



HAL
open science

Développement d'un modèle de flottement gyroscopique prenant en compte la poussée de hélice

Vincent de Gaudemaris, Antoine Olivier, Antoine Placzek, Jean-Sebastien
Schotté, Laurent Blanc, Fabrice Thouverez

► **To cite this version:**

Vincent de Gaudemaris, Antoine Olivier, Antoine Placzek, Jean-Sebastien Schotté, Laurent Blanc, et al.. Développement d'un modèle de flottement gyroscopique prenant en compte la poussée de hélice. 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717604

HAL Id: hal-03717604

<https://hal.science/hal-03717604v1>

Submitted on 8 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Développement d'un modèle de flottement gyroscopique prenant en compte la poussée de hélice

V. de Gaudemaris^{1,2}, A. Olivier³, A. Placzek¹,
J.-S. Schotté¹, L. Blanc², F. Thouverez²

¹ ONERA, DAAA/MSAE, {vincent.de_gaudemaris ; antoine.placzek ; jean-sebastien.schotte}@onera.fr

² Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS), Ecole Centrale de Lyon, {laurent.blanc ; fabrice.thouverez}@ec-lyon.fr

³ Safran Electronics & Defense, antoine.olivier@safrangroup.com

Résumé — Cette étude a pour but de développer un modèle pour l'étude du flottement gyroscopique d'une hélice à pales rigides en rotation fixée sur une structure déformable (aile). Notre modèle diffère du modèle classique d'Houbolt & Reed [2] par la prise en compte de la poussée générée par l'hélice et par la considération d'un écoulement d'orientation quelconque. La stabilité de deux modèles de structure, un premier à deux degrés de liberté puis un second modélisé par des poutres, est étudiée afin d'évaluer les paramètres influant sur l'apparition du flottement gyroscopique.

Mots clés — flottement gyroscopique, aéroélasticité, instabilité, machine tournante.

1 Introduction

Les moteurs d'avion à hélice, et plus généralement les moteurs comportant une partie tournante de grande envergure (turbopropulseurs, turboréacteurs à haut taux de dilution, etc.) sont largement répandus dans l'industrie et sont sujets à de nombreuses évolutions dans le but de réduire leur consommation. Avec l'apparition de nouveaux concepts de motorisation reposant sur des architectures non conventionnelles comme la propulsion distribuée ou les *open rotors*, il est nécessaire de s'intéresser à l'influence de ces systèmes sur la stabilité en vol de l'appareil. En effet, la tendance à l'allongement des ailes sur lesquelles sont fixés ces systèmes accroît leur souplesse et accentue le risque de flottement gyroscopique. Ce phénomène d'instabilité aéroélastique provient de l'interaction entre, d'une part, les forces et moments aérodynamiques s'exerçant sur le système tournant monté sur un support flexible et, d'autre part, les effets gyroscopiques induits par la rotation. L'instabilité de flottement se traduit alors par un mouvement de précession en spirale de l'axe de rotation dont l'amplification peut conduire à la destruction de l'engin.

Une modélisation simple du flottement gyroscopique repose sur les travaux d'Houbolt & Reed qui ont proposé un modèle analytique du chargement aérodynamique s'appliquant sur une hélice en rotation dont l'orientation de l'axe subit de petites perturbations [2]. Plusieurs autres études se sont appropriées ces travaux de manière à affiner la modélisation du flottement pour prendre en compte des phénomènes complexes comme des non-linéarités au niveau des raideurs de montage [6] ou pour étudier la stabilité de différents systèmes modélisant une aile et des moteurs à hélices [3, 5].

L'objectif de cette étude est d'améliorer la modélisation du flottement gyroscopique en proposant un modèle des efforts aérodynamiques sur l'hélice qui prenne en compte sa poussée (non modélisée dans l'approche d'Houbolt & Reed) par le choix de l'angle de calage des pales, et un vent incident de direction quelconque (pas nécessairement dans la direction de l'axe de l'hélice). Le modèle aérodynamique sera ensuite couplé à deux modèles de structures de complexité croissante afin d'étudier leur stabilité.

2 Modélisation du flottement gyroscopique

2.1 Description du phénomène sur un modèle simplifié

Un modèle simplifié est couramment utilisé pour mettre en évidence l'origine du flottement gyroscopique. Le système propulsif est modélisé par une hélice à pales rigides tournant à la vitesse Ω autour

d'un axe également rigide. L'axe est relié au bâti par une rotule permettant des mouvements en tangage et en lacet avec une certaine raideur élastique correspondant à deux ressorts de torsion. En l'absence de forces aérodynamiques et de rotation de l'hélice, le système a deux modes vibratoires découplés (mode de tangage et de lacet). Lorsque l'hélice est mise en rotation, les effets gyroscopiques couplent les deux modes propres et l'axe de l'hélice décrit un mouvement elliptique autour de l'axe de poussée. On distingue alors deux modes dits de précession. Le premier est le mode indirect, qui a la fréquence la plus faible et tourne dans le sens opposé à celui de l'hélice. Le deuxième est le mode direct, qui a la fréquence la plus élevée et tourne dans le même sens que l'hélice.

En l'absence d'écoulement, le système est toujours stable. Cependant, lorsque l'on prend en compte les effets aérodynamiques, les mouvements de précession changent l'angle d'attaque du flux sur les pales et créent des forces et des moments aérodynamiques instationnaires qui peuvent amplifier le mouvement de précession de l'axe de rotation pour le rendre instable (Figure 1). Si les pales sont rigides, seul le mode indirect devient instable alors que la prise en compte de la souplesse des pales peut faire également apparaître une instabilité dans le sens direct de la rotation [8].

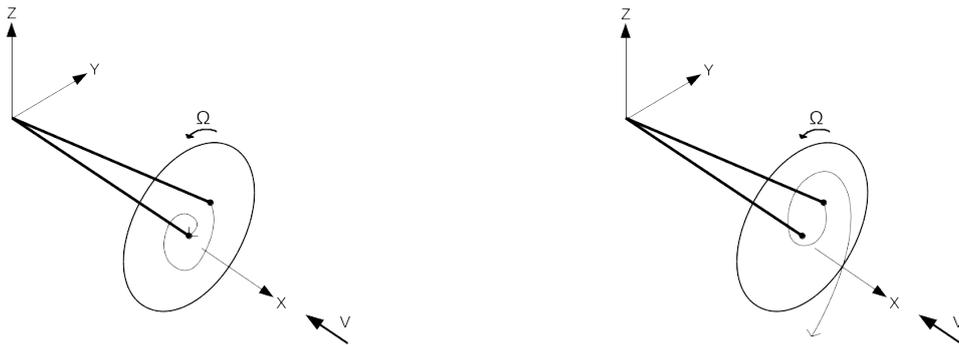


FIGURE 1 – Mode aéroélastique indirect stable (à gauche) et instable (à droite)

On constate l'existence d'une vitesse critique de l'écoulement incident [1]. Si la vitesse amont est inférieure à cette valeur, le mouvement est amorti et le système est stable alors qu'au delà de cette valeur, l'écoulement procure de l'énergie au système (amortissement négatif) et le mouvement devient instable.

2.2 Évaluation des efforts et moments aérodynamiques

L'origine du flottement gyroscopique a été présentée dans la partie précédente avec un modèle simplifié à deux degrés de liberté. On considère maintenant le cas général d'une hélice à pales rigides repérée par la position de son centre C . Le paramétrage associé au mouvement du point C par rapport à un référentiel de base est présenté Figure 2 :

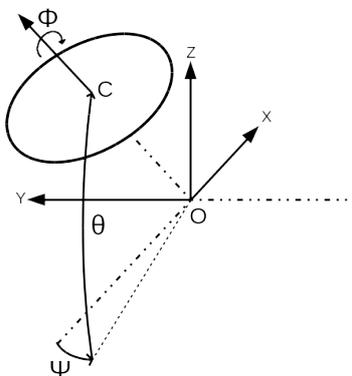


FIGURE 2 – Paramétrage de l'hélice

L'expression des efforts et des moments aérodynamiques s'exerçant sur l'hélice dépend de son mouvement et de son orientation. En notant $\underline{\theta}_c = [\phi, \theta, \psi]$ le vecteur contenant les angles d'Euler décrivant la rotation du plan de l'hélice (la rotation propre de l'hélice Ωt n'étant pas comprise dans l'angle ϕ) et

$\underline{U}_C = [U_x, U_y, U_z]$ le vecteur déplacement de son centre C , la force et le moment aérodynamiques exprimés au point C peuvent s'écrire par linéarisation pour de petites rotations $\underline{\theta}_c$ et de petites vitesses $\underline{\dot{U}}_c$ et $\underline{\dot{\theta}}_c$:

$$\underline{F}_c = M_{f\theta} \underline{\theta}_c + M_{fdu} \underline{\dot{U}}_c + M_{fd\theta} \underline{\dot{\theta}}_c + \underline{f} \quad (1a)$$

$$\underline{M}_c = M_{m\theta} \underline{\theta}_c + M_{mdu} \underline{\dot{U}}_c + M_{md\theta} \underline{\dot{\theta}}_c + \underline{m} \quad (1b)$$

Il n'y a pas de dépendance en \underline{U}_c car le système est invariant par translation. Les vecteurs \underline{f} et \underline{m} représentent la poussée et le moment aérodynamique lorsque l'hélice est fixe dans sa position initiale. Les autres matrices caractérisent la dépendance de la force et du moment aérodynamiques au mouvement de l'hélice. Houbolt & Reed [2] ont proposé une méthode de construction des matrices $\{M_{f\theta}, M_{fdu}, M_{fd\theta}, M_{m\theta}, M_{mdu}, M_{md\theta}\}$ et des vecteurs $\{\underline{f}, \underline{m}\}$ à l'aide de la théorie des profils minces et de la méthode par bandes (*strip theory*). Leur travail considérait une vitesse d'écoulement purement axiale (selon l'axe \underline{X}) et une hélice ne générant pas de poussée en l'absence d'angle de tangage θ et de lacet ψ (l'angle de calage des profils des pales était choisi pour avoir un angle d'incidence nul afin de simplifier la résolution analytique). Notre étude élargit le champ d'application des travaux d'Houbolt et Reed en considérant un angle de calage quelconque des pales et une vitesse d'écoulement pouvant avoir des composantes selon les trois axes ($\underline{V} = [V_x, V_y, V_z]$). Dans ce cadre, on obtient une expression alternative des matrices aérodynamiques (cf Annexe). Lorsque l'on considère une vitesse purement axiale $\underline{V} = [V, 0, 0]$ et un angle de calage $\alpha_0(r) = \arctan(\frac{V}{\Omega r})$ tel que la portance de chaque profil de pale soit nulle en l'absence de mouvement de tangage et de lacet, on vérifie que l'on retrouve les expressions du chargement aérodynamique obtenues par Houbolt et Reed [2].

Dans la suite, on notera :

$$\underline{R}_c = \begin{pmatrix} \underline{F}_c \\ \underline{M}_c \end{pmatrix}, \underline{U} = \begin{pmatrix} \underline{U}_c \\ \underline{\theta}_c \end{pmatrix}, C_{aero} = - \begin{pmatrix} M_{fdu} & M_{fd\theta} \\ M_{mdu} & M_{md\theta} \end{pmatrix}, K_{aero} = - \begin{pmatrix} 0 & M_{f\theta} \\ 0 & M_{m\theta} \end{pmatrix}, \underline{R}_m = \begin{pmatrix} \underline{f} \\ \underline{m} \end{pmatrix}$$

si bien que le chargement aérodynamique au point C peut finalement s'écrire sous la forme matricielle :

$$\underline{R}_c = -C_{aero} \underline{\dot{U}} - K_{aero} \underline{U} + \underline{R}_m \quad (2)$$

2.3 Modèle classique

Pour mettre en évidence le flottement gyroscopique, il est nécessaire de coupler le modèle aérodynamique développé précédemment avec un modèle de structure. Un modèle classique de structure est celui présenté Figure 3. Il est constitué d'un rotor possédant plusieurs pales rigides tournant autour d'un axe lui aussi rigide relié au bâti par une liaison rotule élastique non conservative. La rotation ϕ telle que définie Figure 2 n'est pas considérée ici. Le système possède donc deux degrés de liberté qui sont l'angle de lacet ψ et l'angle de tangage θ .

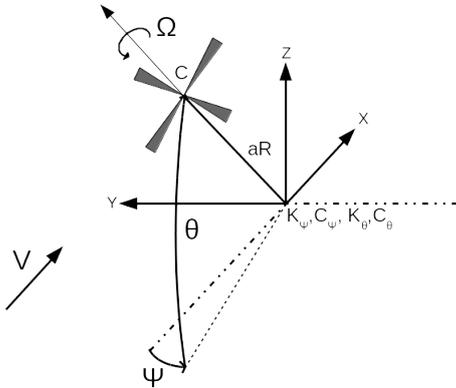


FIGURE 3 – Modèle classique

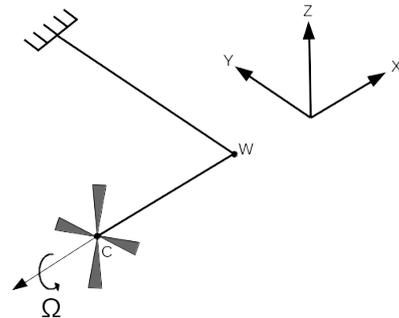


FIGURE 4 – Modèle poutre

Le vecteur \underline{U} contenant les degrés de libertés et les matrices de structure s'écrivent :

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} \theta \\ \psi \end{pmatrix}, M_{struct} = \begin{pmatrix} I_2 + m(aR)^2 & 0 \\ 0 & I_2 + m(aR)^2 \end{pmatrix}, C_{struct} = \begin{pmatrix} C_\theta & -I_1 \Omega \\ I_1 \Omega & C_\psi \end{pmatrix}, K_{struct} = \begin{pmatrix} K_\theta & 0 \\ 0 & K_\psi \end{pmatrix}$$

Où m est la masse de l'hélice, I_1 son inertie selon son axe de rotation et I_2 son inertie transverse, R son rayon, K_θ et K_ψ les raideurs de montage en tangage et en lacet de la rotule, C_θ et C_ψ les coefficients d'amortissement associés et $a = \frac{L_a}{R}$ le ratio de la longueur du mât moteur sur le rayon de l'hélice.

2.4 Modèle poutre

Le modèle poutre consiste à enrichir le modèle précédent en introduisant une poutre déformable destinée à modéliser une aile et ainsi étudier son influence sur l'apparition du flottement gyroscopique (Figure 4). Le mât du moteur est également modélisé par une poutre déformable perpendiculaire et encastrée à l'aile. Les déplacements et rotations des nœuds W et C sont considérés, si bien que le système possède 12 degrés de libertés. L'amortissement structural n'est pas considéré et les matrices de masse et de raideur sont obtenues par formulation éléments finis classique de deux éléments poutres d'Euler-Bernoulli en considérant la traction/compression, la flexion et la torsion [7]. Les propriétés des poutres et de l'hélice sont données par le Tableau 1.

Longueur de l'aile	$L_{aile} = 1 \text{ m}$
Moments quadratiques transverses de l'aile	$I_x = I_z = 2.10^{-9} \text{ m}^4$
Longueur du mât moteur	$L_{mat} = 0.038 \text{ m}$
Moments quadratiques transverses du mât	$I_y = I_z = 1.10^{-9} \text{ m}^4$
Section des poutres	$S = 10^{-4} \text{ m}^2$
Module de Young	$E = 69.10^9 \text{ Pa}$
Masse volumique	$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$

TABLE 1 – Paramètres du modèle poutre

2.5 Caractérisation de la stabilité

A partir de l'expression des efforts et des moments aérodynamiques obtenus équation (2), il est possible d'obtenir l'équation de la dynamique vibratoire des deux modèles présentés précédemment :

$$M\ddot{\underline{U}} + C\dot{\underline{U}} + K\underline{U} = \underline{R}_m \quad (3)$$

Avec : $M = M_{struct}$, $C = C_{struct} + C_{aero}$, $K = K_{struct} + K_{aero}$

Les matrices C_{aero} , K_{aero} et R_m peuvent être différentes de leur expressions de la partie 2.2 en fonction des degrés de liberté considérés. Les matrices M_{struct} , C_{struct} et K_{struct} sont les matrices de masse, d'amortissement et de raideur de la structure.

En utilisant le vecteur d'état \underline{Y} , l'équation (3) se réécrit classiquement sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre :

$$B\dot{\underline{Y}} - A\underline{Y} = \underline{R} \quad (4)$$

Avec : $\underline{Y} = \begin{pmatrix} \underline{U} \\ \dot{\underline{U}} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & K \\ -K & -C \end{pmatrix}$, $\underline{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{R}_m \end{pmatrix}$

L'analyse de la stabilité du système revient alors à étudier le système aux valeurs propres généralisé $A\hat{\underline{Y}} = \lambda B\hat{\underline{Y}}$. Le système est stable si toutes les valeurs propres ont une partie réelle négative et devient instable si une des valeurs propres possède une partie réelle strictement positive.

3 Résultats

3.1 Modèle classique

On utilise pour la suite les données numériques issues de l'étude de Mair et al. [6] (paramètres de l'hélice et de l'écoulement). Nous considérons notamment un rotor à quatre pales, un vent unidirectionnel

selon l'axe \vec{X} et un angle de calage des pales tel que la poussée soit nulle en l'absence de tangage et de lacet. L'expression analytique du chargement aérodynamique obtenue avec notre modèle est alors similaire à celle indiquée dans [6].

L'analyse de la stabilité en fonction des raideurs de montage est très répandue lors de l'étude du flottement gyroscopique. En effet la souplesse de liaison entre le mât moteur et le bâti est un paramètre déterminant sur la stabilité du système. Il est alors intéressant d'analyser le comportement du système pour chaque couple de raideur de montage via ses valeurs propres. La Figure 5 représente ainsi la frontière de stabilité en fonction de K_θ et K_ψ , avec en gris la zone d'instabilité. On remarque que la diminution des raideurs de montage favorise l'instabilité. Le cas où les deux raideurs sont égales est le plus défavorable puisque c'est dans cette configuration que les raideurs nécessaires pour obtenir un système stable sont les plus importantes. Les deux branches parallèles aux axes des abscisses et des ordonnées représentent des instabilités statiques ($\text{Im}(\lambda)=0$) selon l'axe \underline{Y} ou \underline{Z} , lorsqu'une des raideurs de montage devient trop faible. Le mouvement du système est alors analogue à celui d'une girouette. La partie incurvée de la courbe est associée à l'instabilité de flottement ($\text{Im}(\lambda)\neq 0$), avec un mouvement de précession divergent du centre de l'hélice, dans un sens opposé à la rotation de l'hélice. On s'aperçoit sur la Figure 6 qu'augmenter la vitesse incidente entraîne une augmentation de la zone d'instabilité. Pour des raideurs de montage fixées, il existe donc une vitesse limite au delà de laquelle le mouvement de précession du système devient instable.

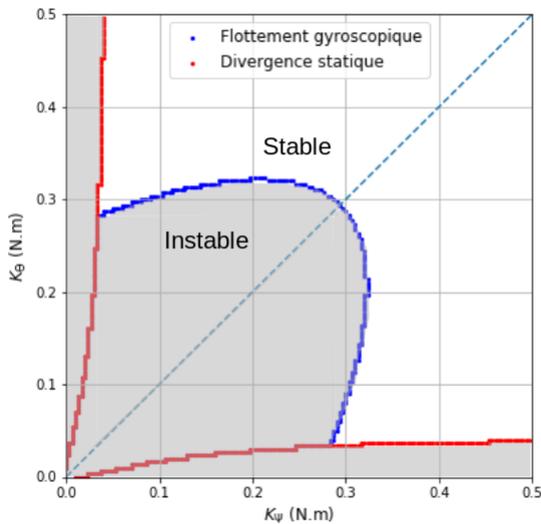


FIGURE 5 – Graphe de stabilité en fonction des raideurs de montage ($\Omega = 40$ rad/s, $V = 6.7$ m/s)

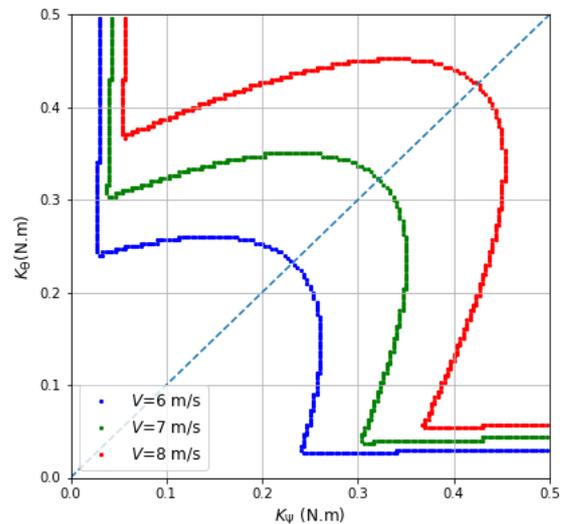


FIGURE 6 – Influence de la vitesse de l'écoulement sur la stabilité du système ($\Omega = 40$ rad/s)

L'influence de la longueur de l'arbre est visible sur la Figure 7. On remarque que la diminution de la longueur de l'arbre augmente la zone d'instabilité. Cette limitation peut jouer un rôle important pour les petits moteurs, notamment dans le cas de la propulsion distribuée où les moteurs utilisés sont relativement compacts. L'influence de l'amortissement est également importante (non représentée ici). Augmenter le taux d'amortissement des rotules permet de stabiliser considérablement le système en réduisant la zone d'instabilité du graphe.

Les études précédentes ont été réalisées en l'absence de poussée (dans la position initiale sans mouvement de tangage ou de lacet) pour pouvoir être comparées aux résultats de la bibliographie [6]. Afin de prendre en compte la force propulsive générée par l'hélice, différents angles de calage ont été considérés de manière à obtenir plusieurs angles d'incidence du vent relatif par rapport au profil des pales (0° , 2° , 4°). Le graphique de stabilité obtenu est présenté Figure 8. Il est cette fois calculé en faisant varier la vitesse d'écoulement d'air et la vitesse de rotation de l'hélice. On remarque que quel que soit l'angle d'incidence et la vitesse de rotation, le flottement apparaît lorsque la vitesse de l'écoulement devient assez grande. Le système est également plus stable pour des faibles vitesses de rotation que pour des vitesses plus élevées, synonymes de couplage gyroscopique plus important. L'influence de l'angle

d'incidence sur la stabilité du système diffère si l'on se place à basse ou haute vitesse de rotation. Globalement, la poussée déstabilise le système pour de faibles vitesses de rotation mais le stabilise pour des vitesses moyennes. Pour les plus hautes vitesses de rotation (supérieures à 80 rad/s), la poussée de l'hélice n'a plus d'influence sur la stabilité du système.

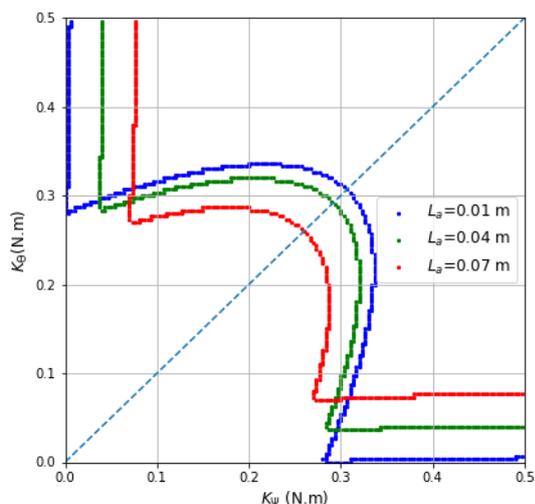


FIGURE 7 – Influence de la longueur de l'arbre sur la stabilité du système ($\Omega = 40$ rad/s, $V = 6.7$ m/s)

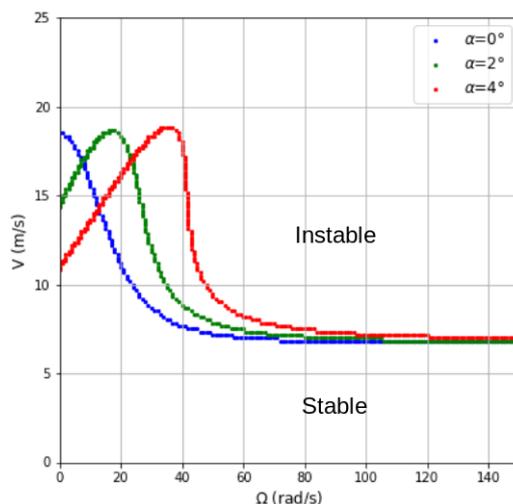


FIGURE 8 – Influence de l'angle d'incidence sur la stabilité du système ($K_\theta = K_\psi = 0.4$ N.m)

3.2 Modèle poutre

Par la suite, les paramètres de l'étude de Mair et al. [6] sont conservés. Lorsque les moments quadratiques transverses de la poutre modélisant le mât moteur évoluent, le graphe de stabilité Figure 9 est obtenu.

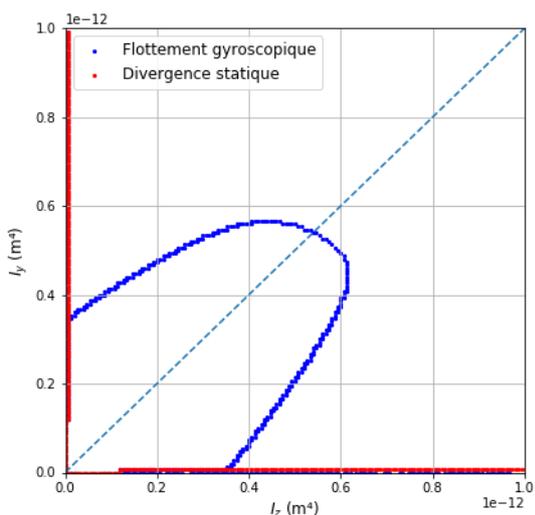


FIGURE 9 – Graphe de stabilité du modèle poutre en fonction des moments quadratiques transverses du mât moteur ($\Omega = 40$ rad/s, $V = 6.7$ m/s)

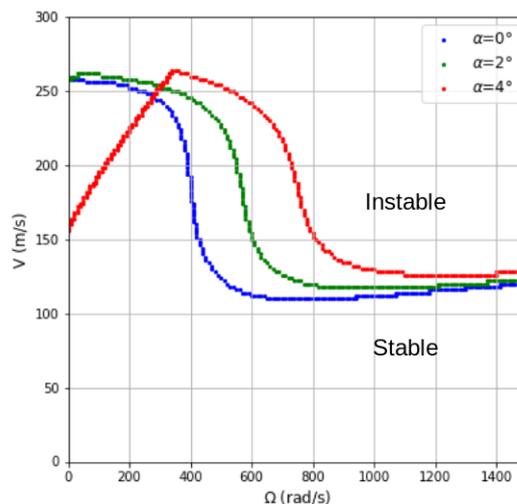


FIGURE 10 – Influence de l'angle d'incidence sur la stabilité du modèle poutre ($I_y = I_z = 1.10^{-9} m^4$)

L'allure du graphe Figure 9 est semblable à la Figure 5. Les inerties I_y et I_z jouent ici le rôle des rai-

deurs K_θ et K_ψ définies Figure 3 et les branches correspondant aux instabilités statiques pour des faibles raideurs en flexion (caractérisées par les inerties en flexion) sont présentes. En revanche, la frontière de stabilité n'est pas symétrique par rapport à la droite identité. Cela est dû à la dynamique de l'aile qui brise la symétrie du modèle.

L'influence de la poussée peut également être évaluée en étudiant la stabilité du système selon la vitesse d'écoulement et la vitesse de rotation de l'hélice (Figure 10). De manière similaire à la Figure 8 on constate que quel que soit l'angle d'incidence et la vitesse de rotation, le flottement apparaît lorsque la vitesse de l'écoulement devient assez grande. L'influence de la poussée est à peu près la même que sur le modèle classique. Elle déstabilise le système pour de faibles vitesses de rotation mais le stabilise pour des vitesses moyennes. Pour les plus hautes vitesses de rotation, la poussée a peu d'influence sur la stabilité. Il est intéressant de noter que la frontière de stabilité pour un angle d'incidence de 4° présente une discontinuité de sa dérivée pour une vitesse de rotation d'environ 350 rad/s. Cela s'explique par le changement du mode à l'origine de l'instabilité.

4 Conclusion et perspectives

Le principe du flottement gyroscopique a été présenté via l'utilisation de deux modèles, un premier classique à deux degrés de liberté et un deuxième plus complexe utilisant une aile et un mât flexibles modélisés par des poutres. Le modèle des efforts aérodynamiques sur l'hélice a été construit dans des conditions moins restrictives que le modèle d'Houbolt et Reed, en prenant en compte la poussée de l'hélice et une vitesse d'écoulement d'orientation quelconque. Il ressort que le flottement gyroscopique apparaît lorsque l'écoulement d'air dépasse une certaine vitesse limite. Cette instabilité est également grandement liée à la raideur de la structure sur laquelle est montée l'hélice : diminuer les raideurs est propice à l'apparition du flottement gyroscopique. La prise en compte de la poussée de l'hélice a peu d'influence sur la stabilité du système pour de hautes vitesses de rotation. En revanche, pour des vitesses de rotation moyennes, il apparaît que la poussée stabilise le système. Pour des vitesses de rotation encore plus faibles, la poussée a l'effet inverse et déstabilise le système.

La modélisation du flottement gyroscopique sera enrichie dans la suite des travaux en prenant en compte des modèles de structure d'aile plus fidèles (modèles éléments finis 3D). La prise en compte de la poussée pourra être améliorée en prenant en compte son influence sur la vitesse incidente du fluide grâce à une approche de type *Momentum Theory* [4]. L'évaluation des efforts aérodynamiques s'exerçant sur l'hélice pourra également être enrichie en utilisant un modèle aérodynamique plus complexe de type ligne portante (*Lifting Line Theory*), puis éventuellement de la CFD, afin de pouvoir comparer différents niveaux de fidélité. Par ailleurs l'aérodynamique de l'aile pourra également être intégrée dans le modèle afin de prendre en compte son influence sur les phénomènes d'instabilités de flottement de l'ensemble.

Remerciements

Ces travaux ont été cofinancés par le programme de recherche et d'innovation de l'Union Européenne Horizon 2020 dans le cadre du projet Clean Sky 2 ADEC de la plateforme LPA-IADP.

Références

- [1] J. Čečrdle. *Aeroelastic Stability of Turboprop Aircraft : Whirl Flutter*, Flight Physics - Models, Techniques and Technologies, Konstantin Volkov, 139–158, 2017.
- [2] J.C. Houbolt, W.H. Reed. *Propeller-nacelle whirl flutter*, Journal of the Aerospace Sciences, Institute of the Aerospace Sciences, 29(3) : 333–346, 1962.
- [3] C. Koch. *Parametric whirl flutter study using different modelling approaches*, CEAS Aeronautical Journal, Springer, 2021.
- [4] J. Ledoux, S. Riffo, J. Salomon. *Analysis of the Blade Element Momentum Theory*, 2020.
- [5] V. Q. Liu Xu. *Propeller-Wing Whirl Flutter : an analytical study*, Delft University of Technology, 2020.
- [6] C. Mair, D. Rezgui, B. Titurus. *Nonlinear stability analysis of whirl flutter in a rotor-nacelle system*, Nonlinear Dynamics, Springer, 2018.
- [7] J.S. Przemieniecki. *Theory of Matrix Structural Analysis*, Dover Publications, 1968.
- [8] W.H. Reed. *Propeller-rotor whirl flutter : a state of the art review*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 4(3) : 526–530, 1966.

5 Annexe : Matrices du chargement aérodynamique

$$M_{f\theta} = \frac{KN}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2\Omega V_z(2I_{121} - I_{103}) & -2\Omega V_y(2I_{121} - I_{103}) \\ & -V_x V_z(7I_{012} - I_{030}) & +V_x V_y(7I_{012} - I_{030}) \\ 0 & -V_y V_z(I_{030} - I_{012}) & -2\Omega^2 I_{212} - 2\Omega V_x(2I_{121} - I_{103}) \\ & & -(V_x^2 - V_y^2)I_{030} \\ & & + (3V_x^2 - 2V_y^2 - V_z^2)I_{012} \\ 0 & 2\Omega^2 I_{212} + 2\Omega V_x(2I_{121} - I_{103}) & \\ & + (V_x^2 - V_z^2)I_{030} & V_y V_z(I_{030} - I_{012}) \\ & - (3V_x^2 - V_y^2 - 2V_z^2)I_{012} & \end{bmatrix} \quad (5a)$$

$$M_{fdu} = \frac{KN}{2} \begin{bmatrix} 2\Omega(I_{121} - I_{103}) - 4V_x I_{012} & 2V_y I_{012} & 2V_z I_{012} \\ -V_y(I_{030} - I_{012}) & -V_x(I_{030} - I_{012}) - 2\Omega I_{121} & 0 \\ -V_z(I_{030} - I_{012}) & 0 & -V_x(I_{030} - I_{012}) - 2\Omega I_{121} \end{bmatrix} \quad (5b)$$

$$M_{fd\theta} = \frac{KN}{2} \begin{bmatrix} 2V_x(I_{121} - I_{103}) + 4\Omega I_{212} & -V_y(I_{121} - I_{103}) & -V_z(I_{121} - I_{103}) \\ -2V_y I_{121} & \Omega(I_{230} - I_{212}) - 2V_x I_{121} & 0 \\ -2V_z I_{121} & 0 & \Omega(I_{230} - I_{212}) - 2V_x I_{121} \end{bmatrix} \quad (5c)$$

$$\underline{f} = \frac{KN}{2} \begin{pmatrix} -2\Omega^2 I_{212} - 2\Omega V_x(I_{121} - I_{103}) + (2V_x^2 - V_y^2 - V_z^2)I_{012} \\ 2\Omega V_y I_{121} + V_x V_y(I_{030} - I_{012}) \\ 2\Omega V_z I_{121} + V_x V_z(I_{030} - I_{012}) \end{pmatrix} \quad (5d)$$

$$M_{m\theta} = \frac{KN}{2} \begin{bmatrix} 0 & V_x V_z(7I_{121} - I_{103}) & -V_x V_y(7I_{121} - I_{103}) \\ & + 2\Omega V_z(2I_{212} - I_{230}) & -2\Omega V_y(2I_{212} - I_{230}) \\ 0 & -V_y V_z(I_{121} - I_{103}) & 2\Omega^2 I_{321} - 2\Omega V_x(2I_{212} - I_{230}) \\ & & - (3V_x^2 - 2V_y^2 - V_z^2)I_{121} \\ & & + (V_x^2 - V_y^2)I_{103} \\ 0 & -2\Omega^2 I_{321} + 2\Omega V_x(2I_{212} - I_{230}) & \\ & + (3V_x^2 - V_y^2 - 2V_z^2)I_{121} & V_y V_z(I_{121} - I_{103}) \\ & - (V_x^2 - V_z^2)I_{103} & \end{bmatrix} \quad (5e)$$

$$M_{mdu} = \frac{KN}{2} \begin{bmatrix} -2\Omega(I_{230} - I_{212}) + 4V_x I_{121} & -2V_y I_{121} & -2V_z I_{121} \\ -V_y(I_{121} - I_{103}) & -V_x(I_{121} - I_{103}) - 2\Omega I_{212} & 0 \\ -V_z(I_{121} - I_{103}) & 0 & -V_x(I_{121} - I_{103}) - 2\Omega I_{212} \end{bmatrix} \quad (5f)$$

$$M_{md\theta} = \frac{KN}{2} \begin{bmatrix} -2V_x(I_{230} - I_{212}) - 4\Omega I_{321} & V_y(I_{230} - I_{212}) & V_z(I_{230} - I_{212}) \\ -2V_y I_{212} & \Omega(I_{321} - I_{303}) - 2V_x I_{212} & 0 \\ -2V_z I_{212} & 0 & \Omega(I_{321} - I_{303}) - 2V_x I_{212} \end{bmatrix} \quad (5g)$$

$$\underline{m} = \frac{KN}{2} \begin{pmatrix} 2\Omega^2 I_{321} + 2\Omega V_x(I_{230} - I_{212}) - (2V_x^2 - V_y^2 - V_z^2)I_{121} \\ 2\Omega V_y I_{212} + V_x V_y(I_{121} - I_{103}) \\ 2\Omega V_z I_{212} + V_x V_z(I_{121} - I_{103}) \end{pmatrix} \quad (5h)$$

Avec :

$$\forall a, b, c \in [0, 3], \quad I_{abc} = \int_{r_0}^R \frac{c(r)}{c_{ref}} r^a \sin^b(\alpha_0(r)) \cos^c(\alpha_0(r)) dr \quad (6)$$

Ces expressions ont été obtenues en calculant la portance et le moment de chaque profil de pale, puis en réalisant leur somme pour toutes les pales avant d'intégrer selon le rayon. N est le nombre de pales devant être pris supérieur ou égal à 4, Ω la vitesse de rotation de l'hélice et $K = \pi \rho c_{ref}$ (c_{ref} est la corde de référence des pales et ρ la masse volumique de l'air). La poussée est prise en compte via l'expression de l'angle de calage des pales $\alpha_0(r)$ dans l'expression des intégrales I_{abc} où r_0 et R sont les rayons minimal et maximal des pales et $c(r)$ la corde de la pale à la distance r du centre de l'hélice.