Méthode générale pour la correction des couches limites en homogénéisation asymptotique

Mouad Fergoug, Nicolas Feld, Samuel Forest, Basile Marchand, Augustin Parret-Fréaud

▶ **To cite this version:**

Mouad Fergoug, Nicolas Feld, Samuel Forest, Basile Marchand, Augustin Parret-Fréaud. Méthode générale pour la correction des couches limites en homogénéisation asymptotique. 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717638

HAL Id: hal-03717638
https://hal.science/hal-03717638

Submitted on 8 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2022
15ème Colloque National en Calcul des Structures
16-20 Mai 2022, Presqu'île de Giens (Var)

Méthode générale pour la correction des couches limites en homogénéisation asymptotique

Mouad Fergoug[1,2], Nicolas Feld[2], Samuel Forest[1], Basile Marchand[1] et Augustin Parret-Fréaud[2]

[1] *MINES ParisTech, PSL University, MAT – Centre des matériaux, CNRS UMR 7633, BP 87 91003 Evry, France, {mouad.fergoug,samuel.forest,basile.marchand}@mines-paristech.fr*
[2] *Safran Tech, Etablissement Paris Saclay, Rue des Jeunes Bois-Châteaufort, 78114 Magny-les-Hameaux, France, {nicolas.feld,augustin.parret-freaud}@safrangroup.com*

Résumé — Nous proposons une méthode de correction des effets de bords en homogénéisation asymptotique valable pour différents types de conditions aux limites (Dirichlet, Neumann et mixte), justifiant l'aspect général de la méthode. Des correcteurs de couche limite sont rajoutés dans les développements asymptotiques au voisinage des bords et ce jusqu'à l'ordre 3. L'ajout de ces termes permet de satisfaire de façon exacte les conditions aux limites sur les bords. Des exemples numériques sur structures en composite sont présentés pour démontrer l'efficacité de la méthode et ses limites.
Mots clés — Homogénéisation asymptotique, Effets de bords, Couche limite.

1 Introduction

L'industrie aéronautique est régie par des normes environnementales qui poussent à réduire la consommation des moteurs. Ces fortes exigences soumettent les constructeurs aéronautiques à une quête de performance énergétique de leurs produits. Pour répondre à ces exigences, le Groupe Safran a opté, entre autres, pour l'utilisation de nouveaux matériaux, plus légers et résistants. À titre d'exemple, les aubes de soufflante et le carter du moteur LEAP sont réalisés en composites tissés 3D, permettant ainsi de réduire la masse du moteur par comparaison aux aubes métalliques. Il n'est cependant pas aisé de réaliser des simulations numériques de telles structures hétérogènes en tenant compte des phénomènes mécaniques mis en jeu jusqu'aux échelles fines, vu le nombre de degrés de liberté résultant. Néanmoins, la prise en compte de ces phénomènes aux petites échelles est essentielle, au moins localement, pour l'amélioration de la fidélité des simulations numériques. Pour éviter le recours à des simulations aux échelles fines dépassant largement les moyens de calculs à sa disposition, l'ingénieur se retrouve donc face à la problématique de faire dialoguer des modèles formulés à des échelles différentes au sein d'une même simulation.

Pour répondre à cette problématique, on se place dans le cadre de l'homogénéisation des milieux périodiques fondée sur les développements asymptotiques [1]. Cette approche est multi-échelle car elle permet non seulement de formuler un problème à l'échelle macroscopique mais aussi d'*estimer* les champs locaux hétérogènes grâce au processus de *relocalisation*. Cette estimation est appropriée lorsque la taille des hétérogénéités est petite devant les dimensions de la structure et que les gradients de déformations macroscopiques sont faibles. Sinon, il est nécessaire de considérer les effets des gradients macroscopiques en conservant les termes d'ordre supérieur du développement asymptotique [2].

Par ailleurs, cette approche reste valable quand l'hypothèse de périodicité est respectée. Or, la périodicité locale de la solution n'est notamment pas vérifiée au voisinage des bords. L'enjeu de ce travail est donc de proposer une méthode pour corriger l'estimation des champs locaux aux bords. L'idée est d'introduire dans le développement asymptotique des termes de couche limite [3, 4] sur les frontières du domaine étudié. L'ajout de ces termes va permettre de satisfaire de façon exacte les différents types de conditions aux limites.

Après un bref rappel de la théorie d'homogénéisation asymptotique, nous détaillerons le principe de la méthode puis nous présenterons un exemple d'application pour illustrer les bénéfices apportés. Finalement, nous présenterons les conclusions et perspectives de ces travaux.

2 Homogénéisation asymptotique et estimation des champs locaux

On considère une structure hétérogène qui occupe un domaine Ω^η (Figure 1) et constituée d'une cellule élémentaire Y caractérisée par un comportement hétérogène $\mathbb{C}^\eta(\boldsymbol{x})$. Le facteur d'échelle η est défini par :

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{\eta}, \tag{1}$$

avec $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ représentant respectivement les coordonnées macroscopique et microscopique. Le problème homogène (Figure 1) défini sur Ω est caractérisé par un comportement effectif $\mathbb{C}^0$ obtenu par l'étape d'homogénéisation.

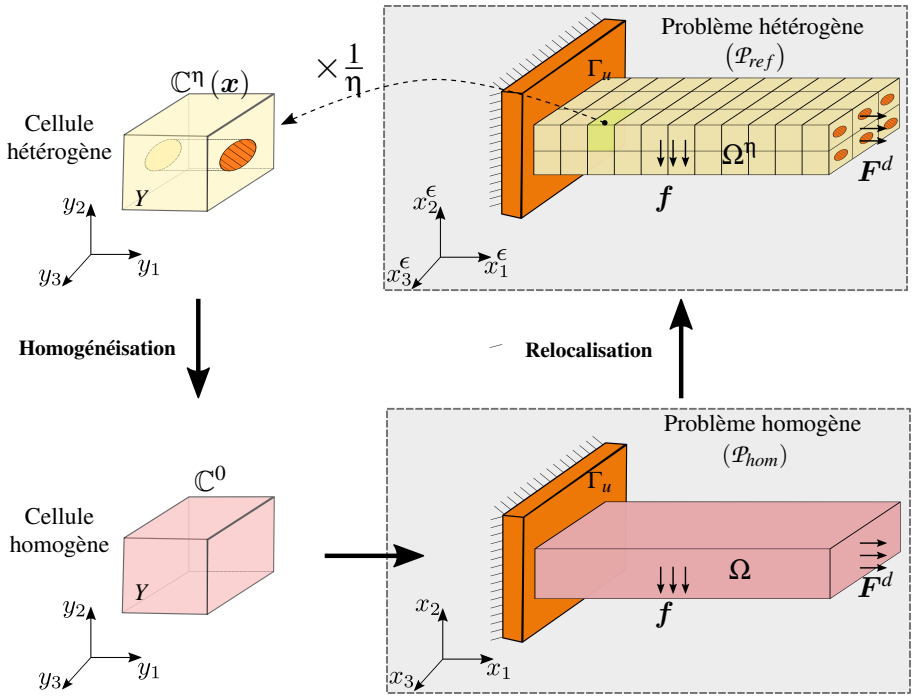


FIGURE 1 – Illustration du problème hétérogène $(\mathcal{P}_{ref})$ défini sur Ω^η, construit par répétition d'une cellule élémentaire Y caractérisée par un comportement hétérogène $\mathbb{C}^\eta(\boldsymbol{x})$. Le problème homogène $(\mathcal{P}_{hom})$ défini sur Ω est caractérisé par un comportement effectif $\mathbb{C}^0$ obtenu par l'étape d'homogénéisation. Les champs locaux sont estimés par le processus de relocalisation.

2.1 Problème hétérogène $(\mathcal{P}_{ref})$

Le problème hétérogène, considéré comme notre référence, est défini comme suit :

Trouver $(\boldsymbol{u}^\eta, \boldsymbol{\sigma}^\eta)$ tel que :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^\eta(\boldsymbol{x})) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0 & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega^\eta \quad (2a) \\ \boldsymbol{\sigma}^\eta(\boldsymbol{x}) = \mathbb{C}^\eta(\boldsymbol{x}) : \varepsilon^\eta(\boldsymbol{x}) & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega^\eta \quad (2b) \\ \boldsymbol{u}^\eta(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}^d & \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_u \quad (2c) \\ \boldsymbol{\sigma}^\eta(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{F}^d & \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_t \quad (2d) \end{cases}$$

Les champs hétérogènes ($\boldsymbol{u}^\eta$, ε^η, $\boldsymbol{\sigma}^\eta$) sont représentés par des expansions asymptotiques en puissances de η :

$$\boldsymbol{u}^\eta(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \eta \boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + O(\eta^2), \tag{3}$$

$$\varepsilon^\eta(\boldsymbol{x}) = \varepsilon^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \eta \varepsilon^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + O(\eta^2), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\eta(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \eta \boldsymbol{\sigma}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + O(\eta^2). \tag{5}$$

Les champs $\boldsymbol{u}^n$, $\boldsymbol{\varepsilon}^n$ et $\boldsymbol{\sigma}^n$ sont $Y-$périodiques appelés correcteurs de déplacement, déformation ou contrainte d'ordre n. On pourra démontrer que $\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})$ signifiant que $\boldsymbol{u}^0$ est le déplacement macroscopique ne dépendant que de la variable globale $\boldsymbol{x}$.

2.2 Problème périodique du 1^{er} ordre $\left(\mathcal{P}^{1^{er}}_{ordre}\right)$

Ce problème est défini à l'échelle de la cellule élémentaire Y, et de solution $\boldsymbol{u}^1$ et $\boldsymbol{\sigma}^0$ s'écrit comme :

Trouver $(\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^0)$ tel que :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y\left(\boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right) = 0 & \forall \boldsymbol{y} \in Y \quad (6a) \\ \boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbb{C}(\boldsymbol{y}) : \left(\boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\boldsymbol{u}^1)\right) & \forall \boldsymbol{y} \in Y \quad (6b) \\ \boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \text{is } Y-\text{périodique} \quad (6c) \\ \boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{n} & \text{is } Y-\text{antipériodique} \quad (6d) \end{cases}$$

avec $\boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}_x(\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}))$ la déformation macroscopique imposée. La fluctuation périodique $\boldsymbol{u}^1$ (correcteur d'ordre 1 du déplacement) s'écrit :

$$\boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbb{D}(\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{x}), \tag{7}$$

avec $\mathbb{D}(\boldsymbol{y})$ le tenseur de relocalisation des déplacements $Y-$périodiques à moyenne nulle.
Le champ de déformation au premier ordre s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\varepsilon}_y(\boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) + \boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{x}) = \mathbb{A}(\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{x}), \tag{8}$$

avec $\mathbb{A}(\boldsymbol{y})$ le tenseur de relocalisation des déformations. On peut définir donc la contrainte au premier ordre comme :

$$\boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbb{C}(\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbb{B}(\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{x}), \tag{9}$$

où $\mathbb{B}$ est le tenseur de relocalisation des contraintes. Le tenseur homogénéisé est défini comme :

$$\mathbb{C}^0 = \langle \mathbb{B}(\boldsymbol{y}) \rangle_Y. \tag{10}$$

2.3 Problème homogène $(\mathcal{P}_{hom})$

Le problème homogène est défini par :

Trouver $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{\Sigma})$ tel que :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x})) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0 & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \quad (11a) \\ \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \quad (11b) \\ \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}^d & \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Gamma}_u \quad (11c) \\ \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{F}^d & \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Gamma}_t \quad (11d) \end{cases}$$

avec $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{u}^0$. La déformation et la contrainte macroscopiques vérifient :

$$\boldsymbol{E} = \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}^0 \right\rangle_Y, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \left\langle \boldsymbol{\sigma}^0 \right\rangle_Y. \tag{12}$$

2.4 Estimation des champs locaux

L'estimation proposée des champs hétérogènes est construite à partir de la solution du problème homogène $(\mathcal{P}_{hom})$ et des tenseurs de relocalisation $(\mathbb{D}, \mathbb{A}, \mathbb{B})$ obtenus de la résolution du problème $\left(\mathcal{P}^{1^{er}}_{ordre}\right)$. Pour cela, on considère la situation suivante :

$$\eta = 1 \implies \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{13}$$

c'est à dire que l'hypothèse de séparation des échelles n'est pas vérifiée. Les champs mécaniques ne dépendent donc que de la variable globale $\boldsymbol{x}$. Les champs estimés s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^{est}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) + \mathbb{D}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \quad (14a) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{est}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{A}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \quad (14b) \\ \boldsymbol{\sigma}^{est}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{B}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \quad (14c) \end{cases}$$

3 Principe de la méthode

L'estimation des champs obtenue par le processus de relocalisation n'est pas précise aux bords. Ceci est expliqué par la perte de la périodicité locale de la solution au voisinage de ceux-ci. Il faut donc mettre en place une approche adaptée, qui rentre dans le cadre de la démarche asymptotique et reste valable pour différents types de conditions aux limites.

3.1 Condition aux limites de Neumann

Le problème homogénéisé peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left\langle \boldsymbol{\sigma}^{est}(\boldsymbol{x}) \right\rangle_Y + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0 & \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega} \quad (15a) \\ \left\langle \boldsymbol{\sigma}^{est}(\boldsymbol{x}) \right\rangle_Y = \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) & \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega} \quad (15b) \\ \left\langle \boldsymbol{u}^{est}(\boldsymbol{x}) \right\rangle_Y = \boldsymbol{u}^d & \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Gamma_u} \quad (15c) \\ \left\langle \boldsymbol{\sigma}^{est}(\boldsymbol{x}) \right\rangle_Y \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{F}^d & \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Gamma_t} \quad (15d) \end{cases}$$

avec $\langle \boldsymbol{\sigma}^{est} \rangle_Y = \boldsymbol{\Sigma}$ et $\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{est} \rangle_Y = \boldsymbol{E}$. Il est clair que la condition aux limites sur $\boldsymbol{\Gamma_t}$ n'est vérifiée qu'en moyenne de $\boldsymbol{\sigma}^{est}$, donc :

$$\boldsymbol{\sigma}^{est} \cdot \boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{F}^d, \quad (16)$$

justifiant ainsi le fait que la contrainte estimée est généralement incorrecte aux voisinages des bords. Pour corriger ces champs estimés, des termes de couche limite sont rajoutés aux développements asymptotiques, permettant de vérifier de façon exacte la condition aux limites. Pour calculer les termes correctifs, six problèmes auxiliaires sur la cellule élémentaire sont considérés. À chaque problème, un chargement caractéristique F_{kl} est appliqué, avec $kl = \{11, 22, 33, 23, 31, 12\}$, à la surface où la condition aux limites de type Neumann est appliquée. La surface opposée est fixée, tandis que les surfaces restantes sont soumises à des conditions de périodicité. Le chargement caractéristique est défini comme suit :

$$F_{ikl} = -B_{ijkl} \cdot n_j + \frac{1}{|Y|} \int_Y B_{ijkl} \cdot n_j \, dY \quad (17)$$

où n_j est la normale sortante à $\boldsymbol{\Gamma_t}$, $j \in \{1,2,3\}$ est l'indice fixé de cette normale, et B_{inkl} sont les composantes du tenseur de relocalisation des contraintes $\mathbb{B}$. Les champs de déplacement, déformation et contrainte résultants sont des composantes des tenseurs de relocalisation de couche limite $\mathbb{D}^{bl}$, $\mathbb{A}^{bl}$, et $\mathbb{B}^{bl}$. Ainsi, les champs correctifs sont calculés comme suit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^{bl} = \mathbb{B}^{bl} : \boldsymbol{E}, & (18) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{bl} = \mathbb{A}^{bl} : \boldsymbol{E}, & (19) \\ \boldsymbol{u}^{bl} = \mathbb{D}^{bl} : \boldsymbol{E}. & (20) \end{cases}$$

Le champ de contrainte corrigé $\boldsymbol{\sigma}^{cor}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}^{cor} = \boldsymbol{\sigma}^{est} + \boldsymbol{\sigma}^{bl}, \quad (21)$$

satisfaisant ainsi la condition aux limites de Neumann.

3.2 Condition aux limites de Dirichlet

Pour corriger les champs estimés au voisinage d'un bord soumis à une condition aux limites de Dirichlet, six problèmes auxiliaires sont considérés en appliquant des déplacements correctifs ϱ_{kl} avec $kl = \{11,22,33,23,31,12\}$:

$$\varrho_{ikl} = -D_{ikl}. \tag{22}$$

Par la suite, une étape de relocalisation définie dans les équations (18),(19), et (20) est nécessaire pour déduire les termes correctifs à rajouter aux développements asymptotiques.

3.3 Condition aux limites de type "Mixtes"

La correction des conditions aux limites mixtes est conduite en appliquant à la fois un chargement F_{ikl} et un déplacement ϱ_{ikl} avec $kl = \{11,22,33,23,31,12\}$ et i la composante considérée. À titre d'illustration, nous considérons l'exemple du composite en traction suivant (Figure 2) :

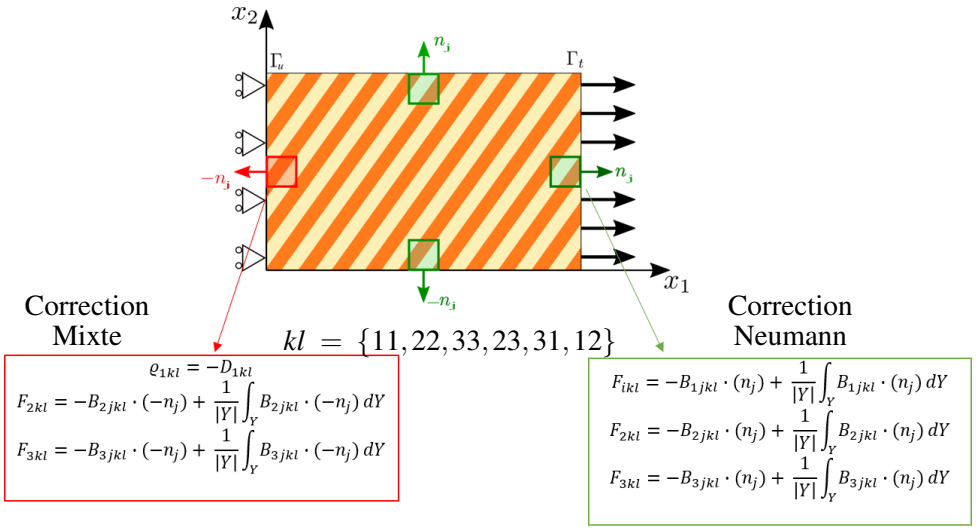
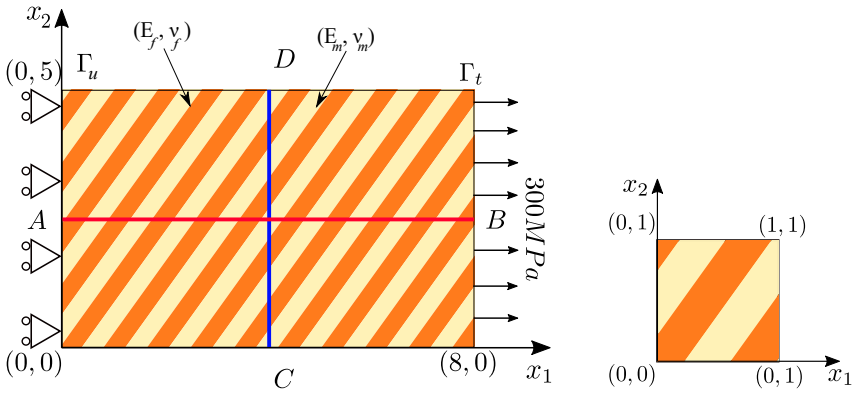


FIGURE 2 – Illustration de la correction des conditions aux limites de Neumann et mixte.

4 Exemple numérique

Nous considérons un problème d'élasticité en déformation plane constitué par un composite laminé composé de deux couches élastiques isotropes (Figure 3) de coefficients ($E_m = 1000$ MPa, $\nu_m = 0.3$) et ($E_f, \nu_f = 0.3$), la valeur de E_f sera variée dans l'exemple. Les champs de contraintes sont tracés le

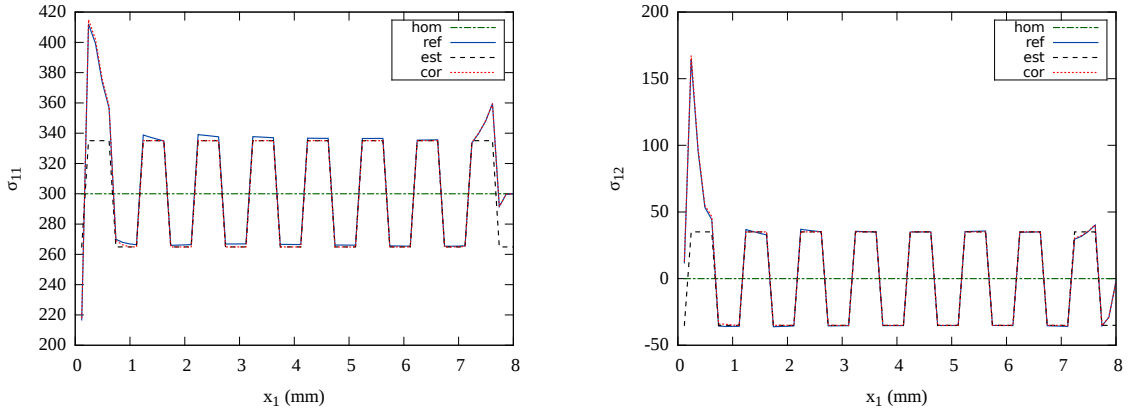


(a) Structure étudiée (b) Cellule élémentaire

FIGURE 3 – Illustration d'un composite laminé en traction.

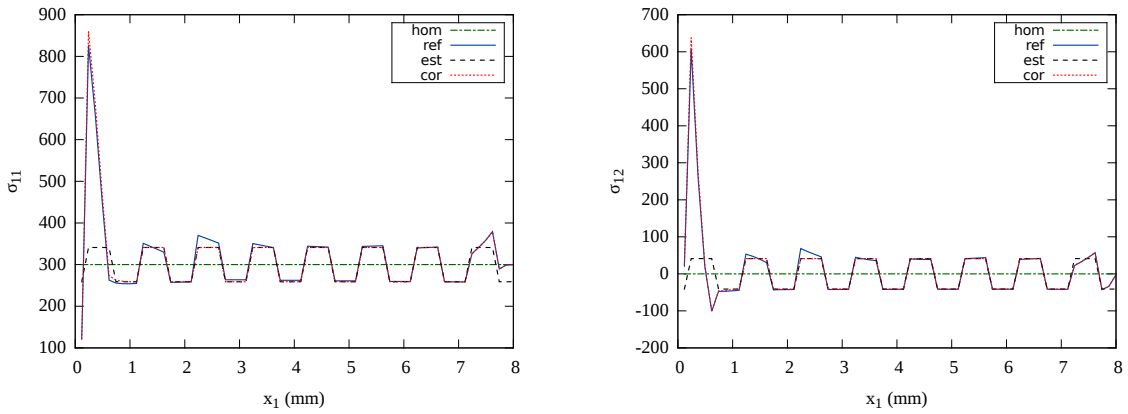
long de la ligne AB pour un contraste E_f/E_m de 10 dans la Figure 4 et un contraste de 50 dans la Figure 5.

On constate que σ^{cor} est superposé avec σ^{ref} dans le domaine intérieur du composite *et* sur les frontières. Nous remarquons également que de fortes contraintes sont développées au voisinage de la frontière Γ_u, notamment pour des rapports de contraste plus élevés. Pour un rapport de 50, la contrainte estimée est 3 fois plus petite que la contrainte réelle pour σ_{11} et 7 fois plus petite pour σ_{12}, ce qui peut entraîner une sous-estimation des critères de rupture si la conception est menée sans aucune correction de la couche limite.



(a) σ_{11} (MPa) (b) σ_{12} (MPa)

FIGURE 4 – Résultats des champs de contraintes homogénéisés (hom), de référence (ref), estimés (est) et corrigés (cor) tracés le long de la ligne AB avec $\frac{E_f}{E_m} = 10$ pour le composite laminé en traction.



(a) σ_{11} (MPa) (b) σ_{12} (MPa)

FIGURE 5 – Résultats des champs de contraintes homogénéisés (hom), de référence (ref), estimés (est) et corrigés (cor) tracés le long de la ligne AB avec $\frac{E_f}{E_m} = 50$ pour le composite laminé en traction.

5 Conclusion

Nous avons proposé une correction générale des effets de bords basée sur l'homogénéisation asymptotique afin d'estimer correctement les champs locaux au voisinage des bords. L'idée principale de la méthode est de calculer des termes correctifs à partir de la résolution de différents problèmes auxiliaires sur la cellule unitaire. La nature du problème à résoudre dépend des conditions aux limites locales. Ces termes correctifs sont ajoutés aux champs estimés obtenus par le processus de relocalisation, améliorant considérablement la solution au voisinage des frontières. Les résultats de la relocalisation et la correction aux bords jusqu'au *troisième ordre* seront montrés lors de la présentation.

Références

[1] E Sanchez-Palencia. Homogenization method for the study of composite media. In *Asymptotic Analysis II—*, pages 192–214. Springer, 1983.

[2] C. Boutin. Microstructural effects in elastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 33(7) :1023–1051, March 1996.

[3] Hélène Dumontet. Study of a boundary layer problem in elastic composite materials. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 20(2) :265–286, 1986.

[4] Fergoug Mouad, Feld Nicolas, Forest Samuel, Marchand Basile, and Parret-Fréaud Augustin. A general boundary layer corrector for the asymptotic homogenization of elastic linear composite structures. manuscript submitted to composite structures, 2021.