

Régularisation de Lipschitz pour la modélisation de l'endommagement

N. Chevaugeon¹, N. Moës^{1,2}

¹École Centrale Nantes, GeM, UMR 6183, 44321 Nantes, France ²Institut Universitaire de France (IUF)

Introduction

Dans la présente contribution, nous nous plaçons dans le cadre des modèles d'endommagement diffus régularisés. Ces modèles ont l'avantage de permettre des schémas de fissuration complexes, comprenant la nucléation, le branchement et la coalescence tout en fournissant des résultats dépendant faiblement de l'orientation des éléments du maillage utilisé pour discrétiser le problème. Les modèles d'endommagement diffus considèrent une relation contrainte-déformation locale, affectée d'une variable d'endommagement d en chaque point, modélisant la perte de raideur du matériau. Le modèle local doit ensuite être régularisé pour éviter une localisation "parasite" de l'endommagement, rendant les résultats sensibles au maillage et qui, à la limite où la taille de maille tend vers zéro, prédisent la rupture complète sans dissipation d'énergie. Plutôt que de suivre les approches **non-locales** qui proposent de moyenniser d sur des zones [10, 7], ou d'ajouter à l'énergie un terme dépendant du laplacien de d comme dans les approches **phase-field** [2, 8, 6, 1], nous proposons ici de régulariser le problème en imposant une contrainte de **Lipschitz** sur le champ d'endommagement [9, 4]. Nous appelons ce modèle **Lip-field**. La formulation et les exemples sont traités dans le cadre des déformations planes par soucis de simplicité, sans perte de généralité.

Formulation Non-régularisée

A l'instant $t + \Delta t$, on cherche les champs de déplacement \mathbf{u}_{n+1} et d'endommagement d_{n+1} , définis sur le domaine Ω minimisant une fonctionnelle F :

$$(\mathbf{u}_{n+1}, d_{n+1}) = \arg \min_{\substack{\mathbf{u}' \in U_{t+\Delta t} \\ d' \in A_n}} F(\mathbf{u}', d') \quad (1)$$

avec $U(t)$ l'espace des déplacements cinématiquement admissibles et A_n l'espace de l'endommagement:

$$U(t) = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) : \mathbf{u} = \mathbf{u}_d(t) \text{ sur } \Gamma_u\} \quad (2)$$

$$A_n = \{d \in L^\infty(\Omega) : d_n \leq d \leq 1\} \quad (3)$$

$$F(\mathbf{u}, d) = \int_{\Omega} \varphi(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), d) + Y_c h(d) d \Omega \quad (4)$$

où $\varphi(\boldsymbol{\epsilon}, d)$, la densité d'énergie de déformation, est une fonction convexe de $\boldsymbol{\epsilon}$ et d séparément. Y_c est l'énergie critique d'endommagement. $h(d)$ est une fonction croissante et convexe pour $0 \leq d \leq 1$.

Cette formulation de l'élasticité endommageable en petites perturbations est classique, et n'est pour l'instant pas régularisée. Comme tous les modèles d'endommagement locaux, elle est sujette à une sur-localisation de l'endommagement, pouvant conduire à une rupture complète sans dissipation d'énergie (localisation parasite).

Régularisation de Lipschitz

Pour un champ d sur Ω , la constante de Lipschitz associée est la valeur minimum de M telle que :

$$|d(\mathbf{x}) - d(\mathbf{y})| \leq M \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \quad (5)$$

où $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est la longueur minimale des chemins dans Ω joignant \mathbf{x} et \mathbf{y} . La valeur M dépend de d et est notée $\text{lip}(d)$. Nous définissons ensuite l'espace régularisant pour d comme :

$$\mathcal{L} = \{d \in L^\infty(\Omega) : \text{lip}(d) \leq 1/l\} \quad (6)$$

Où l est la longueur de régularisation. On note que l'ensemble \mathcal{L} est convexe. Sous cette contrainte, l'équation 1 devient :

$$(\mathbf{u}_{n+1}, d_{n+1}) = \arg \min_{\substack{\mathbf{u}' \in U_{t+\Delta t} \\ d' \in A_n \cap \mathcal{L}}} F(\mathbf{u}', d') \quad (7)$$

La fonction à **minimiser**, avec les choix que l'on a faits pour le modèle local, est convexe en u et en d séparément. L'ensemble $A_n \cap \mathcal{L}$ dans lequel on cherche d est **convexe**.

Discretisation et résolution numérique

Le champ u est discrétisé par élément finis et d est défini au point de Gauss, de manière classique, à l'aide d'un maillage Ω^h . Pour discrétiser la contrainte de Lipschitz, nous construisons un nouveau maillage Δ^h , dont les nœuds sont les points de Gauss de Ω^h (figure 1). Les ensembles des nœuds (vertex), arêtes (edge) et triangles du maillage Δ^h sont notés respectivement V , E et T . $D^h(\Delta^h)$ est l'espace élément fini linéaire par morceaux sur Δ^h . On définit alors les espaces de Lipschitz discrets suivant.

$$\mathcal{L}^h = \{d \in D^h(\Delta^h) : |d(\mathbf{x}) - d(\mathbf{y})| \leq \frac{1}{l} \text{dist}_{\Delta^h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V\} \quad (8)$$

$$\mathcal{L}^{h-} = \{d \in D^h(\Delta^h) : \|\nabla d\|_{|t} \leq \frac{1}{l}, \quad \forall t \in T\} \quad (9)$$

$$\mathcal{L}^{h+} = \{d \in D^h(\Delta^h) : |d(\mathbf{x}) - d(\mathbf{y})| \leq \frac{1}{l} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E\} \quad (10)$$

Les espaces \mathcal{L}^h , \mathcal{L}^{h+} , et \mathcal{L}^{h-} sont convexes. Soit nv , ne et nt , respectivement les nombres de nœuds, d'arêtes et de triangles du maillage. Si \mathcal{L}^h est une définition naturelle de la discrétisation de \mathcal{L} , elle est trop coûteuse à appliquer puisqu'elle contient nv^2 inégalités, au contraire de \mathcal{L}^{h-} et \mathcal{L}^{h+} qui ne contiennent respectivement que nt et ne contraintes. On montre que :

$$\mathcal{L}^{h-} \subset \mathcal{L}^h \subset \mathcal{L}^{h+} \quad (11)$$

Et on utilisera donc \mathcal{L}^{h-} pour construire les contraintes discrètes sur la variable d'endommagement.

Résolution alternée

Pour un déplacement donné sur le bord, on cherche donc u et d , soumis à un ensemble convexe de contraintes, minimisant $F(u, d)$. De plus, $F(u, d)$ est convexe en u et d séparément, ce qui suggère une minimisation alternée. On est alors ramené à une suite de résolution de problèmes de minimisation convexe sous contraintes convexes que l'on peut résoudre à l'aide de méthodes standards :

- La minimisation sur u se ramène à la résolution de l'équilibre à d fixé et donc à un problème élément fini standard.
- La minimisation sur d à u fixé, se ramène à la minimisation d'une fonction convexe **séparable** sous contraintes coniques linéaires et du second ordre. Notre implémentation, disponible sur <https://gitlab.com/c4506/lipfield> utilise cvxopt [3] pour la résolution du problème en d .

Optimisation

La résolution du problème en d peut être grandement accéléré. En effet, on peut montrer que la solution coïncide avec la solution sans contrainte de Lipschitz sur une grande partie du domaine Ω . Le problème sans contrainte de Lipschitz (le problème local) se ramène à une série de problèmes à une seule variable, complètement découplés. La détermination des zones où les solutions diffèrent peut se faire très rapidement à l'aide d'une variante de l'algorithme de Dijkstra [5], calculant un majorant et un minorant de d dans \mathcal{L}^{h+} à partir de la solution du problème local en d . Le problème de minimisation sous contraintes peut alors être séparé et résolu indépendamment sur chaque zone. Dans la pratique, chaque zone contient un faible nombre d'éléments, proportionnel à l/h , où h est la taille caractéristique des éléments.

Résultats

Initiation et propagation autour d'un trou

Une plaque trouée est soumise à un déplacement nul sur le bord de gauche et imposé sur le bord de droite, dans la direction horizontale. La figure 2 montre l'initiation puis la propagation de la zone d'endommagement, calculée sur un maillage grossier. La figure 3 présente une étude qualitative de convergence en maillage.

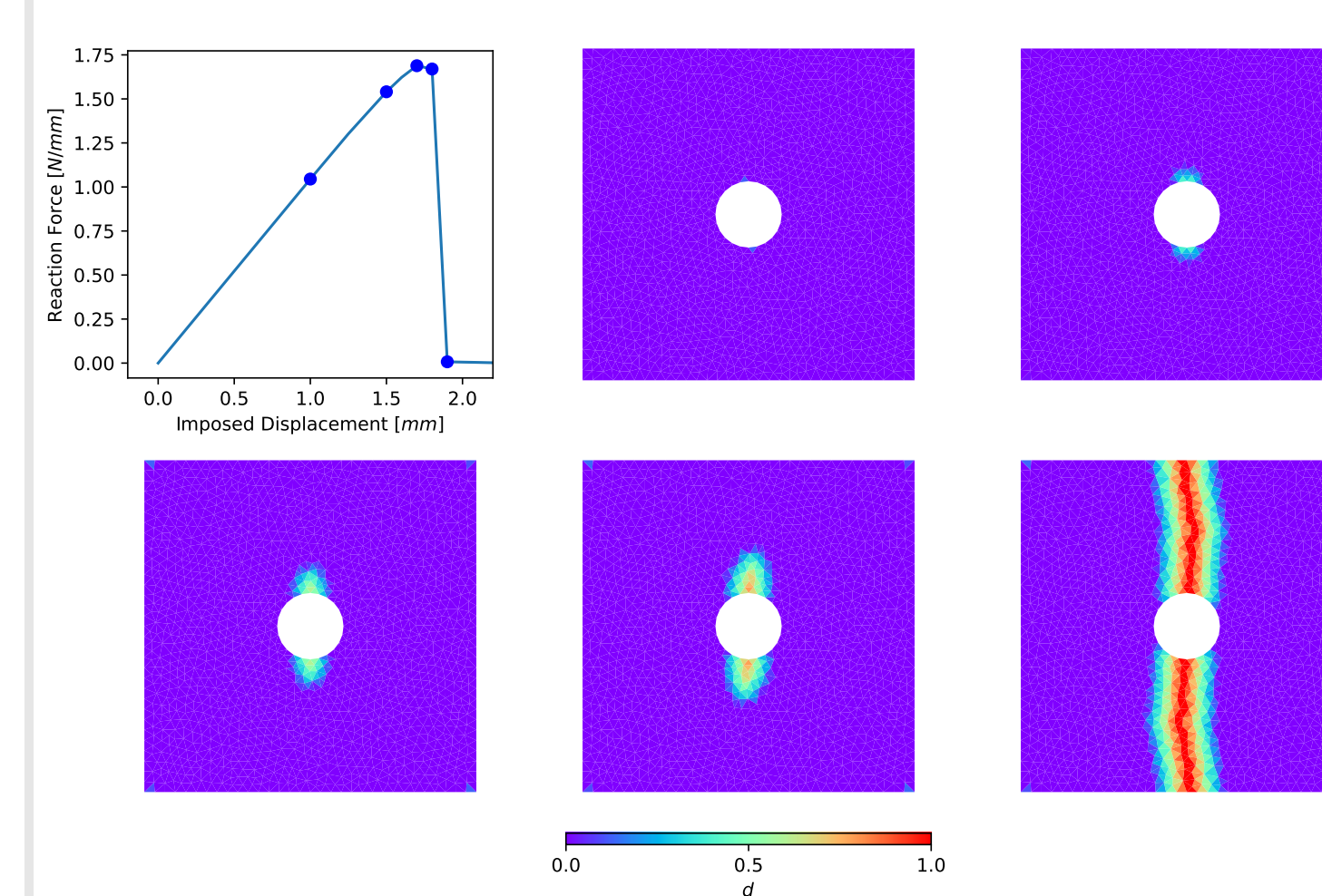


Figure 2. Initiation puis propagation d'une fissure autour d'un trou. En haut à gauche, courbe réaction en fonction du déplacement imposé. De gauche à droite, le champ d'endommagement pour les différents points de chargement marqués sur la courbe.

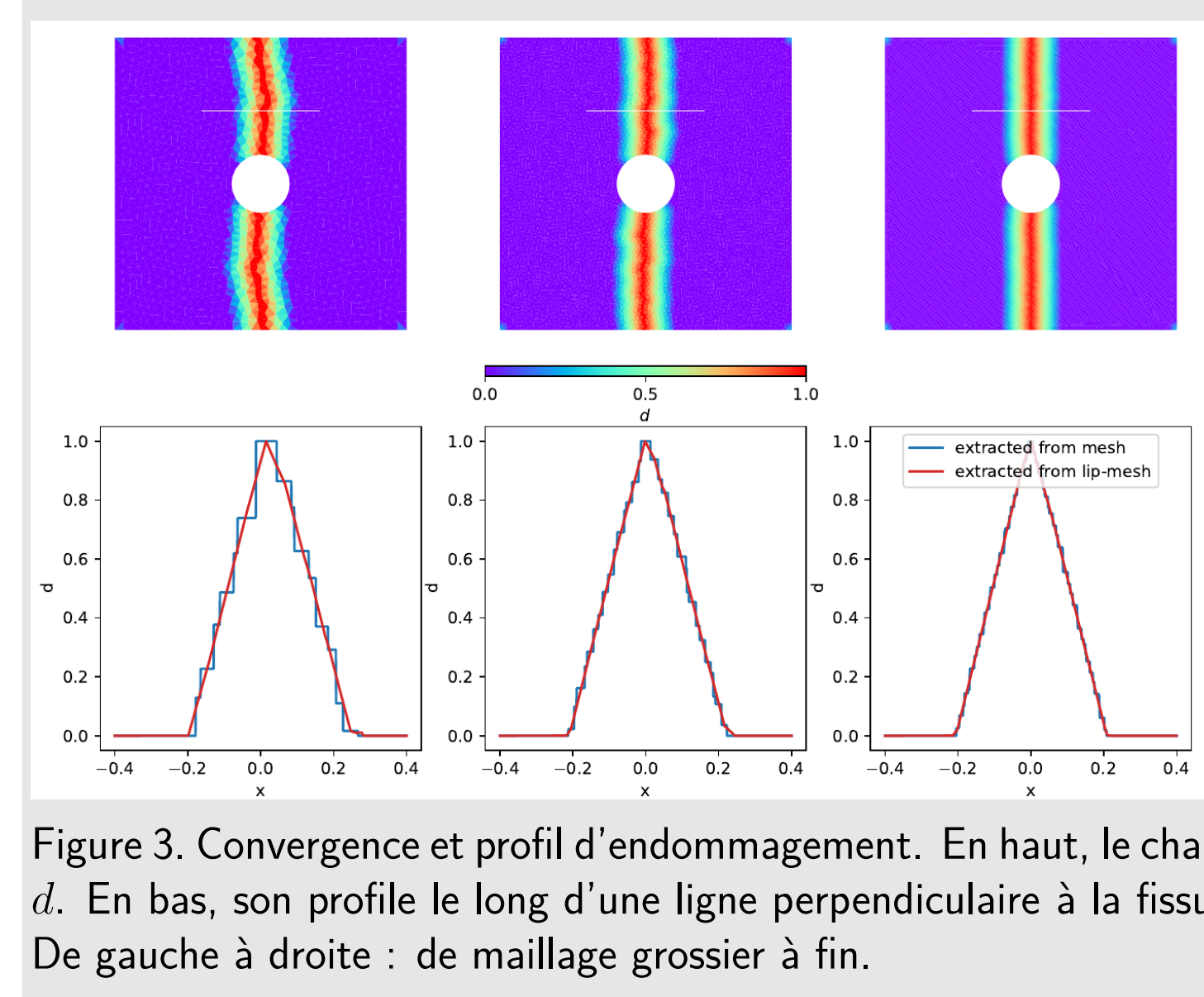


Figure 3. Convergence et profil d'endommagement. En haut, le champ d . En bas, son profil le long d'une ligne perpendiculaire à la fissure. De gauche à droite : de maillage grossier à fin.

Comparaison avec Griffith sur éprouvette TDCB

On modélise ici la propagation d'une fissure dans une éprouvette TDCB pré-entallée (figure 4). Les deux trous sont écartés progressivement, provoquant une propagation stable de la fissure. Nous comparons les résultats entre un modèle Lip-field et un modèle élément fini classique où la fissure est représentée explicitement dans le maillage et suit un modèle de propagation de Griffith. Nous comparons, pour différents déplacements imposés, le chargement nécessaire, la longueur de fissure et les champs de contrainte et de déplacement.

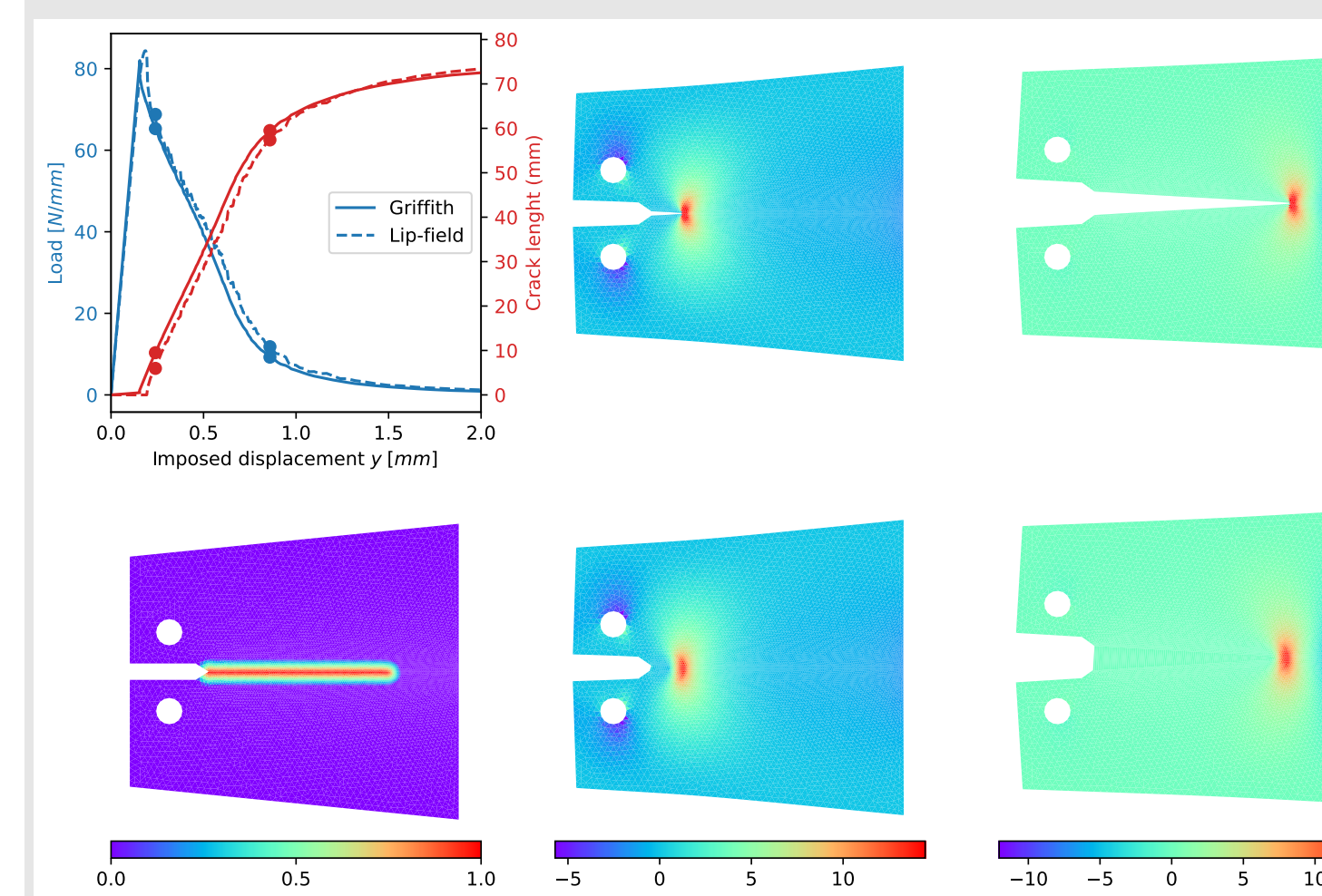


Figure 4. Comparaison avec Griffith, en haut à gauche, réaction et longueur de fissure en fonction du déplacement imposé. À droite, la déformée et le champ de contrainte σ_{yy} , en haut pour le modèle de Griffith, en bas pour Lip-field. En bas à gauche, le champ d'endommagement pour le modèle Lip-field.

Propagation d'une fissure en cisaillement

Partant d'une éprouvette pré-fissurée jusqu'à son milieu, on impose un déplacement horizontal sur le bord du haut pour provoquer du cisaillement en pointe de la fissure. Pour le premier modèle (figure 5), la densité d'énergie de déformation est symétrique en traction/compression. Deux fissures se développent symétriquement. Si celle du bas est en traction, celle du haut est en compression. Tout se passe pour celle en compression comme si il y avait inter-pénétration de ses lèvres. Pour obtenir un modèle plus réaliste, on construit une densité d'énergie de déformation asymétrique, telle que la variable d'endommagement n'affecte la raideur que dans les directions où le matériau est en traction. Les résultats sont reportés sur la figure 6. Une seule fissure se développe alors, en ouverture essentiellement, jusqu'à ce qu'elle atteigne le bord de l'éprouvette.

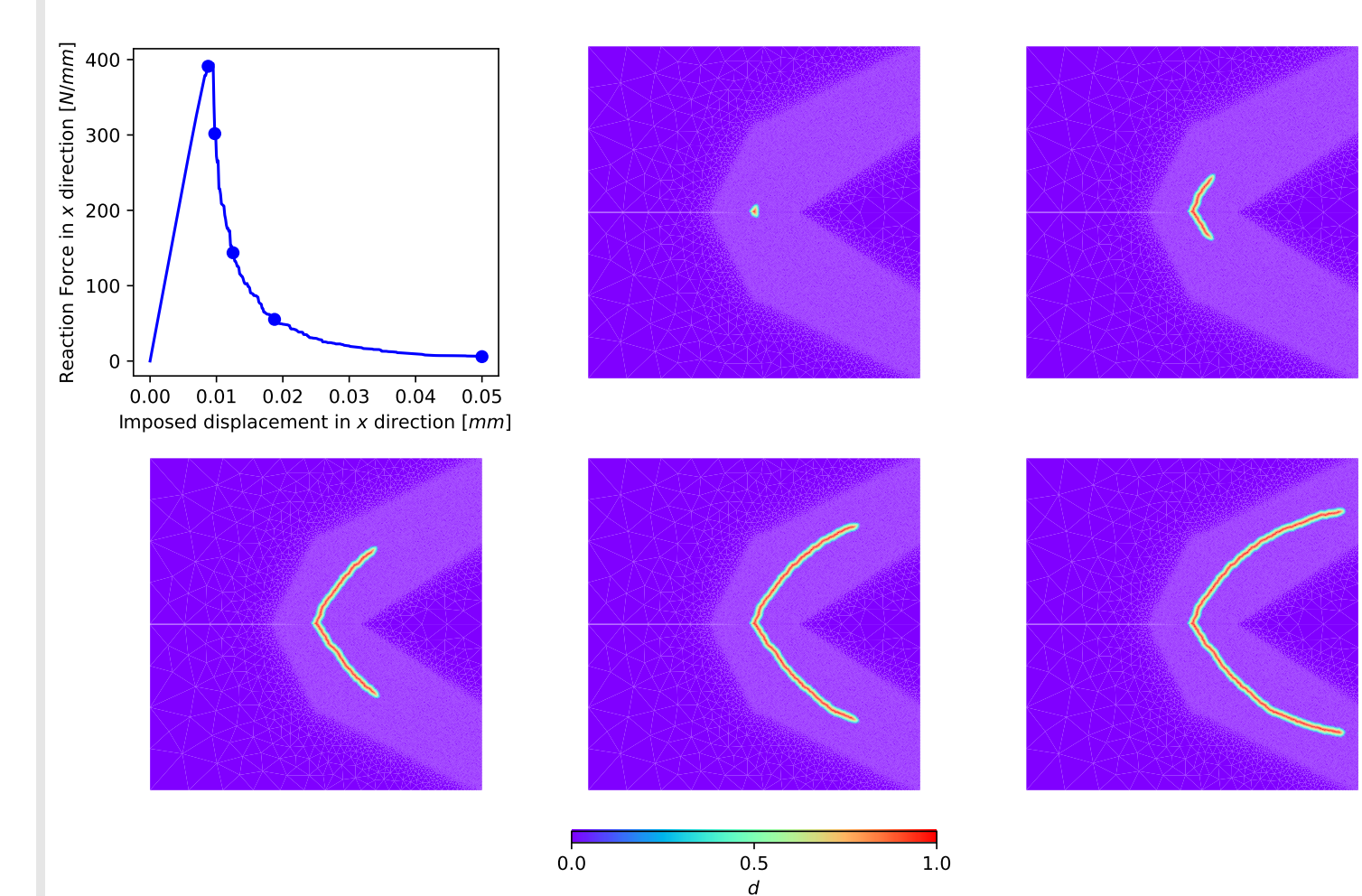


Figure 5. Fissure en cisaillement : comportement **symétrique** en traction/compression

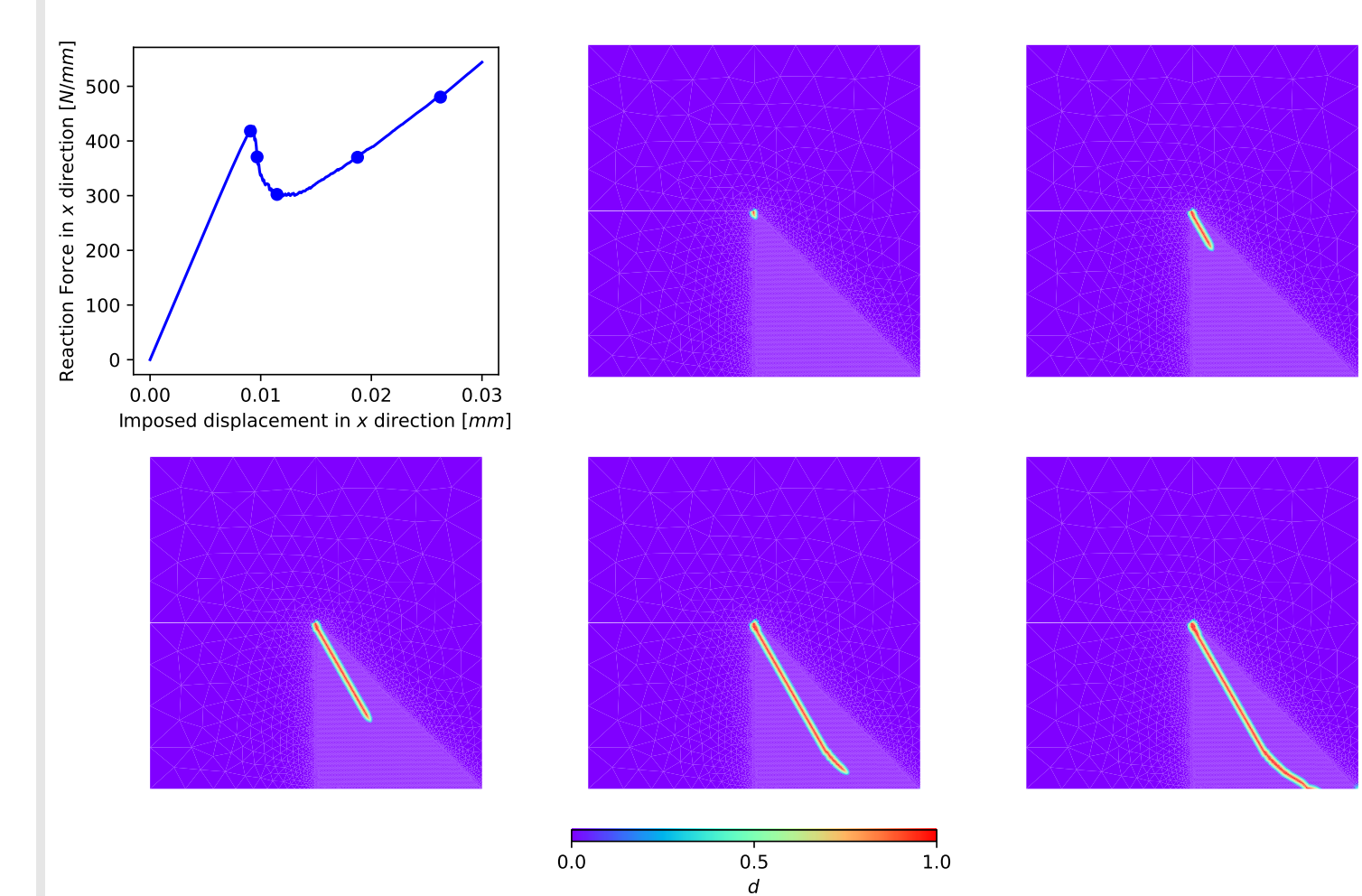


Figure 6. Fissure en cisaillement : comportement **asymétrique** en traction/compression

Esquive puis fusion de deux fissures

Pour ce dernier exemple, deux entailles initiales horizontales, décalées l'une par rapport à l'autre, verticalement, sont pratiquées dans l'échantillon. On applique un déplacement vertical sur le bord supérieur alors que le bord inférieur est fixe (figure 7). Deux fissures se développent vers le centre de l'éprouvette, en s'écartant, avant de se rejoindre pour fusionner.

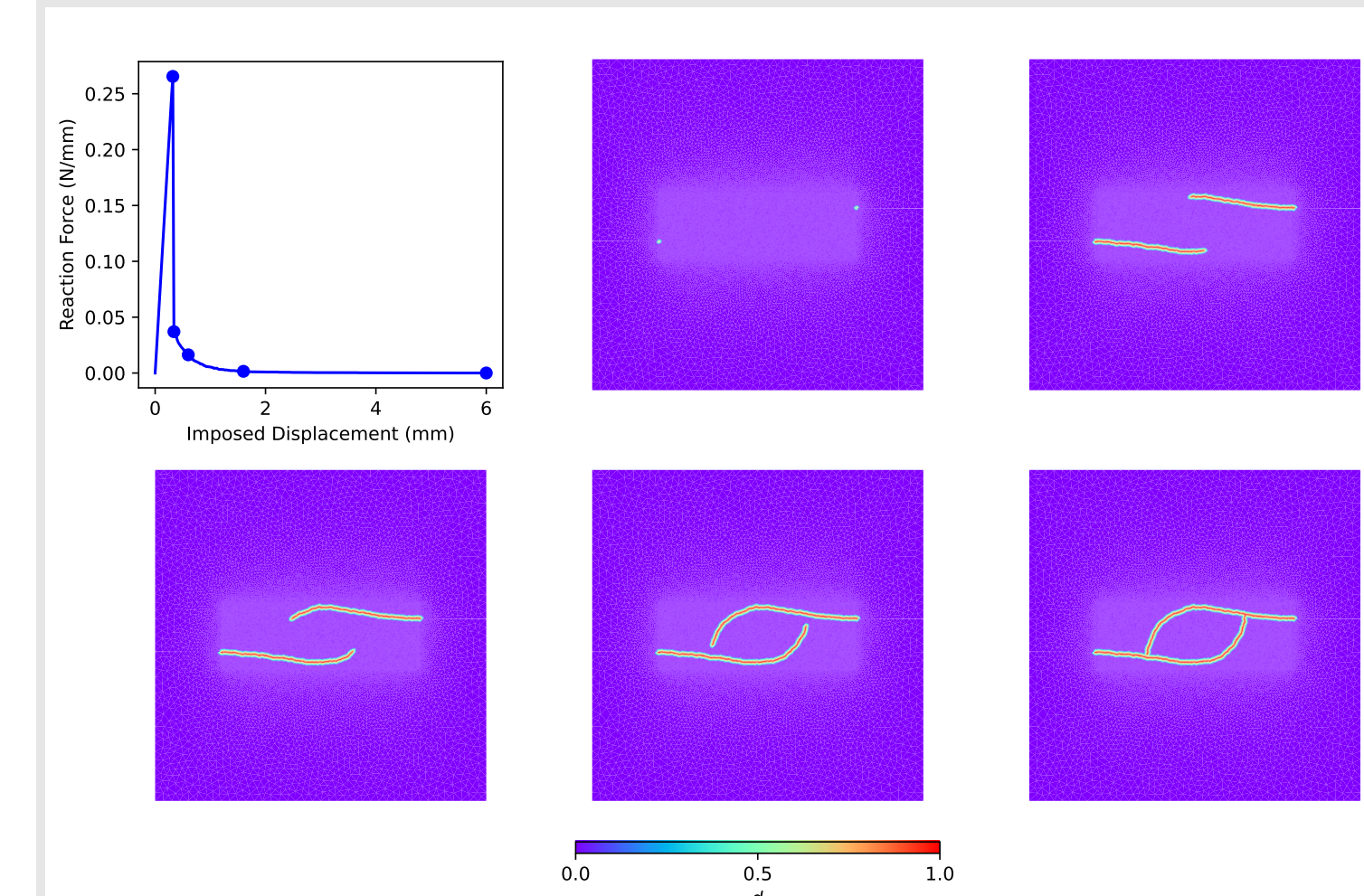


Figure 7. En haut à gauche: courbe réaction/déplacement, puis champ d'endommagement à différents niveaux de chargement

References

- [1] M. Ambati, T. Gerasimov, and L. De Lorenzis. "Phase-Field Modeling of Ductile Fracture". In: *Comp. Mech.* 55.5 (2015), pp. 1017–1040. ISSN: 1432-0924. DOI: 10.1007/s00466-015-1151-4.
- [2] H. Amor, J.-J. Marigo, and C. Maurini. "Regularized Formulation of the Variational Brittle Fracture with Unilateral Contact: Numerical Experiments". In: *J. of the Mech. and Phys. of Sol.* 57.8 (2009), pp. 1209–1229. ISSN: 00225096. DOI: 10.1016/j.jmps.2009.04.011.
- [3] M. S. Andersen, J. Dahl, and L. Vandenbergh. *CVXOPT: A Python package for convex optimization, version 1.3*. <https://cvxopt.org/>. 2021.
- [4] N. Chevaugeon and N. Moës. "Lipschitz regularisation for fracture: the Lip-field approach". In: *submitted to CMAME* (2022). URL: [arxiv:2111.04771v2](https://arxiv.org/abs/2111.04771v2).
- [5] E.W. Dijkstra. "A note on two problems in connexion with graphs". In: *Numer. Math.* 1 (1959), pp. 269–271. DOI: 10.1007/BF01386390.
- [6] C. Kuhn and R. Müller. "A Continuum Phase Field Model for Fracture". In: *Eng. Frac. Mech.* 77.18 (2010), pp. 3625–3634. ISSN: 00137944. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2010.08.009.
- [7] E. Lorentz and S. Andrieux. "Analysis of Non-Local Models through Energetic Formulations". In: *Int. J. of Sol. and Struc.* 40 (2003), pp. 2905–2936. DOI: 10.1016/S0020-7683(03)00110-0.
- [8] C. Miehe, F. Welschinger, and M. Hofacker. "Thermodynamically Consistent Phase-Field Models of Fracture: Variational Principles and Multi-Field FE Implementations". In: *Int. J. For Num. Meth. in Eng.* 83.10 (2010), pp. 1273–1311. DOI: 10.1002/nme.2861.
- [9] N. Moës and N. Chevaugeon. "Lipschitz regularization for softening material models: The Lip-field approach". In: *Comptes Rendus - Mécanique* 349.2 (Mar. 2021), pp. 415–434. ISSN: 18737234. DOI: 10.5802/CRMECA.91.
- [10] G. Pijaudier-Cabot and Z. Bazant. "Non-Local Damage Theory". In: *J. of Eng. Mech.* 113 (1987), pp. 1512–1533. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:10(1512).