



HAL
open science

Modèle d'ordre réduit pour les vibrations en grande amplitude de structures flexibles sous écoulement fluide

Théo Flament, Jean-François Deü, Antoine Placzek, Mikel Balmaseda Aguirre, Duc-Minh Tran

► **To cite this version:**

Théo Flament, Jean-François Deü, Antoine Placzek, Mikel Balmaseda Aguirre, Duc-Minh Tran. Modèle d'ordre réduit pour les vibrations en grande amplitude de structures flexibles sous écoulement fluide. 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717641v2

HAL Id: hal-03717641

<https://hal.science/hal-03717641v2>

Submitted on 8 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modèle d'ordre réduit pour les vibrations en grande amplitude de structures flexibles sous écoulement fluide

T. Flament^{1,2}, J-F. Deü², A. Placzek¹, M. Balmaseda¹, D-M. Tran¹

¹ ONERA, {theo.flament,antoine.placzek,mikel.balmaseda}@onera.fr

² LMSSC, Cnam, jean-francois.deu@cnam.fr

Résumé — Ce travail concerne la modélisation numérique de vibrations de structures en non-linéaire géométrique couplé à un fluide externe en écoulement. Dans un premier temps un modèle d'ordre réduit d'une structure non-linéaire géométrique est proposé. Dans un second temps ce modèle est utilisé pour remplacer le solveur éléments finis dans le cadre d'un couplage partitionné fluide-structure sur un exemple bidimensionnel en écoulement.

Mots clés — Dynamique des structures, modèle d'ordre réduit, couplage fluide-structure, aéroélasticité, non-linéarité géométrique.

1 Introduction

Le design des moteurs aéronautiques du futur avec des fans et hélices de grandes dimensions implique des structures flexibles dont il faut maîtriser les vibrations. Les effets non-linéaires dus aux déplacements de grandes amplitudes de ces structures flexibles, mais également le contact et la friction entre les différentes parties des pales du moteur, peuvent agir de manière significative sur les niveaux de vibrations. Une modélisation non-linéaire de la structure est par conséquent nécessaire afin d'évaluer précisément les niveaux de vibrations, et de caractériser les phénomènes aéroélastiques tels que le flottement et la réponse forcée, qui nécessitent la résolution d'un problème couplé prenant en compte à la fois les domaines fluide et structure. Une approche pour résoudre les problèmes aéroélastiques est de coupler deux solveurs non-linéaires différents pour le fluide et pour la structure, mais cela entraîne d'une part des simulations aux temps de calcul très élevés pour les applications industrielles complexes et d'autre part le couplage des solveurs n'est pas évident en terme de transfert d'informations de l'un à l'autre. Afin de faciliter le couplage et réduire les temps de calcul, une approche efficace consiste à coupler un solveur non-linéaire pour la partie fluide, avec un modèle d'ordre réduit non-linéaire de la structure. Dans notre cas on s'intéresse uniquement aux non-linéarités géométriques dues aux grands déplacements. Notre but est d'obtenir un modèle réduit (ROM) de structure indépendant du modèle complet, c'est-à-dire qui n'a pas besoin de faire appel à un quelconque solveur extérieur mais nécessite seulement de connaître les matrices réduites et les coordonnées/vitesses/accélérations généralisées. Le modèle réduit doit être de faible dimension et également paramétrique pour être utilisable dans différentes conditions de fonctionnement.

2 Modèles d'ordre réduit de structures non-linéaires

2.1 Généralités sur les modèles réduits de structure

Le comportement de la structure est étudié à l'aide d'une modélisation classique éléments finis, dont les degrés de liberté en déplacement, notés \mathbf{u} , vérifient l'équation de la dynamique :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_{\text{a}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$$

où \mathbf{M} et \mathbf{C} sont respectivement les matrices de masse et d'amortissement du problème, \mathbf{f}_{int} correspond aux efforts intérieurs, et \mathbf{f}_{a} aux forces aérodynamiques associées au problème d'aéroélasticité.

Une manière de construire un modèle réduit est de projeter les équations de la dynamique sur une base de dimension réduite \mathbf{V} bien choisie. Les déplacements sont approchés par $\mathbf{u} \approx \mathbf{V}\mathbf{q}$ où les coordonnées \mathbf{q}

sont appelées coordonnées généralisées. Dans le cas non-linéaire, les efforts internes $\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u})$ peuvent être écrits comme la somme d'une composante linéaire $\mathbf{K}\mathbf{u}$ et d'une composante non-linéaire géométrique $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{u})$ ce qui donne après projection l'équation suivante :

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} \mathbf{q} + \mathbf{V}^T \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{V} \mathbf{q}) = \mathbf{V}^T \mathbf{f}_{\mathbf{a}} \quad (1)$$

Le modèle est dit réduit car la matrice \mathbf{V} ne contient que peu de vecteurs et les matrices projetées sont donc de faible dimension. Comme on le verra dans la section 4, les efforts aérodynamiques $\mathbf{f}_{\mathbf{a}}$ sont obtenus à partir d'un calcul aérodynamique en utilisant une approche partitionnée entre les solveurs fluide et structure.

2.2 Choix de la base de réduction

2.2.1 Base des modes propres et limitations en non-linéaire

Considérons les modes linéaires de la structure $\Phi = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$, obtenus par résolution de l'équation aux valeurs propres :

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \Phi_i = \mathbf{0}$$

Dans le cadre de problèmes linéaires, le choix comme base de réduction des premiers modes propres, dont les fréquences respectives se situent dans l'intervalle d'étude, donne des bons résultats. En revanche, dans le cadre non-linéaire, un couplage de certains modes basse fréquence avec des modes haute fréquence apparaît. Il en résulte que le choix comme base de réduction des premiers modes linéaires n'est plus suffisant et la base de réduction doit être enrichie afin de prendre en compte le couplage de modes.

2.2.2 Enrichissement de la base

Si la forme des efforts extérieurs auxquels est soumise la structure est connue, des modes statiques peuvent être intéressants. Il s'agit de solutions non-linéaires statiques calculées à partir d'efforts extérieurs imposés à la structure. L'ajout de modes statiques à la base de réduction apporte de l'information sur le comportement non-linéaire de la structure. De même, si des calculs non-linéaires dynamiques haute fidélité ont déjà été menés, les modes POD (Proper Orthogonal Decomposition), obtenus par SVD (Singular Value Decomposition) à partir d'échantillons du calcul haute fidélité contiennent de l'information pertinente relative au comportement non-linéaire de la structure et peuvent être ajoutés à la base de réduction. Cependant les modes statiques et les modes POD sont très dépendants du cas de chargement et de fait non adaptés à des cas des chargements variés tels que rencontrés en aérodynamique. De plus, les modes POD nécessitent de connaître un certain nombre de solutions non-linéaires haute fidélité, ce qui n'est en pratique pas le cas car ce sont des calculs très coûteux.

Afin d'obtenir un modèle réduit non-linéaire indépendant il est plus intéressant d'ajouter dans la base de réduction des modes qui contiennent de l'information sur le couplage des différents modes linéaires indépendamment du cas de chargement extérieur. La troncature modale n'étant pas suffisante en non-linéaire, une idée est d'ajouter les dérivées modales dans la base de réduction, que l'on peut calculer de différentes manières, avec ou sans prise en compte de l'inertie [10], [13], [12]. L'inconvénient de ces dernières est leur pluralité. En effet, leur nombre augmente fortement en fonction du nombre de modes linéaires déjà présents dans la base de réduction, et les dérivées modales les plus pertinentes ne sont a priori pas connues d'avance. Rappelons que le but est d'avoir une base de réduction de très faible dimension. Citons également les modes duaux [6], calculés à partir de solutions statiques non-linéaires, obtenues par imposition d'efforts extérieurs dont la forme suit celle des premiers modes linéaires. L'information contenue dans ces solutions non-linéaires mais non contenue dans les modes linéaires est extraite, puis une SVD est effectuée. Finalement, parmi les solutions de la SVD, les modes ayant l'énergie de déformation maximale sont retenus comme modes duaux et ajoutés dans la base.

2.3 Approximation des efforts non-linéaires

Dans le cadre d'un couplage fluide structure partitionné, l'intérêt d'un modèle réduit indépendant pour la structure est de ne pas avoir à appeler un code FEM (Finite Element Method) pour résoudre la

structure à chaque sous-itération de couplage. Nous remarquons que dans l'équation de la dynamique projetée (1), la forme de l'effort purement non-linéaire $\mathbf{V}^T \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{V}\mathbf{q})$ ne satisfait pas au critère d'indépendance du modèle réduit par rapport au modèle complet. En effet, ici l'effort non-linéaire est calculé dans l'espace physique à l'aide d'un solveur FEM, à partir d'un déplacement physique approché par $\mathbf{u} \approx \mathbf{V}\mathbf{q}$, pour être ensuite projeté à nouveau dans l'espace réduit. Notre modèle réduit ferait par conséquent appel au modèle complet. De plus, l'erreur sur le déplacement approché pourrait être amplifiée par le calcul des efforts non-linéaires sur cette déformée approchée.

Afin de construire un modèle réduit indépendant, il est intéressant de connaître l'expression de l'effort non-linéaire projeté de manière explicite en fonction des coordonnées généralisées $\tilde{\mathbf{f}}_{nl}(\mathbf{q})$ et ainsi résoudre le problème structure directement dans l'espace réduit :

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} + \tilde{\mathbf{f}}_{nl}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_a$$

Pour un problème d'élasticité en petites déformations et grands déplacements, régit par un modèle de comportement de Saint-Venant Kirchoff, l'effort non-linéaire est une fonction polynomiale cubique des coordonnées généralisées [8]. En notant $\tilde{f}_{nl}^k(\mathbf{q})$ la k -ème coordonnée de l'effort non-linéaire projeté, on peut montrer que :

$$\tilde{f}_{nl}^k(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{j=i}^{n_m} \beta_{ij}^k q_i q_j + \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{j=i}^{n_m} \sum_{m=j}^{n_m} \gamma_{ijm}^k q_i q_j q_m \quad (2)$$

avec n_m le nombre de modes de la base de réduction et β_{ij}^k et γ_{ijm}^k les coefficients des termes respectivement quadratiques et cubiques des coordonnées généralisées.

Afin de déterminer ces coefficients, deux méthodes se distinguent dans la littérature. Premièrement la méthode de détermination par déplacements imposés, dite STEP [9] et ses corrections [1], [19], [14]. Il s'agit d'imposer à la structure des déplacements définis comme combinaisons linéaires bien choisies des modes propres, puis de calculer les efforts non-linéaires associés avec un logiciel éléments finis afin d'identifier les coefficients. La seconde est une détermination par efforts imposés, dite ICE [7], [4]. Ce sont dans ce cas des efforts extérieurs qui sont imposés à la structure, dont la répartition suit la forme de combinaisons linéaires des modes propres. Les solutions non-linéaires statiques associées sont calculées ainsi que les efforts non-linéaires internes. Ensuite, les coordonnées généralisées associées sont déterminées par une méthode de moindres carrés et les coefficients β_{ij}^k et γ_{ijm}^k déterminés par identification entre la formule (2) et les efforts non-linéaires calculés par éléments finis.

3 Application à une poutre de Timoshenko

Comme cas test d'étude nous avons utilisé un modèle de poutre de Timoshenko réduite à sa ligne moyenne [16] de propriétés : $L = 1$ m, épaisseur $h = 5 \cdot 10^{-3}$ m, profondeur $b = 0.1$ m, $E = 104$ GPa, $G = 40$ GPa, $\rho = 4400$ kg.m⁻³. Cette poutre est bi-encastée, chargée au centre verticalement par un effort sinusoïdal d'amplitude 50N et de fréquence 35Hz (entre le 1er et le 2ème mode).

3.1 Base des modes propres

La structure étant une poutre symétrique on peut tirer avantage du fait que les modes linéaires de flexion et de membrane sont découplés afin de mieux sélectionner les modes pertinents. Dans l'exemple traité, la poutre est discrétisée en 20 éléments à 2 noeuds avec 3 degrés de libertés par noeud (u, v, θ). Sur les 3×21 degrés de liberté, six sont fixés au niveau des encastremets, ce qui conduit à 38 modes de flexion et 19 modes de membrane.

La figure 1 représente selon l'axe vertical le déplacement maximal obtenu au quart de poutre en régime permanent (sur les 3 dernières périodes) avec le calcul réduit obtenu par résolution du système (1), divisé par le déplacement du modèle haute fidélité en régime permanent :

$$z = \frac{\max_{[t_{max}-3T, t_{max}]} \|u_{L/4}^{ROM}\|}{\max_{[t_{max}-3T, t_{max}]} \|u_{L/4}^{FEM}\|}$$

On choisit d'observer l'amplitude maximale du déplacement au quart de poutre où un déplacement de membrane apparaît contrairement au centre. Cet exemple a pour but d'illustrer le fait qu'en non-linéaire géométrique, bien que l'excitation extérieure soit sinusoidale de fréquence située entre le premier et le second mode de flexion, un nombre important de modes de membrane de fréquences propres très élevées sont nécessaires pour s'approcher de la solution haute fidélité ($z = 1$ sur la figure). On considère qu'une réponse suffisamment précise est obtenue avec 5 modes de flexion et 10 modes de membrane minimum. On peut noter que pour un nombre de modes de membrane fixé, augmenter le nombre de modes de flexion au-delà de 5 n'améliore quasiment pas la solution.

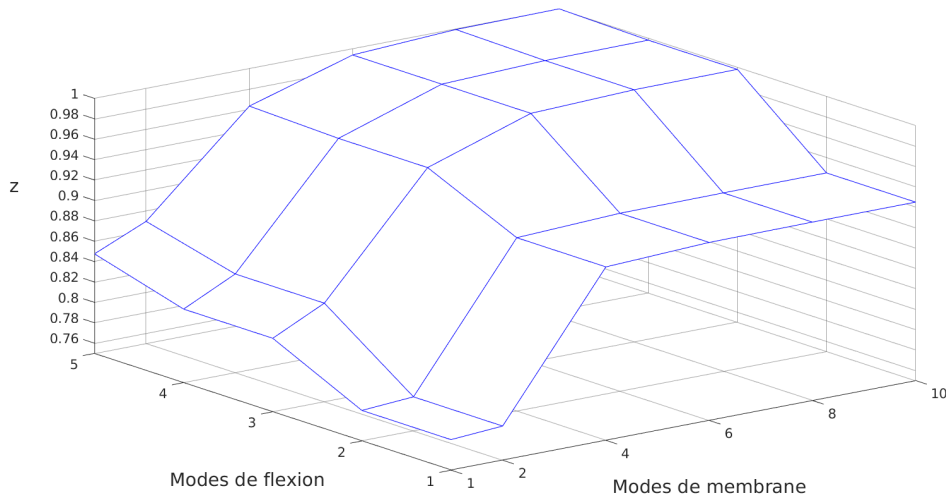


FIGURE 1 – Amplitude relative de la solution obtenue avec le modèle réduit par rapport à la solution haute fidélité pour une poutre bi-encastée chargée verticalement au centre par un chargement sinusoidal d'amplitude 50N et de fréquence 35Hz (entre le 1er et le 2ème mode)

3.2 Approximation des efforts non-linéaires

La méthode ICE mentionnée précédemment permet d'obtenir une expression explicite des efforts non-linéaires projetés en un polynôme d'ordre 3 des coordonnées généralisées. De plus, la base de réduction utilisée avec la méthode ICE ne contient que les premiers modes de la structure. Cela présente un avantage car pour des structures de forme plus complexe qu'une simple poutre, les modes de membrane et de flexion ne sont pas découplés et la détermination d'une base de réduction pertinente ne peut être obtenue a priori.

La figure 2 illustre sur un cas statique la capacité de la méthode ICE à capturer la non-linéarité géométrique dans le cas de la poutre bi-encastée. On remarque tout d'abord que malgré un déplacement de l'ordre de l'épaisseur la non-linéarité est très importante. On observe également qu'avec une base de réduction contenant uniquement les 3 premiers modes (de flexion ici), le calcul réduit avec efforts non-linéaires calculés par méthode ICE est plus précis que celui calculé à partir de la valeur approchée de \mathbf{u} par $\mathbf{V}\mathbf{q}$.

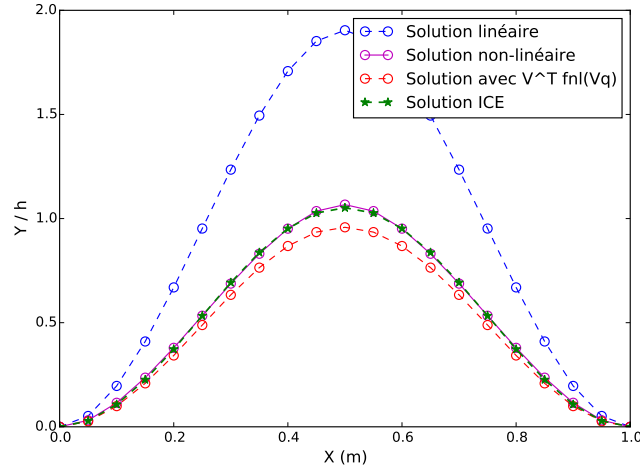


FIGURE 2 – Calcul non-linéaire statique sur la poutre bi-encastée soumise à un effort vertical au centre de 200N. Comparaison entre un calcul linéaire, un calcul non-linéaire, un calcul réduit (3 premiers modes) avec efforts non-linéaires $\mathbf{V}^T \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{Vq})$ et un calcul réduit avec efforts non-linéaires d'ordre 3 calculés par condensation implicite (ICE)

En revanche, dans le cas de structures encastées-libres, la méthode ICE atteint ses limites, même en statique, à cause du fort allongement de la structure dans sa longueur, alors que la base de réduction est construite avec des modes transverses. Afin de remédier à ce problème il est possible d'introduire des modes duaux dans la base de réduction ou une compensation inertielle [11]. Une approche par modes non-linéaires peut également s'avérer efficace [15].

4 Couplage fluide-structure avec modèle réduit structure

On s'intéresse maintenant à un cas de couplage fluide-structure pour lequel on souhaite utiliser le ROM pour évaluer la dynamique de la structure. On utilise une approche partitionnée en couplant le solveur fluide avec le ROM structure. Dans une approche partitionnée, à chaque incrément temporel, un certain nombre de sous-itérations entre le solveur fluide et le solveur structure sont nécessaires afin d'obtenir une solution convergée. De plus ces sous-itérations sont stabilisantes pour le couplage.

Le schéma 3 est un exemple de couplage partitionné entre le solveur fluide volumes finis *elsA* [2] et un modèle réduit non-linéaire résolu par l'algorithme d'intégration en temps HHT- α avec itérations de Newton-Raphson. A chaque nouvel incrément temporel on distingue un algorithme de type point-fixe entre le solveur fluide et le modèle réduit structure. Le solveur fluide communique des efforts aérodynamiques au solveur structure, qui, en retour, renvoie les déplacements et vitesses associées et ainsi de suite jusqu'à convergence de la solution et le passage au pas de temps suivant. Pour ce faire une formulation ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) est utilisée. En ce qui concerne la résolution de la structure, le schéma d'intégration à l'origine dans *elsA* est un algorithme de Newmark standard ($\alpha = 0.5$, $\beta = 0.25$) linéaire. Nous avons dans un premier temps remplacé le schéma d'intégration par un algorithme de Newmark non-linéaire incluant un calcul itératif de Newton-Raphson à chaque pas de temps. Il faut savoir que les méthodes de la famille de Newmark présentent un intérêt car ce sont des méthodes à un pas. En revanche l'approximation de l'accélération peut introduire des perturbations déstabilisantes pour le couplage et nous avons été confrontés à ce problème. Il est préférable d'utiliser des méthodes HHT- α ou α -généralisée qui conservent une précision du second ordre en introduisant un léger amortissement numérique [3], ce qui est stabilisant pour le couplage. Nous avons ici utilisé un schéma d'intégration HHT- α avec $\alpha_{HHT} = 0.01$. Le couplage schématisé par la figure 3 a été utilisé pour étudier le couplage non-linéaire entre une poutre flexible située dans le sillage de Von Kármán d'un cylindre comme illustré par la figure 4. C'est un cas que l'on retrouve régulièrement dans la littérature (voir par exemple [18] ou [17]). Il est important de noter que la non-linéarité de la structure et les grands déplacements rendent l'intégration temporelle et la déformation du maillage aérodynamique structuré (associée à la formulation ALE) difficiles à contrôler.

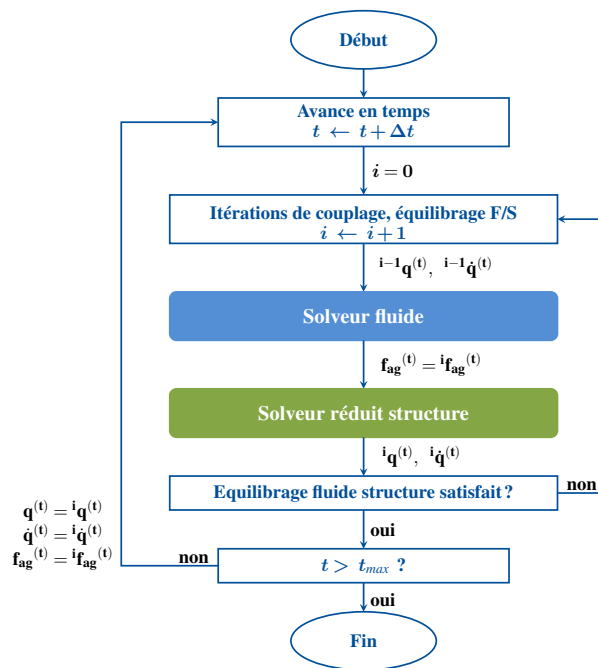


FIGURE 3 – Schéma de couplage partitionné fluide-structure entre le solveur fluide elsA et le solveur non-linéaire réduit structure. On utilise ici la notation $\mathbf{f}_{ag} = \mathbf{V}^T \mathbf{f}_a$.

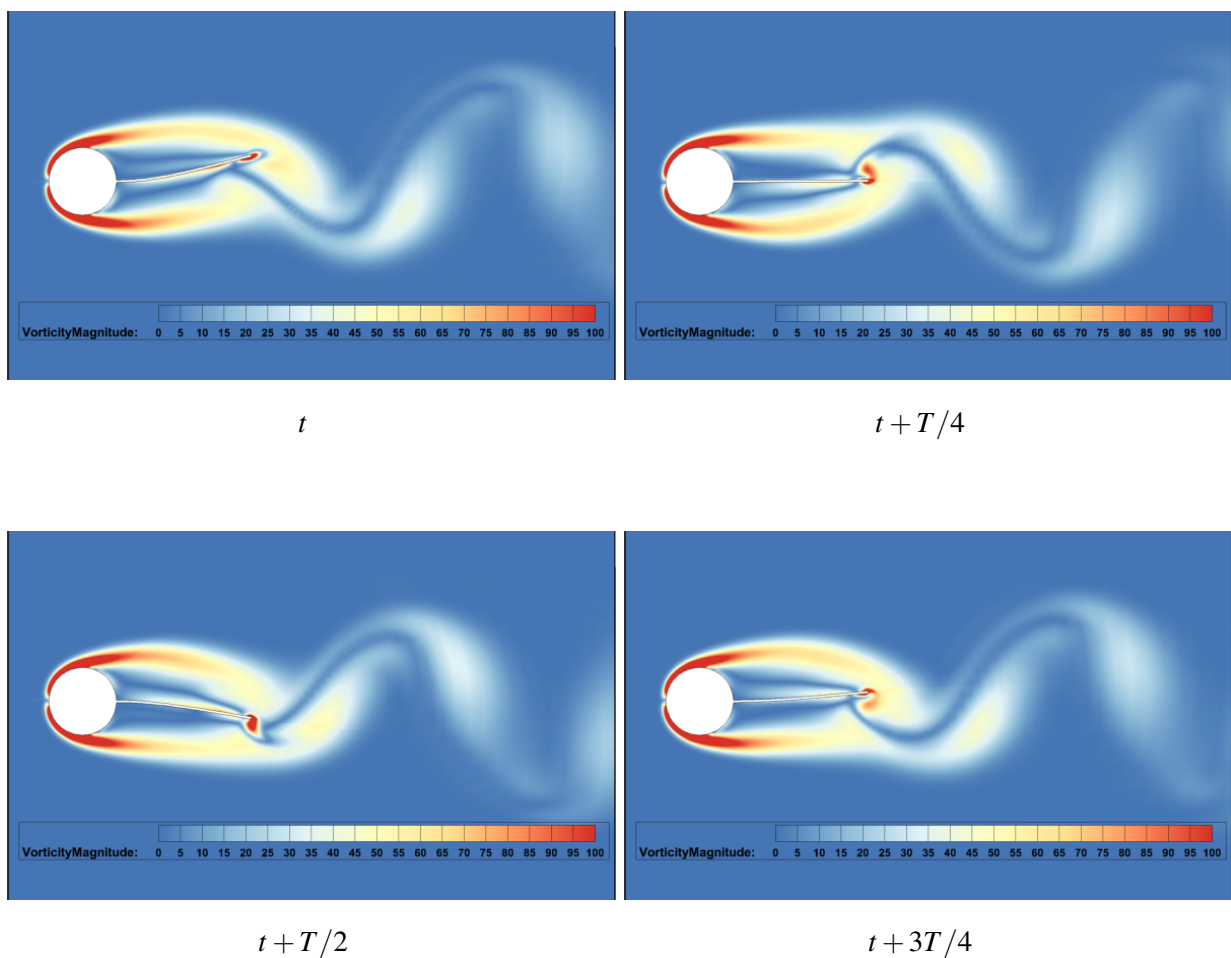


FIGURE 4 – Interaction fluide-structure entre l'écoulement de l'air dans le sillage du cylindre fixe et la poutre flexible. Visualisation sur une période de l'amplitude de la vorticité.

Pour le cylindre fixe nous avons choisi un rayon de $R = 1$ m et la poutre flexible a pour dimensions : $L = 4R$, $h = 7 \cdot 10^{-2}$ m, $b = 3h$ et propriétés : $E = 100$ GPa, $\rho = 4400$ kg.m⁻³. Le fluide est en écoulement à Reynolds $Re = 200$ et a pour masse volumique $\rho_f = 1.17$ kg.m⁻³ et viscosité dynamique $\mu = 0.4$ Pa.s. La structure est modélisée par un modèle de poutre de Timoshenko réduite à sa ligne moyenne, discrétisée en 50 éléments, et les déplacements à la paroi sont reconstruits à partir des déplacements et rotations de la ligne moyenne. Le solveur fluide utilisé est le solveur elsA et le modèle réduit structure (ICE) est résolu par intégrateur HHT- α . Les efforts intégrés sur la surface de la poutre flexible sont illustrés par la figure 5 et la figure 6 présente la réponse au premier mode de la structure avec l'amplitude de la coordonnée généralisée associée ainsi que l'effort aérodynamique projeté sur ce mode.

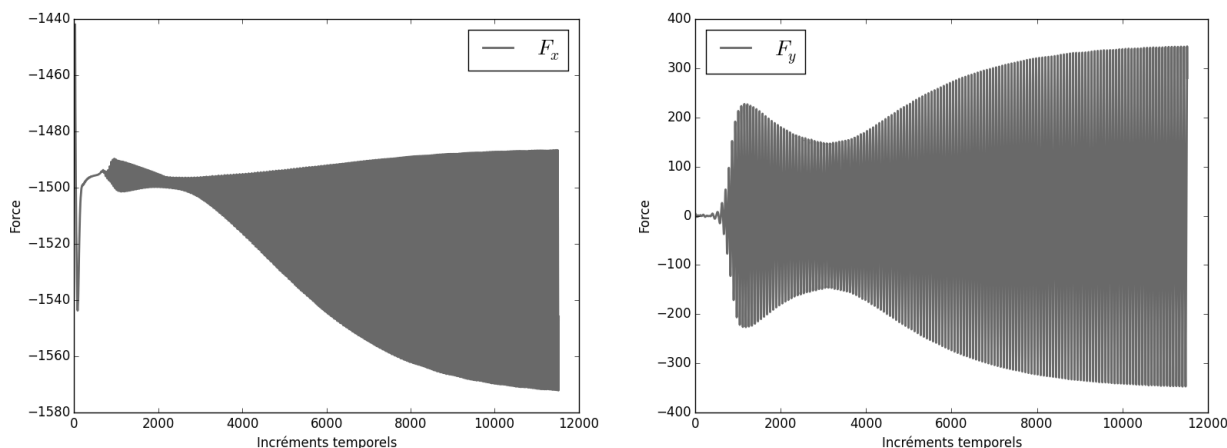


FIGURE 5 – Efforts aérodynamiques s'exerçant sur la poutre en fonction du temps. Efforts intégrés sur la surface, respectivement F_x à gauche et F_y à droite.

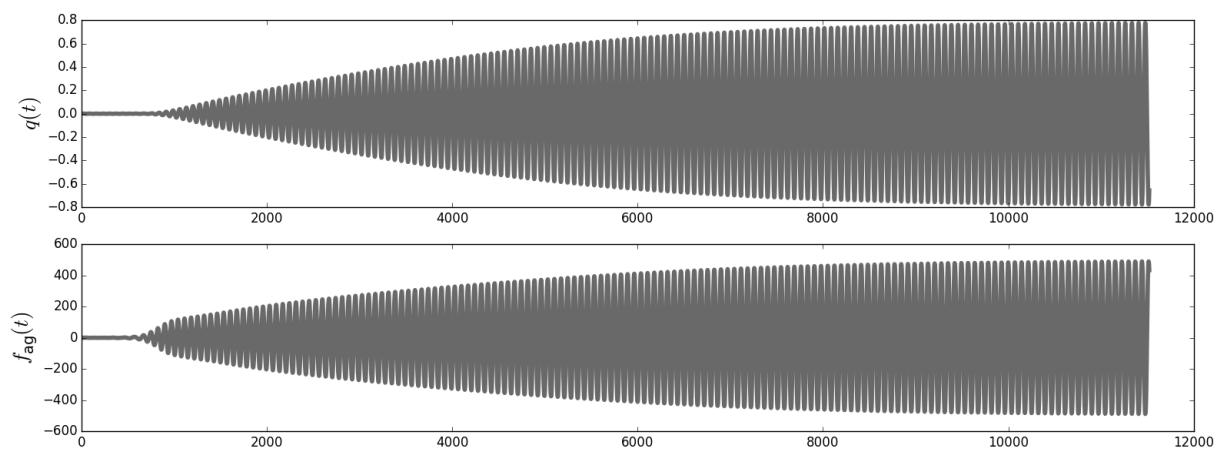


FIGURE 6 – Coordonnée généralisée associée au 1er mode de vibration de la structure (en haut) et effort aérodynamique projeté sur ce même mode (en bas) en fonction des incréments temporels.

5 Conclusion

En non-linéaire géométrique, la réduction de modèle par projection sur base modale est peu efficace à cause de l'interaction entre les modes propres de la structure. De plus les efforts purement non-linéaires doivent être déterminés de manière explicite en fonction des coordonnées généralisées afin de rendre le modèle réduit indépendant du modèle complet pour faciliter le couplage avec un solveur fluide. Une approche partitionnée pour le couplage du modèle réduit structure avec le solveur fluide a été préférée par rapport à un couplage monolithique pour deux raisons principales : d'une part car les sous-itérations d'équilibrage entre les deux solveurs sont stabilisantes et d'autre part pour des raisons de flexibilité, c'est-à-dire pouvoir changer l'un ou l'autre des solveurs plus aisément. Les perspectives sont l'amélioration de

la précision du modèle d'ordre réduit pour les structures encastrees-libres et l'application à des structures tournantes de type pales ou hélices à fortes non-linéarités géométriques.

Remerciements

Ces travaux ont été cofinancés par le programme de recherche et d'innovation de l'Union Européenne Horizon 2020 dans le cadre du projet Clean Sky 2 ADEC de la plateforme LPA-IADP.

Références

- [1] M. Balmaseda, G. Jacquet-Richardet, A. Placzek, D.-M. Tran, *Reduced Order Models for Nonlinear Dynamic Analysis With Application to a Fan Blade*, Journal of Engineering for Gas Turbine and Power, 142 (4), 041002, 2020.
- [2] L. Cambier, S. Heib, S. Plot, *The Onera elsA CFD software : input from research and feedback from industry*, Mechanics & Industry, EDP Sciences, 14 (3), pp. 159-174, 2013.
- [3] M. Géradin, D.J. Rixen, *Mechanical Vibrations, theory and application to structural dynamics*, John Wiley & Sons, 2015.
- [4] J.J. Hollkamp, R.W. Gordon *Reduced-order models for nonlinear response prediction : Implicit condensation and expansion*, Journal of Sound and Vibration, 318, pp. 1139-1153, 2008.
- [5] S. R. Idelsohn, A. Cardona, *A load-dependent basis for reduced nonlinear structural dynamics*, Computers & Structures, 20 (1-3), pp. 203–210, 1985.
- [6] K. Kim, A.G. Radu, X.Q. Wang, M.P. Mignolet, *Nonlinear reduced order modeling of isotropic and functionally graded plates*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 49, pp. 100–110, 2013.
- [7] M.I. McEwan, J.R. Wright, J.E. Cooper, A.Y.T. Leung, *A combined modal/finite element analysis technique for the dynamic response of a non-linear beam to harmonic excitation*, Journal of Sound and Vibration, 243 (4), pp. 601-624, 2001.
- [8] M. P. Mignolet, C. Soize, *Stochastic reduced order models for uncertain geometrically nonlinear dynamical systems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 147 (45-48), pp. 3951-3963, 2008.
- [9] A. A. Muravyov, S. A. Rizzi, *Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures*, Computers & Structures, 81 (15), pp. 1513-1523, 2003.
- [10] R. B. Nelson, *Simplified calculation of eigenvector derivatives*, AIAA Journal, 14 (9), pp. 1201–1205, 1976.
- [11] E. Nicolaidou, T. Hill, S. Nield, *Indirect reduced-order modelling : Using nonlinear manifolds to conserve kinetic energy*, Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Science, 476 (2243), 20200589, 2020.
- [12] J. Rutzmoser, *Model Order Reduction for Nonlinear Structural Dynamics*, Dissertation, Technische Universität München, 2018.
- [13] P. M. A. Slaats, J. Jongh, A. Sauren, *Model Reduction Tools for Nonlinear Structural Dynamics*, Computers & Structures, 54 (6), pp. 1155–1171, 1995.
- [14] A. Vizzaccaro, A. Givois, P. Longobardi, Y. Shen, J.-F. Deü, L. Salles, C. Touzé, O. Thomas, *Non-intrusive reduced order modelling for the dynamics of geometrically nonlinear flat structures using three-dimensional finite elements*, Computation Mechanics, 66, pp. 1293-1319, 2020.
- [15] A. Vizzaccaro, L. Salles, C. Touzé, *Comparison of nonlinear mappings for reduced-order modelling of vibrating structures : normal form theory and quadratic manifold method with modal derivatives*, Nonlinear Dynamics, 103, pp. 3335–3370, 2021.
- [16] O. Thomas, A. Sénéchal, J.-F. Deü, *Hardening/softening behavior and reduced order modelling of nonlinear vibrations of rotating cantilever beams*, Nonlinear Dyn, 86, pp. 1293-1319, 2016.
- [17] F.-B. Tian et al., *Fluid-structure interaction involving large deformations : 3D simulations and applications to biological systems*, Journal of Computational Physics, 258 (1), pp. 451-469, 2014.
- [18] S. Turek, J.Hron, *Proposal for numerical benchmarking of fluid-structure interaction between an elastic object and laminar incompressible flow*, in : H.J. Bungartz, M. Schäfer (Eds.), Fluid-Structure Interaction : Modelling, Simulation, Optimisation, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Netherlands, pp. 371–385, 2006.
- [19] X.Q. Wang, V. Khanna, K. Kim, M.P. Mignolet, *Nonlinear reduced-order modeling of flat cantilevered structures : identification challenges and remedies*, Journal of Aerospace Engineering, 34 (6), 2021.