



HAL
open science

Au-delà des instabilités paramétriques

Arnaud Lazarus, Alvaro Anzoleaga Grandi, Suzie Protière

► **To cite this version:**

Arnaud Lazarus, Alvaro Anzoleaga Grandi, Suzie Protière. Au-delà des instabilités paramétriques. 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717591

HAL Id: hal-03717591

<https://hal.science/hal-03717591>

Submitted on 8 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Au-delà des instabilités paramétriques

A. Lazarus¹, A. Anzoleaga Grandi¹, S. Protière¹

¹ Sorbonne Université, CNRS, Institut Jean Le Rond d'Alembert, UMR 7190

Résumé — Dans cet exposé, nous revisitons le concept d'instabilités paramétriques qui sont au cœur de nombreux phénomènes physiques, du flambement dynamique de structures élancées en compression périodique à l'émergence d'ondes de Faraday. En combinant des modèles théoriques et des expériences modèles sur des pendules électromagnétiques, nous expliquons comment faire grandement varier la fonction d'évolution d'un système dynamique pour améliorer et contrôler les instabilités paramétriques. Nous trouvons de nouvelles fonctionnalités prometteuses, allant du pompage paramétrique super-harmonique d'ordre extrême à la possible « quantification » des systèmes dynamiques.

Mots clés — Systèmes dynamiques, instabilités paramétriques, théorie de Floquet, contrôle passif, expériences modèles.

1 Introduction

Des instabilités (ou pompages) paramétriques peuvent se développer dans tout système dynamique dont la fonction d'évolution locale varie périodiquement en synchronisation avec l'une de ses échelles de temps naturelles [1]. En pratique, la loi d'évolution est modulée en variant un paramètre physique du système : un enfant peut faire osciller une balançoire en s'accroupissant et en se relevant périodiquement, faisant ainsi varier légèrement le moment d'inertie du système en rotation [2]; les ondes de Faraday peuvent émerger en faisant osciller verticalement une couche de fluide, modulant ainsi la gravité effective ressentie par les ondes de surface perturbées [3, 4, 5, 6] et une structure élancée sous des charges de compression périodiques peut flamber dynamiquement en raison des petites variations de sa rigidité apparente en flexion [7, 8]. Ce concept étant universel, les instabilités paramétriques sont rencontrées dans divers domaines scientifiques allant des détecteurs d'ondes gravitationnelles [9] au plasma [10] ou aux Micro-Systèmes Électro-Mécanique (MEMS).[11, 12].

En théorie, les oscillateurs paramétriques devraient permettre la conception de diagrammes de stabilité complexes dans l'espace des paramètres de modulation avec de nombreuses langues d'instabilité paramétrique qui pourraient être exploitées pour des fonctionnalités dynamiques prometteuses (voir Fig.1b)). Par exemple, prenons le modèle linéaire le plus emblématique qui soit pour obtenir des informations physiques sur la stabilité des systèmes paramétriques : une masse se déplaçant localement dans un potentiel harmonique dont la courbure varie périodiquement avec le temps, comme illustré sur la Fig.1a) . En notant $\theta(\tau)$ et $\dot{\theta}(\tau)$ la position et la vitesse sans dimension de la masse autour de l'équilibre $\theta(\tau) = \dot{\theta}(\tau) = 0$, l'énergie totale du système peut être exprimée comme la somme d'une énergie cinétique \mathcal{E}_c et potentielle \mathcal{E}_p tels que $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2$ et $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2\psi(\tau))\theta^2$, avec $\psi(\tau) = \text{psi}(\tau + \mathcal{T})$ une fonction \mathcal{T} -périodique dont l'amplitude est entre +1 et -1 et avec α^2 et β^2 les courbures locales du potentiel. L'équation linéaire du mouvement dérivant de ce modèle énergétique est un problème de Cauchy qui s'écrit sous la forme d'une ODE linéaire à coefficient périodique :

$$\ddot{\theta}(\tau) + (\alpha^2 + \beta^2\psi(\tau))\theta(\tau) = 0 \quad (1)$$

On rappelle que la solution de l'Eq.(1) peut être recherchée sous la forme de Floquet $\theta(\tau) = p(\tau)e^{s\tau} + \bar{p}(\tau)e^{-s\tau}$ où $p(\tau) = p(\tau + \mathcal{T})$ est une fonction propre complexe \mathcal{T} -périodique et s est une valeur propre complexe appelé l'exposant de Floquet [14, 15]. La Fig.1b) montre l'évolution numérique de $\sigma = \max(\Re(\pm s))$ en fonction des paramètres de modulation α^2 et β^2 dans le cas classique de "Mathieu" où $\psi(\tau) = \cos(\tau)$ et $\mathcal{T} = 2\pi$. Les points de couleur $\sigma > 0$ indiquent des solutions $\theta(\tau)$ divergentes de $\theta(\tau) = 0$, c'est-à-dire une particule localement instable, tandis que les régions blanches $\sigma = 0$ corres-

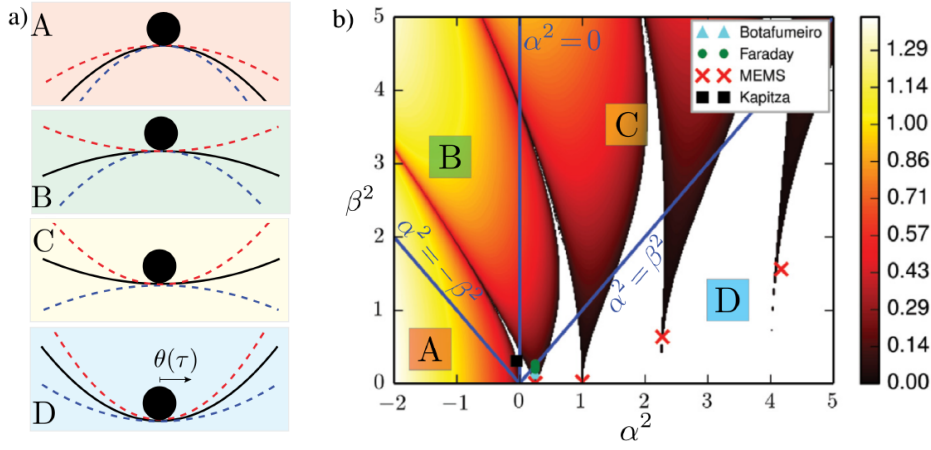


FIGURE 1 – Stabilité linéaire d’une masse se déplaçant localement dans un potentiel variant harmoniquement $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 \cos(\tau))\theta^2$. a) Quatre scénarios qualitatifs fonction de α^2 et β^2 . Les lignes noires montrent $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\alpha^2\theta^2$, les lignes pointillées rouges $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\theta^2$ et les lignes pointillées bleues $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2)\theta^2$. A : $\alpha^2 < 0$, $\beta^2 < -\alpha^2$. B : $\alpha^2 < 0$, $\beta^2 > -\alpha^2$. C : $\alpha^2 > 0$, $\beta^2 > \alpha^2$. D : $\alpha^2 > 0$, $\beta^2 < \alpha^2$. b) Diagramme de stabilité linéaire de l’équation de Mathieu dans l’espace des paramètres de modulation (α^2 , β^2). Triangle, cercle, croix, carré représentent des expériences classiques sur l’instabilité paramétrique.

pondent à des solutions oscillantes quasi-périodiques $\theta(\tau)$ autour de $\theta(\tau) = 0$, c’est-à-dire une particule marginalement stable.

Pour $\alpha^2 < 0$, il est possible de stabiliser dynamiquement la masse naturellement divergente [15, 16], mais seulement dans une petite région de l’espace des paramètres de modulation et seulement si $\beta^2 > |\alpha^2|$, c’est-à-dire si la courbure du potentiel est au moins brièvement positive (voir cas A et B sur la Fig. 1). L’expérience classique du “pendule de Kapitza” [17, 18] qui consiste à stabiliser un pendule inversé en modulant le potentiel d’énergie gravitationnelle par l’oscillation verticale de son point pivot est indiquée par un carré noir dans le diagramme de stabilité de la Fig. 1b) [19]. Le cas $\alpha^2 > 0$ et $\alpha^2 > \beta^2$ (cas D sur la Fig. 1) correspond à des instabilités paramétriques classiques caractérisées par des langues d’instabilité

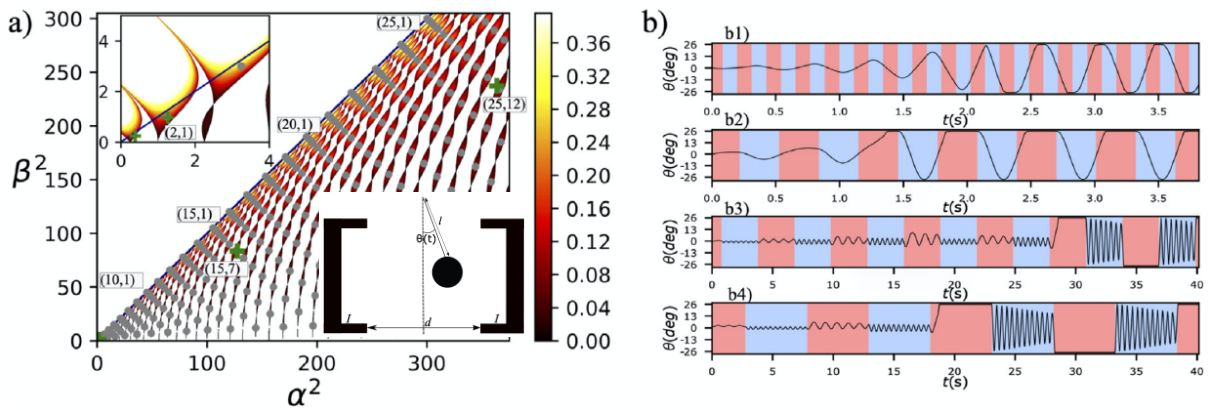


FIGURE 2 – Observations d’ordres extrêmement élevés de résonances paramétriques avec un simple pendule électromagnétique (voir croquis en bas à droite de a)). a) Diagramme de stabilité de l’équation de Meissner montrant σ , jusqu’à 0.4, dans l’espace (α^2 , β^2). Les points gris (m, n) représentent les solutions discrètes de l’équation (5). Les croix vertes représentent les paramètres expérimentaux exprimés dans l’espace (α^2 , β^2). L’encart en haut à gauche focalise sur les premières régions d’instabilité classiques. b) Réponses dynamiques du pendule électromagnétique lorsque $\omega^2(I(t))$ est modulé en créneau avec $T_1 = T_2 = T/2$. b1) Une amplification paramétrique “(1, 1)” classique. b2) Une instabilité paramétrique (2, 1). b3) Un pompage paramétrique (15, 7). b4) Une amplification paramétrique (25, 12). Plus de détails dans [23].

indépendantes qui apparaissent, pour $\beta \rightarrow 0$, en $\alpha = 0,5k$ avec k un entier positif. La k^{me} région d'instabilité indique l'émergence de mouvements $2T$ ou T -périodiques dépendant si k est pair ou impair. Les expériences classiques sur l'émergence des ondes de Faraday [20] ou le pompage paramétrique de "O Botafumeiro" de Saint Jacques de Compostelle [2] sont représentées respectivement par des cercles verts et des triangles bleus sur la Fig.1b). Les instabilités paramétriques super-harmoniques dans les MEMS [13] sont également représentées dans la même figure par des croix rouges. Enfin, le cas C correspond à des modulations périodiques tellement importantes que la courbure du potentiel de la Fig.1a) est brièvement négative. C'est le cas de quelques expériences d'instabilité de Faraday lorsque l'accélération du pot vibrant est telle, que la gravité effective est négative pendant un court instant, c'est-à-dire que le fluide tend à s'échapper verticalement du récipient contre la gravité [20].

Il ressort de la Fig.1b) que les instabilités paramétriques habituellement exploitées dans les systèmes paramétriques ont des paramètres de modulation situés dans les pointes des langues d'instabilité. Ce qui s'explique car lorsque l'on fait varier périodiquement la longueur d'un pendule, l'accélération d'un pot vibrant ou la raideur effective d'une plaque micrométrique, il est soit peu pratique, soit énergétiquement trop coûteux de maintenir une grande variation de la loi d'évolution d'un système sur des périodes de temps relativement longues, c'est-à-dire de maintenir à la fois de grands β^2 et α^2 . Et puisqu'en raison de l'amortissement interne, il existe un rétrécissement exponentiel des pointes des langues avec l'augmentation du nombre de régions d'instabilité k [11], les systèmes macroscopiques sont généralement limités autour de la première région d'instabilité et les résonances paramétriques d'ordres supérieurs n'ont été observées dans les MEMS grâce à leurs facteurs de qualité extrêmement grands [11, 13].

Dans ce travail, nous étudions quelles caractéristiques des systèmes paramétriques sont essentielles pour contrôler de façon pratique la forme et le nombre de leurs langues d'instabilité paramétrique. Nous nous concentrons sur un oscillateur à un seul degré de liberté et étudions les seuils d'instabilité et les réponses dynamiques de pendules électromagnétiques pour illustrer expérimentalement nos concepts théoriques. Nous constatons qu'en choisissant soigneusement le paramètre physique pour faire varier considérablement la loi d'évolution d'un système dynamique linéaire, il est possible d'augmenter le nombre d'instabilités paramétriques et de les contrôler. Dans la section 2, nous étudions les limites de la région D de la Fig.1b) et montrons par exemple qu'il devient simple de déclencher des régions d'instabilité super-harmonique extrêmement élevées. Dans la section 3, nous explorons la région BC de la Fig.1b) et constatons que le mouvement dynamique peut être "quantifié", c'est-à-dire suivre des règles très analogues à celle de la Mécanique quantique.

2 Pompage paramétrique super super-harmonique

Dans cette section, l'oscillateur expérimental de Floquet étudié est un pendule plan avec une bille métallique placée symétriquement entre deux électroaimants attractifs identiques dont la force d'attraction dépend du courant électrique imposé I (voir schéma en bas à droite de la Fig. 2a)). Le scalaire $\omega^2(I)$, caractérisant l'échelle de temps naturelle de la fonction d'évolution locale du pendule électromagnétique, dépend fortement du paramètre de contrôle I . Contrairement aux systèmes paramétriques classiques, il est simple avec ce système d'explorer complètement les régions A – D de la Fig.1b) en faisant varier périodiquement le courant électrique I au-dessous ou au-dessus de I_c , le courant au-delà duquel la bille métallique diverge. Dans ce travail, nous modulons $\omega^2(I(t))$ avec une fonction créneau : nous éteignons (OFF, $I = 0$) et allumons les électroaimants (ON, $I \neq 0$) respectivement pendant T_1 et T_2 secondes, de sorte que la période de modulation est $T = 2\pi/\Omega = T_1 + T_2$. L'équation linéaire du mouvement de cet oscillateur à deux états s'écrit simplement

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) + \omega^2(0)\theta(t) = 0 & \text{durant } T_1, \\ \ddot{\theta}(t) + \omega^2(I)\theta(t) = 0 & \text{durant } T_2. \end{cases} \quad (2)$$

En introduisant le temps sans dimension $\tau = \Omega t$, la fonction de modulation carrée $\psi(\tau) = +1$ pendant $\mathcal{T}_1 = 2\pi T_1/T$ et $\psi(\tau) = -1$ pendant $\mathcal{T}_2 = 2\pi T_2/T$ et les paramètres de modulation sans dimension

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2(0) + \omega^2(I)}{2\Omega^2}, \quad \beta^2 = \frac{\omega^2(0) - \omega^2(I)}{2\Omega^2}, \quad (3)$$

Eq.(2) peut être ré-écrit sous la forme adimensionnelle de Eq.(1) qui, dans le cas d'une fonction de modulation par morceaux $\psi(\tau)$, est appelée l'équation de Meissner [1]. En plus d'être facile à mettre en œuvre expérimentalement, un oscillateur paramétrique avec une modulation en créneau peut être résolu analytiquement [21, 22]. Notamment, en introduisant $\lambda = i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ et $\eta = i\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, le taux de croissance analytique $\sigma = \max(\Re(\pm s))$ des formes Floquet de l'Eq.(1) s'écrit $\sigma = |\Re(\frac{1}{2\pi} \ln(\frac{\Delta + \sqrt{\Delta^2 - 4}}{2}))|$ avec

$$\Delta = 2\cosh(\lambda T_1) \cosh(\eta T_2) + \left(\frac{\eta}{\lambda} + \frac{\lambda}{\eta}\right) \sinh(\lambda T_1) \sinh(\eta T_2). \quad (4)$$

L'évolution de σ est illustrée dans la Fig.2a) pour $T_1 = T_2 = T/2$ dans un espace paramétrique extrêmement étendu (α^2, β^2) (deux ordres de grandeur en plus par rapport au diagramme de stabilité de la Fig.1b)). Nous reconnaissons les langues d'instabilité émergeant de $\alpha = 0.5k$ pour $\beta \rightarrow 0$ comme pour l'équation de Mathieu, même si les langues sont ici composées de poches discrètes. Il se trouve que la localisation discrète de ces poches d'instabilité peut être expliquées par un simple schéma de synchronisation entre la réponse et l'excitation [23]. Sachant que le pendule électromagnétique a une période naturelle $2\pi/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ lorsqu'il est éteint pendant $T_1 = \pi$ et $2\pi/\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ lorsqu'il est allumé pendant $T_2 = \pi$, les modes de pompage paramétriques super-harmoniques doivent satisfaire

$$\frac{(2m-1)2\pi}{4\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \pi \quad \text{and} \quad \frac{(2n-1)2\pi}{4\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} = \pi \quad (5)$$

où m et n sont des entiers positifs et $m > n$, c'est-à-dire $\alpha^2 > \beta^2$. En faisant varier les entiers (m, n) , l'équation Eq.(5) nous donne une nouvelle règle de conception discrète dans l'espace (α^2, β^2) pour localiser facilement le centre des poches d'instabilité comme indiqué par les points gris sur la Fig.2a). Physiquement, $(2m-1)$ (ou $(2n-1)$) représente le nombre de quarts de cycle de la réponse du pendule que l'on peut exactement insérer dans la période de modulation T_1 (ou T_2). La Fig.2b) montre quatre réponses dynamiques expérimentales dont les régimes transitoires sont représentatifs des nombreuses instabilités paramétriques observées dans le pendule électromagnétique. Comme attendu, les pompes paramétriques à l'origine des cycles limites observés sont en bon accord qualitatif avec le principe de synchronisation illustré par Eq.(5). Exprimer les paramètres de modulation expérimentaux $\omega(I)$ et Ω associés aux réponses de la Fig.2b) sous la forme adimensionnelle α^2 et β^2 grâce à l'équation Eq.(3), nous reportons les données expérimentales (croix vertes) dans le diagramme de stabilité de la Fig.2a) et trouvons un excellent accord avec les (m, n) mode de pompage paramétrique donné par Eq.(5). L'instabilité paramétrique de la Fig.2b1), trouvée dans la région d'instabilité principale classique $k = 1$, conduit à un cycle limite sous-harmonique de période $2T$. Fig.2b2) correspond à un mode paramétrique instable $(m, n) = (2, 1)$, situé dans la région d'instabilité $k = 2$, et conduit à un cycle limite de période T comme prévu puisque m est pair. Fig.2b3) et Fig.2b4) affichent respectivement un mode de pompage paramétrique $(15, 7)$ et $(25, 12)$, conduisant à un mouvement super harmonique de période $2T$ puisque m est impair dans les deux cas. Comme $k = m + n - 1$, la réponse de la Fig.2b4) est en fait située dans la 36^{me} langue d'instabilité comme le montre la Fig.2a); un "exploit" puisque, à notre connaissance, le record $k = 28$ a été observé dans un MEMS en 2016 [13]. Ce n'est pas le but de cet article de rapporter la pléthore d'instabilités paramétriques existant dans ce pendule électromagnétique fondamental, comme le suggère le nombre impressionnant de poches d'instabilité sur la Fig.2a), mais les différents mouvements représentés dans Fig.2b) mettent déjà en évidence le potentiel de ces instabilités paramétriques extrêmes pour un nouveau contrôle dynamique dans les systèmes mécaniques.

3 Systèmes Périodiquement Oscillant-Divergent (PODS)

Une autre propriété dynamique remarquable des oscillateurs paramétriques est illustrée dans les Figs.3 et 4 qui exploitent cette fois la région B du diagramme de stabilité de la Fig.1a). Le pendule électromagnétique de la Fig.3a) est maintenant constitué d'un pendule inversé (naturellement divergent), qui peut être stabilisé par un seul électroaimant (placé symétriquement au-dessus) dès que le courant électrique I est au-dessus d'un seuil I_c pour que les forces électromagnétiques puissent équilibrer celles de la gravité. Lorsque $I = 0$, l'équilibre vertical du pendule inversé est instable (voir le paysage énergétique sur la Fig.3a)), le pendule est donc divergent (gauche ou droite selon les imperfections initiales)

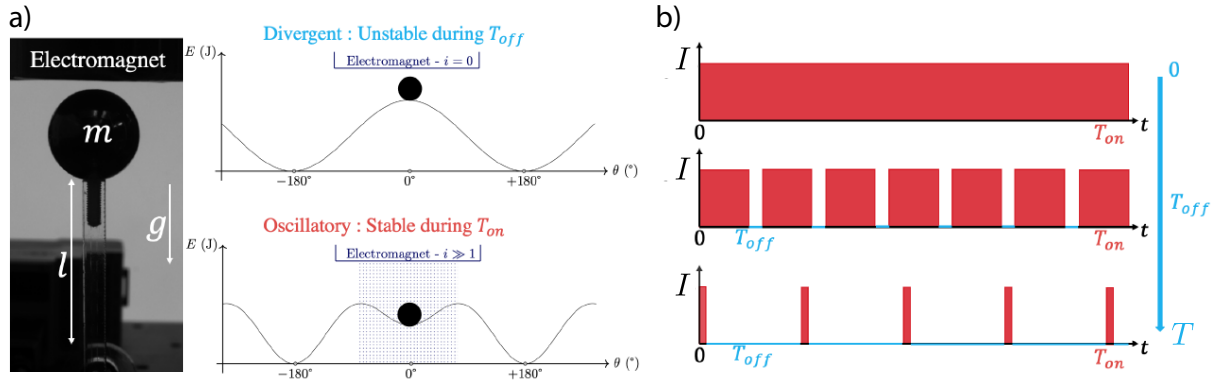


FIGURE 3 – Un exemple de système périodiquement oscillant-divergent. a) A gauche : Un pendule inversé instable avec une bille métallique peut être stabilisé en ajoutant un électroaimant attractif avec un courant suffisant I . A droite : Paysage énergétique dans le cas où $I = 0$ (OFF) ou $I > I_c$ (ON). b) Une stratégie pour stabiliser le pendule tout en minimisant l’apport d’énergie consiste à éteindre périodiquement l’électroaimant avec une période croissante T_{OFF} jusqu’à finalement approcher $T_{OFF} \rightarrow T = T_{ON} + T_{OFF}$.

avec une échelle de temps naturelle $\omega_0 \approx \sqrt{g/l}$. Lorsque $I > I_c$, le pendule inversé est asymptotiquement stable (voir le paysage énergétique sur la Fig.3a) et lorsqu’il est légèrement perturbé, l’équilibre vertical est caractérisé par des oscillations amorties avec une échelle de temps naturelle ω_I . Le système devient un système Périodiquement Oscillant-Divergent (PODS) en allumant périodiquement les électroaimants, avec $I > I_c$, pendant T_{ON} et en les éteignant, avec $I = 0$, pendant T_{OFF} .

Il est bien connu depuis le pendule inversé de Kapitza [17] que la modulation périodique pouvait stabiliser dynamiquement la configuration verticale lorsque l’échelle de temps de modulation est beaucoup plus courte que celle naturellement divergente (le pendule est alors stable au sens de Lyapunov et non plus asymptotiquement stable). Mais il s’avère que la stabilisation dynamique de Kapitza n’est pas le seul moyen (et certainement pas le plus efficace énergétiquement) pour stabiliser un système naturellement divergent. Pour s’en rendre compte, une première expérience décrite dans le schéma de la Fig.3 b) consiste à observer ce qu’il advient de la stabilité du pendule électromagnétique de la Fig.3 a), lorsque l’on augmente T_{OFF} jusqu’à la limite $T_{OFF} \rightarrow T = T_{ON} + T_{OFF}$, pour différentes valeurs de T_{ON} . Les résultats sont donnés dans le diagramme de stabilité de la Fig.4a) qui a été obtenu numériquement, grâce à l’équation analytique (4), et construit expérimentalement, avec des carrés bleus et rouges qui dénotent respectivement des observations stables ou instables. Non seulement il devient très compliqué de stabiliser le pendule inversé lorsque $T_{OFF} \rightarrow T$ comme attendu intuitivement, mais les régions de stabilité blanches (ou régions de carrés bleus) deviennent des bandes indépendantes avec quasiment aucune épaisseur dans l’espace (I, T_{ON}) . En d’autres termes, il n’y a qu’un ensemble presque discret de fonctions de modulation en créneau $\psi_n(\tau) = \psi_n(\tau + T)$ avec une amplitude de courant électrique $I > I_c$ et T_{ON} pour lequel le système a une chance d’être dynamiquement stable. Ces fonctions de modulation périodiques $\psi_n(\tau)$ (qui sont représentées en lignes verticales de couleur dans le diagramme de stabilité de la Fig.4a)) sont en fait celles qui conduisent aux plus grands bassins d’attraction pour la position verticale dynamiquement stable du pendule, quel que soit le T_{OFF} . Cela signifie qu’à tout T_{OFF} , les $\psi_n(\tau)$ sont les meilleures fonctions de modulation pour stabiliser le système en toute sécurité.

De manière intéressante, grâce à la propriété de l’Hamiltonien périodique des systèmes dynamiques associés aux fonctions de modulation particulières $\psi_n(\tau)$, il est possible d’approcher le problème initial de Cauchy Eq.(1) par un Problème aux Conditions aux Limites (BVP) qui est celui d’une particule dans une boîte, problème célèbre de la Mécanique Quantique, dont les solutions semi-analytiques sont connues depuis longtemps [24]. Ce faisant, rechercher les fonctions de modulation $\psi_n(\tau)$ (défini par quatre paramètres $\omega_0, \omega_I, T_{ON}, T_{OFF}$) qui stabilisent dynamiquement la particule de masse m sur la solution d’équilibre vertical quel que soit T_{OFF} peut être obtenu en résolvant des problèmes aux valeurs propres classiques, ici les équations d’onde stationnaire d’une particule dans des boîtes carrées (voir Fig.4b)), qui ne sont caractérisés que par deux paramètres : le temps T_{ON} pendant lequel l’électroaimant est allumé et l’énergie potentielle apporté par l’électroaimant, $\Delta E_p(I)$. De plus, quand $T_{OFF} \rightarrow T = T_{ON} + T_{OFF}$, les

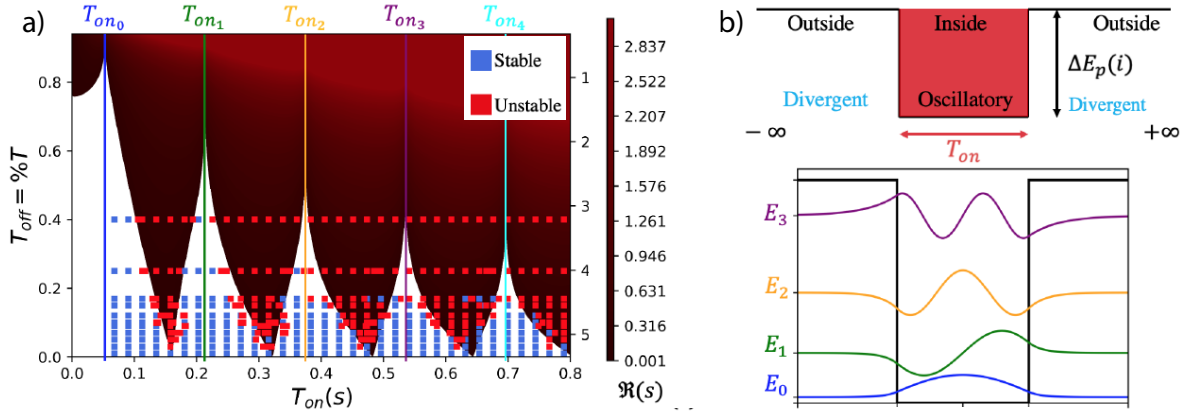


FIGURE 4 – La minimisation de l’énergie apportée induit une “quantification” des réponses stables pour un $I > I_c$ donné. a) Diagramme de stabilité d’un PODS dans l’espace (T_{ON}, T_{OFF}) . Lorsque $T_{OFF} \rightarrow T = T_{ON} + T_{OFF}$, seul un ensemble discret de fonctions de modulation périodiques $\psi_n(\tau) = \psi_n(\tau + T)$ devient acceptable et les mouvements stables suivent des formes de mode particulières. Les carrés bleus et rouges représentent respectivement les points expérimentaux stables et instables. b) On peut alors résoudre un problème aux limites simple, c-a-d un BVP qui est ici analogue à l’équation de Schrödinger stationnaire d’une particule dans une boîte, pour prédire les formes de modes stables et leur fonction de modulation périodique associée $\psi_n(\tau)$. Les résultats des BVP sont indiqués par des lignes de couleur verticale dans le diagramme de stabilité a) du problème de valeur initiale d’origine. Il prédit notamment l’émergence des régions de stabilité lorsque $T_{OFF} \rightarrow T$.

formes des vecteurs propres obtenus (les fonctions d’onde dans le problème quantique) tendent en fait vers les fonctions propres de Floquet $p_n(\tau) = p_n(\tau + T)$ des systèmes dynamiques stables à fonctions de modulation périodiques $\psi_n(\tau)$ définis par Eq.(1).

In fine, grâce à cette analogie onde-particule, concevoir des systèmes à propriétés de stabilité dynamique discrètes se fait simplement en résolvant des problèmes d’ondes stationnaires de Mécanique Quantique avec une interprétation différente de celle habituelle. Par exemple dans [15], l’ensemble discret de fonctions de modulation harmonique qui peuvent stabiliser de manière optimale un système naturellement divergent peut être obtenu par la résolution d’un oscillateur harmonique quantique. Nous pensons que cette analogie ouvre la voie à des fonctionnalités prometteuses dans les vibrations structurelles puisque de nombreuses propriétés mathématiques de la mécanique quantique telles que la quantification ou la superposition ont une signification physique pratique dans les PODS.

Références

- [1] John A Richards. *Analysis of periodically time-varying systems*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] Juan R Sanmartin. O botafumeiro : Parametric pumping in the middle ages. *American Journal of Physics*, 52(10) :937–945, 1984.
- [3] Michael Faraday. On a peculiar class of acoustical figures ; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, 121 :299–340, 1831.
- [4] Thomas Brooke Benjamin and Fritz Joseph Ursell. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 225(1163) :505–515, 1954.
- [5] Stéphane Douady. Experimental study of the Faraday instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 221 :383–409, 1990.
- [6] Raymond E Goldstein. Coffee stains, cell receptors, and time crystals : Lessons from the old literature. *Physics Today*, September 2018.
- [7] VV Bolotin. The dynamic stability of elastic systems, 1964. *ITolden-Day, Inc*, 1964.
- [8] A Vafai, M Javidruzi, and HE Estekanchi. Parametric instability of edge cracked plates. *Thin-walled structures*, 40(1) :29–44, 2002.

- [9] Matthew Evans, Slawek Gras, Peter Fritschel, John Miller, Lisa Barsotti, Denis Martynov, Aidan Brooks, Dennis Coyne, Rich Abbott, Rana X Adhikari, et al. Observation of parametric instability in advanced ligo. *Physical Review Letters*, 114(16) :161102, 2015.
- [10] Alexey V Arefiev, Boris N Breizman, Marius Schollmeier, and Vladimir N Khudik. Parametric amplification of laser-driven electron acceleration in underdense plasma. *Physical Review Letters*, 108(14) :145004, 2012.
- [11] Kimberly L Turner, Scott A Miller, Peter G Hartwell, Noel C MacDonald, Steven H Strogatz, and Scott G Adams. Five parametric resonances in a microelectromechanical system. *Nature*, 396(6707) :149–152, 1998.
- [12] Alex Szorkovszky, Andrew C Doherty, Glen I Harris, and Warwick P Bowen. Mechanical squeezing via parametric amplification and weak measurement. *Physical Review Letters*, 107(21) :213603, 2011.
- [13] Yu Jia, Sijun Du, and Ashwin A Seshia. Twenty-eight orders of parametric resonance in a microelectromechanical device for multi-band vibration energy harvesting. *Scientific reports*, 6 :30167, 2016.
- [14] Barend Bentvelsen and Arnaud Lazarus. Modal and stability analysis of structures in periodic elastic states : application to the Ziegler column. *Nonlinear Dynamics*, 91(2) :1349–1370, 2018.
- [15] Arnaud Lazarus. Discrete dynamical stabilization of a naturally diverging mass in a harmonically time-varying potential. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 386 :1–7, 2019.
- [16] Benjamin Apffel, Filip Novkoski, Antonin Eddi, and Emmanuel Fort. Floating under a levitating liquid. *Nature*, 585 :48–52, 2020.
- [17] Andrew Stephenson. On induced stability. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 15(86) :233–236, 1908.
- [18] DJ Acheson. Upside-down pendulums. *Nature*, 366 :215–216, 1993.
- [19] HJT Smith and James A Blackburn. Experimental study of an inverted pendulum. *American Journal of Physics*, 60(10) :909–911, 1992.
- [20] Suzie Protiere. *Gouttes rebondissantes : une association onde-particule à échelle macroscopique*. PhD thesis, Paris Diderot, 2007.
- [21] Balth van der Pol and MJO Strutt. On the stability of the solutions of Mathieu’s equation. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 5(27) :18–38, 1928.
- [22] Chikara Sato. Correction of stability curves in Hill-Meissner’s equation. *Mathematics of Computation*, 20(93) :98–106, 1966.
- [23] Alvaro A. Grandi, Suzie Protière and Arnaud Lazarus Enhancing and controlling parametric instabilities in mechanical systems *Extreme Mechanics Letters*, 43, 101195, 2021.
- [24] A. Messiah, *Quantum Mechanics, Volume 1* (North-Holland 1961).