



**HAL**  
open science

## Réduction de modèles pour les inéquations variationnelles

Idrissa Niakh, Alexandre Ern, Virginie Ehrlacher, Guillaume Drouet

► **To cite this version:**

Idrissa Niakh, Alexandre Ern, Virginie Ehrlacher, Guillaume Drouet. Réduction de modèles pour les inéquations variationnelles. 15e colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717692

**HAL Id: hal-03717692**

**<https://hal.science/hal-03717692v1>**

Submitted on 8 Jul 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Réduction de modèles pour les inéquations variationnelles

I. Niakh<sup>1,2,3</sup>, A. Ern<sup>2,3</sup>, V. Ehrlacher<sup>2,3</sup>, G. Drouet<sup>1</sup>

<sup>1</sup>EDF R&D, 91120 Palaiseau.

<sup>2</sup>CERMICS-École des Ponts, 77455 Marne-la-Vallée cedex 2.

<sup>3</sup>INRIA Paris, 75589 Paris.

*idrisa.niakh@enpc.fr; alexandre.ern@enpc.fr; virginie.ehrlacher@enpc.fr; guillaume.drouet@edf.fr*

---

**Résumé** — Ce travail s’inscrit dans le contexte de la réduction de modèle pour les inéquations variationnelles. Plus précisément, nous étudions la stabilité du modèle réduit dans le cas d’une formulation duale où les bases primale et duale sont construites de manière décorrélée. Nous fournissons une stratégie pour enrichir la base primale en fonction de la base duale de sorte que le modèle réduit satisfasse une condition de stabilité inf-sup. Comme exemple d’application, nous considérons le problème de contact de Hertz sans frottement.

**Mots clés** — Réduction de modèle, Inéquations variationnelles, Méthode des bases réduites, Problème de contact, Méthode des éléments finis, Condition inf-sup.

---

## 1 Introduction

La réduction de modèle est une méthode permettant de réduire les coûts de calcul en approchant un modèle initial supposé très coûteux par un autre beaucoup moins cher en temps de calcul [1]. On se place dans le cas où l’on doit résoudre un problème défini par un modèle paramétrique de haute fidélité pour de multiples instances du paramètre. Chaque résolution étant très coûteuse, le coût de calcul peut très vite devenir prohibitif. Le principe est alors d’organiser les calculs en une première phase *offline* qui est une phase d’apprentissage où sont réalisés des calculs coûteux sur le modèle de haute fidélité. La phase *offline* permet de construire le modèle réduit. Puis, dans la phase *online*, on considère des nouvelles instances du paramètre pour lesquelles on résout le modèle réduit à la place du modèle de haute fidélité. De telles études sont souvent menées par exemple dans le cadre de la calibration de modèles où l’on cherche à trouver la valeur optimale de certains paramètres pour que les résultats des simulations numériques soient le plus cohérents possible avec ceux des expériences.

Le travail développé dans cette contribution s’inscrit dans le cadre de la réduction de modèle pour les inéquations variationnelles paramétriques [2, 3, 4]. Ces inéquations sont en effet un outil essentiel pour la formulation mathématique de nombreux problèmes en mécanique. Comme exemple d’application, nous considérons le problème de contact de Hertz. Nous sommes particulièrement intéressés par le cas où la formulation du problème est dualisée en introduisant des multiplicateurs de Lagrange. Avec la méthode des bases réduites, cette formulation conduit à une stratégie dite primale-duale : des bases réduites sont créées pour chacune des variables, primale et duale.

Le point de départ de notre travail est l’article [5] où la construction de la base primale et de la base duale est faite de manière décorrélée. Après avoir échantillonné des couples de solutions primale et duale pour des valeurs du paramètre prises dans un ensemble d’apprentissage, la Proper Orthogonal Decomposition (POD) [6, 7] est utilisée pour compresser la base primale et un algorithme Cone Projected Greedy (CPG) [8, 5] pour compresser la base duale. Dans ces conditions, la stabilité du problème réduit n’est pas garantie a priori. Plus précisément, nous ne pouvons pas garantir que les bases primale et duale sont telles que l’opérateur de contact associé satisfait une condition inf-sup.

Afin de satisfaire cette condition inf-sup, une stratégie de construction de la base primale en fonction de la base duale a été proposée dans [2]. L’idée est de compléter la base primale avec autant de fonctions qu’il y a dans la base duale, chacune de ces fonctions étant déterminée par un problème de maximisation afin de contrôler l’élément correspondant de la base duale. Dans le cas où l’opérateur de contact est non-paramétrique, l’espace primal ainsi construit est indépendant du paramètre de sorte que la complétion de la base primale n’est calculée qu’une seule fois dans la phase *offline*.

Dans le cas où l'opérateur de contact est paramétrique (c'est le cas par exemple pour les sphères de Hertz, même sous l'hypothèse des petites déformations, lorsque le rayon d'une des sphères dépend du paramètre), cette stratégie produit un espace primal qui dépend du paramètre et doit donc être construit *online*, ce qui réduit considérablement l'efficacité de la phase *online*. Dans cette contribution, nous proposons une stratégie pour approcher l'espace primal paramétrique par un espace indépendant du paramètre. Cet espace est construit une seule fois dans la phase *offline*, et nous établissons une condition suffisante à satisfaire lors de la construction afin de garantir une condition de stabilité inf-sup pour le problème réduit pour toutes les valeurs du paramètre.

La suite de ce résumé est organisée comme suit. Dans la partie 2, nous définissons le cadre mathématique de l'inéquation variationnelle modélisant le problème. Ensuite, nous formulons le modèle réduit dans le cas standard. Dans la partie 3, nous présentons notre résultat principal, à savoir la stratégie pour le stabiliser et le résultat théorique associé. Dans la partie 4, nous présentons les résultats numériques obtenus avec le nouveau modèle réduit résultant de la stratégie proposée sur le problème de contact de Hertz entre deux demi-sphères en hypothèse des petites déformations. Enfin, dans la partie 5, nous donnons une conclusion avec quelques perspectives.

## 2 Cadre général

### 2.1 Modèle de haute fidélité

Soient  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}$  deux espaces de Hilbert. Nous notons par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$  (resp.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{W}}$ ) le produit scalaire associé à  $\mathcal{V}$  (resp.  $\mathcal{W}$ ) induisant la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$  (resp.  $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ ), par  $\mathcal{W}^+ \subset \mathcal{W}$  un cône positif fermé contenant 0, et par  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}^*$ , un domaine paramétrique. Nous considérons deux formes bilinéaires continues  $a(\mu; \cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $b(\mu; \cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$  paramétrées par  $\mu \in \mathcal{D}$ , deux formes linéaires continues  $f(\mu; \cdot) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g(\mu; \cdot) : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$  paramétrées par  $\mu \in \mathcal{D}$ . Nous supposons que  $a(\mu; \cdot, \cdot)$  est symétrique et uniformément coercive pour tout  $\mu \in \mathcal{D}$ . Pour tout  $\mu \in \mathcal{D}$ , l'ensemble admissible est noté

$$\mathcal{K}(\mu) := \{v \in \mathcal{V} \mid b(\mu; v, \eta) \leq g(\mu; \eta), \forall \eta \in \mathcal{W}^+\},$$

et il est supposé non-vidé pour tout  $\mu \in \mathcal{D}$ . Nous considérons le problème de minimisation sous contrainte suivant :

$$u(\mu) = \operatorname{argmin}_{v \in \mathcal{K}(\mu)} \frac{1}{2}a(\mu; v, v) - f(\mu; v). \quad (1)$$

D'une part, pour tout  $\mu \in \mathcal{D}$ , l'ensemble des contraintes  $\mathcal{K}(\mu)$  est fermé et convexe, d'autre part, la fonctionnelle à minimiser est fortement convexe et continue. Ainsi (1) est bien posé.

Notons  $\mathcal{L}(\mu; \cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$  le Lagrangien associé à (1), paramétré par  $\mu \in \mathcal{D}$  et défini comme suit :

$$\mathcal{L}(\mu; v, \eta) := \frac{1}{2}a(\mu; v, v) - f(\mu; v) + b(\mu; v, \eta) - g(\mu; \eta), \quad \forall (v, \eta) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}.$$

Pour résoudre le problème d'optimisation (1), nous utilisons une formulation duale. Nous réécrivons (1) comme un problème de point de selle

$$(u(\mu), \lambda(\mu)) = \operatorname{arg} \min_{v \in \mathcal{V}} \max_{\eta \in \mathcal{W}^+} \mathcal{L}(\mu; v, \eta), \quad (2)$$

et nous supposons que

$$\exists \beta_0 > 0, \forall \mu \in \mathcal{D}, \inf_{\eta \in \mathcal{W}^+} \sup_{v \in \mathcal{V}} \frac{b(\mu; v, \eta)}{\|u\|_{\mathcal{V}} \|\eta\|_{\mathcal{W}}} \geq \beta_0. \quad (3)$$

D'après les hypothèses ci-dessus,  $(u(\mu), \lambda(\mu)) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}^+$  peut être trouvé comme le point critique du Lagrangien, *i.e.*, nous avons

$$\begin{cases} a(\mu; u(\mu), v) + b(\mu; v, \lambda(\mu)) = f(\mu; v), & \forall v \in \mathcal{V}, \\ b(\mu; u(\mu), \eta) \leq g(\mu; \eta), & \forall \eta \in \mathcal{W}^+. \end{cases} \quad (4)$$

Nous désignons par

$$\mathcal{V}_{\mathcal{X}} := \mathit{span}\left(\{\varphi_n\}_{n \in \{1:\mathcal{X}\}}\right) \subset \mathcal{V}, \quad \mathcal{W}_{\mathcal{X}} := \mathit{span}\left(\{\psi_r\}_{r \in \{1:\mathcal{X}\}}\right) \subset \mathcal{W},$$

les sous-espaces éléments finis de l'espace primal  $\mathcal{V}$  et de l'espace dual  $\mathcal{W}$ . Nous posons

$$\mathcal{W}_{\mathcal{X}}^+ := \mathit{span}_+\left(\{\psi_r\}_{r \in \{1:\mathcal{X}\}}\right) \subset \mathcal{W}^+,$$

la discrétisation du cône  $\mathcal{W}^+$ . Dans le contexte des méthodes de bases réduites, il est habituel de remplacer les espaces de dimension infinie par leurs homologues éléments finis de haute fidélité (HF). Par conséquent, dans ce qui suit, nous écrivons  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{W}^+$  au lieu de  $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}$ ,  $\mathcal{W}_{\mathcal{X}}$ ,  $\mathcal{W}_{\mathcal{X}}^+$  et le problème de haute fidélité prend à nouveau la forme (4). Nous introduisons, pour tout  $\mu \in \mathcal{D}$ , l'opérateur  $\mathcal{B}(\mu) : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$  tel que

$$\langle \mathcal{B}(\mu)\eta, v \rangle_{\mathcal{V}; \mathcal{V}} := b(\mu; v, \eta), \quad \forall (v, \eta) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}.$$

Nous notons les coefficients de continuité et de stabilité inf-sup de  $\mathcal{B}(\mu)$  par rapport à  $(\mathcal{V}, \mathcal{W}^+)$  comme suit :

$$c_{\text{HF}}(\mu) := \sup_{\eta \in \mathcal{W}^+} \sup_{v \in \mathcal{V}} \frac{b(\mu; v, \eta)}{\|v\|_{\mathcal{V}} \|\eta\|_{\mathcal{W}}}, \quad \beta_{\text{HF}}(\mu) := \inf_{\eta \in \mathcal{W}^+} \sup_{v \in \mathcal{V}} \frac{b(\mu; v, \eta)}{\|u\|_{\mathcal{V}} \|\eta\|_{\mathcal{W}}}.$$

La continuité de la forme bilinéaire  $b(\mu; \cdot, \cdot)$  implique que  $c_{\text{HF}}(\mu) < \infty$  pour tout  $\mu \in \mathcal{D}$ , et nous supposons que les espaces d'éléments finis HF sont tels que  $\beta_{\text{HF}}(\mu) > 0$  pour tout  $\mu \in \mathcal{D}$ . Cette dernière propriété, qui est la contrepartie discrète de (3), implique qu'il existe une unique solution à (4).

## 2.2 Construction standard des espaces réduits

Étant donné une famille de  $P \in \mathbb{N}^*$  vecteurs  $\{u_p\}_{p \in \{1:P\}}$  de  $\mathcal{V}$ , et un nombre réel positif  $\delta$ , la POD produit une base orthonormale de  $N \in \mathbb{N}^*$  ( $N \leq P$ ) éléments

$$\{v_n\}_{n \in \{1:N\}} = \text{POD}\left(\{u_p\}_{p \in \{1:P\}}; \mathcal{V}, \delta\right)$$

telle que

$$V := \mathit{span}\left(\{v_n\}_{n \in \{1:N\}}\right) \subseteq U := \mathit{span}\left(\{u_p\}_{p \in \{1:P\}}\right) \subseteq \mathcal{V},$$

$$e_{\text{POD}}(N) := \frac{\left(\sum_{p \in \{1:P\}} \|u_p - \Pi_V^{\mathcal{V}}(u_p)\|_{\mathcal{V}}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{p \in \{1:P\}} \|u_p\|_{\mathcal{V}}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \delta,$$

où  $\Pi_V^{\mathcal{V}}$  désigne la projection orthogonale sur  $V$  dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{V}$  (par la suite, lorsque le contexte est sans ambiguïté, nous supprimons l'exposant  $\mathcal{V}$ ).

Nous introduisons également, pour une famille donnée de  $Q \in \mathbb{N}^*$  vecteurs  $\{\theta_q\}_{q \in \{1:Q\}}$  de  $\mathcal{W}$ , et un nombre réel positif  $\delta$ , l'algorithme CPG qui produit un sous-ensemble  $\{v_r\}_{r \in \{1:R\}}$  de  $\{\theta_q\}_{q \in \{1:Q\}}$  composé de  $R \in \mathbb{N}^*$  ( $R \leq Q$ ) vecteurs tels que

$$\{v_r\}_{r \in \{1:R\}} = \text{CPG}\left(\{\theta_q\}_{q \in \{1:Q\}}; \mathcal{W}, \delta\right)$$

satisfaisant

$$W^+ := \mathit{span}_+\left(\{v_r\}_{r \in \{1:R\}}\right) \subseteq X^+ := \mathit{span}_+\left(\{\theta_q\}_{q \in \{1:Q\}}\right) \subseteq \mathcal{W},$$

$$e_{\text{CPG}}(R) := \frac{\max_{q \in \{1:Q\}} \|\theta_q - \Pi_{W^+}^{\mathcal{W}}(\theta_q)\|_{\mathcal{W}}}{\max_{q \in \{1:Q\}} \|\theta_q\|_{\mathcal{W}}} \leq \delta.$$

Dans [5], la POD est utilisée pour construire la base primale et l'algorithme CPG la base duale, à partir d'un ensemble de solutions HF  $\{u^{\text{HF}}(\mu_p)\}_{p \in \{1:P\}}$  pour la base primale et  $\{\lambda^{\text{HF}}(\mu_p)\}_{p \in \{1:P\}}$  pour la base duale, avec  $P \in \mathbb{N}^*$ , où  $\{(u^{\text{HF}}(\mu_p), \lambda^{\text{HF}}(\mu_p))\}_{p \in \{1:P\}} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{W}^+$  sont des solutions HF de (4) calculées pour un sous-ensemble d'apprentissage  $\mathcal{D}_{\text{train}} := \{\mu_p\}_{p \in \{1:P\}}$  de l'espace paramétrique  $\mathcal{D}$ . Cela conduit aux bases réduites primales et duales suivantes :

$$\{\xi_n\}_{n \in \{1:N\}} := \text{POD}\left(\{u^{\text{HF}}(\mu_p)\}_{p \in \{1:P\}}; \mathcal{V}, \delta_{\text{POD}}\right),$$

$$\{\chi_r\}_{r \in \{1:R\}} := \text{CPG}\left(\{\lambda^{\text{HF}}(\mu_p)\}_{p \in \{1:P\}}; \mathcal{W}, \delta_{\text{CPG}}\right),$$

où  $\delta_{\text{POD}}$  (resp.  $\delta_{\text{CPG}}$ ) est la précision souhaitée pour la base réduite primale (resp. duale). Nous définissons les espaces réduits primal et dual comme suit :

$$V_N := \text{span}\left(\{\xi_n\}_{n \in \{1:N\}}\right) \subset \mathcal{V}, \quad (5)$$

$$W_R^+ := \text{span}_+\left(\{\chi_r\}_{r \in \{1:R\}}\right) \subset \mathcal{W}^+. \quad (6)$$

### 2.3 Stabilité du modèle réduit

Nous constatons que les espaces réduits primal  $V_N$  et dual  $W_R^+$  sont construits de manière décorrélée. Dans ces conditions, nous ne pouvons pas garantir que les espaces  $V_N$  et  $W_R^+$  sont tels que la forme bilinéaire  $b(\mu; \cdot, \cdot)$  satisfait une condition inf-sup sur  $V_N \times W_R^+$  pour tout  $\mu \in \mathcal{D}$ .

Afin de garantir cette condition inf-sup, une stratégie de construction de la base primale en fonction de la base duale a été proposée dans [2]. L'idée est de compléter la base primale avec autant de fonctions qu'il y a dans la base duale. Pour cela, on procède comme suit : pour tout  $\mu$  dans  $\mathcal{D}$ , on définit l'opérateur  $\mathbb{T}(\mu) : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$  tel que

$$\mathbb{T}(\mu) := J \circ \mathcal{B}(\mu), \quad (7)$$

où  $J : \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V}$  est l'isomorphisme de Riesz. Alors, pour tout  $\mu \in \mathcal{D}$ , l'espace primal réduit enrichi  $V_N^{\text{new}}(\mu)$  est défini comme suit :

$$V_N^{\text{new}}(\mu) := V_N + S_R(\mu), \quad S_R(\mu) := \text{span}\left(\{\mathbb{T}(\mu)\chi_r\}_{r \in \{1:R\}}\right).$$

Cette construction garantit que, pour tout  $\mu \in \mathcal{D}$ , la forme bilinéaire  $b(\mu; \cdot, \cdot)$  est inf-sup stable par rapport à la paire  $(V_N^{\text{new}}(\mu), W_R^+)$ , i.e., on a

$$\beta_{N,R}(\mu) := \inf_{\eta \in W_R^+} \sup_{v \in V_N^{\text{new}}(\mu)} \frac{b(\mu; v, \eta)}{\|v\|_{\mathcal{V}'} \|\eta\|_{\mathcal{W}}} \geq \beta_{\text{HF}}(\mu) > 0. \quad (8)$$

En effet, pour tout  $\eta \in W_R^+$ , nous avons

$$\begin{aligned} \sup_{v \in V_N^{\text{new}}(\mu)} \frac{b(\mu; v, \eta)}{\|v\|_{\mathcal{V}'}} &\geq \frac{b(\mu; \mathbb{T}(\mu)(\eta), \eta)}{\|\mathbb{T}(\mu)(\eta)\|_{\mathcal{V}'}} = \frac{\|\mathbb{T}(\mu)(\eta)\|_{\mathcal{V}}^2}{\|\mathbb{T}(\mu)(\eta)\|_{\mathcal{V}'}} = \|\mathbb{T}(\mu)(\eta)\|_{\mathcal{V}} \\ &= \|J(\mathcal{B}(\mu)(\eta))\|_{\mathcal{V}'} = \|\mathcal{B}(\mu)(\eta)\|_{\mathcal{W}} \geq \beta_{\text{HF}}(\mu) \|\eta\|_{\mathcal{W}}. \end{aligned}$$

Dans le cas où l'opérateur  $\mathcal{B}$  est non-paramétrique, l'espace  $V_N^{\text{new}}$  devient indépendant du paramètre. Il peut donc être construit une fois pour toutes dans la phase *offline*, comme dans [2].

### 3 Nouvelle construction du modèle réduit

Dans le présent travail, nous nous intéressons au cas où l'opérateur  $\mathcal{B}(\mu)$  est paramétrique. Dans ce cas, l'espace enrichi  $V_N^{\text{new}}(\mu)$  dépend du paramètre, et doit donc être construit dans la phase *online*. Pour pallier à ce problème, nous proposons de construire un espace non paramétrique, qui sera donc construit une fois pour toutes dans la phase *offline*, comme une approximation de  $V_N^{\text{new}}(\mu)$  tout  $\mu \in \mathcal{D}$ . L'idée est d'approcher l'espace linéaire

$$S_R := \sum_{\mu \in \mathcal{D}} S_R(\mu),$$

par un sous-espace (idéalement) de petite dimension  $S_R^{\text{red}} \subset S_R$ , de sorte que la forme bilinéaire  $b(\mu; \cdot, \cdot)$  soit inf-sup stable par rapport à la paire  $(V_N + S_R^{\text{red}}, W_R^+)$  pour tout  $\mu \in \mathcal{D}$ .

Pour mettre en œuvre cette stratégie, nous nous appuyons sur le résultat théorique suivant qui donne une condition suffisante pour garantir la stabilité inf-sup ci-dessus. Notons

$$c_{N,R}(\mu) := \sup_{\eta \in W_R^+} \sup_{v \in V_N + S_R} \frac{b(\mu; v, \eta)}{\|v\|_{\mathcal{V}} \|\eta\|_{\mathcal{W}}}. \quad (9)$$

**Proposition 3.1.** *Soit  $S$  un sous-espace de dimension finie de  $S_R$ . Pour tout  $\mu \in \mathcal{D}$ , nous définissons*

$$\sigma_S(\mu) := \sup_{\substack{v \in S_R(\mu) \\ \|v\|_{\mathcal{V}} \leq 1}} \|v - \Pi_{V_N + S}^{\mathcal{V}}(v)\|_{\mathcal{V}} = \|(\mathbb{I} - \Pi_{V_N + S}^{\mathcal{V}})|_{S_R(\mu)}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})}. \quad (10)$$

Si, pour tout  $\mu \in \mathcal{D}$ ,

$$\sigma_S(\mu) < \frac{\beta_{N,R}(\mu)}{c_{N,R}(\mu)}, \quad (11)$$

la condition inf-sup suivante est vérifiée :

$$\beta_S(\mu) := \inf_{\eta \in W_R^+} \sup_{v \in V_N + S} \frac{b(\mu; v, \eta)}{\|v\|_{\mathcal{V}} \|\eta\|_{\mathcal{W}}} > 0, \quad (12)$$

avec

$$\beta_S(\mu) = \frac{\beta_{N,R}(\mu) - c_{N,R}(\mu)\sigma_S(\mu)}{1 + \sigma_S(\mu)}. \quad (13)$$

À l'aide du résultat de la proposition 3.1, nous avons conçu un algorithme appelé Projected Greedy Algorithm (PGA) qui, étant donné un sous-ensemble d'apprentissage  $\mathcal{D}_{\text{train}} \subset \mathcal{D}$ , l'espace vectoriel  $V_N$ , et une tolérance  $\delta > 0$ , renvoie un sous-espace  $S_R^{\text{red}}$  de  $S_R$  tel que

$$\sup_{\mu \in \mathcal{D}_{\text{train}}} \sigma_{V_N + S_R^{\text{red}}}(\mu) \leq \delta. \quad (14)$$

L'espace  $S_R^{\text{red}}$  est construit de manière progressive par le biais d'un algorithme glouton. Notons que comme  $\sigma_{V_N + S_R}(\mu) = 0$  pour tout  $\mu \in \mathcal{D}$ , il est raisonnable d'espérer construire un sous-espace  $S_R^{\text{red}}$  de  $S_R$  satisfaisant (14). Nous définissons alors la nouvelle base réduite primale  $V_N^R$  comme suit :

$$\begin{aligned} S_R^{\text{red}} &= \text{PGA}(\mathcal{D}_{\text{train}}, V_N, \delta_{\text{PGA}}) \subseteq S_R \subseteq \mathcal{V}, \\ V_N^{\text{red}} &:= V_N + S_R^{\text{red}} \subseteq \mathcal{V}, \end{aligned}$$

où  $\delta_{\text{PGA}}$  est suffisamment petit.

## 4 Résultats numériques

On considère deux demi-disques le premier  $\Omega_1$  de rayon  $R_1 = 1\text{m}$  fixé, et le deuxième  $\Omega_2(\mu)$  de rayon paramétrique  $R_2 := \mu \in \mathcal{D} := [0.9, 1.12](\text{m})$ . Pour des raisons de symétrie, des quarts de disques sont discrétisés (voir Figure 1). L'écart initial entre les deux disques est égal à  $\gamma_0 \in \mathbb{R}_+$ . On impose un déplacement de  $-d$  (resp.  $d$ ) sur  $\Gamma_1^{\text{haut}}$  (resp.  $\Gamma_2^{\text{bas}}$ ) de  $\Omega_1$  (resp. de  $\Omega_2(\mu)$ ), avec  $d \geq \frac{1}{2}\gamma_0$ . L'ensemble d'apprentissage est  $\mathcal{D}_{\text{train}} := \{0.905 + 0.01i, 1 \leq i \leq 24\}(\text{m})$  et l'ensemble de validation est  $\mathcal{D}_{\text{train}} := \{0.906 + 0.013i, 1 \leq i \leq 24\}(\text{m})$ .

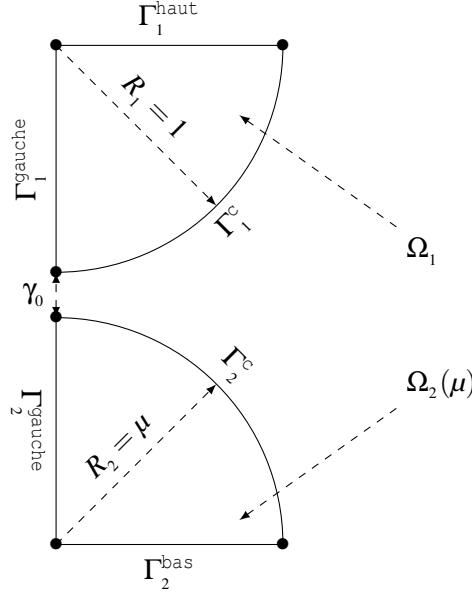


FIGURE 1 – Cas-test du contact de Hertz entre deux demi-disques

La formulation mathématique du problème de contact sans frottement conduit au problème de minimisation de la fonctionnelle quadratique  $\frac{1}{2}a(\mu; v, v) - f(\mu; v)$  sur  $\mathcal{V}(\mu)$  soumise à une condition dite de non-interpénétration qui, selon l'hypothèse de modélisation retenue, peut être soit en hypothèse des petites déformations (linéaire) soit en hypothèse des grandes déformations (non linéaire). Pour les résultats présentés, nous retenons l'hypothèse des petites déformations. Nous prenons  $\gamma_0 := 0.001\text{m}$  et  $d := 0.09\text{m}$ . Cette valeur, qui est inférieure à 10% du maximum entre  $R_1$  et  $R_2$ , permet de rester dans le domaine de validité de l'hypothèse des petites déformations (voir Figure 2).

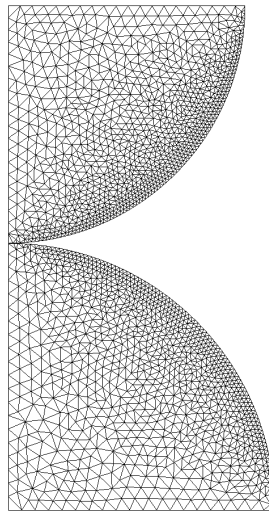


FIGURE 2 – Configuration initiale avec  $R_2 = 1.125\text{m}$ .

Comme on peut le voir sur la Figure 3 qui affiche la valeur de  $\beta_{N,R}$  et de  $\beta_{\text{HF}}$  en fonction de  $\mu$  pour une construction standard du modèle réduit, les valeurs de  $\beta_{N,R}(\mu)$  sont très petites dans le cas où  $N < R$ , ce qui traduit la non-stabilité du problème réduit. Dans le cas où  $N < R$ , un argument de dimension montre que la condition inf-sup ne peut être satisfaite.

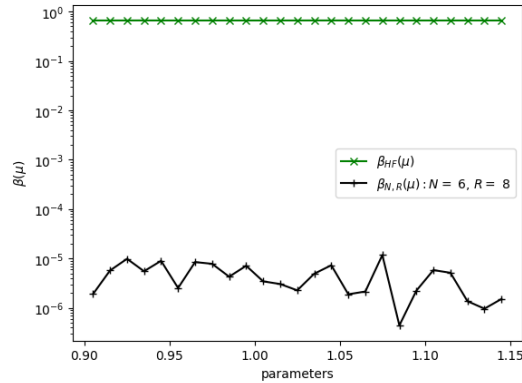


FIGURE 3 – Construction standard :  $\beta_{\text{HF}}(\mu)$  and  $\beta_{N,R}(\mu)$ .

Dans le cas où  $N \geq R$ , la construction standard du modèle réduit ne garantit pas de condition de stabilité inf-sup. La Figure 4 montre le coefficient  $\beta_{N,R}$  en fonction de  $\mu$  pour les paires  $(N,R) = (12,8)$  à gauche et  $(N,R) = (9,9)$  à droite. On peut voir que selon la valeur du paramètre  $\mu$ ,  $\beta_{N,R}(\mu)$  peut se comporter très différemment et prendre des valeurs très petites pour certaines valeurs paramètre.

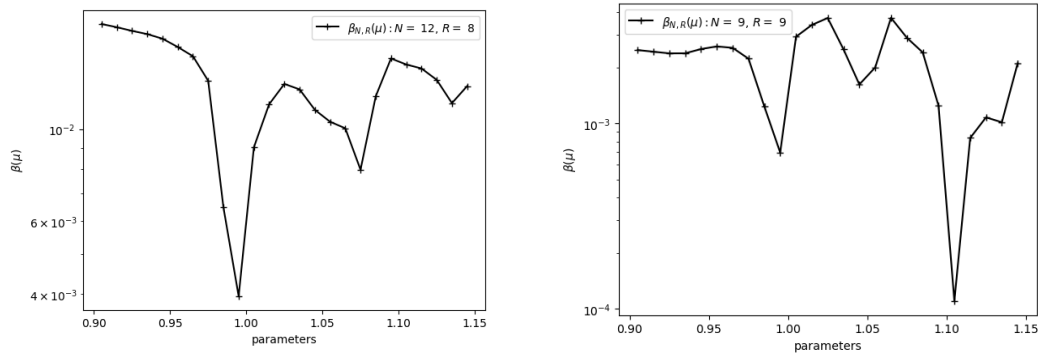


FIGURE 4 – Construction standard :  $\beta_{N,R}(\mu)$ . Gauche :  $(N,R) = (12,8)$ . Droite :  $(N,R) = (9,9)$ .

Considérons maintenant les résultats obtenus avec le modèle réduit stabilisé selon la stratégie proposée en Section 3. La Figure 5 donne une comparaison de  $\beta_{N,R}$  entre les cas standard (c'est-à-dire sans stabilisation), enrichissement *online* et enrichissement *offline* (algorithme PGA) pour les valeurs du paramètres dans l'ensemble de validation. Ces résultats montrent que l'algorithme PGA permet bien de retrouver la propriété de stabilité escomptée.

## 5 Conclusion

Nous avons proposé une méthode afin d'obtenir un opérateur de contact stable par rapport aux espaces réduits primal et dual. La stratégie proposée est *offline*, ce qui fait que dans le cadre de la réduction de modèle, où le principe d'une décomposition *offline/online* est crucial, elle présente un grand avantage par rapport à la stratégie *online* en termes de coût des calculs.

Nous avons appliqué la méthode proposée non seulement sur le cas des sphères de Hertz illustré ci-dessus mais également sur d'autres exemples comme le problème de contact en grands déplacements (donc dans le cas d'un opérateur non-linéaire) et le problème de l'obstacle à géométrie variable.

Une perspective de nos travaux est d'étendre ces résultats au cas du contact avec frottement.



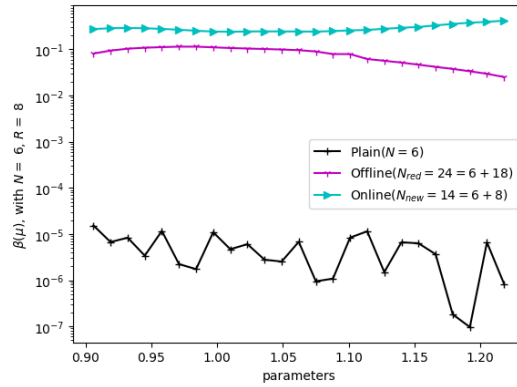


FIGURE 5 – Comparaison de  $\beta_{N,R}(\mu)$ .

## Références

- [1] Y. Maday, A. T. Patera, and G. Turinici. A priori convergence theory for reduced-basis approximations of single-parametric elliptic partial differential equations. *Journal of Scientific Computing*, 17(1-4) :437–446, 2002.
- [2] B. Haasdonk, J. Salomon, and B. Wohlmuth. A reduced basis method for parametrized variational inequalities. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 50(5) :2656–2676, 2012.
- [3] Z. Zhang, E. Bader, and K. Veroy. A slack approach to reduced-basis approximation and error estimation for variational inequalities. *Comptes Rendus Mathématique*, 354(3) :283 – 289, 2016.
- [4] S. Glas and K. Urban. Numerical investigations of an error bound for reduced basis approximations of non-coercive variational inequalities. *IFAC-PapersOnLine*, 48(1) :721 – 726, 2015.
- [5] A. Benaceur, A. Ern, and V. Ehrlacher. A reduced basis method for parametrized variational inequalities applied to contact mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 121(6) :1170–1197, 2020.
- [6] A. Chatterjee. An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current Science*, 78(7) :808–817, 2000.
- [7] Z. Luo and G. Chen. Foreword and introduction. In G. Chen and Z. Luo, editors, *Proper Orthogonal Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, pages xi–xvi. Academic Press, 2019.
- [8] B. Haasdonk, J. Salomon, and B. Wohlmuth. A Reduced Basis Method for the Simulation of American Options. *ENUMATH Leicester 2011 Proceedings Volume*, pages 821–829, 2013.