



**HAL**  
open science

## Suivi de bifurcations pour l'analyse paramétrique des transmissions par engrenages

Adrien Mélot, Emmanuel Rigaud, Joël Perret-Liaudet

► **To cite this version:**

Adrien Mélot, Emmanuel Rigaud, Joël Perret-Liaudet. Suivi de bifurcations pour l'analyse paramétrique des transmissions par engrenages. 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717721

**HAL Id: hal-03717721**

**<https://hal.science/hal-03717721>**

Submitted on 8 Jul 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Suivi de bifurcations pour l'analyse paramétrique des transmissions par engrenages

A. Mélot<sup>1</sup>, E. Rigaud<sup>1</sup>, J. Perret-Liaudet<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, UMR CNRS 5513, Ecole Centrale de Lyon, 36 avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully Cedex, France, {adrien.melot,emmanuel.rigaud, joel.perret-liaudet}@ec-lyon.fr

---

## Résumé —

Nous proposons un algorithme permettant de suivre les bifurcations locales de systèmes non-linéaires en fonction de paramètres n'apparaissant pas explicitement dans les équations du mouvement. L'approche repose sur une formulation complexe de la méthode de l'équilibrage harmonique (HBM) couplée à une procédure de continuation par longueur d'arc. La stabilité des solutions obtenues est évaluée grâce à la méthode de Hill et un système étendu minimal est construit pour la continuation paramétrique des points de bifurcation détectés. La méthode proposée est mise en œuvre pour étudier la dynamique non-linéaire d'un modèle d'engrenage à dentures droites incluant la non-linéarité de jeu entre dents. Le modèle est soumis à l'erreur statique de transmission et aux fluctuations périodiques de la raideur d'engrènement dont le contenu spectral dépend de plusieurs paramètres implicites.

**Mots clés** — Équilibrage harmonique, Stabilité, Vibro-impacts.

---

## 1 Introduction

Les systèmes non-linéaires sont connus pour présenter des phénomènes complexes, comme des sauts d'amplitude, des oscillations quasi-périodiques, sous-harmoniques ou chaotiques. En particulier, les transmissions par engrenages sont des systèmes fortement non-linéaires du fait des jeux fonctionnels nécessaires à leur assemblage et à leur bon fonctionnement. Des pertes de contact peuvent se produire lorsque l'amplitude vibratoire excède la déformée statique, engendrant des vibro-impacts sur les dentures et dégradant le comportement acoustique du système.

Il est bien connu que la variation d'un paramètre tel que la fréquence de rotation, l'amplitude de l'excitation ou l'amortissement peut conduire à des changements soudains de régimes dynamiques. Il est donc important de réaliser des analyses paramétriques afin d'obtenir une vision globale du comportement du système. Cependant, la multiplicité des phénomènes possibles ainsi que le nombre de paramètres à étudier conduisent bien souvent à des temps de calcul trop importants. Plusieurs auteurs [1, 2] ont proposé des algorithmes permettant de réaliser des analyses paramétriques des points de bifurcation, où les changements de régimes dynamiques se produisent, en fonction de certains paramètres apparaissant explicitement dans les équations du mouvement. Il est bien sûr possible de réaliser de telles analyses avec des modèles de transmissions par engrenage. En revanche, la particularité de ces systèmes mécanique est l'excitation interne multi-harmonique générée par le processus d'engrènement. Cette dernière est fortement dépendante des caractéristiques macro et micro-géométriques des roues dentées. Elle est généralement calculée en amont des calculs dynamiques par des analyses statiques successives à différentes positions angulaires [3], ce qui complique le suivi de bifurcation.

Nous présentons dans une première partie une procédure basée sur une formulation complexe de la méthode de l'équilibrage harmonique couplée à une méthode de continuation par longueur d'arc permettant de suivre la position des bifurcations dans un espace de codimension-2. Un modèle dynamique d'engrenage est ensuite présenté. Une attention particulière est consacrée à la modélisation du contact et de l'excitation interne. La dernière partie présente un exemple de résultat de suivi de bifurcation en fonction du couple appliqué au système.

## 2 Méthodes numériques

### 2.1 Méthode de l'équilibrage harmonique complexe

Dans le cas le plus général, les équations du mouvement d'un modèle à  $n$  degrés de liberté (ddl) s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_{ex} \quad (1)$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur avec  $\mathbf{q}$  le vecteur déplacement de chaque degré de liberté.  $\mathbf{f}_{nl}$  et  $\mathbf{f}_{ex}$  sont les vecteurs d'efforts non-linéaires et d'efforts extérieurs périodiques. La dépendance temporelle des inconnues est omise pour plus de clarté.

La formulation complexe de la méthode de l'équilibrage harmonique consiste à exprimer les solutions périodiques  $\mathbf{q}$  de fréquence fondamentale  $\Omega$  dans l'équation (1) sous forme de série de Fourier tronquée à l'ordre  $H$  :

$$\mathbf{q} = \text{Re} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{q}}_k e^{ik\Omega t} \right) \approx \text{Re} \left( \sum_{k=0}^H \tilde{\mathbf{q}}_k e^{ik\Omega t} \right) \quad (2)$$

où le vecteur  $\tilde{\mathbf{q}}$  contient les coefficients complexes de la transformée de Fourier. L'opérateur de dérivation fréquentielle  $\nabla$  permet d'obtenir les expressions des vitesses et accélérations :

$$\nabla = \text{diag}(0, i, 2i, \dots, Hi) \quad (3)$$

avec  $i = \sqrt{-1}$ . Il vient :

$$\dot{\mathbf{q}} = [\mathbf{T}\Omega\nabla \otimes \mathbf{I}_n] \tilde{\mathbf{q}} \quad (4)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = [\mathbf{T}\Omega^2\nabla^2 \otimes \mathbf{I}_n] \tilde{\mathbf{q}} \quad (5)$$

où  $\otimes$  désigne le produit de Kronecker et  $\mathbf{I}_n$  la matrice identité de taille  $n$ . Les fonctions exponentielles complexes forment une base de Fourier orthogonale  $\mathbf{T}$  sur laquelle la solution est décomposée. Le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel est effectué par une projection de Galerkin menant à un système de  $n(H+1)$  équations algébriques non-linéaires :

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{q}}, \Omega) = \mathbf{Z}(\Omega)\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{f}}_{nl}(\tilde{\mathbf{q}}) - \tilde{\mathbf{f}}_{ex} = \mathbf{0} \quad (6)$$

Le système ci-dessus peut être résolu par un solveur de type Newton-Raphson pour obtenir la solution à une fréquence  $\Omega$ . Pour suivre la solution sur une certaine gamme de fréquences, une procédure de continuation est mise en œuvre.

### 2.2 Continuation

Une procédure de continuation par longueur d'arc avec un prédicteur tangent est utilisée [4]. La courbe de solutions est paramétrée par une abscisse curviligne  $s$ . Une solution est ensuite prédite (indice  $(p)$ ) en partant d'un itéré initial ou d'une solution connue à l'itération  $(k)$  :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \Omega \end{pmatrix}_{(p)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \Omega \end{pmatrix}_{(k)} + \Delta s \begin{pmatrix} \Delta\tilde{\mathbf{q}} \\ \Delta\Omega \end{pmatrix} \quad (7)$$

La solution réelle est ensuite recherchée comme l'intersection entre la courbe solution et une hypersphère  $P$  de rayon  $\Delta s$  :

$$P(\tilde{\mathbf{q}}, \Omega, s) = (\Delta\tilde{\mathbf{q}})^T (\Delta\tilde{\mathbf{q}}) + \Delta\Omega^2 - \Delta s^2 = 0 \quad (8)$$

La résolution est effectuée à l'aide d'un solveur de type Newton-Raphson jusqu'à convergence :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \Omega \end{pmatrix}_{(k+1)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \Omega \end{pmatrix}_{(k)} - \begin{bmatrix} \partial_{\tilde{\mathbf{q}}}\mathbf{R} & \partial_{\Omega}\mathbf{R} \\ \partial_{\tilde{\mathbf{q}}}P & \partial_{\Omega}P \end{bmatrix}_{(k)}^{-1} \mathbf{R}_{ex}^{(k)} \quad (9)$$

avec  $\mathbf{R}_{ex}^{(k)} = (\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{q}}, \Omega), P(\tilde{\mathbf{q}}, \Omega, s))^T$ .

## 2.3 Analyse de stabilité

Il est possible que les solutions calculées par la procédure de continuation soient instables. L'étude de la stabilité des solutions est ici effectuée avec la méthode de Hill, bien adaptée aux problèmes résolus dans le domaine fréquentiel. Un problème aux valeurs propres quadratique est formé à partir des matrices du système et de la jacobienne de l'équation (6).

$$[\Lambda^2 \tilde{\mathbf{M}} + \Lambda \tilde{\mathbf{C}} + \partial_{\tilde{\mathbf{q}}} \mathbf{R}] \tilde{\mathbf{p}} = 0 \quad (10)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{I}_{2H+1} \otimes \mathbf{M} \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \nabla \otimes 2\mathbf{M} + \mathbf{I}_{2H+1} \otimes \mathbf{C} \end{aligned} \quad (11)$$

Les valeurs propres obtenues sont ensuite triées selon la valeur de leur partie imaginaire afin de retenir uniquement celles avec une signification physique [5]. La solution calculée est stable si toutes les valeurs propres retenues ont une partie réelle négative et instable dans le cas contraire.

## 2.4 Suivi des points de bifurcation

Un changement de stabilité de la solution est associé à une bifurcation. De façon similaire aux travaux de Detroux *et al.* [1], ces dernières sont détectées grâce à des fonctions qui s'annulent aux points de bifurcation. Le suivi de ces points particuliers peut alors être réalisé en libérant un paramètre  $\mu$  et en ajoutant une équation au système.

$$\mathbf{R}_{track} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{q}}, \mu, \Omega) \\ g(\tilde{\mathbf{q}}, \mu, \Omega) \\ P(\tilde{\mathbf{q}}, \mu, \Omega, s) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (12)$$

avec  $P(\tilde{\mathbf{q}}, \mu, \Omega, s)$  l'équation de l'hypersphère dans l'espace augmenté d'un paramètre :

$$P(\tilde{\mathbf{q}}, \Omega, s) = (\Delta \tilde{\mathbf{q}})^T (\Delta \tilde{\mathbf{q}}) + \Delta \mu^2 + \Delta \Omega^2 - \Delta s^2 = 0 \quad (13)$$

L'expression de la fonction scalaire  $g(\tilde{\mathbf{q}}, \mu, \Omega)$  est définie à l'aide d'une technique de type *bordering* [6] :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{d}^\dagger & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

où la matrice  $\mathbf{A}$  dépend du type de bifurcation étudiée.

## 3 Modèle étudié

### 3.1 Modèle mathématique

Le système étudié correspond à un engrenage inverseur à dentures droites avec les caractéristiques données dans le Tableau. 1

Les corps de roues sont considérés comme des disques rigides d'inertie  $I_1$  et  $I_2$ . Le modèle possède deux degrés de liberté correspondant aux rotations des roues dentées  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Ces dernières sont connectées par une force non-linéaire au niveau du contact entre les dentures, visible sur la Fig. 1a. Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 - T_1 + r_{b,1} f_{nl} = 0 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + T_2 - r_{b,2} f_{nl} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

où  $T_1$  et  $T_2$  sont respectivement les couples d'entrée et de sortie.  $r_{b,k}$  est le rayon de base de la roue dentée indiquée  $k$  et  $f_{nl}$  est l'effort de contact entre les dentures. Ces équations modélisent un système semi-défini possédant un mode de corps rigide associé à la loi d'entrée/sortie idéale de l'engrenage :

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_{b,1}}{r_{b,2}} \quad (16)$$

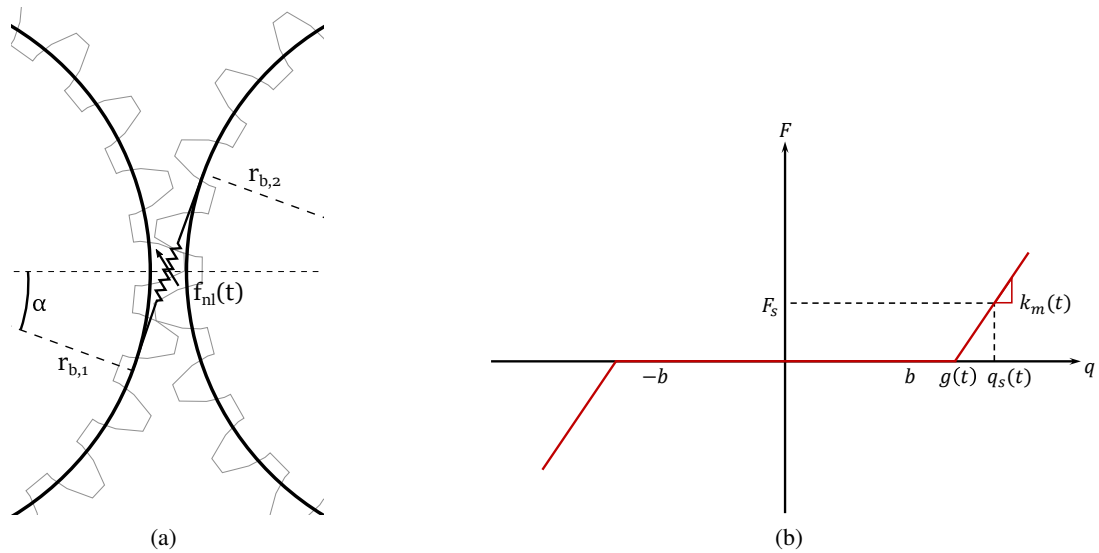


FIGURE 1 – Modèle non-linéaire d'engrènement

Afin d'éliminer ce mode de corps rigide, nous introduisons l'erreur de transmission (ET) définie comme le déplacement relatif à l'engrènement :

$$q = r_{b,1}\theta_1 - r_{b,2}\theta_2 \quad (17)$$

L'équation du mouvement peut ainsi être réécrite :

$$M_{eq}\ddot{q} + f_{nl}(q, t) = F \quad (18)$$

avec

$$\begin{cases} M_{eq} = \frac{I_1 I_2}{r_{b,1}^2 I_2 + r_{b,2}^2 I_1} \\ F = \frac{T_1}{r_{b,1}} = \frac{T_2}{r_{b,2}} \end{cases} \quad (19)$$

où  $M_{eq}$  est une masse équivalente associée aux inerties des roues dentées  $I_1$  et  $I_2$  et  $F$  est la force appliquée associée aux couples d'entrée et de sortie. Nous considérons également une force dissipative ne dépendant pas de l'état du contact. Un amortissement visqueux équivalent est donc introduit  $C = 2\xi\sqrt{k_m M_{eq}}$ , avec  $\xi = 5\%$  et  $k_m$  la valeur moyenne de la raideur d'engrènement définie en linéarisant l'effort de contact autour de la position d'équilibre statique  $q_s$  (dépendant de la position angulaire des roues dentées) :

$$k_m(\theta_1) = \frac{\partial F}{\partial q_s(\theta_1)} \quad (20)$$

TABLE 1 – Caractéristiques de l'engrenage

Nom		Roue dentée 1	Roue dentée 2	Unité
Module	$m$		2	mm
Nombre de dents	$Z$	50	50	-
Angle de pression	$\alpha$		20	deg
Rayon de base	$r_b$	46.984	46.984	mm
Coefficient de déport	$x$	0	0	-
Coefficient de saillie	$h_a$	1	1	-
Coefficient de creux	$h_d$	1.25	1.25	-
Largeur de denture	$b_f$		20	mm
Correction de denture				
Profondeur de dépouille	$l$	1.75	1.75	mm
Dépouille	$a$	5	5	$\mu\text{m}$

L'équation du mouvement s'écrit finalement :

$$M_{eq}\ddot{q} + C\dot{q} + f_{nl}(q, t) = F \quad (21)$$

### 3.2 Modélisation du contact

La force non-linéaire  $f_{nl}$  est modélisée par une fonction linéaire par morceaux et soumise à une excitation périodique de type déplacement  $q_s(t)$  appelée erreur statique de transmission (EST) et une raideur d'engrènement périodique  $k_m(t)$  :

$$f_{nl}(q, t) = k_m(t)(q - j(t))\mathcal{H}(q - j(t)) + k_m(t)(q + j(t))\mathcal{H}(-q - j(t)) \quad (22)$$

où  $\mathcal{H}$  est la fonction de Heaviside et  $j(t)$  une fonction définie à partir du demi-jeu entre dentures  $b$  et de l'EST  $q_s$  (Fig. 1b) :

$$j(t) = b + q_s(t) - \frac{F}{k_m(t)} \quad (23)$$

L'EST et la raideur d'engrènement étant des signaux périodiques, ils sont exprimés sous forme de séries de Fourier :

$$\begin{cases} q_s(\mu, t) = \sum_{k=0}^{H_{q_s}} q_s^{c,k}(\mu) \cos(k\Omega t) + q_s^{s,k}(\mu) \sin(k\Omega t) \\ k_m(\mu, t) = \sum_{k=0}^{H_{k_m}} k_m^{c,k}(\mu) \cos(k\Omega t) + k_m^{s,k}(\mu) \sin(k\Omega t) \end{cases} \quad (24)$$

avec  $H_{q_s}$  et  $H_{k_m}$  les ordres de troncature harmonique de l'EST et de la raideur d'engrènement. Ces signaux sont calculés à l'aide d'un code développé en interne et détaillé dans [7]. Un exemple avec six harmoniques est visible en Fig. 2

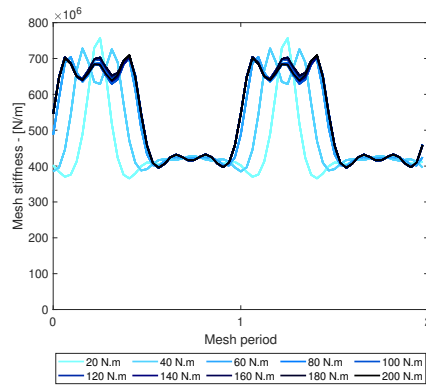
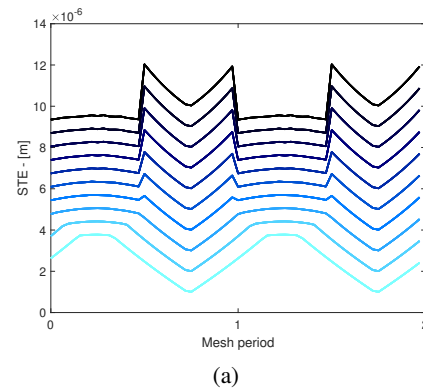


FIGURE 2 – Evolution temporelle de l'erreur statique de transmission et de la raideur d'engrènement pour des couples compris entre 20 N·m et 200 N·m

Lors du suivi de bifurcation, les coefficients  $q_s^{c,k}(\mu)$ ,  $q_s^{s,k}(\mu)$ ,  $k_m^{c,k}(\mu)$ ,  $k_m^{s,k}(\mu)$  et leurs dérivées doivent être calculés à des valeurs à priori inconnues du paramètre de contrôle  $\mu$ . Dans ces travaux, l'évolution des coefficients de Fourier en fonction du paramètre  $\mu$  est modélisée par un polynôme d'ordre 3 (Fig. 3). Cependant, la valeur moyenne de la raideur d'engrènement  $\tilde{K}_m^0(\mu)$  est modélisée par une fonction tangente hyperbolique pour des raisons physiques :

$$\tilde{K}_m^0(\mu) = \kappa_1 \tanh(\kappa_2 \mu) + \kappa_3 \quad (25)$$

où  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_3$  and  $\kappa_4$  sont des coefficients calculés en résolvant :

Trouver  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) \in \mathbb{R}^4$  tel que

$$\min_{\kappa} \left\| \kappa_1 \cdot \tanh(\kappa_2 \mu + \kappa_3) + \kappa_4 - \tilde{K}_m^0(\mu) \right\|_2^2 \quad (26)$$

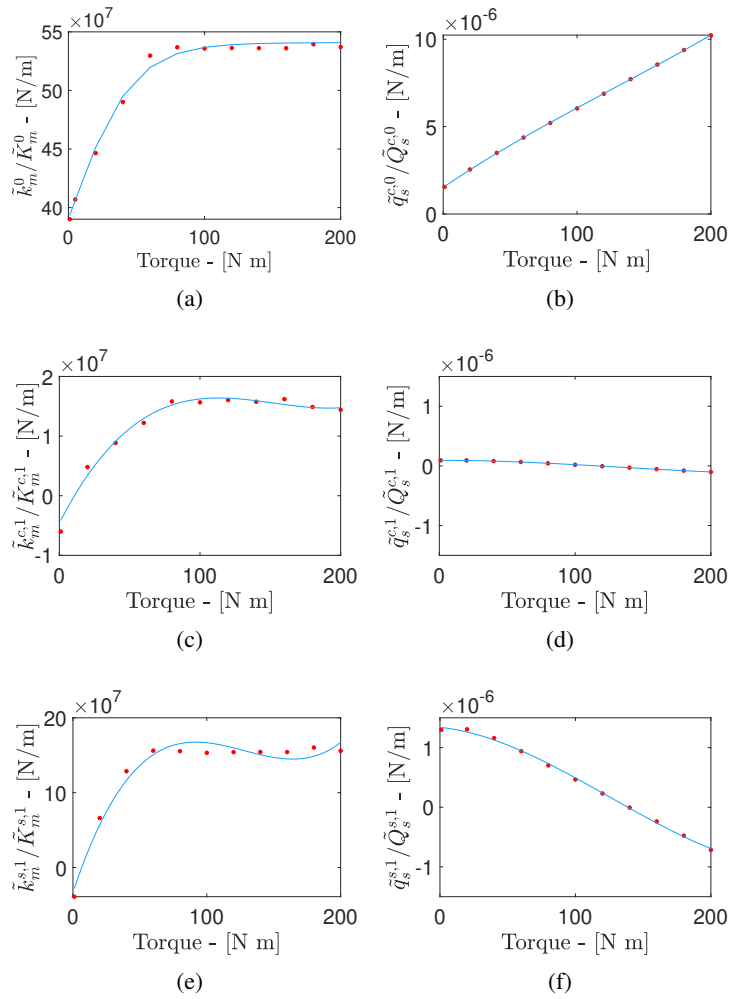


FIGURE 3 – Evolution des premiers harmoniques de l'EST et de la raideur d'engrènement en fonction du couple appliqué : valeur moyenne de la raideur d'engrènement (a), partie réelle du 1er harmonique de la raideur d'engrènement (c), partie imaginaire du 1er harmonique de la raideur d'engrènement (e), valeur moyenne de l'EST (b), partie réelle du 1er harmonique de l'EST (d), partie imaginaire du 1er harmonique de l'EST (f).

## 4 Résultats

### 4.1 Suivi de bifurcation en fonction du couple appliqué

La figure 4 montre un exemple de résultat obtenu grâce à la méthodologie proposée. Deux bifurcations nœud-col sont détectées après un premier calcul de réponse forcée pour un couple de 20 N·m.

Le suivi de bifurcations est réalisé pour des couples compris entre 20 N·m et 120 N·m. Le calcul est initialisé avec l'une des deux bifurcations détectées lors du calcul préalable.

Nous remarquons que la position de la résonance primaire se déplace vers les hautes fréquences avec l'augmentation du couple appliqué. Ce comportement résulte de la dépendance au couple de la valeur moyenne de la raideur d'engrènement. Notons que la position de la résonance n'évolue plus au delà d'une certaine valeur de couple ( $\approx 90$  N·m), ce qui est cohérent avec l'asymptote horizontale de la moyenne de la raideur d'engrènement visible en figure 3. Par ailleurs, la taille zone instable délimitée par les deux bifurcations nœud-col diminue jusqu'à disparaître pour un couple appliqué  $T = 100$  N·m.

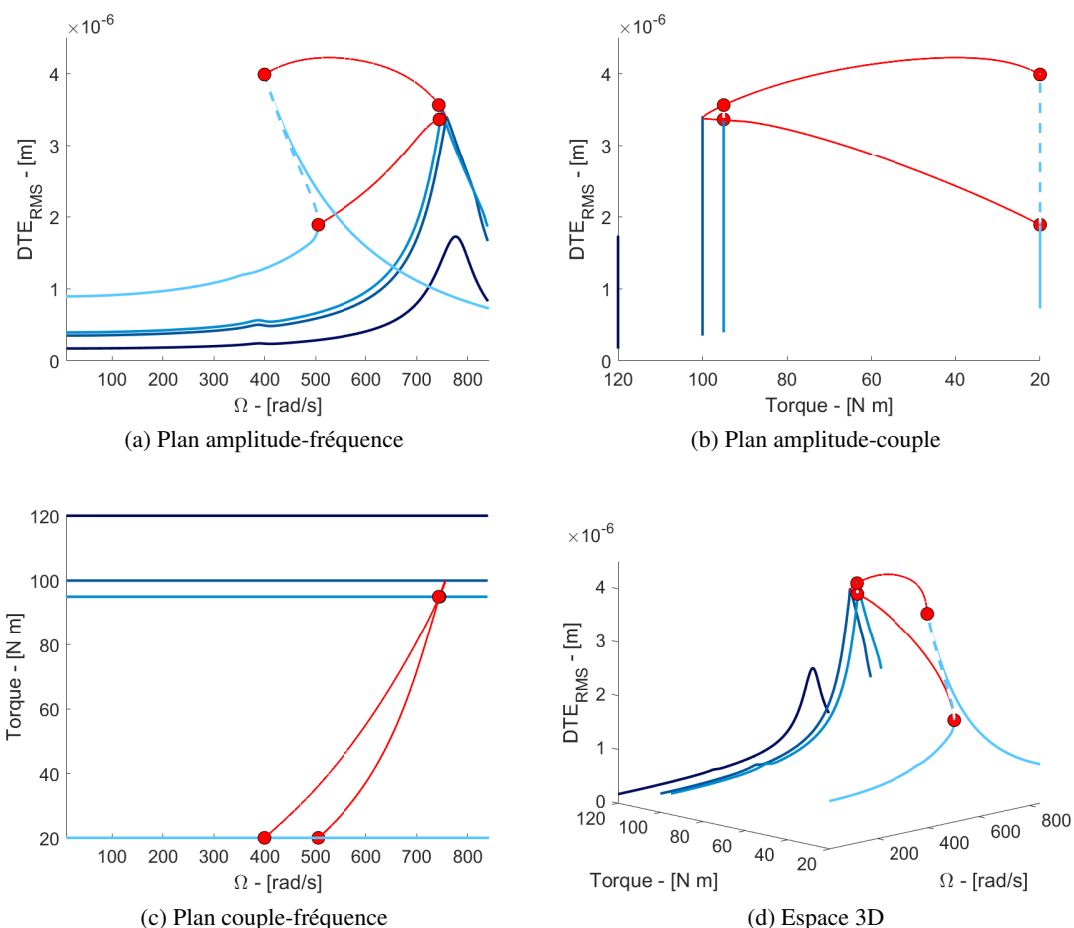


FIGURE 4 – Suivi de bifurcation nœud-col en fonction du couple appliqué. Les courbes de réponse forcée sont tracées en bleu et les cercles rouges correspondent à des bifurcations nœud-col.

## 5 Conclusion

Les travaux présentés permettent de suivre l'évolution d'un point de bifurcation dans les problèmes de dynamique des engrenages. Ces problèmes, fortement non-linéaires, font intervenir des termes d'excitation interne qui dépendent des paramètres de suivi de bifurcations. Ces derniers n'apparaissent pas explicitement dans les équations du mouvement car les termes d'excitation interne sont habituellement calculés en amont de l'analyse dynamique et utilisés comme données d'entrée. Des modèles analytiques des évolutions des coefficients de Fourier de l'excitation interne et de leurs dérivées par rapport aux paramètres de suivi de bifurcations ont été mis en place pour remédier à ce problème. Un exemple d'application de la méthodologie proposée, consistant à suivre les bifurcations en fonction du couple appliqué, montre l'efficacité de la méthode pour déterminer les domaines de stabilité des transmissions par engrenages.



## Références

- [1] T. Detroux, L. Renson, L. Masset, G. Kerschen. *The harmonic balance method for bifurcation analysis of large-scale nonlinear mechanical systems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 296, 18-38, 2015.
- [2] L. Xie, S. Bague, B. Prabel, R. Dufour. *Bifurcation tracking by harmonic balance method for performance tuning of nonlinear dynamical systems*, Mechanical Systems and Signal Processing, 88, 445-461, 2017.
- [3] P. Garambois, J. Perret-Liaudet, E. Rigaud. *NVH robust optimization of gear macro and microgeometries using an efficient tooth contact model*, Mechanism and Machine Theory, 117, 78-95, 2017.
- [4] R. Seydel. *Practical bifurcation and stability analysis*, Springer-Verlag, 2010.
- [5] G. Moore. *Floquet theory as a computational tool*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 42, 2522–2568, 2005.
- [6] W. Govaerts, Y. Kuznetsov, A. Dhooge. *Numerical continuation of bifurcations of limit cycles in matlab*. SIAM Journal ON Scientific Computing, 27, 231–252, 2005.
- [7] E. Rigaud, D. Barday. *Modelling and Analysis of Static Transmission Error. Effect of Wheel Body Deformation and Interactions between Adjacent Loaded Teeth*, 4th World Congress on Gearing and Power Transmission, Paris, France, 1961–1972, 1999.