



**HAL**  
open science

# Développement d'une méthode de calcul efficace pour la mise en oeuvre du critère de Fatemi-Socie en fatigue multi-axiale

Françoise Fauvin, Bastien Agard, Jean-Christophe Roux, Eric Feulvarch

## ► To cite this version:

Françoise Fauvin, Bastien Agard, Jean-Christophe Roux, Eric Feulvarch. Développement d'une méthode de calcul efficace pour la mise en oeuvre du critère de Fatemi-Socie en fatigue multi-axiale. 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717605

**HAL Id: hal-03717605**

**<https://hal.science/hal-03717605>**

Submitted on 8 Jul 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Développement d'une méthode de calcul efficace pour la mise en œuvre du critère de Fatemi-Socie en fatigue multi-axiale

F. Fauvin<sup>1</sup>, B. Agard<sup>1</sup>, J.-C. Roux<sup>1</sup>, E. Feulvarch<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univ Lyon, Centrale Lyon ENISE, LTDS, UMR 5513 CNRS, 58 rue Jean Parot, 42023 Saint-Etienne cedex 02, France, {francoise.fauvin, bastien.agard, jean-christophe.roux, eric.feulvarch}@enise.fr

**Résumé** — Dans l'étude du comportement mécanique de structures métalliques, les données à analyser sont issues de mesures expérimentales en un point avec une grande fréquence d'acquisition, ou bien d'une analyse par éléments finis contenant un très grand nombre de points d'intégration. Une difficulté majeure réside dans le temps de calcul pour l'application d'un critère de fatigue. Une prise en compte de grandeurs normales peut se révéler essentielle dans l'analyse, nécessitant ainsi la recherche des plans critiques. La méthode exposée ici propose une démarche rapide et efficace de recherche de ces plans.

**Mots clés** — fatigue oligo-cyclique, chargements multi-axiaux, plans critiques.

## 1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce travail aux cas de chargements multiaxiaux de structures métalliques et à leur tenue en fatigue. Le niveau élevé des contraintes et du travail en déformation impose une analyse en fatigue dans le domaine oligo-cyclique. Le premier paramètre à prendre en compte dans l'estimation de la durée d'une telle structure est ainsi l'amplitude de déformation en cisaillement. De plus, dans ce contexte, le chargement multi-axial génère une forte évolution des directions principales des tenseurs. Il est alors possible d'adopter une approche de type plan critique comme exposé dans Dang Van, Papadoulos ou Pellinghelli [1, 2, 3]. Ces méthodes s'avèrent très coûteuses en temps de calcul puisqu'elles nécessitent le balayage d'un grand nombre de facettes selon la discrétisation de leur orientation. Dans les travaux de Fauvin *et al.* [4], une méthode rapide et efficace est développée dans l'espace des déviateurs pour obtenir une estimation de l'amplitude de cisaillement maximale. Cet outil s'est avéré particulièrement efficace dans le cadre de données issues d'un calcul par éléments finis pour une structure complexe qui comportait un très grand nombre de points d'intégration. Leur post-traitement dans l'espace des déviateurs a permis d'utiliser le critère de Manson-Coffin et d'estimer un nombre de cycles avant rupture [5]. Pour affiner l'analyse en fatigue, nous cherchons à appliquer un critère de type Brown et Miller ou Fatemi-Socie [6, 7] qui nécessite la prise en compte de la contrainte ou de la déformation normale. Nous proposons dans cet exposé une nouvelle méthode rapide et efficace dans l'espace des déviateurs qui permet de déterminer l'ensemble des plans critiques en déformations afin d'extraire ceux sur lesquels les grandeurs normales sont maximales.

## 2 Méthode de calcul

Dans le cas d'un post-traitement d'un calcul aux éléments finis, on obtient, pour une structure complexe, un très grand nombre de tenseurs de déformations  $\underline{\underline{\epsilon}}(t)$  ou de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ . Ces tenseurs peuvent être décomposés en une partie sphérique  $\underline{\underline{S}}_H(t) = \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}(t))\underline{\underline{I}}$  et une partie déviatorique :

$$\underline{\underline{S}}(t) = \underline{\underline{\epsilon}}(t) - \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}(t))\underline{\underline{I}} \quad (1)$$

Seule la partie déviatorique est responsable des phénomènes de cisaillement.

Comme chaque déviateur  $\underline{\underline{S}}(t)$  est de trace nulle, il sera représenté en dimension 5 (au lieu de 6).

## 2.1 Calcul d'amplitude dans l'espace des déviateurs

Pour calculer l'amplitude maximale de cisaillement, nous déterminons le diamètre maximal du nuage de points constitué par les déviateurs des tenseurs de déformation en dimension 5. En effet, pour un instant  $t$ , une analyse par les cercles de Mohr (cf. figure 1) permet de montrer que le cisaillement maximal  $\frac{1}{2} \max_{\underline{n}} \|\underline{\gamma}_n(t)\|_2$  sur l'ensemble des facettes de normale  $\underline{n}$  est donnée par l'étendue des valeurs propres du tenseur déviateur associé  $\underline{\underline{S}}(t)$  i.e. sa norme au sens de Tresca :

$$\max_{\underline{n}} \|\underline{\gamma}_n(t)\|_2 = \lambda_1(t) - \lambda_3(t) = \|\underline{\underline{S}}(t)\|_{\text{Tresca}} \quad (2)$$

où  $\lambda_3(t) \leq \lambda_2(t) \leq \lambda_1(t)$  sont les valeurs propres de  $\underline{\underline{S}}(t)$  (cf. figure 1).

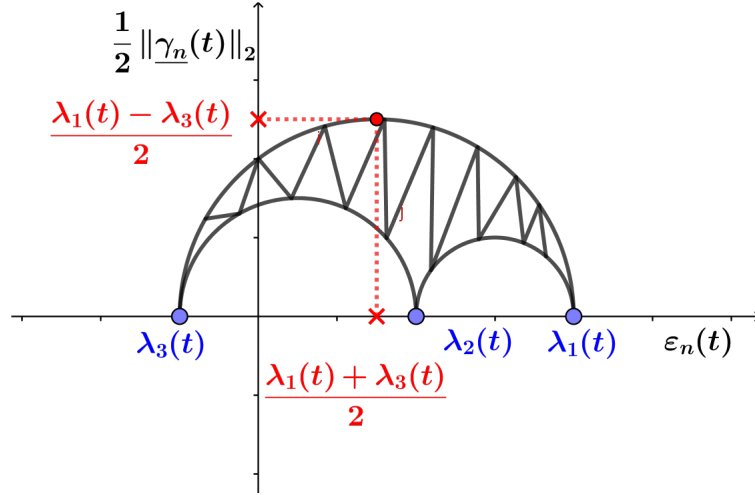


FIGURE 1 – Cercle de Mohr

De la même façon, entre deux instants  $t$  et  $t'$ , nous pouvons définir :

$$\|\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{S}}(t')\|_{\text{Tresca}} = \max_{\underline{n}} \|\underline{\gamma}_n(t) - \underline{\gamma}_n(t')\|_2 \quad (3)$$

et ainsi :

$$\max_{(t,t')} \|\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{S}}(t')\|_{\text{Tresca}} = \max_{(t,t')} \max_{\underline{n}} \|\underline{\gamma}_n(t) - \underline{\gamma}_n(t')\|_2 = \max_{\underline{n}} \max_{(t,t')} \|\underline{\gamma}_n(t) - \underline{\gamma}_n(t')\|_2 \quad (4)$$

L'amplitude maximale dans l'équation (4) est obtenue par un algorithme géométrique de détermination du diamètre d'un nuage de points représentant chacun un déviateur. Preparata et Shamos [8] ont montré qu'il est possible de déterminer le diamètre d'un ensemble de  $n$  points en dimension  $m$  en temps optimal  $O(n \ln(n))$

## 2.2 Détermination des plans critiques

Dans un cas de chargements multi-axiaux, le calcul de la durée de vie peut être basée sur une approche par plans critiques. Ces plans correspondent, selon les observations expérimentales, aux plans d'amorce et de propagation des fissures. Différents critères s'appliquent dans ces plans pour prendre en compte les différents types de fissurations. Dans ce cadre, le critère de Fatemi Socie s'applique sur un plan critique déterminé comme présentant l'amplitude de cisaillement maximale en déformation, en la combinant avec la contrainte normale maximale. Il s'énonce de la façon suivante :

$$\frac{\Delta \gamma_{\max}}{2} \left( 1 + k \frac{\sigma_n}{\sigma_y} \right) = f(N) \quad (5)$$

$\sigma_n$  est la contrainte normale maximale sur le plan critique de normal  $\underline{n}$ ,  $k$  est une constante du matériau,  $\sigma_y$  est la limite d'élasticité du matériau et  $f$  une fonction décroissante du nombre de cycles  $N$ .

Afin de rester conservatif dans l'estimation de la durée de vie, il apparaît alors nécessaire de rechercher un plan dimensionnant parmi tous les plans critiques, c'est-à-dire un plan sur lequel s'exerce la contrainte normale maximale parmi tous les plans présentant une amplitude de cisaillement maximale en déformation.

En un point de la structure, les plans critiques ont pour normale les bissectrices des directions propres associées aux valeurs propres engendrant l'amplitude de cisaillement maximal (cf. équation (2)). En pratique, le diamètre du nuage étant connu, un balayage de l'ensemble des points dans l'espace des déviateurs est nécessaire pour déterminer l'ensemble des couples  $(\underline{S}(t), \underline{S}(t'))$  réalisant cette amplitude maximale (cf. équation (4)). Chacun de ces couples génère ainsi 2 ou 4 plans critiques suivant la multiplicité des valeurs propres. Une comparaison des contraintes normales maximales sur l'ensemble de ces plans critiques permet alors de calculer les grandeurs dimensionnantes pour la durée de vie dans l'équation (5).

### 3 Comparaison des méthodes

#### 3.1 Présentation du cas d'étude

On s'intéresse au traitement d'un cas expérimental qui consiste en un chargement cyclique et périodique d'une structure métallique. Les tenseurs de déformations au cours du temps sont calculés à partir d'un dispositif expérimental utilisant des rosettes à 45 degrés. La fréquence d'échantillonnage génère ainsi de l'ordre de 75000 tenseurs au cours d'un cycle complet.

L'évolution des directions propres au cours d'un cycle présentée à la figure 2 confirme le caractère fortement multi-axial du chargement.

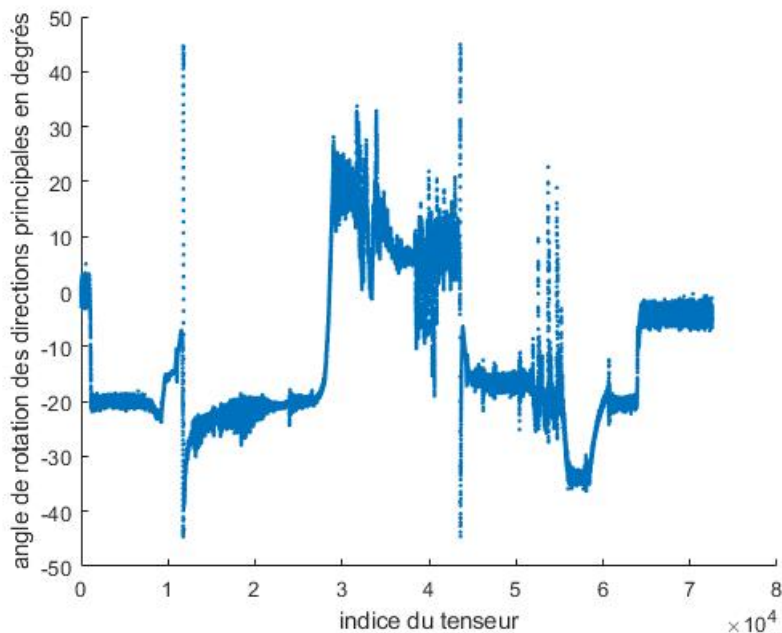


FIGURE 2 – Angle de rotation entre les directions principales dans le plan  $(Oxy)$  au cours d'un cycle de chargement.

#### 3.2 Comparaison des amplitudes de cisaillement maximales

Dans les critères de fatigue de type plan critique, les méthodes utilisées pour déterminer les plans critiques en un point de la structure passent généralement par la détermination, sur chaque facette balayée, du cercle minimal englobant le trajet décrit par l'extrémité du vecteur représentant le cisaillement [2]. Sur chaque facette, nous calculons le vecteur cisaillement recentré dont la norme en chaque instant

du cycle correspond à une demi-amplitude de cisaillement. Nous calculons également l'amplitude de cisaillement maximale qui est égale au diamètre du cercle minimal englobant. Les plans critiques sont ainsi ceux qui maximisent l'amplitude de cisaillement maximale.

Dans la figure 3 sont tracées l'évolution de l'amplitude de cisaillement dans un plan critique calculée à l'aide de la méthode utilisant le cercle minimal englobant, ainsi que l'amplitude de cisaillement maximale calculée à l'aide de la nouvelle approche. On observe, sur cet exemple, la bonne adéquation des deux méthodes.

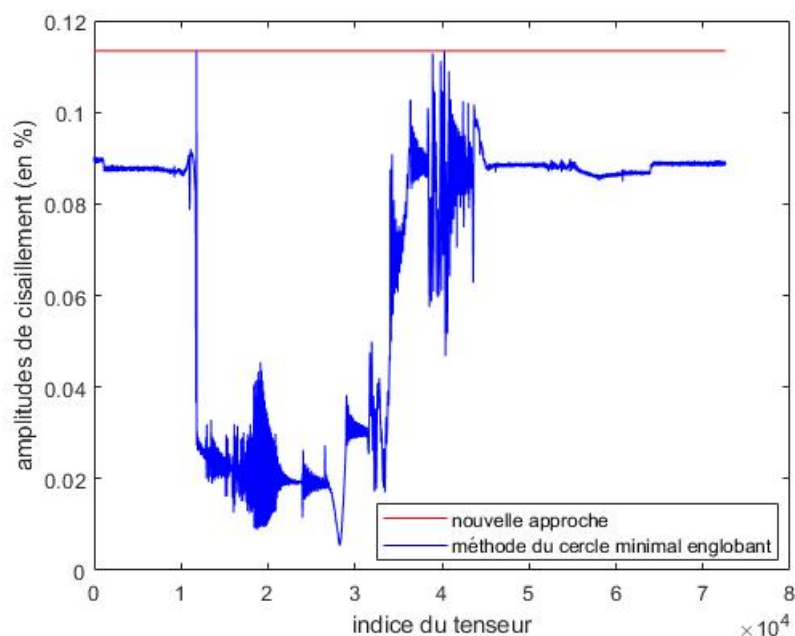


FIGURE 3 – Comparaison des amplitudes de cisaillement.

### 3.3 Comparaison des temps de calcul

Afin de déterminer les facettes présentant la plus grande amplitude de cisaillement en déformation, nous comparons les temps de calcul des deux méthodes précédentes. Il faut noter que pour la méthode de type plan critique qui nécessite un balayage exhaustif des facettes, nous choisissons des pas angulaires de 1 degré pour la direction du vecteur normal.

L'évolution du temps calcul en fonction du nombre de points est présentée à la figure 4.

## 4 Conclusion et perspectives

La détermination des plans critiques en cisaillement est une étape clef dans l'analyse en fatigue des structures métalliques pour les critères de type Fatemi Socie. La méthode présentée ici propose une démarche rapide et efficace de détermination de ces plans.

D'autre part, une étude de comportement cyclique a été réalisée sur une structure métallique d'après la thèse de L. Giraud [5]. Malgré la construction d'un sous-modèle local, l'analyse par éléments finis a nécessité plus de 6 millions de points d'intégration. La nouvelle approche présentée ici a permis l'utilisation du critère de Fatemi Socie avec un temps de calcul d'une dizaine de minutes alors que la méthode du cercle minimal englobant nécessite plus de 15 jours de calcul.

Pour la mise en œuvre du critère de Fatemi Socie en fatigue multi-axiale, la méthode de calcul efficace que nous avons présentée ouvre ainsi de nouvelles perspectives d'analyse en fatigue pour des structures de grandes dimensions et très diverses par leur conception ou leurs chargements.

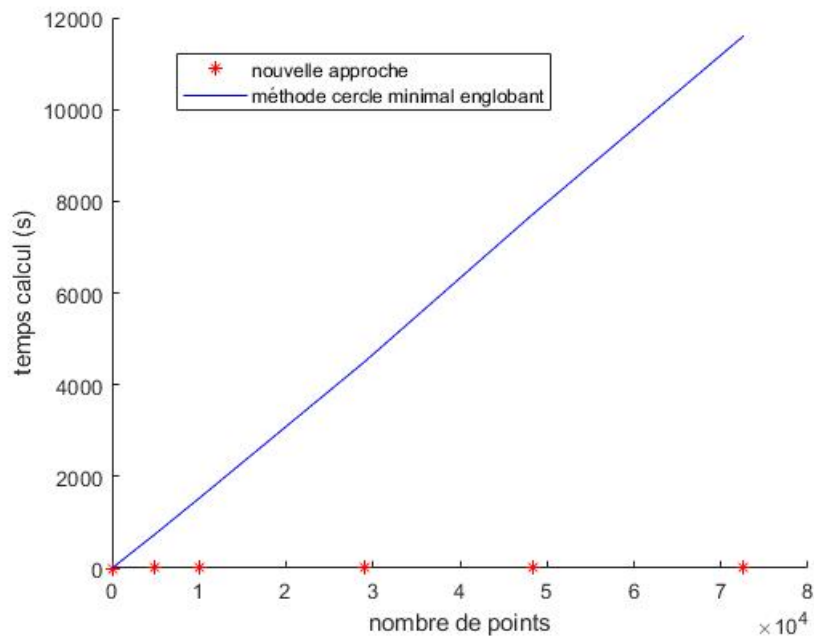


FIGURE 4 – Temps de calcul en fonction du nombre de points.

## Références

- [1] K. Dang Van, B. Griveau & O. Message. *On a new multiaxial fatigue limit criterion : theory and application.*, Proc. of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Biaxial and Multiaxial Fatigue, Sheffield, England, 479-496, 1989.
- [2] A Bernasconi, I.V. Papadopoulos. *Efficiency of algorithms for shear stress amplitude calculation in critical plane class fatigue criteria*, Computational Materials Science, 34, 355-368, 2005.
- [3] D. Pellinghelli, M. Riboli & A. Spagnoli. *Full-model multiaxial fatigue life calculations with different criteria*, Procedia Engineering, 213, 126-136, 2018.  
<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2018.02.014>.
- [4] F. Fauvin, B. Agard, J.-C. Roux & E. Feulvarch. *Fast estimation of the shear stress amplitude for fatigue life analysis of metals*. European Journal of Mechanics - A/Solids, 80 :103928, March 2020. ISSN 09977538.  
doi : 10.1016/ j.euromechsol.2019.103928. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0997753819308241>. 117, 119, 146.
- [5] L. Giraud. *Apports au dimensionnement en fatigue à faible nombre de cycles des assemblages soudés en S355*. Thèse de doctorat, juillet 2020.
- [6] M.W. Brown & K.J. Miller *Initiation and growth of cracks in biaxial fatigue*, Fatigue of Engineering Materials and Structures 1, 231–246, 1979.
- [7] A. Fatemi & D.F. Socie (1988). *A Critical Plane Approach To Multiaxial Fatigue Damage Including Out-of-Phase Loading*, Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, 11(3), 149–165, 1988.
- [8] F.P. Preparata & M.I. Shamos. *Computational Geometry – An Introduction*. Springer Verlag, 1985.  
doi:10.1007/978-1-4612-1098-6.