



**HAL**  
open science

# Méthode MorteX pour des problèmes du couplage des maillages, du contact et de l'usure

Vladislav A. Yastrebov, Basava Raju Akula, Julien Vignollet

► **To cite this version:**

Vladislav A. Yastrebov, Basava Raju Akula, Julien Vignollet. Méthode MorteX pour des problèmes du couplage des maillages, du contact et de l'usure. 15e colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717639

**HAL Id: hal-03717639**

**<https://hal.science/hal-03717639>**

Submitted on 8 Jul 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Méthode MorteX pour des problèmes du couplage des maillages, du contact et de l'usure

V.A. Yastrebov<sup>1</sup>, B.R. Akula<sup>2</sup>, J. Vignollet<sup>3</sup>

<sup>1</sup> MINES ParisTech, PSL University, Centre des matériaux, CNRS UMR 7633, vladislav.yastrebov@mines-paristech.fr

<sup>2</sup> Transvalor, basava.akula@transvalor.com

<sup>3</sup> Safran, Safran tech, julien.vignollet@safran.com

---

**Résumé** — Une nouvelle méthode MorteX est proposée; elle combine la méthode mortar pour des interfaces non-conformes et la méthode X-FEM afin d'assurer la continuité de contraintes à travers d'une interface entre une surface conforme au maillage et une autre placée au sein d'un autre maillage. Afin d'éviter la surcontrainte des interfaces et des oscillations émergeant dans le cas de forts contrastes de la densité des maillages et de leur raideurs, une méthode de régularisation a été proposée. La méthode permet d'assembler des maillages recouvrant et traiter le problème du contact frottant et de l'usure.

**Mots clés** — contact, méthode MorteX, méthode mortar, X-FEM.

---

## 1 Introduction

Une classe de problèmes du contact et du couplage nécessite souvent des méthodes permettant de transmettre efficacement des efforts entre des maillages non-compatibles. Notamment, il s'agit (i) des problèmes des pièces assemblées où les différentes parties peuvent être maillés indépendamment, (ii) des problèmes de raffinement de maillages simple et efficace et (iii) des problèmes de contact et d'usure. Mortar est une méthode de référence qui permet d'assurer une transmission propre des efforts [1, 2]. Pourtant, il existe des problèmes où il s'avère intéressant de pouvoir traiter le couplage et le contact pas seulement entre des maillages non-conformes, mais entre des surfaces qui ne sont pas conformes à la géométrie des maillages. Nous avons développé une méthode qui combine (1) la méthode de mortar classique étendue pour fonctionner avec des surfaces qui passe à travers du maillage éléments finis avec (2) la méthode des éléments finis étendu (X-FEM) permettant l'intégration partielle des éléments. La méthode a été baptisée MorteX. Cependant, lors de traitement des problèmes de couplages entre des surfaces non-conformes aux frontières de maillages (cf. Fig. 1), la méthode de mortar a été montrée inefficace [3]. Ce problème se manifeste par des oscillations de contrainte dans l'interface lorsque le contraste de la densité de maillage *et* de la raideur entre le maillage hôte et celui du "patch" devient très élevé. Nous avons proposé une méthode inspirée de celle proposée dans [4] permettant d'éviter ces problèmes. Le traitement consiste dans une interpolation des multiplicateurs de Lagrange à grains grossiers en utilisant des fonctions de forme englobant plusieurs éléments.

L'avantage principal de la méthode MorteX est sa simplicité de la construction des maillages : on peut donc se permettre d'avoir des maillages avec des recouvrements arbitraires. In fine, la méthodologie de stabilisation, contrairement à la méthode de Nitsche ne nécessite pas de connaissance des matériaux couplé [3], mais se base exclusivement sur les considérations géométriques, elle peut donc être facilement automatisée. Finalement, la méthode MorteX est très adaptée au traitement des problèmes d'usure qui nécessite l'évolution de la surface usée : avec MorteX cette surfaces peut être facilement propagée dans le maillage hôte. En plus, cette procédure évitant le remaillage facilite le transfert de variables internes dans le cas du matériaux non-linéaire.

Dans cette contributions, nous décrivons rapidement la méthode MorteX et la procédure de stabilisation dans Section 2 et dans Section 3 nous démontrons son efficacité sur quelques exemples.

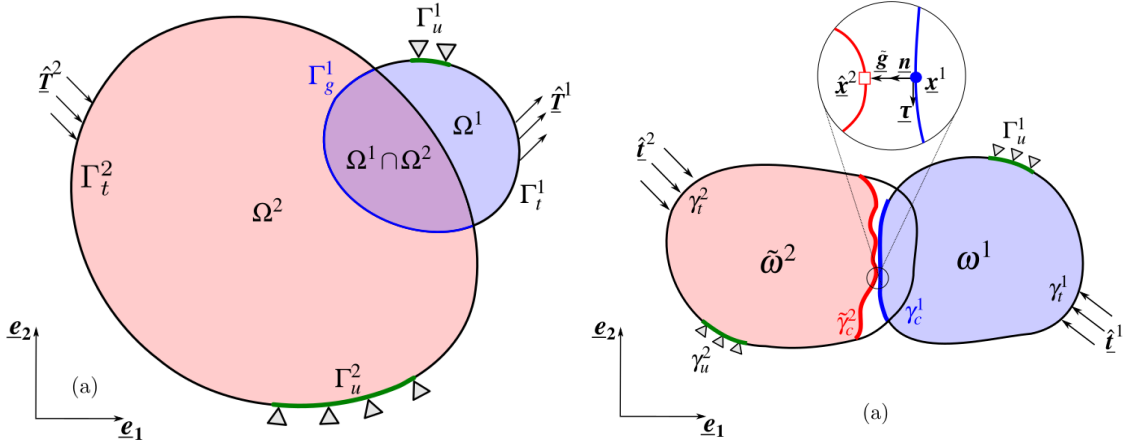


FIGURE 1 – (a) Problèmes du couplage et (b) du contact entre des surfaces non-conforme à la géométrie/maillage.

## 2 Méthode MorteX

Le problème le plus général, celui d'usure avec une surface virtuelle usée qui se propage dans le volume d'un des deux maillages en contact est présenté dans Fig. 2. Dans le cadre de la méthode du Lagrangien augmenté monolithique qu'on utilise avec la méthode MorteX, le pseudo-potential du contact frottant qui devrait être ajouté dans l'énergie potentielle est donnée par :

$$W_c = \int_{\gamma_c^i} l_n(g_n, \lambda_n) + l_\tau(\hat{g}_\tau, \lambda_\tau, \hat{p}_n) dS,$$

où  $g_n$  est le "gap" normal,  $\lambda_n, \lambda_\tau$  sont des multiplicateurs de Lagrange représentant la pression de contact et le vecteur de contrainte tangentielle. La première variation de ce pseudo-potential est donnée par :

$$\delta W_c = \begin{cases} \int_{\gamma_{stick}} \left( \hat{\lambda}_n \delta g_n + g_n \delta \lambda_n + \hat{\lambda}_\tau \delta \hat{g}_\tau + \hat{g}_\tau \delta \lambda_\tau \right) dS, & \hat{\lambda}_n \leq 0, |\hat{\lambda}_\tau| \leq -\mu \hat{p}_n \text{ (stick)}, \\ \int_{\gamma_{slip}} \left( \hat{\lambda}_n \delta g_n + g_n \delta \lambda_n - \mu \hat{p}_n \text{sign}(\hat{\lambda}_\tau) \delta \hat{g}_\tau - \frac{1}{\varepsilon_\tau} (\lambda_\tau + \mu \hat{p}_n \text{sign}(\hat{\lambda}_\tau)) \delta \lambda_\tau \right) dS, & \hat{\lambda}_n \leq 0, |\hat{\lambda}_\tau| > -\mu \hat{p}_n \text{ (slip)}, \\ \int_{\gamma_{nc}} \left( -\frac{1}{\varepsilon_n} \lambda_n \delta \lambda_n - \frac{1}{\varepsilon_\tau} \lambda_\tau \delta \lambda_\tau \right) dS, & \hat{\lambda}_n > 0 \text{ (non-contact)}. \end{cases} \quad (1)$$

Après la discrétisation du déplacement et des multiplicateurs de Lagrange :

$$\bar{x}^1(\xi^1) = N_m(\xi^1) \bar{x}_m^1, \quad m \in [1, M], \quad (2)$$

$$\lambda_{n,\tau}(\xi^1) = \Phi_l(\xi^1) \lambda_{n,\tau}^l, \quad l \in [1, L]. \quad (3)$$

Tous les terms d'Eq. (1) peuvent être évalués sauf que pour la description du déplacement de la surface virtuelle insérée dans le maillage hôte doit être ajuster pour prendre en compte le fonctions de formes volumiques :

$$\tilde{\bar{X}}^i(\zeta) = \tilde{N}_i(\zeta) \tilde{\bar{X}}_i^2, \quad i = \overline{1,2} \quad \text{avec} \quad \tilde{\bar{X}}_i^2 = N_j(\mu^i, \eta^i) \bar{X}_j^2, \quad j = \overline{1,4} \text{ pour quads/triangles}$$

A cause de cette prise en compte des fonctions de forme volumiques, même pour les éléments linéaires, le déplacement le long d'une ligne droite au sein de l'élément peut être fortement non-linéaire qui peut poser certains problèmes. Les détails de la discrétisation et d'intégration associées à cette méthode peuvent être trouvés dans [5, 6, 7].

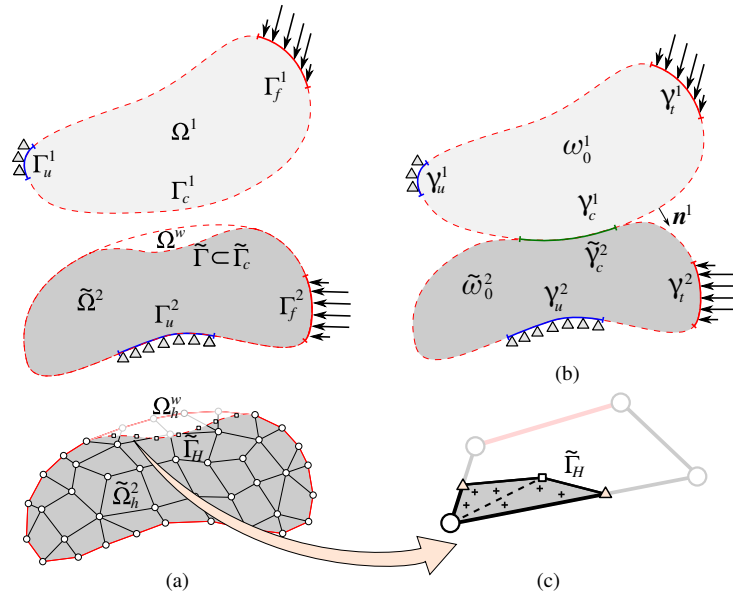


FIGURE 2 – Un problème du contact et d’usure unilatéral : (a) la configuration de référence pour le matériau usé et la discrétisation par éléments finis associée, où le maillage de référence est découpé par une surface virtuelle  $\tilde{\Gamma}_h$ ; (b) la configuration actuelle du contact entre les solides avec les mises à jour de la géométrie de la surface usée; (c) le volume effectif de l’un des éléments avec triangulation et points de Gauss nouvellement attribués (points de croisement), les marqueurs carrés représentent des coins internes de la discrétisation de la frontière virtuelle, les marqueurs triangulaires représentent les points d’intersection de cette frontière avec les éléments les frontières.

## 2.1 Stabilisation

La formulation mixte pour le contact présentée ici doit satisfaire les conditions inf-sup, sinon l’élément de contact résultant ne se comporte pas de manière stable. Si le nombre de multiplicateurs de Lagrange équipés d’une interpolation linéaire dépasse considérablement le nombre de noeuds du côté non-mortar, le problème devient surcontraint, ce qui entraîne des oscillations parasites en cas de couplage. Le remède inspiré des travaux de Moës et ses collègues [4] consiste à ne définir les multiplicateurs de Lagrange que sur des noeuds plus ou moins également espacés le long du côté du mortier de sorte que le nombre de multiplicateurs de Lagrange corresponde plus ou moins au nombre de noeuds du côté mortar. Entre ces noeuds, le long de quelques éléments (segments) qui les séparent, une interpolation linéaire est utilisée. A part d’assurer une meilleure stabilité, cette technique est également très utile pour faire face à un autre type d’oscillations qui apparaît entre les surfaces de contact courbes si la densité des maillages diffère considérablement. Si des éléments finis linéaires sont utilisés et si un côté de mortar courbe est plus densément maillé que le côté non-mortar, qu’à l’échelle d’un seul élément non-mortar, qui reste plat, le côté mortar aurait encore une certaine courbure représentée par une interpolation linéaire par morceaux. Cette incompatibilité des courbures locale (pas de courbure) et globale (courbe) du côté non mortar, se traduit par un problème de type Hertzien, qui rend le profil de pression parabolique. Par conséquent, la superposition de ces profils paraboliques le long de toute la zone de contact entraîne des fluctuations parasites de la pression de contact. Notez qu’un tel comportement parasite apparaîtrait également si l’interpolation de second ordre est utilisée s’il est traité en divisant les surfaces courbes en faces/segments plats/linéaires par morceaux. En utilisant des multiplicateurs de Lagrange à grains grossier de la manière suggérée, le problème de ces oscillations parasites dans les tractions de contact peut être complètement éliminé. A noter que cette technique de grain grossier repose exclusivement sur le contraste local des densités de mailles des faces mortier et non mortier et peut être assurée automatiquement sans recourir à l’aide d’un utilisateur.

### 3 Example

Considérons un problème de contact frottant entre deux cylindres faits du même matériau : après une mise en contact normal un cisaillement est appliqué pour produire un glissement partiel dans l'interface de contact (cf. Fig. 3). Une solution analytique de ce problème est connue [?]. Dans Fig. 4 on démontre que les champs de contraintes sont lisses près de l'interface de contact et dans Fig. 5 on compare la solution analytique avec celle obtenue par la méthode de mortar classique avec des surfaces conformes aux maillages et celle obtenue par la méthode MorteX pour le maillage démontré dans Fig. 3. Les résultats entre les deux méthodes sont très similaires. Pour plus de détails, le lecteur/la lectrice est invité(e) à consulter [5, 6].

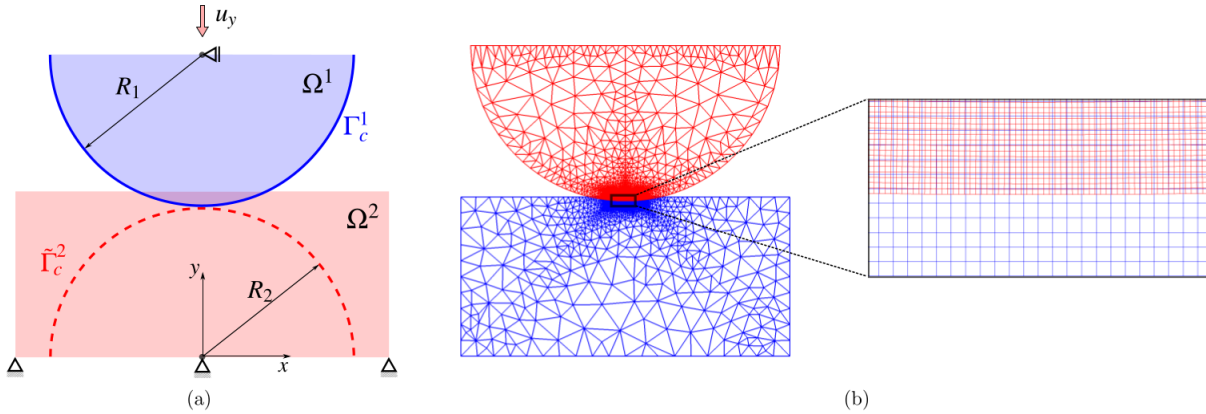


FIGURE 3 – Problème du contact frottant entre deux cylindres : la surface du premier est représentée par une surface EF conforme et celle de l'autre par une surface virtuelle qui passe à travers le maillage.

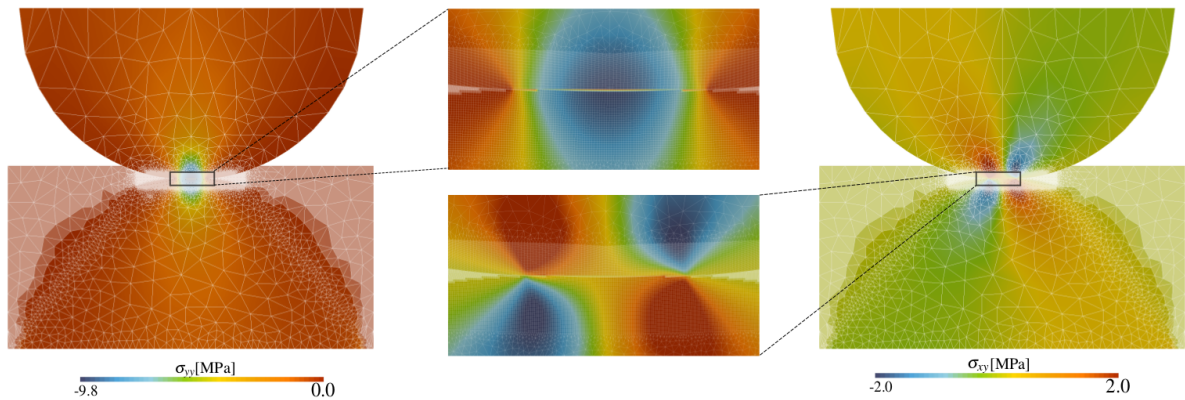


FIGURE 4 – Les champs de contraintes dans les deux cylindres avec le contact traité par la méthode MorteX

### 4 Conclusion

La méthode MorteX n'a été développée que pour des problèmes en deux dimensions. Son extension aux trois dimensions représente une tâche difficile mais importante pour prouver son intérêt pour le traitement des vrais problèmes du monde d'ingénieur.

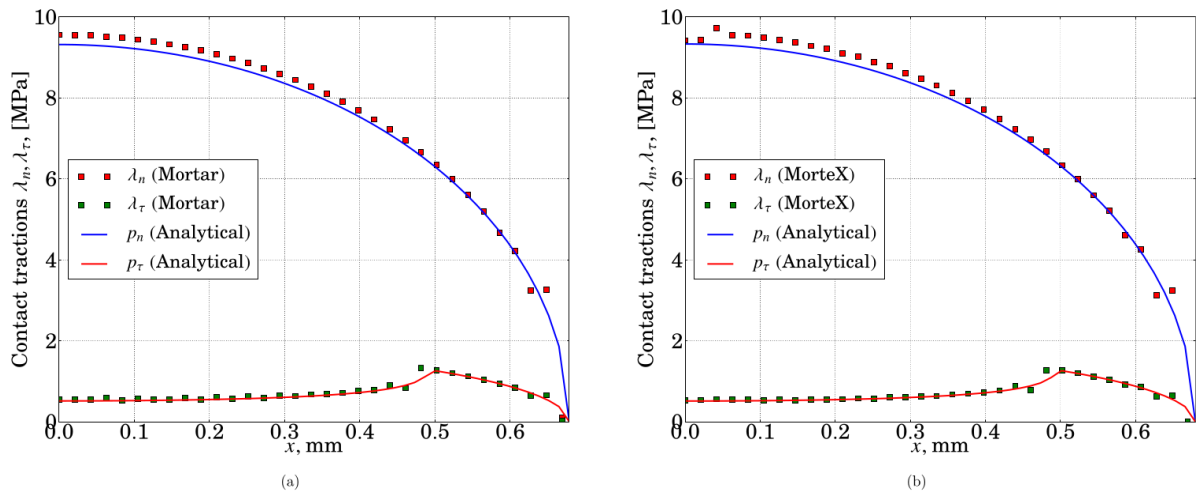


FIGURE 5 – Vecteur-contrainte normal et tangential dans l’interface de contact (a) mortier classique, (b) MorteX.

## Références

- [1] F Ben Belgacem, P Hild, and P Laborde. The mortar finite element method for contact problems. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(4-8) :263–271, 1998.
- [2] Barbara I Wohlmuth. A mortar finite element method using dual spaces for the lagrange multiplier. *SIAM journal on numerical analysis*, 38(3) :989–1012, 2000.
- [3] Jessica D Sanders, Tod A Laursen, and Michael A Puso. A nitsche embedded mesh method. *Computational Mechanics*, 49(2) :243–257, 2012.
- [4] Nicolas Moës, Eric Béchet, and Matthieu Tourbier. Imposing dirichlet boundary conditions in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(12) :1641–1669, 2006.
- [5] Basava Raju Akula, Julien Vignollet, and Vladislav A. Yastrebov. Stabilized mortex method for mesh tying along embedded interfaces. 2019. submitted, preprint is available on <https://arxiv.org/abs/1902.04003>.
- [6] Basava Raju Akula, Julien Vignollet, and Vladislav A. Yastrebov. Mortex method for contact along real and embedded surfaces : coupling x-fem with the mortar method. 2019. submitted, preprint is available on <https://arxiv.org/abs/1902.04000>.
- [7] B.R. Akula. *Extended mortar method for contact and mesh-tying applications*. PhD thesis, MINES ParisTech, 2019. available on <https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-02200516>.