



**HAL**  
open science

## Propagation de fissure de fatigue par champ de phase avec raffinement adaptatif de maillage

Adrien Jacon, Benoit Prabel, Gergely Molnar, Anthony Gravouil

### ► To cite this version:

Adrien Jacon, Benoit Prabel, Gergely Molnar, Anthony Gravouil. Propagation de fissure de fatigue par champ de phase avec raffinement adaptatif de maillage. 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717687

**HAL Id: hal-03717687**

**<https://hal.science/hal-03717687>**

Submitted on 8 Jul 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Propagation de fissure de fatigue par champ de phase avec raffinement adaptatif de maillage

A. Jacon<sup>1,2</sup>, B. Prabel<sup>2</sup>, G. Molnár<sup>1</sup>, A. Gravouil<sup>1</sup>,

<sup>1</sup> Univ Lyon, INSA-Lyon, CNRS UMR5259, LaMCoS, F-69621, France, {gergely.molnar, anthony.gravouil}@insa-lyon.fr

<sup>2</sup> Université Paris-Saclay, CEA, Service d'Études Mécaniques et Thermiques, 91191, Gif-sur-Yvette, France., {adrien.jacon, benoit.prabel}@cea.fr

**Résumé** — Dans un cadre de propagation multi-fissure, un outil de simulation numérique robuste et efficace est difficile à construire, étant donnée la complexité des phénomènes mis en jeu et la non connaissance à priori des trajets de fissure. Nous développons ici, dans le code de calcul Cast3M, une méthode capable de traiter cette complexité à travers un modèle de champ de phase, étendu pour des sollicitations en fatigue. Par ailleurs, un couplage avec une méthode de raffinement adaptatif de maillage est effectué pour pouvoir traiter des cas industriels complexes en des temps de calculs raisonnables.

**Mots clés** — Propagation de fissure, champ de phase, fatigue, AMR

## Introduction

La simulation numérique de propagation de fissure en fatigue est un enjeu majeur de l'industrie, où l'on cherche à améliorer notre capacité de prédiction dans des cadres toujours plus complexes, comme la propagation multi-fissure. La complexité de ce contexte provient de l'ignorance du trajet de fissure à priori, de l'interaction entre les différentes fissures, et du traitement du grand nombre de cycle des simulations.

Dans ce contexte nous employons le modèle champ de phase pour la rupture fragile, reconnu pour sa grande flexibilité et sa capacité prédictive dans un cadre complexe. Ce type de modèle, basé sur une description diffuse de la fissure, permet de faire le pont entre la mécanique linéaire élastique de la rupture et la mécanique de l'endommagement, en traitant des phénomènes de rupture complexes (initiation, bifurcation, branchement) sans ajout de critère tout en suivant un cadre thermodynamique rigoureux.

Un modèle pour la rupture fragile est implémenté avant d'être étendu à une propagation en fatigue, sur le code calcul élément finis du CEA, Cast3M. Par ailleurs, afin de traiter efficacement la discrétisation spatiale très fine nécessaire pour capturer la représentation diffuse de la fissure, nous cherchons à coupler ce modèle à un algorithme de raffinement adaptatif de maillage. Ceci dans l'optique de rendre possible le traitement de cas industriel multi-fissure, où un raffinement très fin de tout le domaine serait obligatoire pour garantir la précision des résultats, puisqu'on ne sait pas quelle trajectoires vont emprunter ces fissures.

Nous présentons ici la base théorique et les choix de modélisation effectués pour l'implémentation du modèle champ de phase en rupture fragile sur Cast3M, puis nous présentons les travaux effectués pour coupler ce modèle à du raffinement adaptatif de maillage et à une extension du modèle en fatigue.

## 1 Modèle champ de phase en rupture fragile

### 1.1 L'approche variationnelle à la rupture fragile

Francfort et Marigot [4] proposent en 1998 de revisiter le problème de rupture par une approche variationnelle. Cela commence par la réécriture du critère énergétique de Griffith sous forme variationnelle :

$$\Pi(u, \Gamma) = \int_{\Omega} E(u) dV + \int_{\Gamma} G_c d\Gamma - \int_{\partial\Omega} P_{ext}(u) dA \quad (1)$$

Avec  $E(u)$  la densité d'énergie élastique du matériau,  $P_{ext}$  la densité d'énergie due aux efforts vo-

luminiques et surfaciques extérieurs,  $\Gamma$  la fissure et  $G_c$  le taux de restitution d'énergie. Les auteurs ont ainsi transformé le problème de rupture en un problème de minimisation de fonctionnelle : On cherche  $u$ , le champ de déplacement et  $\Gamma$ , la fissure, qui minimise  $\Pi$ . Étant donné l'aspect purement dissipatif du phénomène de fissuration on cherchera à respecter une contrainte d'irréversibilité. On voit bien que, sous cette forme, le traitement numérique de la formulation ne peut pas se faire directement.

Bourdin [2], propose une première implémentation de la méthode en 2000. Pour ce faire il approxime la fonctionnelle par une nouvelle fonctionnelle dépendante de deux paramètres définis sur tout le domaine,  $u$  et  $d$ , ce dernier servant à régulariser la topologie de la fissure.

On peut aussi visualiser  $d$  comme une variable scalaire qui représente l'endommagement : égale à 1 quand le matériau est complètement endommagé et 0 quand il est en bon état. On diffuse l'endommagement sur une certaine longueur  $l_c$ , longueur caractéristique du modèle. A travers cette régularisation, la formulation se rapproche des méthodes par gradient d'endommagement et du reste des modèles ayant une représentation diffuse de la fissure. La fonctionnelle ainsi régularisée devient :

$$\Pi_{l_c}(u, d) = \int_{\Omega} E(u, d) dV + \int_{\Omega} G_c \cdot \gamma(d, \nabla d) dV - \int_{\partial\Omega} P_{ext}(u) dA \quad (2)$$

$$W_{\Gamma} = \int_{\Gamma} G_c d\Gamma \simeq \int_{\Omega} G_c \cdot \gamma(d, \nabla d) dV \quad (3)$$

$$\sigma \cdot n = t \text{ sur } \partial\Omega_1 \quad (4)$$

$$u = b \text{ sur } \Omega_1 \quad (5)$$

$$\nabla d \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (6)$$

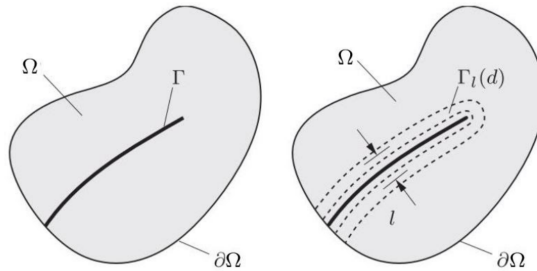


FIGURE 1 – Régularisation de la fissure sur le domaine par un champ d'endommagement  $d$ , issu de [9]

La formulation est traitée à travers la méthode des éléments finis. La régularisation de la discontinuité nous impose un maillage très fin dans la zone où évolue la fissure. Étant donné notre contexte en multi-fissuration, où l'on ne connaît pas le trajet de propagation a priori, il nous faut mailler finement tout le domaine au début de la simulation. C'est une des raisons qui motive le couplage champ de phase/raffinement adaptatif de maillage.

## 1.2 Topologie de fissure et décomposition de l'énergie élastique

Réécrivons plus précisément le terme lié à l'énergie de la fissure dans (2) :

$$W_{\Gamma} = \int_{\Omega} G_c \cdot \gamma(d, \nabla d) dV = \frac{G_c}{c_w} \cdot \int_{\Omega} \left( \frac{w(d)}{l_c} + l_c \cdot |\nabla(d)|^2 \right) dV \quad (7)$$

Avec  $\gamma(d, \nabla d)$ , qui décrit une densité de surface de fissure. Le choix de  $w(d)$  est lié à la topologie de la fissure, nous choisissons dans ce travail d'employer le modèle AT2, soit

$$w(d) = d^2 \text{ et } c_w = 2 \quad (8)$$

De la même façon, nous pouvons développer le terme lié à l'énergie interne au solide dans (2) :

$$\int_{\Omega} E(u, d) dV = \int_{\Omega} g(d) \cdot \psi_0^+(u) + \psi_0^-(u) dV \quad (9)$$

Pour prendre en compte certains effets observés expérimentalement, (refermeture des lèvres de fissures, réponse non dégradée en compression), on décompose l'énergie élastique en deux composantes, une active  $\psi_0^+$  qui intervient dans la problématique d'endommagement, et une passive  $\psi_0^-$ . On considère dans ce travail que seules la partie positive des déformations principales participe à la dégradation du matériau, donc la partie active ici présentée n'est autre que la partie liée aux déformations principales positives. Cette méthode est communément nommée la décomposition spectrale dans la littérature. Nous nous inspirons pour cette décomposition de [9], [1], [10]. Enfin, dans ce travail nous choisissons une fonction de dégradation quadratique, tel que :

$$g(d) = (1 - d)^2 \quad (10)$$

### 1.3 Méthode de résolution

Étant donnée la difficulté de minimiser la fonctionnelle régularisée par rapport aux deux inconnues en même temps, nous choisissons d'adopter une approche étagée pour la minimisation de la fonctionnelle :

- Minimisation d'un problème mécanique à endommagement constant
- Minimisation d'un problème d'endommagement à champs mécanique constant
- Passage direct au pas de temps suivant

C'est l'approche proposée par Miehe [9], qui semble pertinente dans un contexte en fatigue, où l'endommagement augmente de façon très lente à l'échelle du cycle.

Avec les différents choix de modélisation explicités dans la partie précédente, on peut poser les deux formulations fortes suivantes :

$$\text{div}(\sigma(d)) + b = 0 \quad (11a)$$

$$\sigma \cdot n = t \quad (11b)$$

$$2 \cdot (d - 1) \cdot \psi_0^+ + \frac{G_c}{l_c} \cdot d - G_c \cdot l_c \cdot \Delta d = 0 \quad (11c)$$

$$\nabla d \cdot n = 0 \quad (11d)$$

[12a] et [12b] à  $d$  constant, qui correspond à la minimisation de la fonctionnelle par rapport à  $u$  à  $d$  constant, puis [12c] et [12d] qui correspond à la minimisation de la fonctionnelle à  $\psi_0^+$  constant.

D'après les travaux de [9], nous opérons le couplage entre les deux problèmes non pas avec  $\psi_0^+$ , mais avec  $H$ , le champ d'Histoire, définit comme la valeur maximale de la densité d'énergie élastique non endommagée sur tout l'histoire du chargement. Soit pour un temps  $b > a$  :

$$\begin{aligned} H_b &= \psi_0^+ \text{ si } \psi_0^+(b) > H_a \\ &= H_a \text{ sinon} \end{aligned} \quad (12)$$

On résout donc le problème en [12c], en remplaçant  $\psi_0^+$  par  $H$ .  $H$  étant ici la force motrice de la fissure, en ne gardant que sa valeur maximum, on respecte approximativement l'irréversibilité du phénomène de rupture, sans ajouter de traitements de contraintes dans nos problèmes de minimisations.

### 1.4 Validation de l'implémentation en rupture fragile

Afin de valider l'implémentation réalisée nous utilisons quelques cas tests classiques de la littérature champ de phase, et notamment : le « single-edge notched sample » sollicité en tension. Nous comparons les résultats obtenus aux articles [10], [9].

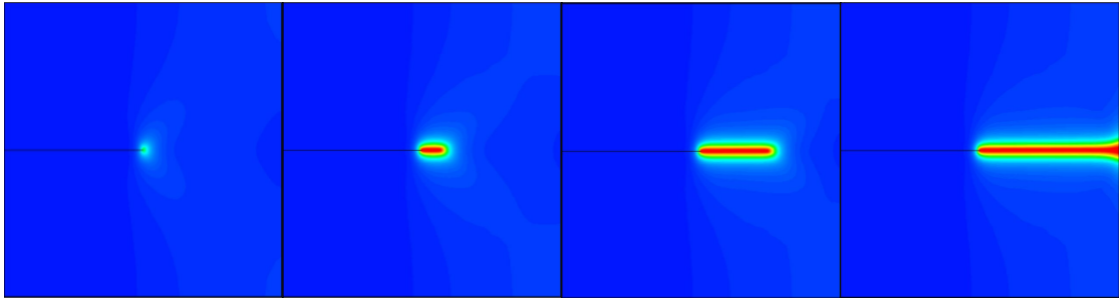


FIGURE 2 – Endommagement sur tout le domaine à plusieurs pas de déplacement

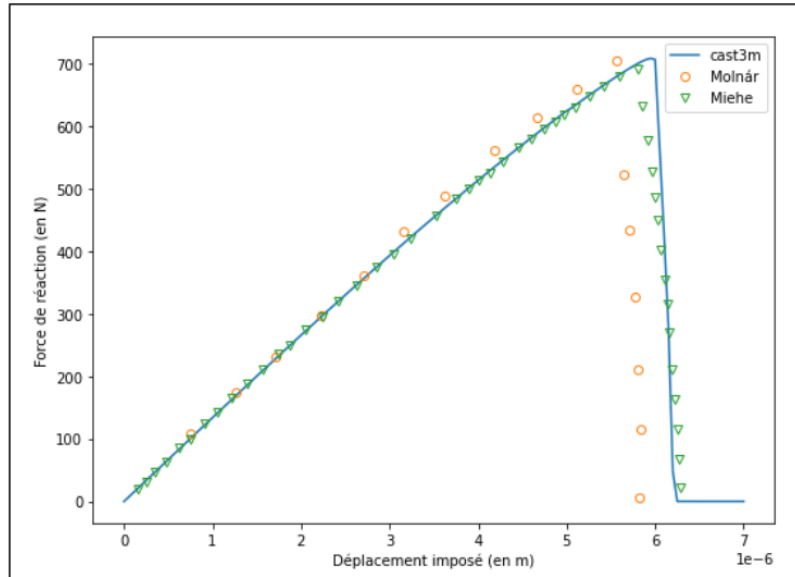


FIGURE 3 – Comparaison de la force de réaction en fonction du déplacement imposé

## 2 Raffinement de maillage adaptatif

Cette thèse se fait dans la continuité des travaux de G. Gibert [5]. Nous réutilisons dans nos travaux beaucoup des outils numériques développés dans cette thèse, et les étendons à un couplage au modèle champ de phase.

### 2.1 Générateur de maillage

Nous choisissons une méthode de h-raffinement hiérarchique pour ces travaux. L'opérateur prend en entrée un maillage grossier et une carte de densité qui indique la taille de maille cible associée à chaque endroit du maillage. En 2D, un élément qui ne respecte pas cette carte de densité, sera subdivisé en 4 éléments en ajoutant un noeud au milieu de chacune de ses arêtes fig.(4). Ces noeuds posent des problèmes de continuité de l'approximation éléments finis, ce sont des "hanging-nodes". Des relations linéaires de conformités sont imposées et intégrées à la résolution du problème éléments finis par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Sur la figure (4), les degrés de liberté associés au hanging node 10, sont définis comme une combinaison linéaire des degré de liberté associés aux noeuds 5 et 2.

### 2.2 Transferts de champs

Le modèle champ de phase, n'introduit pas de difficulté particulière qui nécessite un travail important du côté de la projection des champs, si on considère qu'on raffine toujours vers des maillages plus fins. Une stratégie très simpliste sera donc adoptée pour transférer les champs calculés sur les maillages grossiers, vers les maillages raffinés. Dans le contexte de la méthode des éléments finis, deux types de champs doivent-être transférés : ceux définis aux noeuds, et ceux aux points d'intégration de l'élément

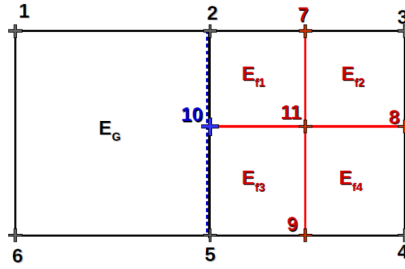


FIGURE 4 – Représentation du h-raffinement hiérarchique non conforme, issu de [5]

fini. A la manière de [5] nous utiliserons les méthodes détaillées dans [8], pour projeter les champs en utilisant simplement les fonctions de formes des éléments finis.

#### *Champs définis aux noeuds*

Les champs définis aux noeuds du maillage sont en fait connus sur tout le domaine grâce aux fonctions de formes de l’approximation éléments finis. Nous utiliserons simplement cette approximation pour transférer les champs.

#### *Champs définis aux points d’intégration*

Les champs définis aux points d’intégration sont en revanche uniquement définis sur ces points discrets du maillage. Toutefois, nous faisons l’approximation de considérer que les fonctions de formes éléments finis peuvent également supporter ces champs-ci. Nous utilisons une méthode des moindres carrés pour minimiser un problème d’interpolation des champs connus aux points d’intégration du maillage initial, vers des champs aux noeuds du maillage initial. On utilise ensuite la méthode ci-dessus pour le transfert sur le maillage final.

Ces méthodes sont employées en première approximation, car elles donnent des résultats satisfaisants. Comme le souligne [8], cette procédure peut poser des problèmes d’équilibre du problème mécanique. Un pas de rééquilibrage, ou une méthode de transfert de champ plus sophistiquée sera adoptée si ces problématiques se posent.

### 2.3 Stratégie de raffinement

C’est sur cette partie de l’algorithme d’AMR, que le couplage avec le modèle champ de phase est le plus délicat : une stratégie doit être développée pour garantir la précision du calcul tout en limitant son coût numérique. La limitation majeure du modèle champ de phase est que l’on doit avoir un maillage extrêmement fin, avant que l’endommagement ne localise, pour garantir une solution pertinente. Ainsi, la majeure partie de la littérature choisit d’appliquer une stratégie de prédiction-correction à l’image de [6]. C’est, pour une première tentative, la méthode retenue. Nous choisissons d’ajouter une annexe AMR à notre code de résolution étagée :

---

#### Algorithme 1 :

---

- 1 Initialisation au pas de temps  $n$ , on prend  $\mathbf{u}_n, \mathbf{d}_n, \psi_{0,n}^+$ ,
  - 2
  - 3 Résout au pas  $n + 1$  un problème mécanique influencé par  $\mathbf{d}_n$  constant
  - 4 Résout au pas  $n + 1$  un problème d’endommagement influencé par  $\psi_{0,n+1}^+$  constant
  - 5 **tant que** l’endommagement recalculé change **faire**
  - 6     Évaluer une carte de densité basée sur un critère champ de phase
  - 7     Raffinement de maillage basé sur cette carte de densité  $M^i \rightarrow M^{i+1}$
  - 9     Transfert des champs  $\mathbf{u}_{n+1}^i, \mathbf{d}_{n+1}^i, \psi_{0,n+1}^{+,i}$ , sur le maillage  $M^{i+1}$
  - 10    Recalculer le problème d’endommagement basé sur  $\psi_{0,n+1}^{+,i+1}$  constant
  - 11 **fin**
  - 12 Passage au pas de temps suivant
-

Nous utilisons ici un critère basé sur l'endommagement : si  $d$  dépasse une certaine valeur  $d_{seuil}$ , alors l'élément doit être subdivisé jusqu'à atteindre une densité cible, qui sera défini comme un certain ratio de  $l_c$  pour garantir un raffinement assez fin.

On ne re-vérifie pas ici l'équilibre du problème mécanique sur les nouveaux maillages successifs, en considérant qu'un maillage assez fin pour satisfaire l'équilibre d'endommagement, l'est aussi pour un problème mécanique. Cette approximation est effectuée pour permettre d'améliorer l'efficacité de l'algorithme. En figure (5), on a un visuel du maillage qui évolue au cours de la propagation avec cette méthode, en suivant une certaine trajectoire. Cette trajectoire est comparée à la trajectoire calculée lorsqu'on maille finement tout le domaine afin d'évaluer la performance de l'algorithme d'AMR.

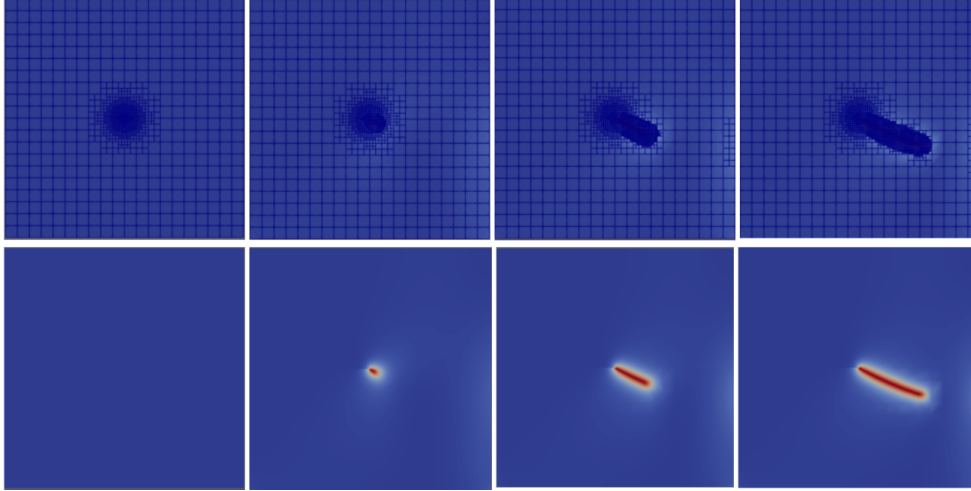


FIGURE 5 – Raffinement adaptatif de maillage au cours de la propagation

### 3 Extension à une propagation en fatigue

Étant donnés les objectifs de prédiction dans un contexte de fatigue polycyclique de ces travaux, nous cherchons à étendre le modèle champ de phase au phénomène de fissuration en fatigue.

Nous nous inspirons de l'approche phénoménologique de la propagation de fissure en fatigue proposée dans [3]. Ce type de propagation peut se résumer ainsi : on observe une propagation de la fissure pour des chargements inférieurs aux limites usuelles. Pour reproduire cette phénoménologie on ajoute à notre formulation une nouvelle fonction de dégradation  $f(\bar{\alpha})$  qui permet de baisser localement  $G_c$ , le paramètre de ténacité. Le paramètre  $\bar{\alpha}$  est cumulée tout au long du chargement et doit être représentatif de l'état de fatigue du matériau.

Reprenons l'expression de l'énergie dissipée par la fissure dans notre système (3), en introduisant cette fonction de dégradation  $f$ , influençant  $G_c$ , et dépendant de la variable cumulée  $\bar{\alpha}$  sur tous les cycles de chargement jusqu'au temps  $t$  :

$$W_{\Gamma}^f = \int_{\Omega} \int_0^t f(\bar{\alpha}(\tau)) \cdot G_c \cdot \dot{\gamma}(d, \nabla(d)) \, d\tau \, dV \quad (13)$$

Avec ce terme enrichi pour prendre en compte un effet de fatigue on peut réécrire le problème variationnel [2] comme :

$$\Pi_{l_c}(u, d) = \int_{\Omega} E(u, d) \, dV + W_{\Gamma}^f - \int_{\partial\Omega} P_{ext}(u) \, dA \quad (14)$$

Nous employons ensuite la même méthodologie étagée pour résoudre successivement un problème mécanique, puis un problème d'endommagement, avec un  $G_c$  qui peut être localement dégradé en fonction de l'histoire du chargement.

### 3.1 Choix de modélisation

Nous utilisons ici les travaux du même article [3], nous choisissons de cumuler la partie active de l'énergie élastique du matériau dégradé, c'est à dire :

$$\alpha = \psi_0^+ \cdot g(d) \quad (15)$$

Nous considérons ainsi qu'un matériau endommagé ne contribue plus à l'avancement de l'état de fatigue.

A un temps  $t$ , la variable cumulée, représentative de l'état de fatigue du matériau, est :

$$\bar{\alpha} = \int_0^t H(\alpha\dot{\alpha})|\dot{\alpha}| d\tau \quad (16)$$

Avec H, la fonction de Heaviside qui nous permet de ne pas cumuler en cas de décharge. En considérant une discrétisation du temps, pour trouver  $\bar{\alpha}_{n+1}$  en connaissant  $\bar{\alpha}_n$  :

$$\bar{\alpha}_{n+1} = \bar{\alpha}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\alpha} d\tau \simeq \bar{\alpha}_n + |\alpha_{n+1} - \alpha_n| H\left(\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\Delta t}\right) \quad (17)$$

Enfin nous choisissons une fonction de dégradation en fatigue  $f(\bar{\alpha})$ . Dans l'optique de suivre une phénoménologie type loi de Paris, nous optons pour une formulation logarithmique, muni d'un certain seuil de fatigue  $\alpha_T$ , et d'un autre paramètre,  $\kappa$  :

$$f(\bar{\alpha}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{\alpha} < \alpha_T \\ \left[1 - \kappa \cdot \log\left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha_T}\right)\right]^2 & \text{si } \alpha_T < \bar{\alpha} < \alpha_T \cdot 10^{1/\kappa} \\ 0 & \text{si } \bar{\alpha} > \alpha_T \cdot 10^{1/\kappa} \end{cases} \quad (18)$$

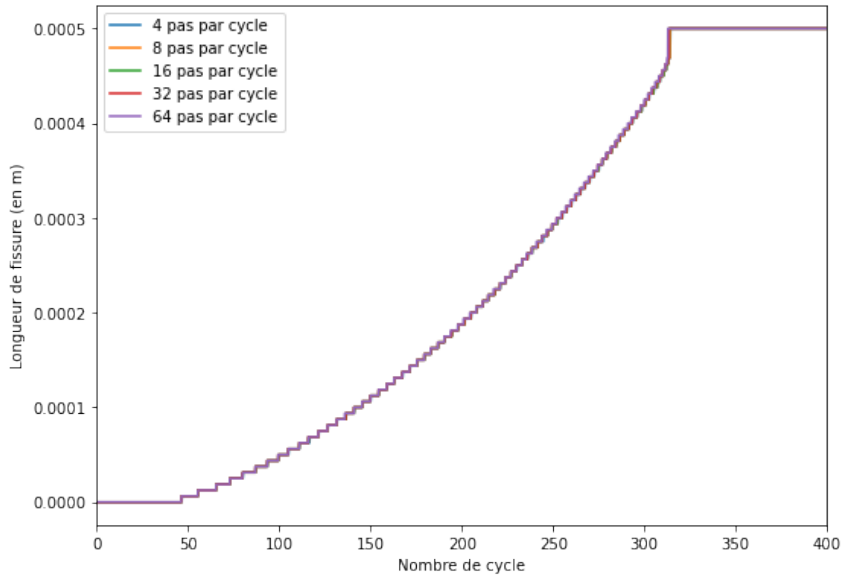


FIGURE 6 – Évolution de la longueur de fissure en fonction du nombre de pas calculé par cycles

Nous traçons en figure (6), quelques premiers résultats de cette implémentation.



## 3.2 Simulation de fatigue à grand nombre de cycle

Étant donné l'objectif de modélisation de cas industriels, pour lesquelles un très grand nombre de cycles doivent être simulés, nous ne pouvons pas envisager de traiter le calcul à l'échelle sub-cycle, surtout avec la méthode de résolution étagée qui demande un grand nombre de pas par cycle pour converger. Nous envisageons donc d'accélérer les calculs en nous inspirant de la grande bibliographie disponible sur la fatigue dans le cadre de la mécanique de l'endommagement, des méthodes par saut de cycles [7], ou d'homogénéisations temporelle [11] : nous cherchons une manière efficace de traiter les échelles de temps multiples d'un problème de propagation de fissure par fatigue.

## Conclusion et perspectives

Nous cherchons dans ce travail, à construire un outil numérique, robuste, précis, et efficace basé sur le modèle champ de phase, dans l'optique de pouvoir traiter des cas de propagation en fatigue dans un cadre de multi-fissuration. Pour réaliser cet objectif nous avons développé un modèle champ de phase pour la rupture fragile, avant d'enrichir la formulation pour permettre la prise en compte des effets de fatigue, et d'exploiter une méthode de raffinement adaptatif de maillage, pour permettre localement d'obtenir une taille de maille suffisante à la convergence du problème.

Tous les travaux sont développés dans le code de calcul cast3m, et pourront ainsi bientôt être exploités par ses utilisateurs. Quand cet outil numérique sera prêt une comparaison avec des travaux expérimentaux sera réalisée pour évaluer sa capacité de prédiction et son efficacité.

## Références

- [1] P.E. Bernard, N. Moës, N. Chevaugeon. *Damage growth modeling using the Thick Level Set (TLS) approach : Efficient discretization for quasi-static loadings*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 233, 2012
- [2] B. Bourdin, G.A. Francfort, J.J. Marigo *Numerical experiments in revisited brittle fracture*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 48, 2000
- [3] P. Carrara, M. Ambati, R. Alessi, L. De Lorenzis. *A framework to model the fatigue behaviour of brittle materials on a variational phase-field approach*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019.
- [4] G.A. Francfort, J.J. Marigo. *Revisiting brittle fracture as an energy minimization*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 46, p.1319–1342, 1998.
- [5] G. Gibert, B. Prabel, A. Gravouil, C. Jacquemoud *A 3D automatic mesh refinement X-FEM approach for fatigue crack propagation*, Finite Element in Analysis and Design, 157, 2019
- [6] T. Heister, M. F. Wheeler, T. Wick. *A primal-dual active set method and predictor-corrector mesh adaptivity for computing fracture propagation using a phase-field approach*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2015
- [7] P. J. Loew, L. H. Poh, B. Peters, A.A. Lars. *Accelerating fatigue simulations of a phase-field damage model for rubber*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020.
- [8] J. Mediavilla, R.H.J. Peerlings, and M.G.D. Geers. *A robust and consistent remeshing-transfer operator for ductile fracture simulations*, Computers structures, 84, 604–623, 2006
- [9] C. Miehe, F. Welschinger, M. Hofacker. *A phase field model for rate-independent crack propagation : Robust algorithmic implementation based on operator splits*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199, p.2765-2778, 2010
- [10] G. Molnár, A. Gravouil. *2D and 3D Abaqus implementation of a robust staggered phase-field solution for modeling brittle fracture*, Finite element in analysis and design, 130, p.27-38, 2017.
- [11] G. Puel, D. Aubry. *Méthode d'homogénéisation temporelle : application à la simulation numérique de la fatigue*, CSMA 2011 n°10 2011