



HAL
open science

Réduction de Modèle des Structures Viscoélastiques par Balanced POD

Alexandre Berthet, Emmanuel Perrey-Debain, Jean-Daniel Chazot, Germes
Sylvain

► **To cite this version:**

Alexandre Berthet, Emmanuel Perrey-Debain, Jean-Daniel Chazot, Germes Sylvain. Réduction de Modèle des Structures Viscoélastiques par Balanced POD. 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717690

HAL Id: hal-03717690

<https://hal.science/hal-03717690v1>

Submitted on 8 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Réduction de modèle des structures viscoélastiques par Balanced POD pour la vibro-acoustique

A. Berthet¹, E. Perrey-Debain¹, J.-D. Chazot¹, S. Germès²

¹ Université de Technologie de Compiègne, {alexandre.berthet,jean-daniel.chazot,emmanuel.perrey-debain}@utc.fr

² Saint-Gobain Research Compiègne, sylvain.germes@saint-gobain.com

Abstract —

Le calcul du rayonnement acoustique d'une structure implique de connaître le champ de déplacements de la surface commune avec le fluide environnant. Nous nous intéressons ici au cas où la structure est sollicitée par un faible nombre de forces et où un grand nombre de déplacements est désiré. On peut alors définir une fonction de transfert reliant les inputs (forces injectées) et les outputs (déplacements observés). Une variante de la méthode de Balanced Proper Orthogonal Decomposition (BPOD) permet de construire un modèle réduit de la fonction de transfert reliant les inputs (forces injectées) et les outputs (déplacements observés). Cependant, l'application de cette méthode devient impossible quand la matrice de raideur dépend de la fréquence, ce qui est le cas avec des matériaux viscoélastiques. Ce problème peut être traité par la méthode de Golla-Hughes-MacTavish (GHM) qui, via l'ajout de nouvelles variables, rend le système constant. On montre que malgré l'augmentation de la taille des matrices, les coûts numériques de la BPOD peuvent être minimisés. La taille du modèle final ainsi que les temps de calculs sont drastiquement réduits, pour une erreur inférieure à 1%.

Mots clés — Réduction de modèle, Viscoélastique, Golla-Hughes-MacTavish, Balanced truncation, Balanced POD.

1 Introduction

En dynamique des structures, de nombreuses études sont menées sur les structures sandwich viscoélastiques telles que les pare-brises automobiles [1, 2]. La dépendance en fréquences des paramètres mécaniques (modules d'élasticité) rend inapplicables les méthodes de réduction de modèles traditionnelles telles que la projection modale. Certaines variantes, répertoriées dans [3], montrent qu'on peut construire une base constituée de modes réels ou complexes permettant de projeter le modèle même s'il dépend de la fréquence. Cependant, la matrice de raideur doit être réévaluée à chaque pas de fréquence avant de projeter le système. D'autres méthodes proposent de réduire une fonction de transfert précise définie pour un jeu d'inputs et d'outputs. C'est le cas de la méthode de *Balanced Truncation* (BT) [4] qui permet de réduire un modèle d'état linéaire et stable de petite ou moyenne taille. Pour les grands modèles, on utilise la *Balanced Proper Orthogonal Decomposition* (BPOD) [5] qui est un mélange de BT et de POD. Seulement, cette méthode ne s'applique que sur les systèmes constants, propriété que l'on perd en présence de matériaux viscoélastiques puisque les modules d'élasticité varient avec la fréquence. Pour pallier ce problème, on applique préalablement la méthode de Golla-Hughes-MacTavish (GHM) [6, 7, 8] qui permet de prendre en compte les effets d'amortissement en ajoutant des nouvelles variables au système éléments finis initial. Le nouveau système est quadratique et de taille plus importante, mais les matrices sont constantes.

Dans cet article, on montre d'abord comment appliquer la BPOD sur un modèle GHM en minimisant les coûts de calcul. A notre connaissance, très peu de papiers existent sur l'application de la BPOD en dynamique des structures, et aucun ne l'applique à des systèmes viscoélastiques. Ensuite, on utilise une méthode de projection développée par Rowley [10] qui permet d'adapter la BPOD dans le cas où un grand nombre d'outputs est désiré. Finalement, un exemple numérique illustre la performance de ces méthodes en comparant les temps de calcul du champ de déplacements d'une plaque sandwich viscoélastique obtenu avec et sans réduction de modèle. Ce cas de figure est semblable aux simulations vibro-acoustiques usuelles.

2 Méthode GHM

Dans le cas d'une structure constituée d'un matériau viscoélastique, les modules d'élasticité dépendent de la fréquence. Dans l'espace de Laplace, où $s = i\omega$, l'équation du mouvement s'écrit

$$(s^2\mathbb{M} + \mathbb{K}(s))q = \mathbb{F}, \quad (1)$$

où $q \in \mathbb{C}^n$ désigne le vecteur des déplacements, $\mathbb{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice de masse, $\mathbb{K}(s) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la matrice de raideur dépendante de la fréquence et $\mathbb{F} \in \mathbb{C}^n$ le vecteur force. Alors que le module de cisaillement peut se factoriser tel que $\mathbb{K}(s) = G(s)\bar{\mathbb{K}}$, Golla, Hughes et MacTavish [6, 7, 8] proposent de l'approximer par la fonction

$$G(s) = G_\infty \left(1 + \sum_{j=1}^k \hat{\alpha}_j \frac{s^2 + 2\hat{\zeta}_j \hat{\omega}_j s}{s^2 + 2\hat{\zeta}_j \hat{\omega}_j s + \hat{\omega}_j^2} \right) \quad (2)$$

où G_∞ correspond au module statique, et les k jeux de paramètres réels $(\hat{\alpha}_j, \hat{\zeta}_j, \hat{\omega}_j)$ sont déterminés par curve-fitting sur des données expérimentales. Une fois k nouveaux vecteurs $z_j \in \mathbb{C}^n$ contenant les coordonnées de dissipations définis tels que

$$z_j = \frac{\hat{\omega}_j^2}{s^2 + 2\hat{\zeta}_j \hat{\omega}_j s + \hat{\omega}_j^2} \mathcal{N}q, \quad (3)$$

avec $\mathcal{N} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice non singulière quelconque, le nouveau système d'équations est de taille $N = n(1+k)$ et sous une forme quadratique tel que

$$(s^2M + sD + K)v = F \quad (4)$$

où, en posant $\mathbb{K} = G_\infty \bar{\mathbb{K}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$M = \begin{bmatrix} \mathbb{M} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\omega}_1^2} \mathcal{N} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\hat{\alpha}_k}{\hat{\omega}_k^2} \mathcal{N} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2\hat{\alpha}_1 \hat{\zeta}_1}{\hat{\omega}_1} \mathcal{N} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{2\hat{\alpha}_k \hat{\zeta}_k}{\hat{\omega}_k} \mathcal{N} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{Bmatrix} q \\ z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

$$K = \begin{bmatrix} \mathbb{K}(1 + \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i) & -\hat{\alpha}_1 \mathbb{K} & \dots & -\hat{\alpha}_k \mathbb{K} \\ -\hat{\alpha}_1 \mathcal{N} & \hat{\alpha}_1 \mathcal{N} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ -\hat{\alpha}_k \mathcal{N} & \dots & 0 & \hat{\alpha}_k \mathcal{N} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} \mathbb{F} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix},$$

avec $v \in \mathbb{C}^N$ contenant à la fois les déplacements physiques q et les coordonnées de dissipation z_j .

3 Réduction du système

3.1 Balanced POD

La méthode de *Balanced Proper Orthogonal Decomposition* (BPOD) est une approximation de la *Balanced Truncation* [4]. Elle permet de réduire un modèle d'état linéaire et stable en le projetant dans une base où les états (degrés de libertés) ont le même degré de contrôlabilité et d'observabilité. En considérant un nouveau vecteur d'état $x = [v^T \quad s v^T]^T$, l'équation de GHM (4) peut se réécrire sous la forme

$$\begin{cases} sEx = Ax + Gu \\ y = Lx \end{cases} \quad (6)$$

avec $u \in \mathbb{C}^p$ et $y \in \mathbb{C}^m$ les vecteurs d'inputs (forces distribuées sur la structure) et d'outputs (combinaisons linéaires des inconnues). Ces matrices, issues de la linéarisation du système (4), sont de taille double ($2N$):

$$E = \begin{bmatrix} D & M \\ \mathcal{F} & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & \mathcal{F} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L = [C \quad 0], \quad (7)$$

où $G \in \mathbb{R}^{2N \times p}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times 2N}$ sont les matrices d'inputs et d'outputs, et $\mathcal{F} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ une matrice non singulière quelconque [9]. La BPOD est basée sur l'approximation des Grammiens de *contrôlabilité* P et d'*observabilité* et Q . On utilise une règle d'intégration numérique avec α points d'intégration telle que

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\infty R(\omega)R^*(\omega)d\omega \approx \sum_{j=1}^\alpha R(\omega_j)R(\omega_j)^*\delta_j = RR^*, \\ Q &= \int_0^\infty S(\omega)S^*(\omega)d\omega \approx \sum_{j=1}^\alpha S(\omega_j)S(\omega_j)^*\delta_j = SS^*, \end{aligned} \quad (8)$$

avec $R(\omega) = (i\omega E - A)^{-1}G$ et $S(\omega) = (i\omega E^* - A^*)^{-1}L^*$ les réponses des systèmes direct et adjoint à la fréquence ω_j . On note R et S les matrices regroupant les solutions pondérées pour les α pulsations ω_j :

$$\begin{aligned} R &= [\dots R(\omega_j)\sqrt{\delta_j} \dots]_{j=1,\dots,\alpha}, \\ S &= [\dots S(\omega_j)\sqrt{\delta_j} \dots]_{j=1,\dots,\alpha}. \end{aligned} \quad (9)$$

La matrice de projection T qui permet de balancer le système, ainsi que son inverse T^{-1} , sont tirées de la SVD de $S^*ER \in \mathbb{C}^{\alpha m \times \alpha p}$ telle que

$$S^*ER = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix} \approx U_1 \Sigma_1 V_1^* \quad (10)$$

où, le plus souvent, $\alpha m, \alpha p \ll 2N$. Une troncature aux r premières valeurs singulières donnent

$$T = RV_1 \Sigma_1^{-\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad T^{-1} = \Sigma_1^{-\frac{1}{2}} U_1^* S^*. \quad (11)$$

Le système réduit s'écrit alors

$$\begin{cases} s\hat{x} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{G}u \\ y &= \hat{L}\hat{x} \end{cases} \quad (12)$$

avec $\hat{x} = Tx$, $\hat{A} = T^{-1}AT \in \mathbb{C}^{r \times r}$, $\hat{G} = T^{-1}G \in \mathbb{C}^{r \times m}$, $\hat{L} = LT \in \mathbb{C}^{p \times r}$. Les deux fonctions de transfert du système initial et du système réduit respectivement H et \hat{H} telles que

$$H(s) = \mathbb{C} (s^2\mathbb{M} + \mathbb{K}(s))^{-1} \mathbb{B}, \quad (13a)$$

$$\hat{H}(s) = \hat{L} (sI - \hat{A})^{-1} \hat{G}, \quad (13b)$$

relient toutes deux les inputs aux outputs tel que $y = Hu \approx \hat{H}u$.

3.2 Réduction des coûts

Dans le cas où le nombre d'outputs est élevé, la matrice L possède un nombre important de colonnes. Cette situation peut survenir lorsque l'on souhaite observer la déformée de toute la structure. On a alors $L = I$, ce qui revient à calculer l'inverse de $i\omega_j E^* - A^*$. Afin de réduire ces coûts, Rowley [10] propose de changer de base avant de calculer les solutions du problème adjoint. Le système direct s'écrit

$$\begin{aligned} sEx &= Ax + Gu \\ y &= \mathcal{P}Lx \end{aligned}, \quad (14)$$

avec $\mathcal{P} = \Phi\Phi^*$ une projection orthogonale de rang $l \ll m$. Sachant que $\Phi^*\Phi = I$ (vrai pour n'importe quelle projection orthogonale), on peut montrer que les snapshots à calculer sont $\tilde{S}(\omega_j) = (i\omega_j E^* - A^*)^{-1}L^*\Phi$. Le terme de droite $L^*\Phi$ ne possédant maintenant plus que l colonnes, le calcul de \tilde{S} est plus rapide et moins coûteux. Rowley montre que la base \mathcal{P} optimale provient des l premiers modes POD $\Phi = [\phi_1 \ \dots \ \phi_l]$ de R . Pour les obtenir, on calcule dans un premier temps les l premiers vecteurs et valeurs propres de $(LR)^*LR$ tels que

$$\Psi = [\psi_1 \ \dots \ \psi_l] \quad \text{and} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_l \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Alors, les modes POD Φ tels que $\mathcal{P} = \Phi^* \Phi$ sont

$$\Phi = LR\Psi\Lambda^{-\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Les matrices de projection T et T^{-1} se déduisent maintenant de la SVD sur $\tilde{S}^*ER \in \mathbb{C}^{\alpha l \times \alpha p}$.

Quelques soient les nombres d'inputs et d'outputs, la résolution des systèmes direct et adjoint reste coûteuse vu la taille des matrices linéarisées (7). Cependant, ce coût de calcul peut être largement réduit. Concernant les inputs, on s'aperçoit que la structure du vecteur $x = [v^T \quad s v^T]^T$ et l'équation (3) permettent de déduire $R(\omega_j)$ directement de q . L'effort numérique est donc relatif à l'équation (1) dont la taille est bien inférieure à l'équation (6). Pour la matrice S (ou \tilde{S}), ce raisonnement ne peut s'appliquer que si les matrices E et A sont hermitiennes. On doit alors poser $\mathcal{N} = \mathbb{K}$ lors de la construction des matrices GHM (valable uniquement en absence de singularité dans \mathbb{K}) et $\mathcal{F} = M$ dans l'étape de linéarisation. Comme \mathbb{K} et \mathbb{M} sont réelles et symétriques, on montre facilement que E et A sont réelles et symétriques, par conséquent hermitiennes.

4 Exemple numérique

Dans cette section, on considère une poutre sandwich représentée sur la Figure 1. La structure, encadrée à sa base, est constituée de deux couches de verre séparées par une couche de matériau viscoélastique 3M ISD112 [11]. Les paramètres mécaniques ainsi que les paramètres GHM sont respectivement donnés dans les tables 1 et 2. On définit 3 inputs comme les 3 forces normales représentées sur la Figure 1, ainsi que 2715 outputs correspondant aux déplacements selon u_x , u_y et u_z des nœuds de la surface inférieure de la structure. L'objectif est de construire un modèle réduit valable entre 10Hz et 1000Hz en appliquant les méthodes décrites aux sections précédentes, puis d'évaluer l'impact des paramètres tels que le nombre de modes l et le nombre de valeurs singulières r .

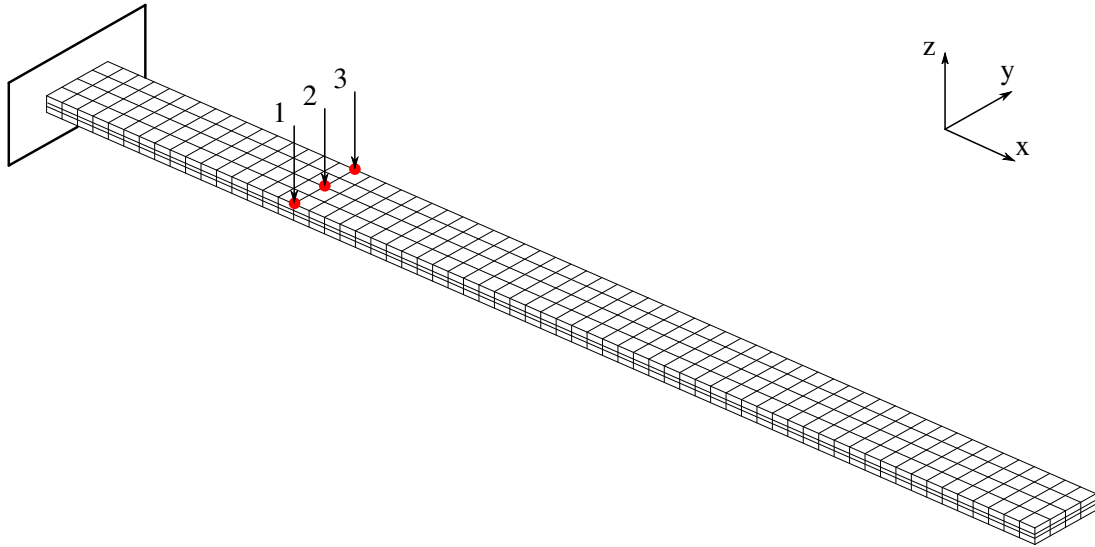


Figure 1: Poutre sandwich encadrée, $64 \times 4 \times 3$ éléments, 3 inputs (points rouges) and 2715 outputs.

On représente les valeurs propres (valeurs absolues) de la matrice $(LR)^*LR$ sur la Figure 2a où on voit une cassure à partir de la 35^{ème} valeur. On considère ici cette valeur comme seuil de troncature optimal, bien que Rowley propose de le définir à partir d'un critère [10]. Dans cette étude on construira 5 modèles réduits en considérant 1 seul mode, puis 5, 10, 20 et 35. Les valeurs singulières sont représentées sur la Figure 2b où l'on voit clairement que le nombre de valeurs significatives augmente avec le nombre de modes propres. On s'attend donc à voir la précision du modèle réduit augmenter avec le nombre de modes l . Pour cela on définit d'abord l'erreur relative ε entre les fonctions de transfert initiale H et réduite \hat{H} grâce à la norme \mathcal{L}_2 telle que

$$\varepsilon = \frac{\|H - \hat{H}\|_2}{\|H\|_2}. \quad (17)$$

Ensuite, on observe l'évolution de cette erreur en considérant dans un premier temps toutes les valeurs singulières (Figure 3a) puis en ne gardant que les 27 premières (Figure 3b). Sans troncature, 1 seul mode produit un modèle réduit de dimensions 50×50 avec moins de 1% d'erreur. Autrement, les modèles sont de dimensions 150×150 et les erreurs sont nettement plus faibles. On s'aperçoit qu'à partir de 10 modes les courbes d'erreurs sont confondues, ce qui est aussi le cas pour les premières valeurs singulières. En tronquant les SVD aux 27 premières valeurs, tous les modèles réduits sont de dimensions 27×27 avec là encore moins de 1% d'erreur. On retrouve une corrélation entre les courbes de valeurs singulières et d'erreurs, notamment pour 20 et 35 modes.

Les temps de calculs relatifs aux résolutions des équations (1) et (6) sont donnés dans la table 3. Les fonctions de transferts réduites se calculent donc 700 fois plus rapidement sans troncature et 2500 fois avec troncature, tout ça avec un taux d'erreur très acceptable comme en témoignent les déformées opérationnelles représentées sur la Figure 4.

Paramètre	Verre inférieur	Viscoélastique	Verre supérieur
Length (mm)	300	300	300
Width (mm)	200	200	200
Thickness (mm)	1.6	0.8	2.1
Young's modulus (Pa)	$79 \cdot 10^9$	GHM	$79 \cdot 10^9$
Density ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	2500	1600	2500
Poisson ratio (-)	0.22	0.49	0.22

Table 1: Paramètres mécaniques.

Oscillateur	G_∞ (Pa)	$\hat{\alpha}$	$\hat{\zeta}$	$\hat{\omega}$
1	$3 \cdot 10^6$	4.8278	22.013	28045
2		14.548	2.1275	41494
3		40.043	0.6165	41601

Table 2: Paramètres GHM du matériau 3M ISD112 à 27°C [11].

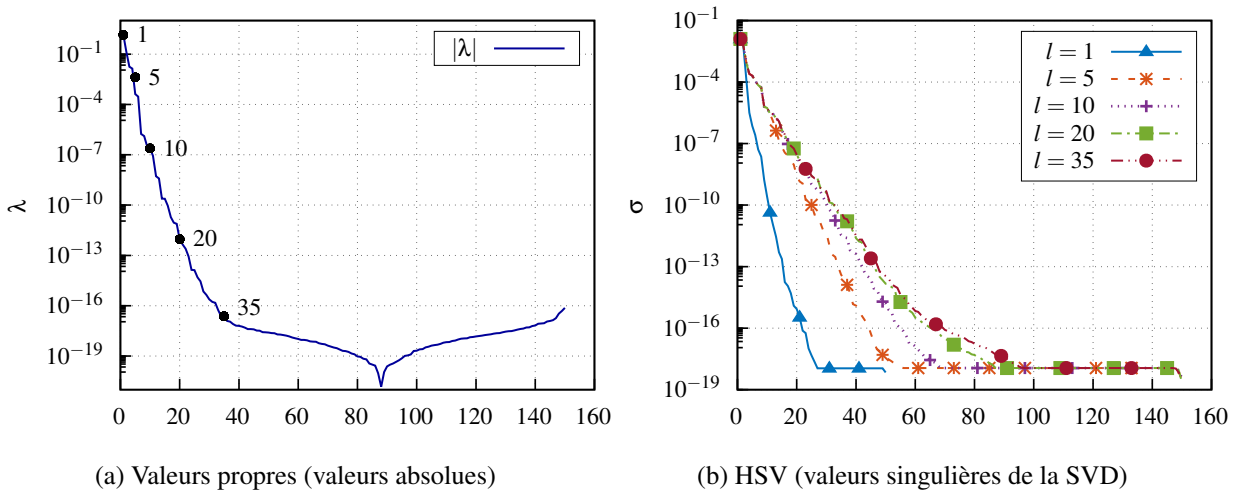


Figure 2: Valeurs propres de la base de projection de Rowley et valeurs singulières correspondant à 5 troncatures (nombre de modes l) différentes.

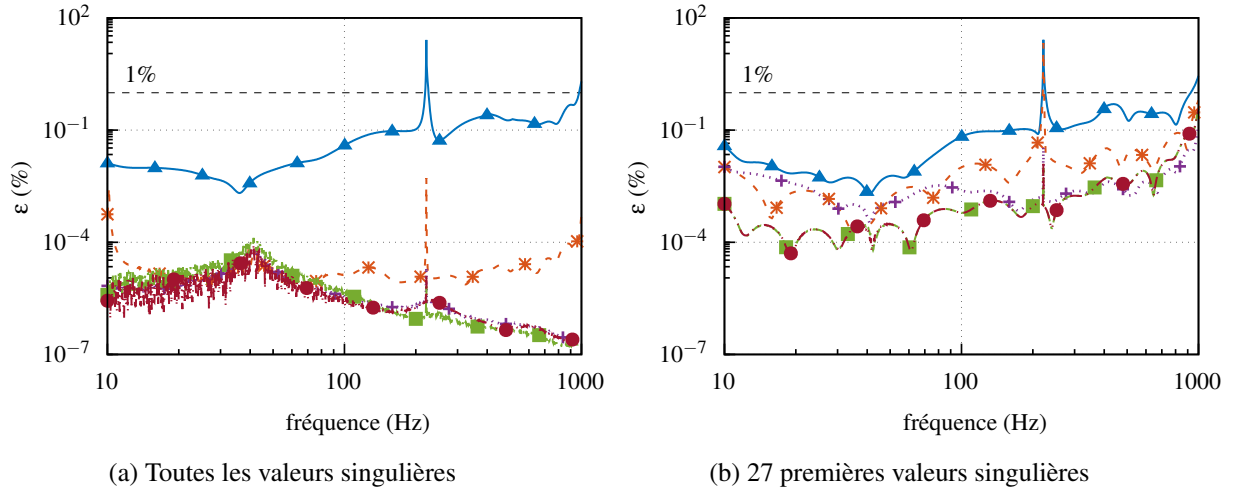
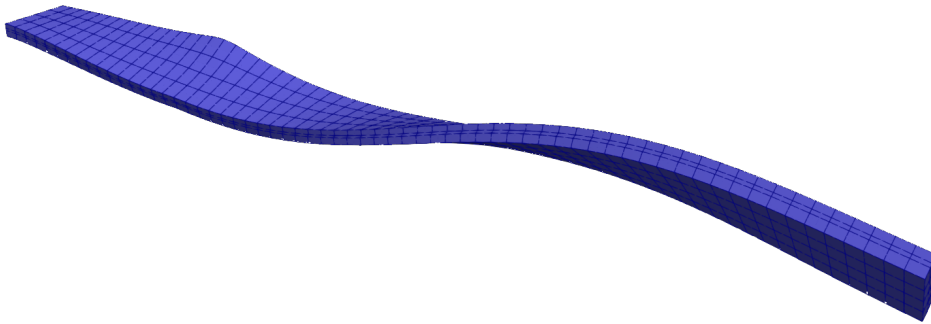


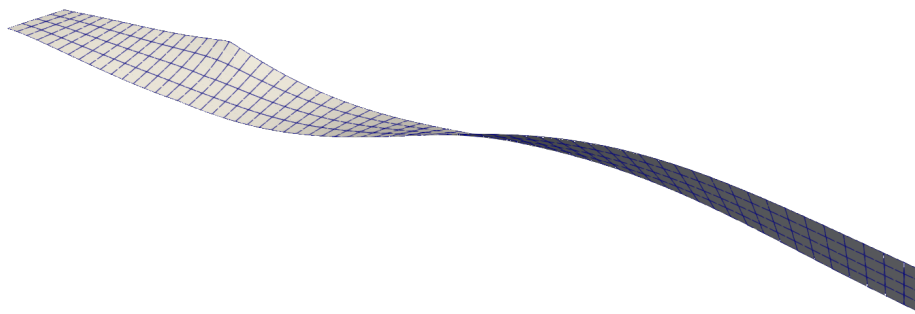
Figure 3: Évolution de l'erreur relative ε (%) sur les fonctions de transfert en fonction du nombre de valeurs propres l : 1 (—▲—), 5 (- - * - -), 10 (.....+.....), 20 (- - ■ - -) and 35 (- - ● - -).

Fonction de transfert	Sans troncature	Avec troncature
$H(\omega) = \mathbb{C}(-\omega^2 \mathbb{M} + \mathbb{K}(\omega))^{-1} \mathbb{B}$	1071 s	
$\hat{H}(\omega) = \hat{\mathbb{L}}(i\omega \mathbb{I} - \hat{\mathbb{A}})^{-1} \hat{\mathbb{G}}$	1.37 s	0.43 s

Table 3: Temps de calculs pour les fonctions de transfert avec 500 points.



(a) Structure entière, dimensions 13785×13785



(b) Modèle réduit (face inférieure), dimensions 27×27

Figure 4: Déformée opérationnelle à $f = 900\text{Hz}$ pour un jeu de forces en inputs $u = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}^T$. L'erreur sur les fonctions de transfert à cette fréquence est de 0.29%.

5 Conclusion

Ce papier montre comment réduire efficacement un modèle numérique de structure viscoélastique dédié à la simulation vibro-acoustique. Dans le cas où la structure n'est sollicitée qu'en peu de points et où un large champ de déplacement est désiré, la méthode GHM ainsi qu'une variante de la BPOD sont utilisées pour construire un modèle réduit reliant les jeux d'inputs aux outputs.

Les résultats montrent qu'il est possible de créer des modèles réduits à seulement quelques dizaines d'inconnues, générant moins de 1% d'erreur et avec des temps de calcul près de 2500 fois plus rapides. Le prix à payer pour construire ce modèle réduit est d'abord la résolution du problème direct en plusieurs fréquences. D'une part, seuls quelques points d'intégration sont à considérer, et d'autre part on a montré que les coûts de calcul peuvent être minimisés. Ensuite, on procède à un changement de base pour diminuer considérablement la taille de la matrice d'outputs. Ainsi, la résolution du problème adjoint se fait plus facilement car le terme de droite possède moins de colonnes. La SVD s'applique également sur une matrice de dimensions plus faibles. Le nombre de modes propres améliore la précision du modèle réduit même si une dizaine seulement suffit à atteindre un niveau d'erreur plus qu'acceptable pour un ingénieur. La qualité du modèle réduit peut aussi être améliorée en augmentant le nombre de points d'intégrations, ce qui revient à mieux approximer les Grammiens.

Ce travail peut se décliner aux systèmes du second ordre où la BPOD peut être adaptée. La méthode de projection de Rowley devra aussi être réécrite pour correspondre à ce nouveau formalisme. Afin d'illustrer au mieux l'utilité de cette méthode pour les simulations vibro-acoustiques, il serait intéressant de poursuivre cette étude avec un calcul de rayonnement acoustique par BEM ou par l'intégrale de Rayleigh par exemple.

Remerciements Ces travaux ont été réalisés dans le cadre de la chaire "surfaces intelligentes et transparentes pour l'automobile du futur", soutenue par l'UTC, la Fondation UTC pour l'innovation et SAINT-GOBAIN. Les auteurs remercient également le Fonds Européen de Développement Régional (FEDER) 2014/2020 et la chaire "surfaces intelligentes et transparentes pour l'automobile du futur" pour le cofinancement de ce travail.

References

- [1] K. Bouayed, M.-A. Hamdi. *Finite element analysis of the dynamic behavior of a laminated windscreen with frequency dependent viscoelastic core*, The Journal of the Acoustical Society of America, 757-766, 2012.
- [2] E. Balmès, M. Corus, S. Germès. *Model validation for heavily damped structures. Application to a windshield joint*, Proceedings of ISMA2006: International Conference on Noise and Vibration Engineering, 2006.
- [3] L. Rouleau, J.-F. Deü, A. Legay. *A comparison of model reduction techniques based on modal projection for structures with frequency-dependent damping*, Mechanical Systems and Signal Processing, 110-125, 2017.
- [4] B. Moore. *Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction*, IEEE journal, 17-32, 1981.
- [5] K. Willcox, J. Peraire. *Balanced Model Reduction via the Proper Orthogonal Decomposition*, AIAA Journal, 2323-2330, 2002.
- [6] D. F. Golla, P. C. Hughes. *Dynamics of Viscoelastic Structures-A Time-Domain, Finite Element Formulation*, Journal of Applied Mechanics, 897-906, 1985.
- [7] D. MacTavish. *The mini-oscillator technique : a finite element method for the modelling of linear viscoelastic structures*, Journal of Applied Mechanics, 1988.
- [8] D. MacTavish, P. C. Hughes. *Modeling of linear viscoelastic space structures*, ASME Transactions Journal of Vibration Acoustics, 103-110, 1993.
- [9] F. Tisseur, K. Meerbergen. *The Quadratic Eigenvalue Problem*, SIAM Review, 235-286, 2001.
- [10] C. W. Rowley. *Model Reduction For Fluids, Using Balanced Proper Orthogonal Decomposition*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 997-1013, 2005.
- [11] C. M. A. Vasques, J. Dias Rodrigues, R. A. S. Moreira. *Experimental Identification of GHM and ADF Parameters for Viscoelastic Damping Modeling*, III European Conference on Computational Mechanics, 173-186, 2006.