



**HAL**  
open science

## Schéma de résolution locale pour la méthode Hybrid High Order et application en mécanique non-linéaire

David Siedel, Thomas Helfer, Olivier Fandeur, Jacques Besson, Samuel Forest,  
Nicolas Pignet

### ► To cite this version:

David Siedel, Thomas Helfer, Olivier Fandeur, Jacques Besson, Samuel Forest, et al.. Schéma de résolution locale pour la méthode Hybrid High Order et application en mécanique non-linéaire. 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717700

**HAL Id: hal-03717700**

**<https://hal.science/hal-03717700>**

Submitted on 8 Jul 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Schéma de résolution locale pour la méthode Hybrid High Order et application en mécanique non-linéaire

D. Siedel<sup>1,2,3</sup>, T. Helfer<sup>1</sup>, O. Fandeur<sup>2</sup>, J. Besson<sup>3</sup>, S. Forest<sup>3</sup>, N. Pignet<sup>4</sup>

<sup>1</sup> CEA/IRENE/DEC/SESC/LSC, {david.siedel,thomas.helfer}@cea.fr

<sup>2</sup> CEA/ISAS/DM2S/SEMT/LM2S, olivier.fandeur@cea.fr

<sup>3</sup> Mines ParisTech, PSL University, Centre des matériaux, CNRS UMR 7633, {david.siedel,jacques.besson,samuel.forest}@mines-paristech.fr

<sup>4</sup> EDF R&D, Palaiseau, France and IMSIA, UMR EDF/CNRS/CEA/ENSTA 9219, Palaiseau, France, nicolas.pignet@edf.fr

**Résumé** — Nous proposons un nouvel algorithme de résolution pour des problèmes non-linéaires dans le contexte de la méthode Hybrid High Order. Nous exploitons le caractère hybride de la méthode pour dériver cet algorithme de résolution fondé sur un équilibrage des cellule avec les faces. Nous montrons que cet algorithme conserve la robustesse de la méthode au verrouillage volumétrique pour des applications en mécanique non-linéaire et en grandes déformations.

**Mots clés** — Hybrid High Order, Mécanique non-linéaire, Verrouillage volumétrique.

## 1 Introduction

La méthode Hybrid High Order (HHO) est une méthode de résolution d'équation aux dérivées partielles dite non-conforme, dérivant de la méthode Discontinuous Galerkin (DG), qui postule la discontinuité du champs d'inconnue entre les éléments. En plus des inconnues de cellules classiques, la méthode HHO introduit des inconnues de faces, portant le saut du champs d'inconnue. En particulier, les inconnues de cellules sont locales, et peuvent être éliminées lors de la résolution du problème par un processus de condensation.

La méthode HHO se distingue des autres méthodes non-conformes par la définition d'opérateurs de reconstruction locaux respectivement d'un champs de cellule d'un ordre supérieur et de son gradient, à partir des inconnues de faces et de cellule.

La première application de la méthode HHO en mécanique des solides a été proposée dans le contexte de l'élasticité linéaire [1, 2], puis étendue en mécanique non-linéaires en hyperélasticité [3], en petites et en grandes déformations plastiques [4, 5]. On trouve également des applications pour des problèmes de contact [6], ou de diffusion [7].

En mécanique des solides, la méthode HHO offre plusieurs avantages par rapport à la méthode des éléments finis (EF) standards :

- elle est robuste au verrouillage en formulation primale
- elle assure la conservation du flux aux interfaces
- elle supporte naturellement les maillages polyédriques
- l'inconnue et son gradient ont le même ordre d'approximation
- elle bénéficie d'un ordre de convergence supérieur

Dans cet exposé, nous présentons dans une première partie le principe de la méthode HHO, puis nous proposons un nouvel algorithme de résolution non-linéaire fondé sur la définition d'un équilibre de cellule. Finalement, nous proposons des cas d'application pour cet algorithme en mécanique non-linéaire et en grandes déformations.

## 2 La méthode HHO

### 2.1 Le problème mécanique

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un solide dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$  avec  $d \in \{1, 2\}$ , et  $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$  sa frontière. Le solide se déforme sous l'effet de forces volumiques  $\mathbf{f}_v$ , il est soumis à des efforts imposés  $\mathbf{t}_n$  sur  $\partial_n\Omega$ , et

à des déplacements imposés  $\mathbf{u}_d$  sur  $\partial_d\Omega$ . On note  $\Omega_0 \in \mathbb{R}^d$  la configuration initiale du corps soumis à la force volumique  $\mathbf{f}_V$ , et  $\partial_N\Omega$  (respectivement  $\partial_D\Omega$ ) la surface soumise à des efforts  $\mathbf{t}_N$  (respectivement déplacements  $\mathbf{u}_D$ ) imposés dans la configuration initiale. Soit  $\Phi$  la transformation qui pour tout point matériel  $\mathbf{X} \in \Omega_0$  renvoie son image  $\mathbf{x} \in \Omega$  dans la configuration déformée, tel que  $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X})$  où  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$  désigne le déplacement du point matériel. Le problème (1) de l'équilibre mécanique du corps  $\Omega_0$  consiste à trouver  $\mathbf{u}$  tel que :

$$\underline{\mathbf{F}} - \nabla_X \mathbf{u} = \underline{\mathbf{1}} \quad \text{in } \Omega_0 \quad (1a)$$

$$\underline{\mathbf{P}} - \frac{\partial \Psi_{mec}}{\partial \underline{\mathbf{F}}} = 0 \quad \text{in } \Omega_0 \quad (1b)$$

$$\nabla_X \cdot \underline{\mathbf{P}} - \mathbf{f}_V = 0 \quad \text{in } \Omega_0 \quad (1c)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{on } \partial_D\Omega_0 \quad (1d)$$

$$\underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_N \quad \text{on } \partial_N\Omega_0 \quad (1e)$$

Où  $\Psi_{mec}$  désigne le potentiel d'énergie mécanique du système,  $\underline{\mathbf{P}}$  le premier tenseur de Piola-Kirchoff, et  $\underline{\mathbf{F}}$  le gradient de la transformation  $\Phi$ . La forme faible de Hu-Washizu du problème mécanique (1) à trois champs est définie par le problème de minimisation de la fonctionnelle (2), consistant à trouver  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega_0, \mathbb{R}^d)$ , le gradient du champs de déplacement  $\underline{\mathbf{G}} \in L^2(\Omega_0, \mathbb{R}^{d \times d})$  tel que  $\underline{\mathbf{G}} := \underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{1}}$ , et  $\underline{\mathbf{P}} \in H_{div}^1(\Omega_0, \mathbb{R}^{d \times d})$  réalisant le minimum d'énergie mécanique :

$$J(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{G}}, \underline{\mathbf{P}}) = \int_{\Omega_0} \Psi_{mec}(\underline{\mathbf{F}}) + (\nabla_X \mathbf{u} - \underline{\mathbf{G}}) : \underline{\mathbf{P}} - \int_{\Omega_0} \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{u} - \int_{\partial_N\Omega_0} \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{u} \quad (2)$$

## 2.2 Déplacement discontinu

Soit  $\mathcal{T}(\Omega_0)$  une triangulation de  $\Omega_0$  en éléments (ou cellules) disjoint(e)s  $T \subset \mathbb{R}^d$ , où  $T$  est polyédrique à faces planes. On note  $\partial T \subset \mathbb{R}^{d-1}$  l'ensemble des faces de  $T$ , et  $\mathcal{F}(\Omega_0)$  le squelette du maillage (*i.e.* l'ensemble des faces du maillage), tel que  $\mathcal{F}_D(\Omega_0)$  désigne l'ensemble des faces sur  $\partial_D\Omega_0$ ,  $\mathcal{F}_N(\Omega_0)$  celui sur  $\partial_N\Omega_0$ , et  $\mathcal{F}_I(\Omega_0)$  l'ensemble des faces internes du maillage, *i.e.* l'ensemble des faces des éléments qui ne partagent pas de frontière avec celle du domaine  $\Omega_0$ .

La méthode HHO postule la discontinuité du déplacement entre éléments voisins, tel que ce dernier existe dans  $H^1(\mathcal{T}, \mathbb{R}^d) = \{v \in L^2(\Omega_0, \mathbb{R}^d), v|_T \in H^1(T, \mathbb{R}^d), \forall T \in \mathcal{T}(\Omega_0)\}$ , l'espace des fonctions  $H^1$  par éléments. Par ailleurs, on introduit le déplacement des faces du maillage dans  $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ , de sorte que l'inconnue globale du problème en déplacement est la composition de l'ensemble des déplacements de cellules et de faces :  $(\mathbf{u}_T, \mathbf{u}_F) \in H^1(\mathcal{T}, \mathbb{R}^d) \times L^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ .

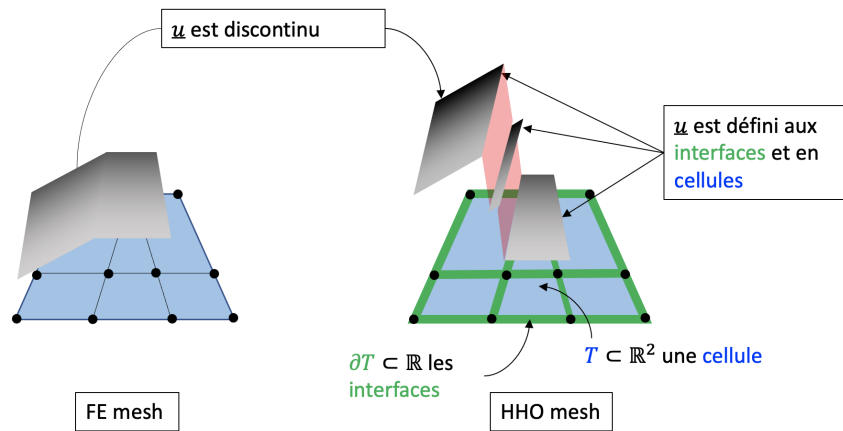


FIGURE 1 – Représentation schématique du saut de déplacement dans la méthode HHO

Etant donnée la discontinuité du champs de déplacement, on considère l'équilibre mécanique dérivé de (2) au sein de l'élément, afin de trouver les champs discrets de déplacement de cellule  $\mathbf{u}_T \in H^1(T, \mathbb{R}^d)$ ,

de faces  $\mathbf{u}_{\partial T} \in L^2(\partial T, \mathbb{R}^d)$ , du gradient du déplacement  $\mathbf{G}_T \in L^2(T, \mathbb{R}^{d \times d})$ , et du premier tenseur de Piola-Kirchoff  $\mathbf{P}_T \in H_{div}^1(T, \mathbb{R}^{d \times d})$  tels que pour tout élément  $T$ , la solution locale minimise la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}_T, \mathbf{u}_{\partial T}, \mathbf{G}_T, \mathbf{P}_T) &= \int_T \Psi_{mec}(\mathbf{F}_T) + \int_T (\nabla_X \mathbf{u}_T - \mathbf{G}_T) : \mathbf{P}_T + \int_{\partial T} \mathbf{P}_T \cdot \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u}_{\partial T} - \mathbf{u}_T) \\ &+ \int_{\partial T} \frac{1}{2} \frac{\beta_{mec}}{h_T} \cdot \|\mathbf{u}_{\partial T} - \mathbf{u}_T\|^2 - \int_T \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{u}_T - \int_{\partial T} \mathbf{t}_{\partial T} \cdot \mathbf{u}_{\partial T} \end{aligned} \quad (3)$$

où on a introduit le paramètre  $\beta_{mec} > 0$  homogène à une pression et  $h_T$  le diamètre de l'élément. Le troisième terme assure la continuité du flux sur les faces de l'élément, et le quatrième terme pénalise les sauts de déplacements afin de rétablir une forme faible de continuité aux interfaces. Par ailleurs, on introduit  $\boldsymbol{\theta}_{\partial T}$  la force de traction sur l'interface telle que  $\boldsymbol{\theta}_{\partial T} = \mathbf{P}_T \cdot \mathbf{n} + (\beta_{mec}/h_T)(\mathbf{u}_{\partial T} - \mathbf{u}_T)$ . Par dérivation de (3) par rapport à chaque variable, on obtient le problème couplé (4) :

$$\int_T \left( \frac{\partial \Psi_{mec}}{\partial \mathbf{F}_T} - \mathbf{P}_T \right) : \mathbf{s} = 0 \quad \forall \mathbf{s} \in L^2(T, \mathbb{R}^{d \times d}) \quad (4a)$$

$$\int_T (\nabla_X \mathbf{u}_T - \mathbf{G}_T) : \boldsymbol{\tau} + \int_{\partial T} (\mathbf{u}_{\partial T} - \mathbf{u}_T) \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_{div}^1(T, \mathbb{R}^{d \times d}) \quad (4b)$$

$$\int_T \mathbf{P}_T : \nabla_X \mathbf{v}_T - \int_{\partial T} \boldsymbol{\theta}_{\partial T} \cdot \mathbf{v}_T - \int_T \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v}_T = 0 \quad \forall \mathbf{v}_T \in H^1(T, \mathbb{R}^d) \quad (4c)$$

$$\int_{\partial T} (\boldsymbol{\theta}_{\partial T} - \mathbf{t}_{\partial T}) \cdot \mathbf{v}_{\partial T} = 0 \quad \forall \mathbf{v}_{\partial T} \in L^2(\partial T, \mathbb{R}^d) \quad (4d)$$

où  $\mathbf{t}_{\partial T}$  désigne la force de traction sur le bord de l'élément, *i.e.*  $\mathbf{t}_{\partial T}$  est égale à  $\mathbf{t}_N$  sur  $\mathcal{F}_N$ , à la force de traction  $\boldsymbol{\theta}_{\partial T'}$  de l'élément voisin  $T'$  sur  $\mathcal{F}_I$ , et à la force de traction correspondant au déplacement imposé sur  $\mathcal{F}_D$ .

### 2.3 Discrétisation

Le problème (4) discrétisé consiste à chercher l'inconnue  $(\mathbf{u}_T^l, \mathbf{u}_{\partial T}^k)$  dans l'espace des polynômes  $P^l(T, \mathbb{R}^d) \times P^k(\partial T, \mathbb{R}^d)$  d'ordre respectivement  $l$  et  $k$  tels que  $k > 0$  avec  $k - 1 \leq l \leq k + 1$ , et les champs de gradients de déplacement  $\mathbf{G}_T^k$  et de contraintes  $\mathbf{P}_T^k$  dans  $P^k(T, \mathbb{R}^{d \times d})$ . On définit la force de traction discrète  $\boldsymbol{\theta}_{\partial T}^{HHO} = \mathbf{P}_T^k \cdot \mathbf{n} + (\beta_{mec}/h_T) \mathbf{S}_{\partial T}^{k*}$  telle que  $\mathbf{S}_{\partial T}^{k*}$  est l'opérateur adjoint de l'opérateur de stabilisation  $\mathbf{S}_{\partial T}^k$  défini par :

$$\mathbf{S}_{\partial T}^k(\mathbf{v}_T^l, \mathbf{v}_{\partial T}^k) = \Pi_{\partial T}^k(\mathbf{v}_{\partial T}^k - \mathbf{v}_T^l - (\mathbf{1} - \Pi_T^k) \mathbf{D}_T^{k+1}) \quad (5)$$

où  $\Pi_{\partial T}^k$  et  $\Pi_T^k$  sont les projecteurs orthogonaux au sens  $L^2$  sur  $P^k(\partial T, \mathbb{R}^d)$  et  $P^k(T, \mathbb{R}^d)$  respectivement, et le champ de déplacement  $\mathbf{D}_T^{k+1} \in P^{k+1}(T, \mathbb{R}^d)$  est solution du problème (6) :

$$\begin{aligned} \int_T (\nabla_X \mathbf{D}_T^{k+1} - \nabla_X \mathbf{u}_T^l) : \nabla_X \mathbf{w}^{k+1} &= \int_{\partial T} (\mathbf{u}_{\partial T}^k - \mathbf{u}_T^l) \cdot \nabla_X \mathbf{w}^{k+1} \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{w}^{k+1} \in P^{k+1}(T, \mathbb{R}^d) \\ \int_T \mathbf{D}_T^{k+1} &= \int_T \mathbf{u}_T^l \end{aligned} \quad (6)$$

D'un point de vue numérique, on calcule dans une étape de pré-traitement l'opérateur de stabilisation  $[\mathbf{S}] : (\mathbf{v}_T^l, \mathbf{v}_{\partial T}^k) \rightarrow \mathbf{S}_{\partial T}^k$  défini par (5) et l'opérateur de dérivation  $[\mathbf{B}] : (\mathbf{v}_T^l, \mathbf{v}_{\partial T}^k) \rightarrow \mathbf{G}_T^k$  défini par la formulation discrète de (4b), de sorte que le problème discrétisé local (4) ne dépend plus que de l'inconnue primale  $(\mathbf{u}_T^l, \mathbf{u}_{\partial T}^k)$  vérifiant  $\forall (\mathbf{v}_T^l, \mathbf{v}_{\partial T}^k) \in P^l(T, \mathbb{R}^d) \times P^k(\partial T, \mathbb{R}^d)$  :

$$\int_T \mathbf{P}_T^k : \mathbf{G}_T^k + \int_{\partial T} \frac{\beta_{mec}}{h_T} \mathbf{S}_{\partial T}^k(\mathbf{u}_T^l, \mathbf{u}_{\partial T}^k) \cdot \mathbf{S}_{\partial T}^k(\mathbf{v}_T^l, \mathbf{v}_{\partial T}^k) = \int_{\Omega} \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v}_T^l + \int_{\partial T} \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{v}_{\partial T}^k \quad (7)$$

où les contraintes  $\mathbf{P}_T^k$  sont calculées aux points de quadrature par intégration de la loi de comportement. Le principe des travaux virtuels discret à l'échelle de la structure vérifie donc  $\forall (\mathbf{v}_T^l, \mathbf{v}_{\mathcal{F}}^k) \in P^l(\mathcal{T}, \mathbb{R}^d) \times P^k(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$  :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}(\Omega_0)} \int_T \underline{\mathcal{P}}_T^k : \underline{\mathcal{G}}_T^k + \int_{\partial T} \frac{\beta_{mec}}{h_T} \mathcal{S}_{\partial T}^k(\mathbf{u}_T^l, \mathbf{u}_{\partial T}^k) \cdot \mathcal{S}_{\partial T}^k(\mathbf{v}_T^l, \mathbf{v}_{\partial T}^k) = \sum_{T \in \mathcal{T}(\Omega_0)} \int_{\Omega} \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v}_T^l + \sum_{\partial T \in \mathcal{F}_N(\Omega_0)} \int_{\partial T} \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{v}_{\partial T}^k \quad (8)$$

## 2.4 Forme algébrique

La résolution du problème local (7) sous forme incrémentale s'exprime par le système matriciel (9) :

$$\begin{bmatrix} K_{TT} & K_{T\partial T} \\ K_{\partial TT} & K_{\partial T\partial T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta U_T \\ \delta U_{\partial T} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_T \\ R_{\partial T} \end{bmatrix} \quad \text{tel que} \quad \begin{bmatrix} R_T \\ R_{\partial T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_T^{ext} \\ F_{\partial T}^{ext} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_T^{int} \\ F_{\partial T}^{int} \end{bmatrix} \quad (9)$$

où on définit l'incrément de déplacement  $\delta U$  la matrice de raideur  $K$ , le résidu  $R$ , les forces internes  $F^{int}$  et externes  $F^{ext}$ , et on décompose le système élémentaire par blocs de faces et de cellule, avec la notation  $[\cdot]$  pour désigner une représentation vectorielle ou matricielle ; les forces internes vérifient (10) :

$$\begin{bmatrix} F_T^{int} \\ F_{\partial T}^{int} \end{bmatrix} = \sum_{(\mathbf{x}_Q, w_Q^T)} (w_Q^T \cdot [B(\mathbf{x}_Q)]^t \cdot [\underline{\mathcal{P}}_T^k(\mathbf{x}_Q)]) + \frac{\beta_{mec}}{h_T} ([S]^t \cdot [S]) \cdot \begin{bmatrix} U_T \\ U_{\partial T} \end{bmatrix} \quad (10)$$

où on note  $\mathbf{x}_Q$  (respectivement  $w_Q^T$ ) un point (respectivement un poids) de quadrature de cellule, et  $[U_T, U_{\partial T}]$  le vecteur d'inconnue élémentaire. Comme pour les éléments finis standards, l'opérateur  $[B]$  est la matrice qui à  $[U_T, U_{\partial T}]$  associe le gradient d'inconnue  $[\underline{\mathcal{G}}_T^k]$ , et le superscript  $t$  désigne l'opérateur de transposition. Les forces externes vérifient (11) :

$$\begin{bmatrix} F_T^{ext} \\ F_{\partial T}^{ext} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{(\mathbf{x}_Q, w_Q^T)} w_Q^T \cdot [\phi(\mathbf{x}_Q)]^t \cdot \mathbf{f}_V(\mathbf{x}_Q) \\ \sum_{(s_Q, w_Q^{\partial T})} w_Q^{\partial T} \cdot [\omega(s_Q)]^t \cdot \mathbf{t}_N(s_Q) \end{bmatrix} \quad (11)$$

avec  $s_Q$  (respectivement  $w_Q^{\partial T}$ ) un point (respectivement poids) de quadrature de face, et  $\phi$  (respectivement  $\omega$ ) le vecteur de fonctions de bases dans  $T$  (respectivement  $\partial T$ ). Finalement la matrice de raideur vérifie (12) :

$$\begin{bmatrix} K_{TT} & K_{T\partial T} \\ K_{\partial TT} & K_{\partial T\partial T} \end{bmatrix} = \sum_{(\mathbf{x}_Q, w_Q^T)} (w_Q^T \cdot [B(\mathbf{x}_Q)]^t \cdot [\underline{\mathcal{C}}(\mathbf{x}_Q)] \cdot [B(\mathbf{x}_Q)]) + \frac{\beta_{mec}}{h_T} ([S]^t \cdot [S]) \quad (12)$$

où on a introduit  $\underline{\mathcal{C}}$  l'opérateur tangent cohérent. En particulier, on peut exprimer (9) sous la forme condensée (13) par réalisation d'un complément de Schur :

$$[K_{cond}] \cdot [\delta U_{\partial T}] = -[R_{cond}] \quad (13)$$

## 2.5 Résolution par condensation statique

Le problème global incrémental (8) est alors l'assemblage des systèmes élémentaires condensés (13), dont la résolution consiste en un algorithme de Newton sur l'incrément des inconnues de faces uniquement. Ce schéma de résolution par condensation statique dont on donne le principe Figure 2 exploite la relation linéaire entre l'incrément des inconnues de cellules et celui des faces.

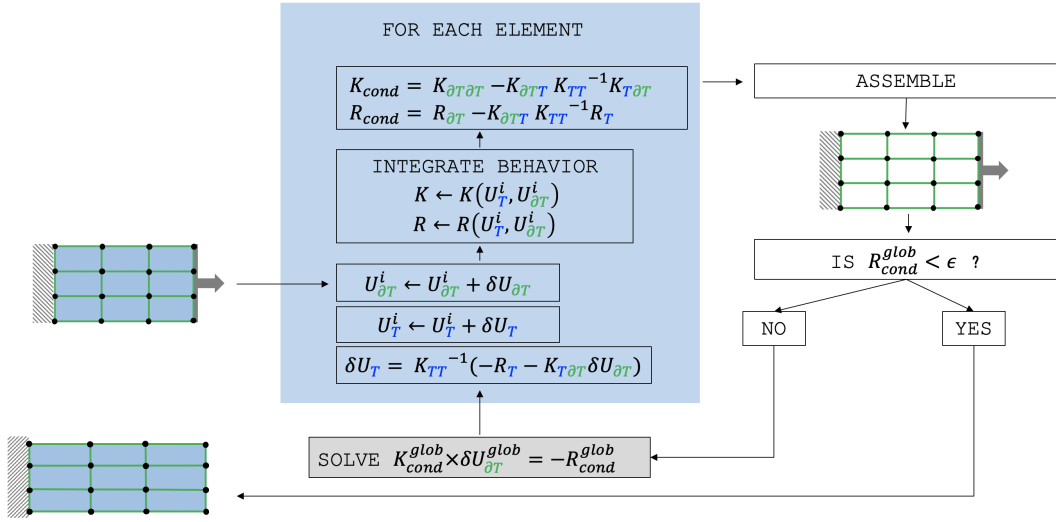


FIGURE 2 – Description schématique de l’algorithme de condensation statique

## 2.6 Résolution par équilibre de cellule

Nous proposons une alternative à l’algorithme de résolution par condensation statique, postulant une relation implicite entre l’incrément des inconnues de cellule est celui des faces et consistant à résoudre localement un système non-linéaire sur l’incrément de cellule à incrément de faces fixé, afin de vérifier l’équilibre de la cellule avec ses faces à chaque itération du problème global. Ce nouveau schéma de résolution est décrit Figure 3, où on note  $i$  une itération de Newton pour la résolution du problème global sur l’ensemble des inconnues de faces, et  $j$  une itération de Newton pour la résolution du problème local sur les inconnues de cellule dans un élément  $T$  :

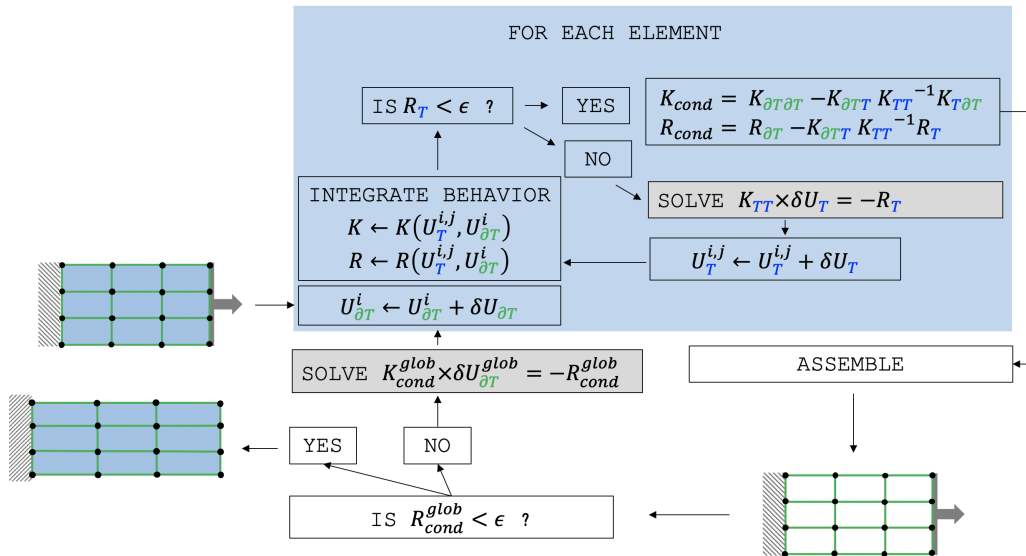


FIGURE 3 – Description schématique de l’algorithme d’équilibre de cellule

## 2.7 Implémentations

L’implémentation de référence pour la méthode HHO est la bibliothèque `Disk++` [8], proposée en langage C++. Dans le cadre des travaux du CEA, nous avons développé une implémentation de la méthode HHO en langage python (projet `h20` [9]), ainsi qu’une bibliothèque en C++ [10], destinée à étendre un code élément fini existant. Cette bibliothèque fournit des fonctions construisant les opérateurs discrets de la méthode HHO (l’opérateur de dérivation, l’opérateur de stabilisation) pour un ordre polynomial donné en cellule et sur les faces, pour des éléments génériques (éléments standards et polygones/polyèdres). Elle

permet ainsi au code appelant de construire les problèmes élémentaires discrétisés par la méthode HHO, et lui délègue la tâche d'assemblage et de résolution du système. Une interface permet de communiquer avec le code appelant, de sorte qu'elle est en principe adaptée à tout type de code élément finis. En outre, c'est cette bibliothèque qui est utilisée par `Cast3M`, le code éléments finis du CEA. L'implémentation des opérateurs HHO pour les deux implémentations du CEA (en `python` et en `C++`) a été validée par comparaison avec `Disk++`.

## 2.8 Résultats numériques en mécanique non-linéaire en grandes déformations

On évalue la performance de l'algorithme de résolution d'équilibre de cellule par rapport à celui de condensation statique dans le contexte des grandes transformations en comportement plastique à écrouissage non-linéaire, et on compare les résultats obtenus en terme de robustesse au verrouillage à ceux issus de méthodes EF standards linéaires et quadratiques.

### 2.8.1 Membrane de Cook

On montre dans cet exemple les résultats obtenus sur le test de la membrane de Cook, consistant à imposer une force verticale sur un panneau quadrilatéral dont les dimensions en mm sont données Figure 4.

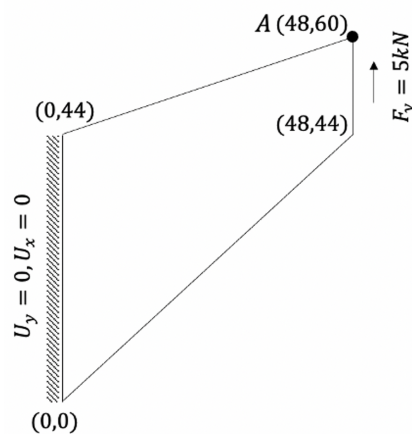


FIGURE 4 – Dimensions et chargement pour le cas test de la membrane de Cook

Le calcul est mené sous l'hypothèse des déformations planes, et les résultats obtenus montrent l'absence de verrouillage par rapport aux méthodes EF standards.

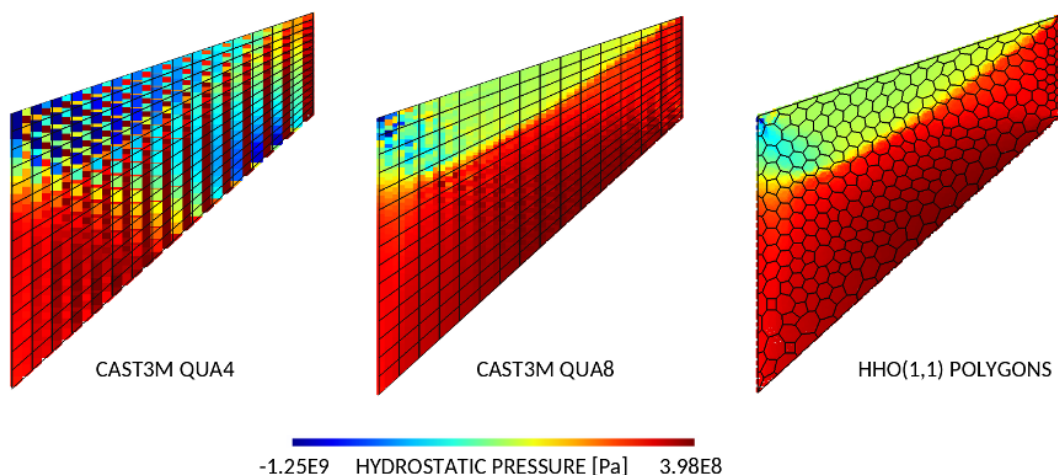


FIGURE 5 – Champs de pression aux points de quadrature pour le dernier pas de temps

Avec l'algorithme de résolution d'équilibre de cellule, les résultats HHO sur des maillages réguliers

comme sur des maillages polyédriques ne présentent pas de signes de verrouillage volumétrique, au contraire des calculs EF. Les calculs HHO sont menés avec la librairie h20 [9] en langage python, et les calculs EF sont réalisés avec le logiciel éléments finis Cast3M [11].

## 2.8.2 Eprouvette entaillée

On montre dans cet exemple les résultats obtenus pour un test de traction uniaxiale sur une éprouvette entaillée en déformations planes, dont les dimensions en mm sont données Figure 6. On donne par ailleurs la courbe force déplacement obtenue avec les éléments quadratiques standards et les éléments HHO linéaires.

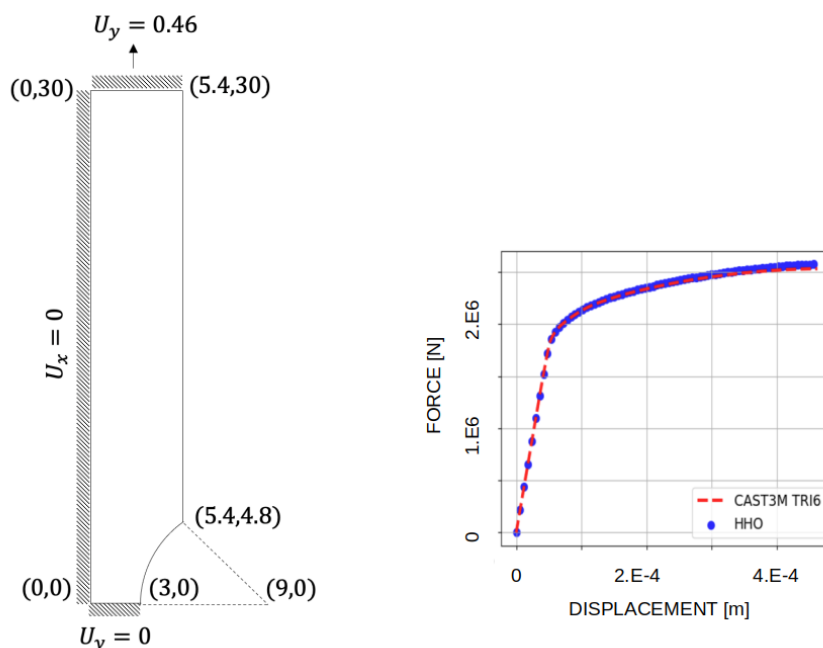


FIGURE 6 – Dimensions, chargement et courbe force-déplacement (EF et HHO) pour le cas test de l'éprouvette entaillée

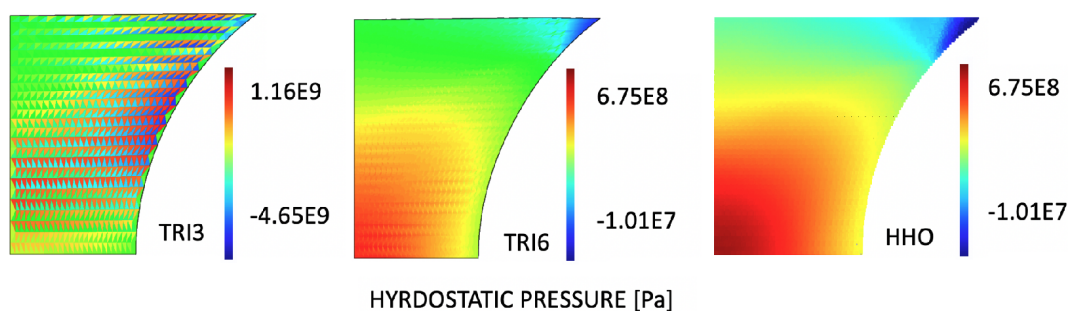


FIGURE 7 – Champs de pression aux points de quadrature pour le dernier pas de temps

Comme pour le cas test précédent, les résultats HHO ne présentent pas de signes de verrouillage volumétrique, au contraire des calculs EF.

## 3 Conclusion

Nous avons proposé une interprétation mécanique de la méthode HHO par dérivation d'une fonctionnelle de Hu-Washizu, afin de la rendre plus accessible pour un public issu du monde de la mécanique des solides. Cette approche nous a permis de décrire un algorithme de résolution locale pour la méthode HHO, dont nous avons validé l'implémentation sur des cas tests en grandes déformations plastiques, et



évalué sa performance par rapport aux méthodes EF standards en terme de robustesse au verrouillage volumétrique. Cet algorithme conserve les propriétés de robustesse au verrouillage de l'algorithme de condensation statique, qui est celui utilisé dans la littérature, et permet d'assurer l'équilibre de la cellule avec ses faces.

## Références

- [1] Daniele A. Di Pietro and Alexandre Ern. A hybrid high-order locking-free method for linear elasticity on general meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283 :1–21, January 2015.
- [2] Daniele A. Di Pietro and Alexandre Ern. Equilibrated tractions for the Hybrid High-Order method. *Comptes Rendus Mathématique*, 353(3) :279–282, March 2015.
- [3] Mickaël Abbas, Alexandre Ern, and Nicolas Pignet. Hybrid High-Order methods for finite deformations of hyperelastic materials. *Computational Mechanics*, 62(4) :909–928, October 2018.
- [4] Mickaël Abbas, Alexandre Ern, and Nicolas Pignet. A Hybrid High-Order method for incremental associative plasticity with small deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 346 :891–912, April 2019.
- [5] Mickaël Abbas, Alexandre Ern, and Nicolas Pignet. A Hybrid High-Order method for finite elastoplastic deformations within a logarithmic strain framework. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 120(3) :303–327, October 2019.
- [6] Karol L Cascavita, Franz Chouly, and Alexandre Ern. Hybrid high-order discretizations combined with Nitsche's method for Dirichlet and Signorini boundary conditions. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 40(4) :2189–2226, October 2020.
- [7] Florent Chave, Daniele A. Di Pietro, Fabien Marche, and Franck Pigeonneau. A Hybrid High-Order Method for the Cahn–Hilliard problem in Mixed Form. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 54(3) :1873–1898, January 2016.
- [8] <https://github.com/warehouse/diskpp>, 2021.
- [9] <https://github.com/davidsiedel/h2o>, 2021.
- [10] <https://github.com/davidsiedel/cast3mhho>, 2021.
- [11] <http://www-cast3m.cea.fr>, 2021.