



HAL
open science

Optimisation relaxée adaptative de maillages éléments finis

Kenan Kergrene, Jonathan Vacher, Serge Prudhomme, Vincenzo-Enrico
Iannuzzi

► **To cite this version:**

Kenan Kergrene, Jonathan Vacher, Serge Prudhomme, Vincenzo-Enrico Iannuzzi. Optimisation relaxée adaptative de maillages éléments finis. 15ème colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2022, Giens, France. hal-03717681

HAL Id: hal-03717681

<https://hal.science/hal-03717681>

Submitted on 8 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Optimisation relaxée adaptative de maillages éléments finis

K. Kergrene¹, J. Vacher², V. Iannuzzi³, S. Prudhomme³

¹ Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne, kenan.kergrene@utc.fr

² Laboratoire des Systèmes Perceptifs, École Normale Supérieure, jonathan.vacher@ens.fr

³ Département de Mathématiques et de Génie Industriel, École Polytechnique de Montréal, {vincenzo-enrico.iannuzzi,serge.prudhomme}@polymtl.ca

Résumé — Nous proposons une approche pour l'adaptation de maillages éléments finis basée sur l'optimisation d'un problème de minimisation de l'erreur. Dans cette approche, les positions des nœuds du maillage constituent les variables d'optimisation. Afin de maîtriser le coût de la méthode, nous proposons de relaxer le problème par rapport à la solution éléments finis. Nous utilisons ensuite une contrainte pour contrôler la solution éléments finis. Dans cette deuxième approche, les positions des nœuds du maillage ainsi que la solution éléments finis constituent les variables d'optimisation.

Mots clés — adaptation de maillage, optimisation sous contraintes relaxée, vérification

1 Introduction

Depuis les années 1980, le développement de méthodes d'estimation d'erreur et d'adaptivité a permis de quantifier et de contrôler l'erreur commise dans les simulations éléments finis [1, 3, 5]. Les premiers travaux en vérification se sont concentrés sur l'obtention de procédures d'estimation du résidu [2], des techniques de lissage [7], ainsi que sur l'utilisation de l'erreur en relation de comportement [4]. Du point de vue de l'adaptation, les approches les plus couramment utilisées sont le raffinement en taille de maillage et/ou en degré polynomial utilisé. Comparées à des approches de raffinement uniforme, où tous les éléments sont divisés à chaque étape du processus, les approches basées sur l'estimation d'erreur et l'adaptation ne raffinent que les éléments identifiés comme contribuant le plus à l'erreur, ce qui permet un gain en taille de problème, en complexité, et en temps de calcul. Pour une dimension de problème éléments finis donnée, la problématique de trouver un maillage optimal, au sens où il fournirait la plus petite erreur parmi tous les maillages de même taille, reste encore un problème ouvert. Nous proposons dans cette contribution de considérer un problème d'optimisation dans lequel nous adaptons la position des nœuds du maillage afin de minimiser l'erreur.

2 Problème modèle

Considérons un problème abstrait posé sur le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de la forme (1)

$$\mathcal{A}u = f, \quad (1)$$

avec des conditions aux limites appropriées sur le bord $\partial\Omega$. Dans ce problème, u représente la solution exacte, \mathcal{A} l'opérateur différentiel, et f le terme de chargement. Ce problème est écrit sous forme faible (2) : Trouver $u \in V$ tel que

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V. \quad (2)$$

En plus des hypothèses de régularité habituelles (V espace de Hilbert, a bilinéaire continue coercive, f linéaire continue), lorsque a est aussi symétrique le problème sous forme faible (2) est équivalent à la formulation variationnelle (3) : Trouver $u \in V$ tel que

$$u = \arg \min_{v \in V} J(v), \quad (3)$$

où J est la fonctionnelle énergie définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v)$.

Étant donné un espace d'approximation $V_h \subset V$, relatif à un choix de maillage et de fonctions de base, la solution éléments finis est définie par la projection de Galerkin du problème en forme faible (4) : Trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \forall v_h \in V_h, \quad (4)$$

ou de manière équivalent comme la solution du problème de minimisation de la fonctionnelle J sur l'espace de dimension finie V_h .

On note donc que de ce point de vue, l'optimisation se fait à maillage fixé parmi toutes les fonctions tests générant l'espace V_h .

Une fois la solution éléments finis déterminée, on conduit une procédure de vérification : l'erreur est quantifiée au moyen d'estimateurs, puis les éléments comportant le plus d'erreur sont raffinés et on obtient un nouveau maillage, plus fin que le précédent : $\tilde{V}_h \subset V_h$.

3 Le problème d'optimisation

Nous proposons dans cette contribution de conduire l'optimisation directement sur le maillage V_h . Une approche similaire a été développée dans [6] pour des problèmes de localisation de chocs. Afin de ne pas surcharger la présentation et de pouvoir illustrer la démarche, nous considérons un problème d'approximation de la fonction u supposée connue, et prenons un exemple académique simple, unidimensionnel. Notons $X = \{x_i\} \in \mathbb{R}^N$ la position des N nœuds du maillage. À nombre de nœuds N fixé, le problème d'optimisation posé sur le maillage s'écrit : Trouver $X \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$X = \arg \min_{Y \in \mathbb{R}^N} \|u - u_h(Y)\|^2, \quad (5)$$

où $u_h(Y)$ désigne la solution éléments finis relative au maillage Y , et $\|\cdot\|$ est une norme sur V , par exemple celle induite par la forme symétrique a . En notant $\{\varphi_i\} \in V_h^N$ l'ensemble des fonctions de base éléments finis, qui dépendent implicitement de la position des nœuds, la solution éléments finis u_h est définie par la solution du système linéaire $KU = F$, où le vecteur U collecte les valeurs des degrés de liberté de la solution relativement à la base $\{\varphi_i\}$: $u_h = \sum_{i=1}^N U_i \varphi_i$. La matrice K étant inversible, on peut remplacer u_h dans le problème d'optimisation (5) par

$$X = \arg \min_{Y \in \mathbb{R}^N} \|u - \sum_{i=1}^N (K^{-1}F)_i \varphi_i\|^2. \quad (6)$$

Dans le problème d'optimisation écrit sous la forme (6), il est à noter que K , F , et φ_i dépendent tous de la variable d'optimisation. Comme la matrice K intervient par l'intermédiaire de son inverse, les procédures standards d'optimisation basées sur des techniques de gradients seraient prohibitives : il faudrait calculer explicitement l'inverse de la matrice K et ses sensibilités par rapport aux nœuds du maillage X .

Nous procédons alors à une étape de relaxation sur les valeurs des degrés de liberté U de la solution éléments finis afin de contourner le problème de détermination des dérivées de K^{-1} par rapport aux x_i . On introduit le problème relaxé : Trouver $X, W \in \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N$ tels que

$$X, W = \arg \min_{Y, Z} \|u - u_h(Y, Z)\|^2, \text{ tel que } KZ = F, \quad (7)$$

où l'on a noté $u_h(Y, Z) = \sum_{i=1}^N Z_i \varphi_i(Y)$.

L'intérêt de cette étape de relaxation est d'introduire une nouvelle variable d'optimisation, les valeurs des degrés de liberté W , afin qu'ils ne dépendent pas des positions des nœuds du maillage X . Bien entendu, la contrainte $KZ = F$ fait que l'on cherche toujours la solution éléments finis du problème original : les problèmes (5) et (7) sont équivalents.

Nous prenons en compte la contrainte $KZ = F$ de ce problème de minimisation en formant le Lagrangien

$$\mathcal{L}(Y, Z, \mu) = \|u - u_h(Y, Z)\|^2 + \mu \cdot (KZ - F), \quad (8)$$

où \cdot désigne le produit scalaire euclidien de \mathbb{R}^N . La solution du problème relaxé (7) est ensuite donnée par la stationnarité du Lagrangien (8), soit le problème de point-selle : Trouver $X, W, \lambda \in \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N$ tels

que

$$0 = \nabla_X \mathcal{L}(X, W, \lambda) = \nabla_X \|u - u_h(X, W)\|^2 + \lambda \cdot ((\nabla_X K) W), \quad (9)$$

$$0 = \nabla_W \mathcal{L}(X, W, \lambda) = \nabla_W \|u - u_h(X, W)\|^2 + K^T \lambda, \quad (10)$$

$$0 = \nabla_\lambda \mathcal{L}(X, W, \lambda) = KW - F. \quad (11)$$

Au prix d'un système augmenté, nous n'avons plus à déterminer les sensibilités de K^{-1} par rapport au maillage ; en ayant relaxé le problème en introduisant une nouvelle variable d'optimisation, nous n'avons qu'à calculer celles de K . La dernière équation (11), obtenue en écrivant la stationnarité du Lagrangien par rapport aux multiplicateurs de Lagrange λ , est la contrainte $KW = F$: u_h est bien la solution du problème éléments finis.

Le problème relaxé (9)–(10)–(11) peut alors être résolu numériquement en utilisant par exemple une méthode de gradient.

4 Résultats numériques

Afin de valider l'approche, des résultats numériques préliminaires ont pour l'instant été obtenus sur le problème d'optimisation (6) appliqué au problème de couche limite unidimensionnel (12)–(13) : Trouver u telle que

$$-\varepsilon u'' + u' = 1, \text{ sur }]0, 1[, \quad (12)$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (13)$$

où le paramètre ε contrôle la taille de la couche limite à droite du domaine. La solution exacte du problème de couche limite est donnée par (14) et est représentée Figure 1

$$u(x) = x - \frac{e^{-1/\varepsilon} - e^{(x-1)/\varepsilon}}{e^{-1/\varepsilon} - 1}. \quad (14)$$

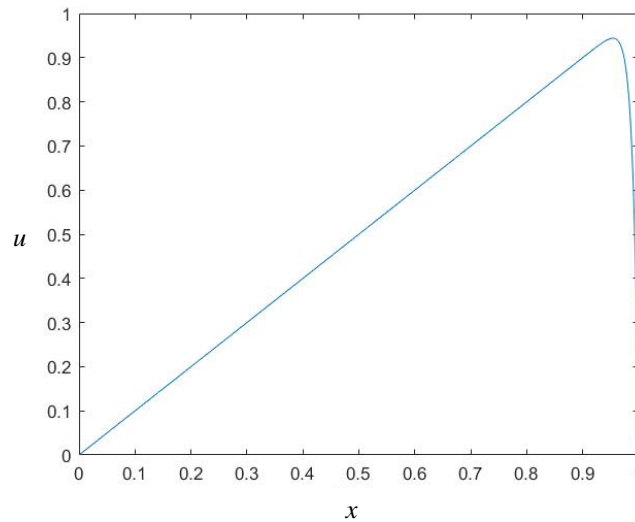


FIGURE 1 – Solution exacte du problème de couche limite avec $\varepsilon = 0,01$.

Partant d'un maillage constitué d'un unique élément, l'optimisation consiste à déterminer la meilleure position du nouveau nœud. La fonction coût associée à ce problème d'optimisation (6) est présentée Figure 2. On observe un maximum vers $x = 0,5$ qui correspond au maillage donnant la plus grande erreur, et un minimum vers $x = 0,986$, soit très proche de la position de la couche limite en $1 - \varepsilon = 0,99$ pour cette simulation.

5 Conclusion et développements futurs

Les premiers résultats obtenus sur le problème de couche limite sont très encourageants : l'optimisation de la fonction coût permet d'obtenir un maillage très performant pour ce problème en seulement

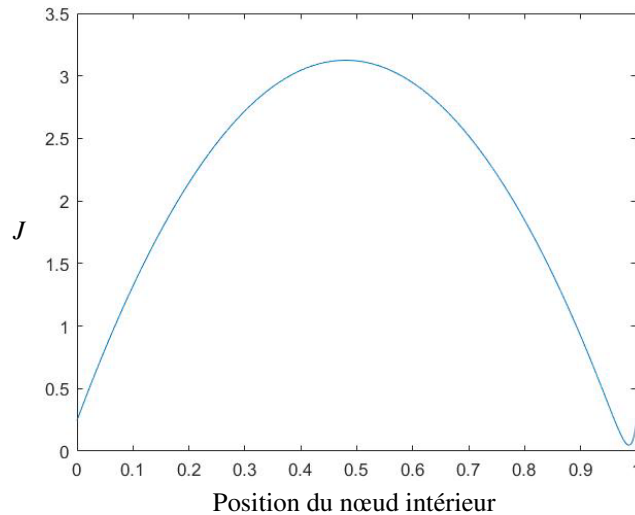


FIGURE 2 – Fonction coût associée à l’optimisation de la position du nœud intérieur. On note la présence du maximum vers le milieu du domaine, et du minimum à l’extrémité droite.

deux éléments. Nous projetons par la suite développer notre approche basée sur la relaxation et l’incorporer dans une procédure complète de vérification avec laquelle nous espérons obtenir des séquences de maillages quasi-optimaux.

Références

- [1] M. Ainsworth, J. T. Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis*, John Wiley & Sons, 2001.
- [2] I. Babuška, W. C. Rheinboldt. *A posteriori error estimates for the finite element method*, International journal for numerical methods in engineering, 12, 1597-1615, 1978.
- [3] W. Dörfler. *A Convergent Adaptive Algorithm for Poisson’s Equation*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 33(3), 1106-1124, 1996.
- [4] P. Ladeveze, D. Leguillon. *Error Estimate Procedure in the Finite Element Method and Applications*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 20(3), 485-509, 1983.
- [5] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 176(1-4) :419-440, 1999.
- [6] M.J. Zahr, A. Shi, P.-O. Persson. *Implicit shock tracking using an optimization-based high-order discontinuous Galerkin method*, Journal of Computational Physics, 410, 109385, 2020.
- [7] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu. *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity*. International journal for numerical methods in engineering 33, 1365-1382, 1992.