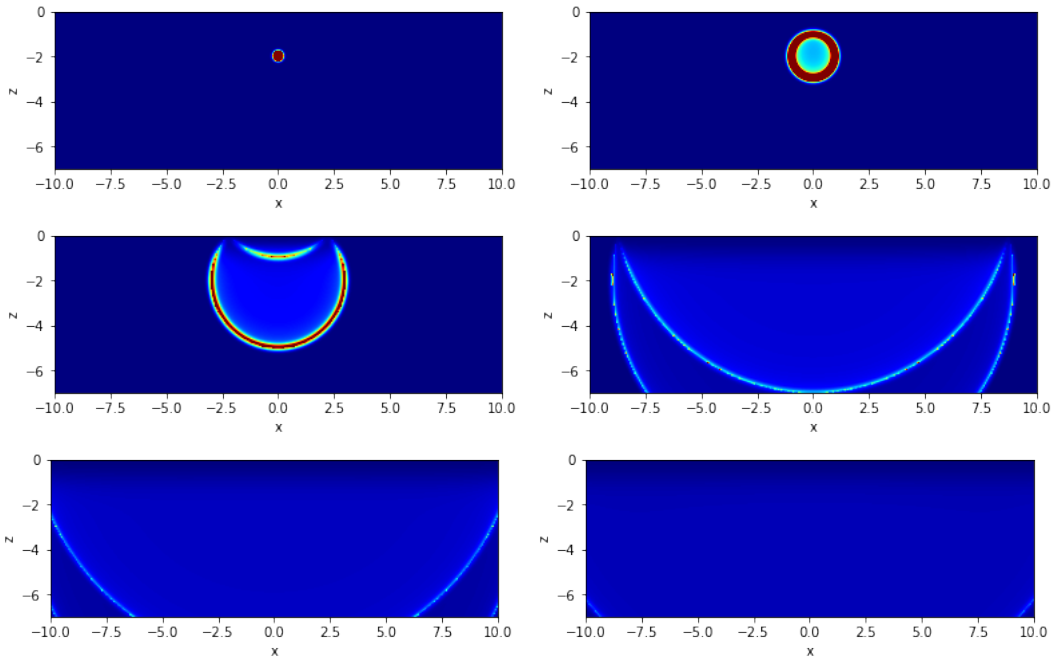

FIGURE 1 – Évolution de la densité énergétique aux instants $t=0$, $t=1$, $t=3$, $t=9$, $t=11$ et $t=13$.

On observe un front d'onde circulaire se propageant dans toute les directions, partant du point $x_0 = [0,-2]$. Une fois arrivée au bord la densité énergétique s'atténue totalement. Ce phénomène est du à l'imparité de notre onde sur l'espace tout entier. Aux instants suivants, le front d'onde repart et se dirige dans une direction opposée à celle du bord. Il y a réflexion. L'intensité du signal va ensuite se réduire à cause de l'atténuation géométrique et du caractère diffusif du milieu. Aux instant suivants on observe une coda qui se diffuse dans le milieu.

Références

[1] GUILLAUME BAL, *Kinetics of scalar wave fields in random media,* (2005).

[2] RYZHIK, PAPANICOLAOU, KELLER, *Transport equations for elastic and other waves in random media,* (1996).

[3] BERNARD LAPEYRE, ÉTIENNE PARDOUX, RÉMI SENTIS, *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion.*

[4] LEONID RYZHIK, GEORGE C. PAPANICOLAOU AND JOSEPH B.KELLER, *Transport equations for waves in a half space*

[5] J. C. J. PAASSCHENS, *Solution of the time-dependent Boltzmann equation* (1997).