



HAL
open science

Construction d'un modèle réduit PGD pour l'étude de la fissuration thermo-mécanique des modules de puissance

Louis Schuler, Ludovic Chamoin, Zoubir Khatir, Mounira Berkani, Merouane Ouhab, Nicolas Degrenne

► To cite this version:

Louis Schuler, Ludovic Chamoin, Zoubir Khatir, Mounira Berkani, Merouane Ouhab, et al.. Construction d'un modèle réduit PGD pour l'étude de la fissuration thermo-mécanique des modules de puissance. 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717595

HAL Id: hal-03717595

<https://hal.science/hal-03717595v1>

Submitted on 8 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Construction d'un modèle réduit PGD pour l'étude de la fissuration thermo-mécanique des modules de puissance

L. Schuler^{1,2}, L. Chamoin¹, Z. Khatir³,
M. Berkani⁴, M. Ouhab², N. Degrenne²

¹ Université Paris-Saclay, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMT, {louis.schuler, ludovic.chamoin}@ens-paris-saclay.fr

² Mitsubishi Electric R&D Centre Europe (MERCE), {m.ouhab, n.degrenne}@fr.mercede.mee.com

³ Université Gustave Eiffel, SATIE, zoubir.khatir@univ-eiffel.fr

⁴ Université Paris EST Créteil, SATIE, mounira.berkani@satie.ens-cachan.fr

Résumé — Au sein d'un module de puissance, les contraintes thermiques peuvent induire une propagation de fissure. Cette fissure augmente la résistance thermique de la structure, en limitant fortement le flux de chaleur traversant les lèvres de la fissure. Par cet effet, les comportements mécanique et thermique sont fortement couplés. Dans ce cadre, une nouvelle stratégie itérative de réduction de modèle basée sur la méthode Proper Generalized Decomposition (PGD) est développée, où la propagation de fissure est modélisée par une méthode de zone cohésive. Le modèle réduit est ensuite exploité dans une phase de post-traitement pour réaliser efficacement une analyse de sensibilité ou pour prédire la durée de vie restante.

Mots clés — Réduction de modèle, PGD, fissuration, couplage thermo-mécanique, durée de vie

1 Introduction

Les modules de puissance, dont un module IGBT est présenté sur la Figure 1, sont des composants essentiels au sein des systèmes électriques. Ils jouent le rôle de variateurs, permettant d'adapter l'énergie électrique au besoin de la charge à alimenter. Leur domaine d'application est large, pouvant aller de la chaîne de traction d'un TGV aux convoyeurs utilisés dans les chaînes de production des usines, en passant par la voiture électrique. La demande des modules semi-conducteurs ne cesse de croître du fait de l'augmentation importante de la part d'électrification des systèmes. Au cours de l'utilisation d'un module de puissance, le courant traversant la puce semi-conductrice provoque un échauffement de celle-ci par effet Joule. Le flux de chaleur traverse les composants du module avant d'être évacué par le diffuseur de chaleur, refroidi par un liquide de refroidissement. L'augmentation de température, combinée avec les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés, induit des contraintes thermo-mécaniques de cisaillement au sein des composants. La répétition des cycles de fonctionnement initie et propage des fissures au sein des composants les plus fragiles ou les plus exposés, qui sont les fils de connexion ou les joints de brasure (voir Figure 1). Afin de prédire la durée de vie des modules, il est nécessaire de développer des modèles de durée de vie fiables. Pour cela, des modèles physiques complexes sont utilisés, afin d'obtenir les variations de grandeurs physiques (déformation, contraintes, ou énergie) au cours d'un cycle [12, 7, 4]. Ces grandeurs peuvent ensuite être reliées à la durée de vie par

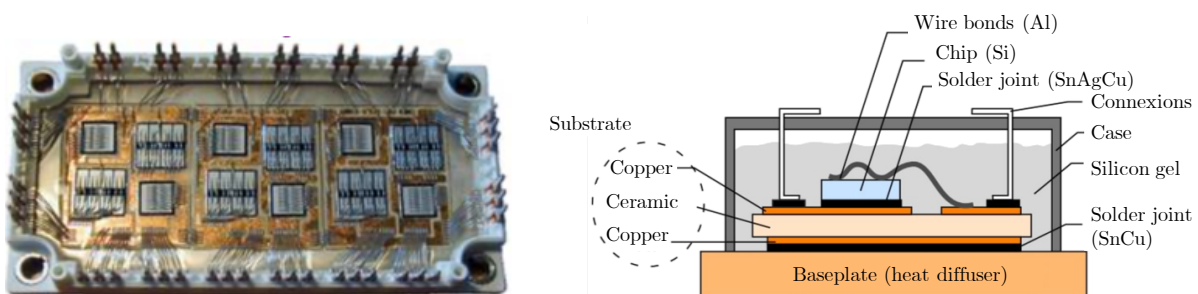


FIGURE 1 – Module de puissance IGBT et structure interne schématique

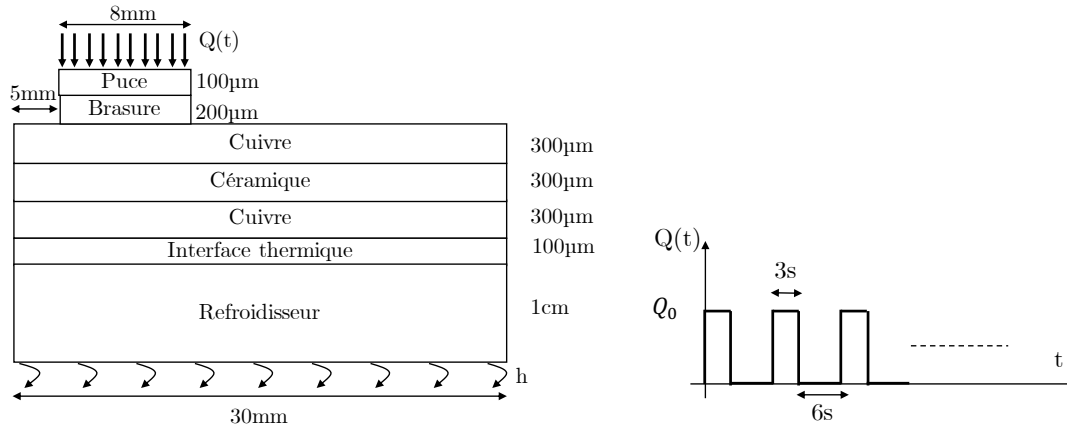


FIGURE 2 – Géométrie et conditions aux limites du modèle 2D étudié

des mesures expérimentales. Des modèles basés sur la mécanique de la rupture [5] sont également utilisés afin de modéliser la propagation de fissures au sein des composants. Cependant, ces modèles numériques nécessitent des temps de calcul importants, de par la complexité des modèles physiques utilisés (lois de comportement non-linéaires) ou des couplages entre physiques (électrique, thermique, mécanique). De fait, l'utilisation de ces modèles est lourde lorsqu'un grand nombre d'appels au modèle doit être effectué. Il est donc difficile de mener des études paramétriques, surtout si une stratégie de discrétisation par grille est utilisée, impliquant un coût de calcul exponentiel (malédiction de la dimension).

Afin de diminuer les temps de calcul des simulations numériques, des méthodes de réduction de modèle ont été développées au cours des dernières décennies. Parmi celles-ci, la méthode Proper Generalized Decomposition (PGD) est une méthode de réduction de modèle *a priori*, dans laquelle la solution est cherchée comme une somme de modes qui s'écrivent à variables séparées [3]. Cette forme permet de garder un coût linéaire en fonction du nombre de paramètres, en cassant donc la malédiction de la dimension.

La méthode PGD a été appliquée pour de nombreux problèmes, notamment multi-physiques [11, 9] ou non-linéaires [1, 10]. Néanmoins, son utilisation dans le cadre d'un couplage thermo-mécanique avec propagation de fissure n'a pas été étudiée. Dans ce travail, une stratégie de réduction de modèle basée sur la PGD est développée dans ce cadre. La fissuration de la brasure induite par l'élévation de température au sein du module couple les problèmes thermique et mécanique en modifiant les conditions aux limites thermiques sur les lèvres de la fissure, considérées adiabatiques. Une méthode itérative de Picard est utilisée pour prendre en compte le couplage thermo-mécanique, dans laquelle l'évolution de la longueur de fissure est la grandeur d'intérêt pour évaluer la convergence. Le modèle réduit obtenu permet d'étudier l'influence de paramètres de conception tels que, ici, l'épaisseur de la brasure et le coefficient de convection sur la propagation de la fissure.

Le modèle PGD est aussi exploité lors d'une analyse de sensibilité dans une phase de post-traitement, dans laquelle l'évaluation du modèle réduit est instantanée, afin de sélectionner les paramètres permettant d'obtenir une propagation de fissure limitée.

2 Modèle thermo-mécanique

La géométrie du modèle étudié ainsi que les conditions aux limites thermiques sont présentées sur la Figure 2. Pour simplifier l'analyse, le modèle considéré est un modèle 2D, et le comportement électrique n'est pas pris en compte. L'échauffement de la puce par effet Joule est modélisé par un flux thermique sur la surface supérieure de la puce, dénotée $\partial_b\Omega$, Ω étant le domaine spatial du module. Le flux est évacué par convection forcée sur la surface inférieure du refroidisseur, appelée $\partial_h\Omega$, dont le coefficient de convection est dénoté h . Les autres surfaces sont considérées adiabatiques. Le flux imposé est cyclique, constitué d'un temps de chauffe où le flux est constant puis d'un temps de refroidissement où le flux est nul. Dans l'optique d'établir une preuve de concept de la méthode tout en gardant un temps de calcul limité, un nombre restreint de cycles est considéré. La formulation faible du problème de thermique est

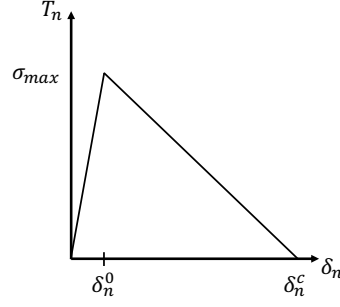


FIGURE 3 – Évolution de la composante normale de la force cohésive en fonction du saut de déplacement normal à l'interface

la suivante :

$$\int_{\Omega} c \frac{\partial T}{\partial t} T^* \, d\Omega + \int_{\Omega} k \nabla T \nabla T^* \, d\Omega + \int_{\partial_h \Omega} h(T + T_0 - T_a) T^* \, dS - \int_{\partial_b \Omega} Q T^* \, dS = 0 \quad (1)$$

pour toute fonction test T^* , où T est l'augmentation de température par rapport à la température initiale T_0 , c et k sont respectivement la capacité et la conductivité thermique des matériaux, et T_a la température du fluide refroidisseur. Par la suite, les températures T_a et T_0 sont considérées égales. L'échauffement du module de puissance ainsi que les différences de coefficient de dilatation thermique au sein de la structure produisent des contraintes thermiques. Si celles-ci sont assez importantes, elles conduisent à l'initiation puis à la propagation de fissures. Nous nous intéressons ici à la fissuration de la brasure. La propagation de fissures, dont les lèvres sont considérées adiabatiques, modifie le comportement thermique de la structure, en augmentant la résistance thermique globale. La propagation de fissure couple ainsi les comportements thermique et mécaniques.

La propagation de la fissure est étudiée à l'aide d'un modèle de zones cohésives (CZM) situé au milieu de l'épaisseur de la brasure, dans laquelle les fissures se propagent horizontalement. La méthode de zones cohésives permet de modéliser les forces de cohésion f_c le long du chemin de fissuration prédéfini S_c qui permettent de maintenir la cohésion de la matière. Lorsqu'une contrainte maximale est atteinte, la surface cohésive s'endommage et les forces cohésives décroissent avec l'augmentation du saut de déplacement à l'interface Δ . Nous considérons ici une loi cohésive triangulaire, représentée sur la Figure 3. La formulation faible vérifiée par le déplacement \underline{u} est la suivante, pour toute fonction test \underline{u}^* :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\underline{u}) : \mathcal{K} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*) \, d\Omega + \int_{S_c} \underline{f}_c \cdot \underline{\Delta}(\underline{u}^*) \, dS = 0 \quad (2)$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ est la partie élastique des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$, et \mathcal{K} l'opérateur de rigidité élastique.

3 Modèle PGD

La méthode de réduction de modèle PGD consiste à calculer une approximation des solutions des problèmes couplés (1) et (2) en cherchant une solution sous forme de modes s'écrivant à variables séparées. Les variables sont l'espace \underline{x} , le temps t ainsi que les deux paramètres de conception qui sont e , un coefficient multiplicatif de l'épaisseur de la brasure H_b , tel que $H_b = eH_b^0$ avec H_b^0 l'épaisseur nominale, et le coefficient de convection h . La température et le déplacement sont donc cherchés sous la forme :

$$T(\underline{x}, t, h, e, l) = \sum_i^{N^h} \varphi_i^{th}(\underline{x}) \lambda_i^{th}(t) \gamma_i^{th}(e) \theta_i^{th}(h) \quad (3)$$

et

$$\underline{u}(\underline{x}, t, h, e, l) = \sum_i^{N^u} \varphi_i^u(\underline{x}) \lambda_i^u(t) \gamma_i^u(e) \theta_i^u(h) \quad (4)$$

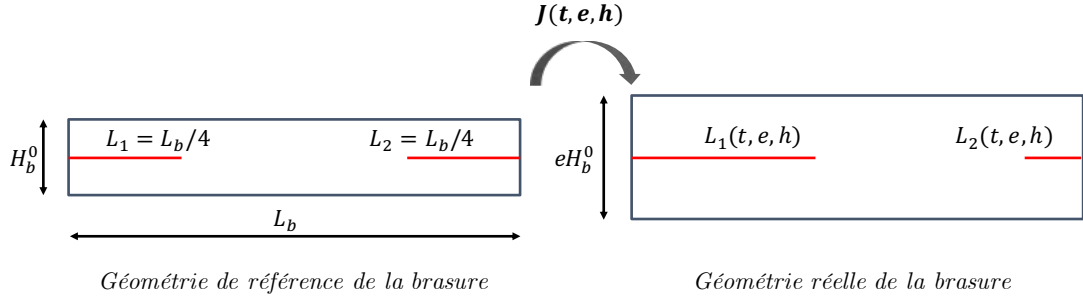


FIGURE 4 – Transformation géométrique de la brasure

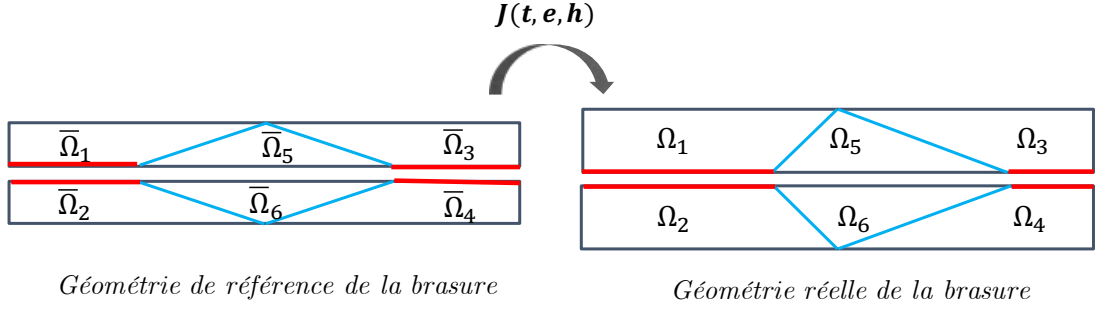


FIGURE 5 – Décomposition de la brasure en six différents domaines

3.1 Résolution du problème de thermique

Considérons dans cette partie que l'évolution de la longueur de fissure est une fonction connue, pour tout instant et toute valeur des paramètres e et h , et cherchons à obtenir l'évolution de la température en fonction de cette évolution de fissure. Le paramètre e influant sur la géométrie du module, et la fissure modifiant les conditions aux limites thermiques, il est nécessaire de se ramener à une configuration de référence dans laquelle la géométrie, et donc le maillage, ainsi que les conditions aux limites sont fixes pour pouvoir appliquer la méthode PGD [2, 8]. La géométrie de référence, représentée sur la Figure 4, consiste en une brasure dont l'épaisseur est fixée à sa valeur nominale H_b^0 et de deux fissures de longueurs fixes, une à gauche et une à droite de la brasure, les fissures étant supposées se propager depuis l'extérieur de la brasure. Les autres composants ont des géométries inchangées par la transformation. Une transformation géométrique est effectuée pour passer de la configuration réelle à la configuration de référence. Cette transformation doit laisser les surfaces inférieure et supérieure de la brasure inchangées afin de ne pas impacter les composants inférieurs et supérieurs. Ainsi, la brasure est divisée en 6 domaines comme présenté sur la Figure 5. Les lignes inférieures des trois domaines Ω_1 , Ω_5 et Ω_3 et les lignes supérieures des trois autres domaines sont en réalité deux lignes différentes mais situées au même endroit, et constituent le chemin de fissuration. La séparation en deux lignes distinctes est nécessaire pour définir les éléments cohésifs. Le changement de coordonnées lié à la transformation de la brasure conduit à une matrice Jacobienne pour chaque domaine. Par exemple, sur le domaine Ω_1 , les coordonnées réelles (x, y) dont l'origine est le point inférieur gauche du domaine sont liées aux coordonnées de référence (η, ξ) par :

$$x = \frac{2}{H_b^0} \eta \xi (1 - 2L_1) + 2L_1 \eta \quad , \quad y = e \xi \quad (5)$$

en considérant les coordonnées normalisées

$$\bar{\xi} = \frac{2\xi}{H_b^0} \in [0, 1] \quad , \quad \bar{\eta} = \frac{2\eta}{H_b^0} \in \left[0, \frac{L_s}{H_b^0}\right] \quad (6)$$

La matrice Jacobienne suivante est obtenue :

$$[J_{\Omega_1}] = \begin{bmatrix} \bar{\xi}(1 - 2L_1) + 2L_1 & \bar{\eta}(1 - 2L_1) \\ 0 & e \end{bmatrix} \quad (7)$$

Cette matrice intervient dans le calcul des gradients et des intégrales de la formulation faible (1), lorsque celle-ci est exprimée dans la configuration de référence $\bar{\Omega}$. Celle-ci devient :

$$\int_{\bar{\Omega}} \bar{c} \frac{\partial T}{\partial t} T^* d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}} (\nabla T)^T [\bar{k}] \nabla T^* d\bar{\Omega} + \int_{\partial_b \bar{\Omega}} h(T + T_0 - T_a) T^* dS - \int_{\partial_b \bar{\Omega}} Q T^* dS = 0 \quad (8)$$

où le terme \bar{c} peut être interprété comme une capacité thermique équivalente, définie par :

$$\bar{c} = c \left(\sum_{d=1}^6 |J_{\Omega_d}| \chi_{\Omega_d} + \chi_{comp} \right) \quad (9)$$

Les fonctions χ_{Ω_d} et χ_{comp} sont respectivement les fonctions indicatrices des domaines Ω_d et complémentaires :

$$\chi_{\Omega_d}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \bar{\Omega}_d \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (10)$$

De même, le coefficient de diffusion équivalent est défini par la matrice suivante :

$$[\bar{k}] = k \left(\sum_{d=1}^6 [J_{\Omega_d}^{-1}] [J_{\Omega_d}]^{-T} \chi_{\Omega_d} + [I_d] \chi_{comp} \right) \quad (11)$$

où $[I_d]$ est la matrice identité de taille 2×2 .

Afin de résoudre le problème PGD, la formulation faible (8) est intégrée sur l'espace temporel et des paramètres. Afin de pouvoir calculer les intégrales de cette formulation, il est nécessaire que les évolutions de fissures et les termes de la matrice $[\bar{k}]$ soient obtenus sous forme séparée. En exploitant la forme séparée des longueurs de fissures, les coefficients de $[\bar{k}]$ sont également calculés sous forme séparée en exploitant l'algorithme de [6] permettant de calculer la division de Hadamard de deux fonctions connues sous formes séparée. La formulation conduit ensuite classiquement à quatre problèmes couplés résolus par un algorithme de point fixe pour obtenir les fonctions d'un mode. Les modes sont calculés les uns après les autres, en utilisant un algorithme séquentiel.

3.2 Résolution du problème de mécanique

Dans cette partie, la température obtenue par la résolution PGD du problème de thermique est connue et constitue le chargement du problème de mécanique. Comme la température est connue dans la géométrie de référence, la transformation géométrique utilisée pour la résolution du problème de thermique doit également être appliquée pour résoudre le problème mécanique. Le problème de mécanique calcule donc le déplacement et une nouvelle évolution de fissure en fonction de la température et d'une évolution de fissure donnée. Le problème étant non-linéaire par la loi cohésive, il se résout par itérations successives comme présenté dans l'algorithme 1. En partant de la matrice de rigidité cohésive initiale constante K_c^0 , une prédiction de la solution est calculée sous forme PGD. Tant que l'équilibre du problème n'est pas vérifié, des corrections sont calculées sous forme PGD. A chaque itération de l'algorithme, l'évolution de la matrice de rigidité cohésive $[K_c](t, e, h)$ est obtenue en fonction du déplacement, et est approximée sous forme séparée. Le premier mode de l'approximation est obtenu en minimisant l'erreur $\|[K_c] - [K] \lambda^K(t) \gamma^K(e) \theta^K(h)\|^2$, ce qui conduit à 4 problèmes couplés, résolus par point fixe pour déterminer $[K], \lambda^K, \gamma^K, \theta^K$. Les modes suivants s'obtiennent de manière similaire, en retranchant la contribution des modes déjà calculés à $[K_c]$.

3.3 Stratégie de résolution du problème couplé

La résolution sous forme PGD des problèmes thermique et mécanique conduit à la résolution de problèmes globaux en temps et sur l'espace des paramètres pour la détermination des modes. Une méthode de résolution incrémentale de type Newton ne peut donc pas être utilisée. De façon alternative, une méthode itérative globale est utilisée et présentée dans l'algorithme de la Figure 6. La stratégie utilisée consiste à résoudre itérativement les problèmes PGD de thermique et de mécanique. En partant de longueurs de fissures nulles, le champ de température est tout d'abord calculé sous forme séparée, constituant le chargement du problème de mécanique. La résolution de ce problème conduit à de nouvelles évolutions de fissures. La solution du problème de thermique est alors recalculée, et l'algorithme itère jusqu'à obtenir une stagnation des évolutions des longueurs de fissures d'une itération à l'autre.

Algorithme 1 : Méthode itérative de résolution du problème non-linéaire de mécanique

Résultat : Déplacement \underline{u} sous forme séparée

- 1 Calcul de la prédiction $\underline{u}(K_c^0)$;
 - 2 **tant que** $\text{résidu} > \text{tolérance}$ **faire**
 - 3 Evaluation de la matrice de rigidité cohésive $K_c(t, e, h)$;
 - 4 Approximation de K_c sous forme séparée ;
 - 5 Calcul de la correction $\Delta\underline{u}(K_c)$;
 - 6 Actualisation du résidu ;
 - 7 Actualisation de la solution : $\underline{u} = \underline{u} + \Delta\underline{u}$;
 - 8 **fin**
-

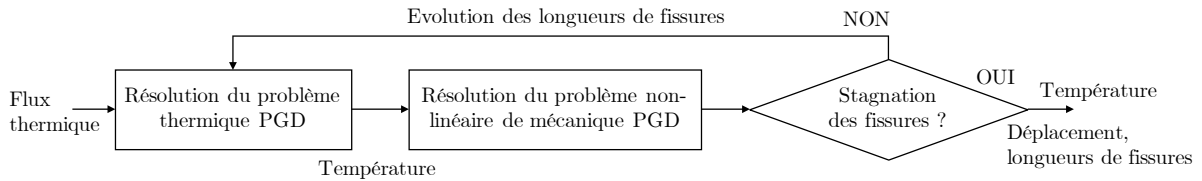


FIGURE 6 – Algorithme de résolution du problème global couplé sous forme PGD

4 Résultats

La méthode est appliquée ici pour une propagation rapide de fissure, en choisissant des paramètres cohésifs très faibles par rapport à la réalité. De même, afin d'atteindre rapidement un cycle limite, un faible flux est considéré ($Q_0 = 2300$ W/m), ainsi qu'une grande valeur nominale du coefficient de convection ($h_0 = 1000$ W/m/K). Une variation des paramètres e et h de $\pm 5\%$ est étudiée. Seule la fissure de gauche se propage ici, dont l'évolution au cours des itérations globales de l'algorithme est présentée sur la Figure 7. Le critère de convergence est atteint au bout de 3 itérations.

Une fois le modèle réduit obtenu, son exploitation dans une phase de post-traitement est très rapide. Sur la Figure 8a, la longueur de fissure finale est représentée en fonction des paramètres. Le domaine paramétrique conduisant à une longueur de fissure telle que $L_1 < 0.25$, soit une longueur inférieure au huitième de la longueur totale de la brasure, est représenté en vert sur la Figure 8b. Considérons le paramètre h incertain, de densité de probabilité uniforme sur l'intervalle $[0.98; 1.02]h_0$. Il est alors possible d'obtenir la probabilité de rupture pour chaque valeur de e , qui est montrée sur la Figure 9. L'épaisseur optimale de la brasure, garantissant que 95% des modules atteignent la durée de vie souhaitée, peut ainsi être déterminée. On obtient ici $e_{opti} = 1.025$. Cette valeur étant à la limite du domaine admissible, une plus grande épaisseur doit être choisie afin d'être robuste vis à vis des incertitudes pouvant exister sur

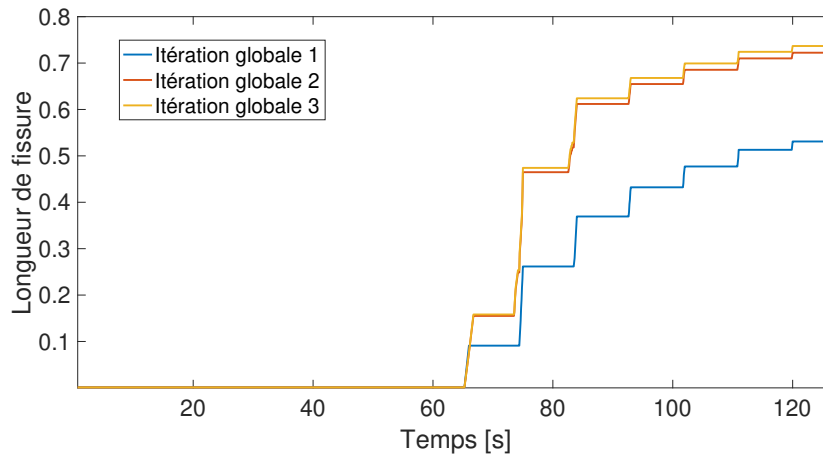


FIGURE 7 – Convergence de la longueur de fissure au cours des itérations globales, pour $e = 0.95$ et $h = 950$ W/m/K

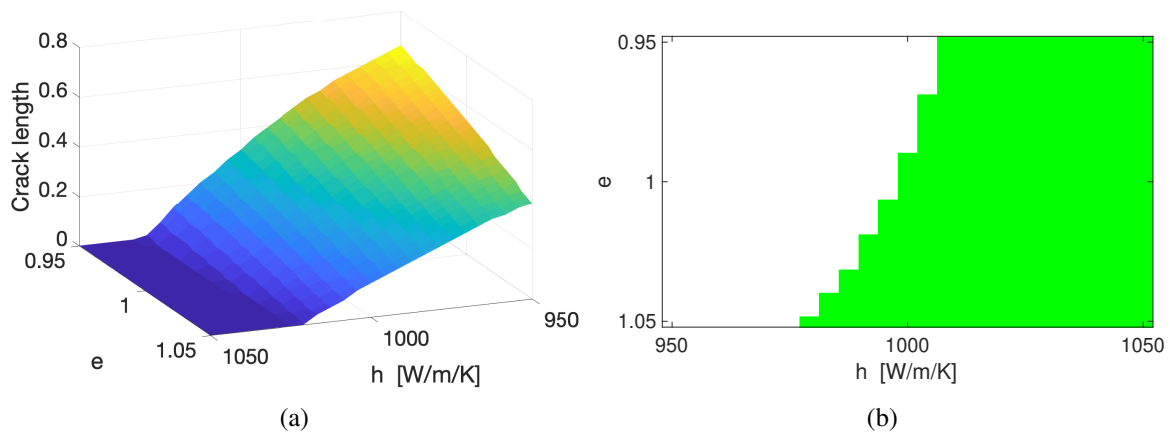


FIGURE 8 – (a) Longueur de fissure finale en fonction des paramètres, (b) domaine paramétrique conduisant à une longueur de fissure limitée

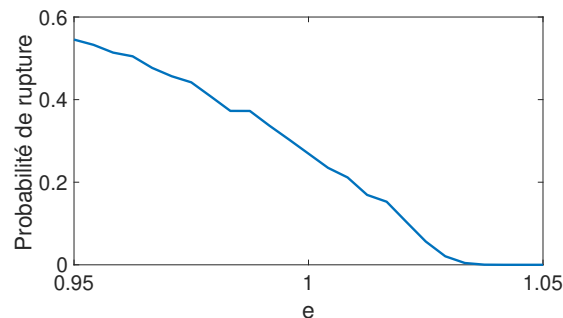


FIGURE 9 – Probabilité de rupture en fonction de l'épaisseur de la brasure

la valeur de l'épaisseur (dûes au procédé de fabrication par exemple) afin de garantir une conception robuste.

Il est également possible de faire une étude de propagation d'incertitudes ou de recalage de modèle par inférence bayésienne à l'aide du modèle réduit obtenu. Le modèle n'étant pas représentatif de la réalité (propagation sur un très faible nombre de cycles), cette approche sera mise en oeuvre sur un modèle plus représentatif.

5 Conclusion

Dans ce travail, un modèle réduit permettant d'étudier la propagation de fissures dans le cadre d'un problème thermo-mécanique couplé a été développé, à l'aide de la méthode PGD. Afin de résoudre le problème couplé par la propagation de fissure, une approche itérative par résolution successive des physiques est utilisée. Le modèle réduit obtenu est ensuite utilisé dans une phase de posttraitement lors d'une analyse de sensibilité ou de prédiction de durée de vie.

Le modèle étudié est un modèle 2D simplifié, sans modélisation du comportement électrique. L'étude d'un modèle tridimensionnel, représenté sur la Figure 10, plus représentatif de la réalité fait l'objet des travaux actuels. Le modèle réduit sera obtenu à l'aide du logiciel industriel ANSYS. Le modèle réduit obtenu pourra permettre l'exploitation de mesures expérimentales dans l'optique de recalibrer des paramètres incertains, de propager les incertitudes dans le modèle de durée de vie et d'évaluer la durée de vie résiduelle. Les résultats de cette étude seront présentés lors de la conférence.

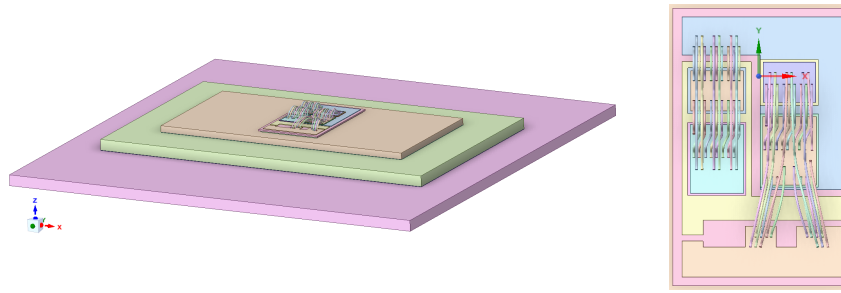


FIGURE 10 – Modèle éléments finis 3D étudié sous ANSYS

Références

- [1] J. V. Aguado, F. Chinesta, A. Leygue, E. Cueto Prendes, and A. Huerta. Deim-based pgd for parametric non-linear model order reduction. In *Adaptive Modeling and Simulation 2013*, pages 29–34. Centre Internacional de Mètodes Numèrics en Enginyeria (CIMNE), 2013.
- [2] L. Chamoin, P. E. Allier, and B. Marchand. Synergies between the constitutive relation error concept and pgd model reduction for simplified v&v procedures. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 3, 12 2016.
- [3] F. Chinesta, P. Ladeveze, and E. Cueto. A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18(4) :395, 2011.
- [4] R. Darveaux. Effect of simulation methodology on solder joint crack growth correlation. In *50th Electronic Components and Technology Conference (Cat. No.00CH37070)*, pages 1048–1058, 2000.
- [5] S. Deplanque, W. Nuchter, B. Wunderle, R. Schacht, and B. Michel. Lifetime prediction of snpb and snagcu solder joints of chips on copper substrate based on crack propagation fe-analysis. In *EuroSime 2006-7th International Conference on Thermal, Mechanical and Multiphysics Simulation and Experiments in Micro-Electronics and Micro-Systems*, pages 1–8. IEEE, 2006.
- [6] P. Díez, S. Zlotnik, A. García-González, and A. Huerta. Encapsulated pgd algebraic toolbox operating with high-dimensional data. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 27(4) :1321–1336, 2020.
- [7] N. Dornic, Z. Khatir, S. H. Tran, A. Ibrahim, R. Lallemand, J. Ousten, J. Ewanchuk, and S. V. Mollov. Stress-based model for lifetime estimation of bond wire contacts using power cycling tests and finite-element modeling. *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, 7(3) :1659–1667, 2019.
- [8] H. Garikapati, S. Zlotnik, P. Díez, C. V. Verhoosel, and E. H. van Brummelen. A proper generalized decomposition (pgd) approach to crack propagation in brittle materials : with application to random field material properties. *Computational Mechanics*, 65(2) :451–473, 2020.
- [9] T. Henneron and S. Clenet. Application of the pgd and deim to solve a 3d non-linear magnetostatic problem coupled with the circuit equations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 52(3) :1–4, Dec 2015.
- [10] P. Ladevèze. Pgd in linear and nonlinear computational solid mechanics. In *Separated representations and PGD-based model reduction*, pages 91–152. Springer, 2014.
- [11] Y. Larion, S. Zlotnik, T. J. Massart, and P. Díez. Building a certified reduced basis for coupled thermo-hydro-mechanical systems with goal-oriented error estimation. *Computational Mechanics*, 66(3) :559–573, 2020.
- [12] G. J. Riedel, R. Schmidt, C. Liu, H. Beyer, and I. Alaperae. Reliability of large area solder joints within igbt modules : Numerical modeling and experimental results. In *2012 7th International Conference on Integrated Power Electronics Systems (CIPS)*, pages 1–6. IEEE, 2012.