



HAL
open science

Régularisation de Lipschitz pour la modélisation de l'endommagement

Nicolas Chevaugéon, Nicolas Moes

► **To cite this version:**

Nicolas Chevaugéon, Nicolas Moes. Régularisation de Lipschitz pour la modélisation de l'endommagement. 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717694

HAL Id: hal-03717694

<https://hal.science/hal-03717694>

Submitted on 8 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Régularisation de Lipschitz pour la modélisation de l'endommagement

N. Chevaugéon¹, N. Moës¹

¹ GeM, École Centrale Nantes, {nicolas.chevaugéon,nicolas.moes}@ec-nantes.fr

Résumé — L'approche Lip-field [17], est une méthode de régularisation pour les modèles elasto-endommageables. Comme d'autres méthodes de régularisation, l'approche est fondée sur une minimisation d'un potentiel incrémental. Ce potentiel est identique à celui obtenu pour un modèle purement local. L'originalité de l'approche Lip-field est de minimiser ce potentiel sous contrainte de régularité de Lipschitz sur le champs d'endommagement, introduisant ainsi une longueur caractéristique, permettant de contrôler la localisation.

Mots clés — endommagement, localisation, régularisation, Lip-field.

1 Instruction

La Mécanique de la rupture a une longue histoire, commençant sans doute avec Griffith [10]. Le modèle de fissure de Griffith considère qu'une fissure est une surface qui évolue par le déplacement d'une ligne (le front), laissant derrière elle les lèvres de la fissure au travers de laquelle des sauts de déplacements (l'ouverture) sont autorisés. Dans ce modèle, pour que la ligne avance et que la fissure grandisse, sa surface doit augmenter, ce qui requiert une dissipation d'énergie, proportionnelle à l'augmentation de surface, puisée dans le reste de la structure. Ce modèle si il permet de prédire la propagation d'une fissure existante, ne permet pas de décrire l'initiation ou le branchement de fissure. Ce modèle a été ensuite généralisé et amélioré dans deux principales directions : les modèles de zones cohésives et les modèles d'endommagement diffus. Dans les deux cas, une longueur caractéristique est introduite.

Dans la présente contribution, nous nous plaçons dans le cadre des modèles d'endommagement diffus régularisés. Ces types de modèles ont l'avantage de permettre des schémas de fissuration complexes, comprenant la nucléation, le branchement et la coalescence tout en fournissant des résultats dépendant faiblement de l'orientation des éléments du maillage utilisé pour discrétiser le problème. Les modèles d'endommagement diffus considèrent une relation contrainte-déformation locale, affectée d'une variable d'endommagement d en chaque point, modélisant la perte de raideur du matériaux. Le modèle local doit ensuite être régularisé pour éviter une localisation "parasite" de l'endommagement, rendant les résultats sensibles au maillage et qui à la limite où la taille des mailles tend vers zéro, prédisent la rupture complète sans dissipation d'énergie.

Ces trente dernières années, un grand nombre de techniques de régularisation ont été proposées, entre autres : les modèles non-locaux intégrale [21, 15]; les modèles à second gradient cinématique [1, 22]; les modèles à gradient d'endommagement [8, 20, 19]; les modèles fondés sur la régularisation d'un problème de minimisation dans l'approche variationnelle de la fissuration [7, 5, 6]; l'approche à champs de phase (phase-field) provenant de la communauté physicienne [13] puis transposée à la mécanique de l'endommagement [3, 16, 14, 2]; l'approche périodynamique [23, 12]; ou encore l'approche par "Level-Set épaisse" [18].

Dans cette contribution, nous proposons une nouvelle approche diffuse pour la fissuration fondée sur une régularisation Lipschitzienne de la variable responsable de l'adoucissement dans le modèle matériel. Introduite dans [17] pour les matériaux endommageable, le modèle impose une contrainte de continuité Lipschitzienne qui peut se visualiser comme une limite à l'écart entre les valeurs de la variable d'endommagement entre tout couple de point matériel, dépendante de la distance entre ces deux points et d'une longueur caractéristique l . Le modèle Lip-field diffère des modèles à gradient d'endommagement ou des modèles à champs de phase au niveau de l'expression de l'énergie libre du matériaux qui ne dépend

pas ici du gradient d'endommagement, mais uniquement de la déformation et de l'endommagement au point matériel considéré. Le problème est formulée comme une minimisation d'un potentiel incrémental, identique à ceux des modèles locaux non-régularisés, mais sous contrainte une supplémentaire de Lipschitz.

Dans la prochaine section, une formulation classique d'un modèle d'endommagement est présenté dans sa forme non-régularisée, discrétisée en temps. La section 2 introduit la régularisation de Lipschitz ainsi que sa discrétisation spatiale, avant de présenter des exemples de simulations réalisées avec notre modèle dans la section 3. Nous concluons ensuite par une discussions des résultats obtenus et proposons des pistes de développement.

2 Modèle local (Non-régularisé)

On considère la déformation d'un corps, occupant initialement le domaine Ω , sous un champs de déplacement u . On suppose les déformations petites et quasistatiques. La contrainte de Cauchy est notée σ , et la déformation linéarisée ε

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (1)$$

Le déplacement est contrôlé sur une partie de la frontière notée Γ_u , supposée fixée dans le temps. Sur le reste de la frontière, une traction nulle est supposée. L'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles est noté $U(t)$:

$$U(t) = \{u \in H^1(\Omega) : u = u_d(t) \text{ sur } \Gamma_u\} \quad (2)$$

L'équation d'équilibre s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(u^*) \, d\Omega = 0, \quad \forall u^* \in U^*, \quad U^* = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma_u\} \quad (3)$$

Les équations (2-3) sont fermées par le modèle de comportement, où nous utilisons le formalisme des matériaux standards généralisés [11, 9]. L'unique variable interne que nous considérons ici est l'endommagement, noté d . Le modèle est caractérisé par un potentiel d'énergie libre $\varphi(\varepsilon, d)$ et un potentiel de dissipation $\psi(\dot{d}, d)$.

La discrétisation temporelle est choisit implicite et nous utilisons l'approche variationnelle. Considérons le déplacement et la variable interne (u_n, d_n) comme connus à l'instant t_n . Calculer la paire (u_{n+1}, d_{n+1}) à l'instant suivant $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ se résume à un problème de minimisation :

$$(u_{n+1}, d_{n+1}) = \arg \min_{\substack{u' \in U_n \\ d' \in A_n}} F(u', d'; u_n, d_n, \Delta t) \quad (4)$$

où U_n est $U(t_{n+1})$ et A_n le domaine dans lequel doit se trouver d_{n+1} , représentant une contrainte sur d .

Par soucis de simplicité, nous considérons ici des modèles indépendants du temps. Dans ce cas, l'expression de F ne dépend pas explicitement de u_n, d_n et Δt . Pour alléger les notations, on se dispensera dans la suite des indices $n + 1$ Le problème de minimisation devient alors :

$$(u, d) = \arg \min_{\substack{u' \in U_n \\ d' \in A_n}} F(u', d') \quad (5)$$

La contrainte sur d est donnée par l'irréversibilité et une valeur limite de 1 :

$$A_n = \{d \in L^\infty(\Omega) : d_n \leq d \leq 1\} \quad (6)$$

En se qui concerne l'expression de F , nous considérons l'expression suivante :

$$F(\mathbf{u}, d) = \int_{\Omega} \varphi(\varepsilon(\mathbf{u}), d) + Y_c h(d) d\Omega \quad (7)$$

Où Y_c est l'énergie critique et $h(d)$ est choisie comme $h(d) = 2d + 3d^2$. L'énergie libre est exprimée comme suit :

$$\varphi(\varepsilon, d) = \mu \sum_{i=1}^3 (1 - \alpha_i d)^2 \varepsilon_i^2 + \frac{\lambda}{2} (1 - \alpha d)^2 \text{Tr}(\varepsilon)^2 \quad (8)$$

où les constantes μ et λ sont les coefficients de Lamé, ε_i , $i = 1, 2, 3$, sont les valeurs propres de ε , et où les α_i et α sont définis ci-dessous :

$$\begin{cases} \alpha_i = \beta & \text{if } \varepsilon_i < 0 \\ & 1 & \text{if } \varepsilon_i \geq 0 \\ \alpha = \beta & \text{if } \text{Tr}(\varepsilon) < 0 \\ & 1 & \text{if } \text{Tr}(\varepsilon) \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

Où $0 \leq \beta \leq 1$ est un paramètre. Si $\beta = 1$, Le matériaux est symétrique en traction-compression. Si $\beta = 0$, le matériau retrouve toute sa raideur en compression et l'endommagement ne peut croître qu'en traction. Dans le cas des déformations planes, ($\varepsilon_3 = 0$) et pour $\beta = 1$, l'énergie peut se réécrire comme :

$$\varphi(\varepsilon, d) = \phi_0(\varepsilon) + g(d)\phi_1(\varepsilon) + Y_c h(d) \quad (10)$$

avec

$$\phi_0(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{if } \varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0 \\ \mu(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) & \text{if } \varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 < 0 \\ \mu\varepsilon_1^2 & \text{if } \varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$\phi_1(\varepsilon) = \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + \begin{cases} \mu(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) & \text{if } \varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0 \\ 0 & \text{if } \varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 < 0 \\ \mu\varepsilon_2^2 & \text{if } \varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 \geq 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$(13)$$

où ε_1 et ε_2 sont tel que $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

Plusieurs choix sont possibles pour $g(d)$, qui sera pour nous une fonction convexe de $d \in [0, 1]$. Dans le présent travail, nous considérons :

$$g(d) = (1 - d)^2 + \eta(1 - d)d^3 \quad (14)$$

g est convexe sur le domaine de d pour $\eta \in [0, 1/3]$. η permet d'atteindre un endommagement maximum de 1 pour une déformation finie, comme indiqué sur la figure 1, obtenue en imposant une déformation uni-axiale sur le modèle. L'endommagement commence à augmenter pour une déformation de $\sqrt{(Y_c/(0.5\lambda + \mu))}$, alors que l'endommagement atteint 1 pour une déformation de $\sqrt{8Y_c/(0.5\lambda + \mu)/\eta}$.

3 régularisation Lipschitzienne et discrétisation

Pour un champs d sur Ω , la constante de Lipschitz associée, est la valeur minimum de M tel que :

$$|d(x) - d(y)| \leq M \text{dist}(x, y), \quad \forall x, y \in \Omega \quad (15)$$

où $\text{dist}(x, y)$ est la longueur minimal des chemins dans Ω joignant x et y . La valeur M dépend de d est notée $\text{lip}(d)$.

Nous définissons ensuite l'espace régularisant pour d comme :

$$\mathcal{L}_{\Omega, l} = \{d \in L^\infty(\Omega) : \text{lip}(d) \leq 1/l\} \quad (16)$$

Où l est la longueur de régularisation. On note que l'ensemble $\mathcal{L}_{\Omega, l}$ est convexe. Sous cette contrainte, l'équation 5 devient :

$$(u, d) = \arg \min_{\substack{u' \in U_n \\ d' \in \mathcal{L}_{\Omega, l}}} F(u', d') \quad (17)$$

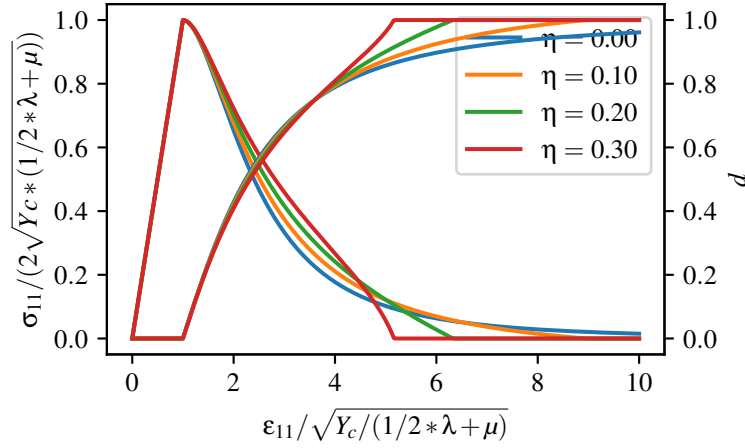


FIGURE 1 – Influence du paramètre η sur la courbe contrainte/déformation uni-axiale, et sur l'évolution de l'endommagement.

La fonction à minimiser, avec les choix que l'on a fait pour le modèle local, est convexe en u et en d séparément, et l'ensemble dans lequel on cherche d ($A_n \cap \mathcal{L}_{\Omega,l}$) est convexe.

Une stratégie naturelle pour obtenir un point stationnaire et donc un point d'équilibre (possiblement instable) est donc de minimiser alternativement sur u à d fixé puis d à u fixé, jusqu'à convergence vers un point stationnaire. La minimisation sur u est conventionnelle et une fois discrétisé conduit à problème élément fini d'élasticité linéaire pour le modèle symétrique et non-linéaire pour le cas asymétrique.

La second minimisation, à u fixé est moins standard dans le contexte de la mécanique :

$$d = \arg \min_{d' \in A_n \cap \mathcal{L}_{\Omega,l}} F(u, d') \quad (18)$$

où u est un champs connu, à l'itéré courant. Il s'agit donc de minimiser une fonction convexe sur un domaine convexe. Pour pouvoir continuer il va nous falloir construire un équivalent discret de la contrainte de Lipschitz (nous dirons dans la suite Contrainte de Lip).

Du coté du déplacement, comme mentionné plus haut, nous considérons l'espace élément finis discret classique du premier ordre sur une discrétisation géométrique Ω^h , un maillage de triangle de Ω . La variable d'endommagement est définie au centre de gravité de chaque élément, de manière classique pour une variable interne. Pour exprimer une contrainte de Lip discrète, nous construisons un second maillage, le maillage Lip Δ^h , reliant les centres de gravité des élément de Ω^h , comme représenté sur la figure 2 Le maillage de Lip est incluse dans le maillage pour le déplacement ($\Delta^h \subset \Omega^h$). Sur Δ^h une approximation élément finie du champs d est construite, où d est considérée linéaire par élément.

La condition de Lipschitz sur le problème continue rappelée ci-dessous, fait intervenir un nombre infini de contraintes puisque chaque pair doit être considérée :

$$\mathcal{L}_{\Omega,l} = \{d \in L^\infty(\Omega) : |d(x) - d(y)| \leq \frac{1}{l} \text{dist}(x,y), \quad \forall x,y \in \Omega\} \quad (19)$$

Pour transcrire cette contrainte au niveau discret, nous considérons ici 3 choix possibles. Les ensembles des noeuds (vertex), arrêtes (edge) et triangles du maillage Δ^h sont notés respectivement V , E and T .

$$\mathcal{L}^h = \{d \in D^h(\Delta^h) : |d(x) - d(y)| \leq \frac{1}{l} \text{dist}_{\Delta^h}(x,y), \quad \forall x,y \in V\} \quad (20)$$

$$\mathcal{L}^{h-} = \{d \in D^h(\Delta^h) : \|\nabla d\|_t \leq \frac{1}{l}, \quad \forall t \in T\} \quad (21)$$

$$\mathcal{L}^{h+} = \{d \in D^h(\Delta^h) : |d(x) - d(y)| \leq \frac{1}{l} \|x - y\|, \quad \forall (x,y) \in E\} \quad (22)$$

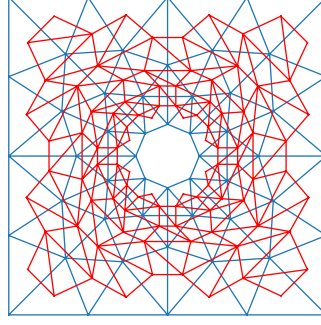


FIGURE 2 – Maillage pour le champs de déplacement (Ω^h) en bleu et le maillage Lip Δ^h pour le champs d en rouge.

Où dist_{Δ^h} dénote la longueur du chemin le plus court entre 2 noeuds, restant à l'intérieur de Δ^h . Comme dans le cas continu, les 3 espace discrets considérés sont convexes, et on prouve facilement que :

$$\mathcal{L}^{h-} \subset \mathcal{L}^h \subset \mathcal{L}^{h+} \quad (23)$$

Le choix \mathcal{L}^h est naturel au sens où il imite la contrainte continue, aux points où l'endommagement est utilisé pour calculer l'énergie dans la minimisation sur u . Mais le nombre de contrainte à vérifier est trop grand ($O(n^2)$ avec n le nombre de noeud de Δ^h). Le choix \mathcal{L}^{h+} à l'avantage de la facilité d'implémentation, mais est une relaxation trop forte de \mathcal{L}^h qui conduit à une forte dépendance du résultat à la direction des arrêtes. Le choix \mathcal{L}^{h-} est intéressant dans le sens où il conduit à un nombre de contraintes égale au nombre de triangle, et au vu des relations d'inclusions 23, tout champs $d \in \text{Lip}^h$ est aussi dans \mathcal{L}^{h-} , vérifiant donc la contrainte discrète "naturelle".

Avec le choix précédent, la version discrète de la minimisation 18

$$d = \arg \min_{d' \in A_n^h \cap \mathcal{L}^{h-}} F(u', d') \quad (24)$$

où u' est le minimiseur du problème à d fixé de l'itération précédente, et A_n^h impose l'irréversibilité et la borne supérieure de d aux noeuds :

$$A_n^h = \{d \in D^h(\Delta^h) : d_n(V_i) \leq d(V_i) \leq 1 \quad \forall V_i \in V\} \quad (25)$$

Le problème discret ci-dessus est donc un programme non-linéaire, avec des contraintes d'inégalités linéaires par rapport à des cônes d'ordre 1 pour les contraintes correspondantes à A_n^h et à des cônes d'ordre 2 pour la contrainte de Lip correspondant à \mathcal{L}^{h-} . Il peut donc se mettre sous une forme standard et nous avons utilisé le package `cvxopt` [4] qui implémente une méthode de point intérieur pour résoudre le problème.

4 Résultats numérique

Deux exemples numériques sont présentés. Ils sont traités en déformation plane, avec les scripts et maillages open-source que l'on peut télécharger à l'adresse suivante : <https://git.gem.ec-nantes.fr/nchevaugon/lip2d>.

4.1 Une plaque troué

Pour le premier exemple, on impose un déplacement horizontal sur l'arrête de droite d'un domaine carré, percé d'un trou, et encasté à gauche. Les résultats sont présentés sur la figure 3, avec la courbe force déplacement et le champs d'endommagement à différents points caractéristiques de la courbe. Cette

exemple simple permet de voir que l'on obtient bien une localisation prenant la forme d'une fissure, mais qui est contrôlée grâce à la contrainte de Lipschitz, qui donne ici une bande endommagée d'une largeur $2l$.

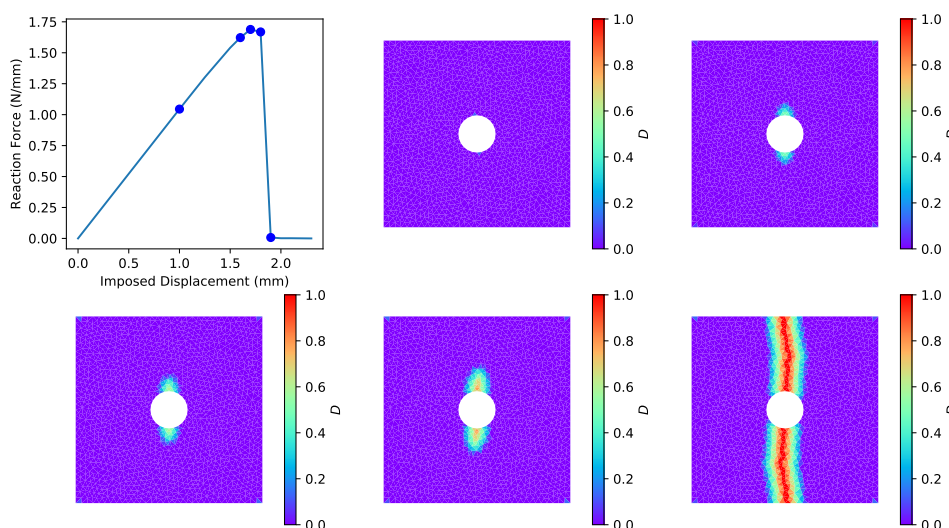


FIGURE 3 – Courbe force/déplacement et champs d'endommagement

La figure suivante 4, montre la convergence en maillage de la méthode tout en présentant le profil d'endommagement dans une direction perpendiculaire à la fissure. Il faut noter que dès que l'on s'éloigne de la zone de fissure, l'endommagement reste à 0 pendant toute la durée de la simulation.

4.2 Rencontre de deux fissures

Nous reproduisons ici un exemple classique, où deux fissures initiales horizontales se font faces à droite et à gauche d'une plaque carrée, légèrement décalées l'une par rapport à l'autre verticalement. Le bas de la plaque est fixé, alors qu'un déplacement vertical est imposé sur le haut de la plaque. Les résultats sont reproduits sur la figure 5, avec la courbe force/déplacement ainsi que les champs d'endommagement au fur et à mesure de l'avancée sur la courbe. Les fissures initiales (représentées explicitement dans le maillage) induisent un endommagement à leur pointe respective, initiant une propagation et une localisation de l'endommagement sous forme de deux fissures qui d'abord semblent s'écarter l'une de l'autre selon l'axe vertical, avant de se rapprocher et de fusionner.

5 Conclusion

Dans cette contribution, nous avons développé une nouvelle technique de régularisation de l'endommagement, fondée sur une contrainte de Lipschitz. Nous avons présenté deux exemples qui donnent des résultats conformes à l'intuition et qualitativement proches des résultats obtenus avec phase-field par exemple. L'intérêt de cette nouvelle approche est que l'on a pas à modifier l'expression de l'énergie par rapport à un modèle local. La régularisation est obtenue en contraignant d dans un sous-ensemble convexe. Lorsque la géométrie et le chargement n'entraîne pas de localisation, la contrainte de Lip n'est pas atteinte et les résultats sont identiques à un modèle local. La régularisation par Lip ne modifie finalement le champs d que sur une zone limitée en taille, typiquement d'une largeur de $2l$ autour d'une fissure. L'endommagement reste dans ces cas très localisé et ne tend pas à se diffuser dans une grande partie du domaine, comme c'est le cas avec certains modèles phase-field. Bien sûr, ces résultats sont préliminaires et nécessitent d'être consolidés avant de conclure sur un réel avantage de l'approche par rapport aux autres modèles de la littérature.

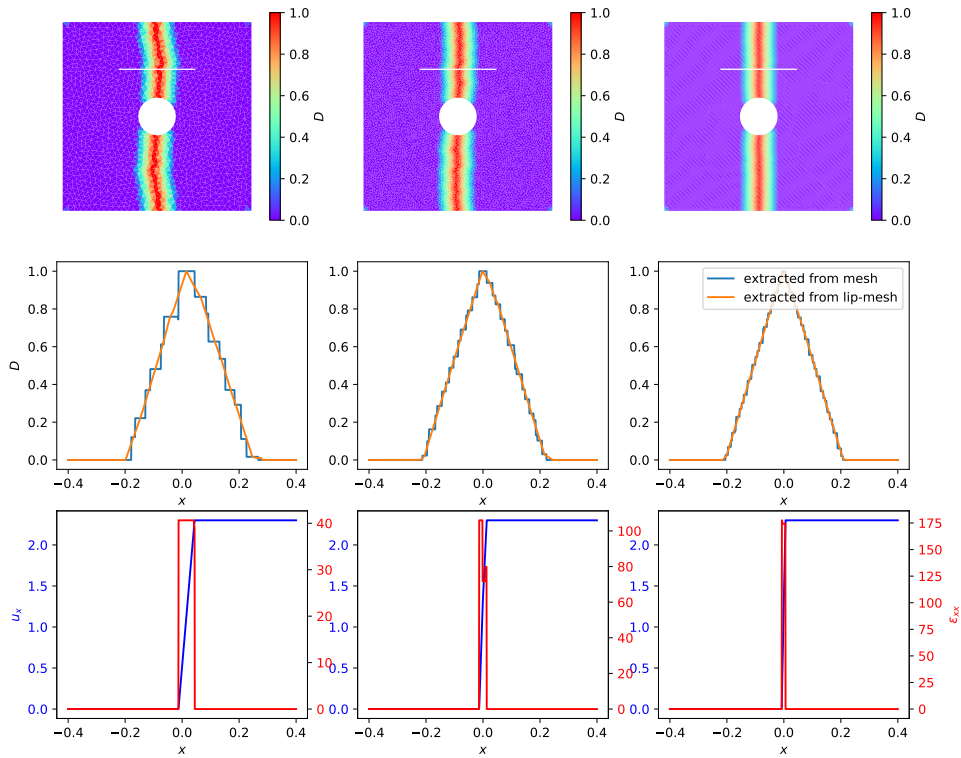


FIGURE 4 – Analyse de convergence : en haut les champs d'endommagement, en bas : u_x , ϵ_{xx} extraits sur la ligne blanche, pour des maillages allant de grossier à droite à fin à gauche.

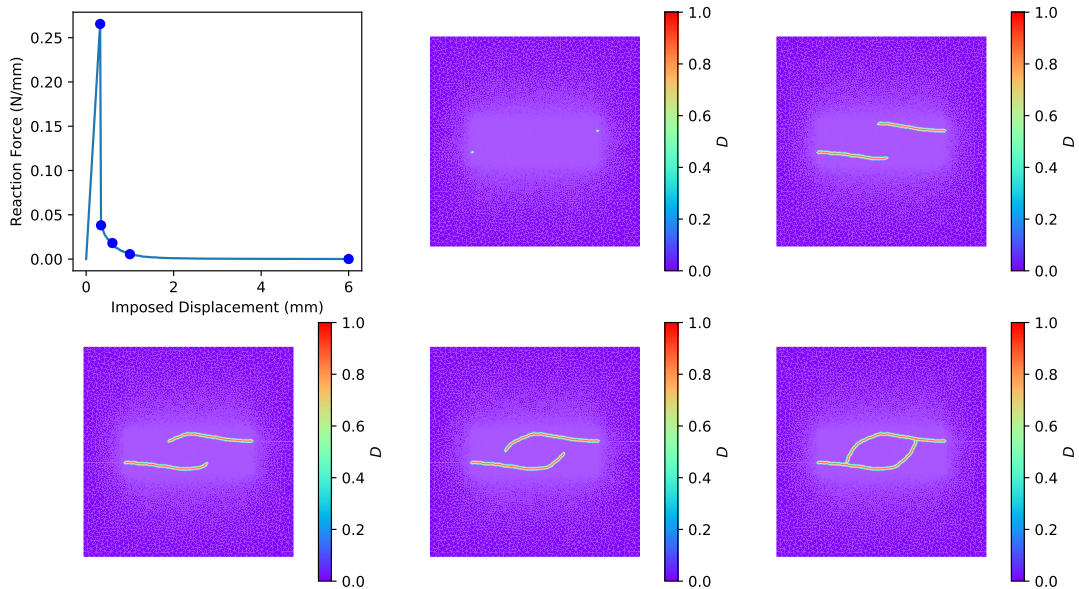


FIGURE 5 – Rencontre de deux fissures. En haut à gauche, la courbe charge déplacement, puis de gauche à droite et de bas en haut les champs d'endommagement correspondant aux points sur la courbe

Références

- [1] E.C. Aifantis. *On the microstructural origin of certain inelastic models*, Journal of Eng. Mat. and Tech., 106(4) :326-330, 1984.
- [2] M. Ambati, T. Gerasimov, L. De Lorenzis. *Phase-field modeling of ductile fracture.*, Comp. Mech., 55(5) :1017-1040, 2015.
- [3] H. Amor, J.-J. Marigo, C. Maurini. *Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact : Numerical experiments.*, J. of the Mech. and Phys. of Sol., 57(8) :1209-1229, 2009.
- [4] M. Andersen, L. Vandenberghe. *The cvxopt linear and quadratic cone program solvers.* <https://cvxopt.org/>.
- [5] B. Bourdin, G. Francfort, J.-J. Marigo. *Numerical experiments in revisited brittle fracture.*, J. of the Mech. and Phys. of Sol., 48(4) :797-826, 2000.
- [6] B. Bourdin, G. Francfort, J.-J. Marigo. *The variational approach to fracture*, J. of Elas., 91(1-3) :5-148, 2008.
- [7] G. Francfort, J.-J. Marigo. *Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem*, J. of the Mech. and Phys. of Sol., 46 :1319-1412, 1998.
- [8] M. Frémond, B. Nedjar. *Damage, gradient of damage and principle of virtual power*, Int. J. of Sol. and Struct., 33(8) :1083-1103, 1996.
- [9] P. Germain, P. Suquet, Q. S. Nguyen. *Continuum thermodynamics*, ASME Journal of Applied Mechanics, 50 :1010-1020, 1983.
- [10] D.S. Dugdale. *The phenomena of rupture and flow in solids* , Phil. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A, Math. Phys. Sci., 221 :163-198, 1921.
- [11] B. Halphen, Q.-S. Nguyen. *Sur les matériaux standards généralisés.* Journal de Mécanique, 14(1) :39-63, 1975.
- [12] A. Javili, R. Morasata, E. Oterkus, S. Oterkus. *Peridynamics review.*, Math. and Mech. of Solids, 24(11) :3714-3739, 2018.
- [13] A. Karma, D. Kessler, H. Levine. *Phase-field model of mode III dynamic fracture.*, Phys. Rev. Lett., 87(4) :045501, 2001.
- [14] C. Kuhn, R. Müller. *A continuum phase field model for fracture.*, Eng. Frac. Mech., 77(18) :3625-3634, 2010.
- [15] E. Lorentz, S. Andrieux. *Analysis of non-local models through energetic formulations*, Int. J. of Sol. and Struc., 40 :2905-2936, 2003.
- [16] C. Miehe, F. Welschinger, M. Hofacker. *Thermodynamically consistent phase-field models of fracture : Variational principles and multi-field FE implementations.*, Int. J. For Num. Meth. in Eng., 83(10) :1273-1311, 2010.
- [17] N. Moës, N. Chevaugeon. *Lipschitz regularization for softening material models : The Lip-field approach*, Comptes Rendus - Mécanique, 349(2) :415-434, 2021.
- [18] N. Moës, C. Stolz, P.-E. Bernard, N. Chevaugeon. *A level set based model for damage growth : The thick level set approach.* Int. J. For Num. Meth. in Eng., 86 :358-380, 2011.
- [19] Q.-S. Nguyen, S. Andrieux. *The non-local generalized standard approach : A consistent gradient theory*, Cptes rend. Acad. des sciences : Mécanique, physique, chimie, astronomie, 333 :139-145, 2005.
- [20] R. Peerlings, M.G.D. Geers, R. De Borst, W.A.M. Brekelmans. *A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua*, Int. J. of Sol. and Struc., 38(44-45) :7723-7746, 2001.
- [21] G. Pijaudier-Cabot, Z. Bazant. *Non-local damage theory*, J. of Eng. Mech., 113 :1512-1533, 1987.
- [22] Chen Z., Schreyer H. *One-dimensional softening with localization*, J. of Appl. Mech., 53 :891-979, 1986.
- [23] S.A. Silling. *Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces.* J. of the Mech. and Phys. of Sol., 48(1) :175-209, 2000.