HAL open science

Approche isogéométrique sans matrice à quadrature pondérée pour la simulation thermique ultra rapide

Joaquin Eduardo Cornejo Fuentes, David Dureisseix, Arnaud Duval, Thomas Elguedj

▶ **To cite this version:**

Joaquin Eduardo Cornejo Fuentes, David Dureisseix, Arnaud Duval, Thomas Elguedj. Approche isogéométrique sans matrice à quadrature pondérée pour la simulation thermique ultra rapide. 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03717586

HAL Id: hal-03717586

https://hal.science/hal-03717586v1

Submitted on 8 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2022
15ème Colloque National en Calcul des Structures
16-20 Mai 2022, Presqu'île de Giens (Var)

Approche isogéométrique sans matrice à quadrature pondérée pour la simulation thermique ultra rapide

J. Cornejo-Fuentes[1], D. Dureisseix[1], A. Duval[1], T. Elguedj[1]

[1] *LaMCoS, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon,*
{joaquin.cornejo-fuentes, david.dureisseix, arnaud.duval, thomas.elguedj}@insa-lyon.fr

Résumé — Nous présentons les résultats d'utilisation de l'analyse isogéométrique (IGA) couplée aux techniques « quadrature pondérée » (WQ) et « sans matrice » (MF) dans la résolution de l'équation de la chaleur stationnaire dans un milieu isotrope. Ces travaux ont pour but d'évaluer et de présenter la performance de chaque méthode ainsi que leurs avantages et inconvénients afin de les comparer et d'avoir une perspective plus approfondie selon les différents besoins lors d'une simulation d'un procédé thermo-mécanique.
Mots clés — Analyse isogéométrique, quadrature pondérée, sans matrice.

1 Contexte de recherche

Depuis quelques décennies, le calcul numérique au niveau industriel s'accélère et, grâce à cela, il est aujourd'hui possible de modéliser de manière fiable différents phénomènes physiques. Cependant, les simulations numériques peuvent parfois nécessiter de nombreuses heures de calcul ou des outils haut de gamme, tels que des super-ordinateurs, pour gérer des modèles plus complexes. C'est le cas de certains procédés thermo-mécaniques comme le soudage multi-passes et la fabrication additive. Par exemple, la simulation d'un procédé de soudage multi-passes dans un logiciel commercial peut prendre 15 jours sur 8 CPU pour un modèle industriel simple [1] ou 60 000 heures-CPU sur un super-ordinateur pour des cas plus complexes [2]. Parmi les méthodes actuelles mises en œuvre pour améliorer les performances numériques, on trouve le maillage adaptatif, des techniques de sous-structuration globale ou locale, ou des techniques de parallélisation des processus. Malheureusement, ces méthodes n'ont pas réussi à réduire considérablement le temps de calcul. Néanmoins, depuis quelques années, d'autres techniques dont l'analyse isogéométrique (IGA) ont été développées afin de réduire le temps de calcul tout en conservant la précision. L'objectif de ce travail est donc d'évaluer les performances de l'analyse isogéométrique (IGA) couplée aux approches « quadrature pondérée » (WQ) et « sans matrice » (MF) dans la résolution de l'équation de la chaleur.

2 Équation de la chaleur

Considérons l'étude du transfert thermique dans un milieu isotrope, avec conductivité thermique μ et capacité thermique volumique σ constantes, et des conditions de Dirichlet sur les bords de façon que :

$$\begin{cases} \text{Étant donné } f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ trouver } T : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tel que :} \\ -\mu \nabla^2 T + \sigma \dfrac{\partial T}{\partial t} = f \qquad \text{dans } \Omega, \\ T = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Grâce à la méthode de Bubnov-Galerkin, la solution T est approchée par la fonction T^h considérée comme étant dans un espace d'approximation de dimension finie $\mathcal{V}^h$. Puisque cet espace discret $\mathcal{V}^h$ est composé par un nombre fini de fonctions de base $\mathbf{R}$, il est possible de trouver la solution approximative de l'équation (1) en résolvant le système d'équations (2) :

$$\mathbb{K}T + \mathbb{C}\frac{\partial T}{\partial t} = \mathbb{F}, \tag{2}$$

où $\mathbb{K}$ et $\mathbb{C}$ sont respectivement les matrices de conductivité thermique et de capacité thermique, et $\mathbb{F}$ est le vecteur du terme source par unité de volume. Leurs composantes sont calculées de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{K}_{ij} = \displaystyle\int_\Omega \mu \nabla \mathbf{R}_i(x) \nabla \mathbf{R}_j(x)\, dx, \\ \mathbb{C}_{ij} = \displaystyle\int_\Omega \sigma \mathbf{R}_i(x) \mathbf{R}_j(x)\, dx, \\ \mathbb{F}_i = \displaystyle\int_\Omega \mathbf{R}_i(x) f(x)\, dx. \end{cases} \tag{3}$$

3 Analyse isogéométrique

3.1 Quelques définitions

L'analyse isogéométrique (IGA) est une méthode de calcul numérique introduite par T. Hughes dont l'idée est d'utiliser les fonctions de forme de la géométrie pour représenter la solution numérique [3]. Parmi les différentes techniques utilisées pour définir la géométrie, la plus largement utilisée est l'emploi de fonctions B-spline (cf. figure 1) dont les principaux avantages sont la stabilité numérique et la facilité d'être générées grâce à des algorithmes déjà existants comme celui de De Boor-Cox [4].

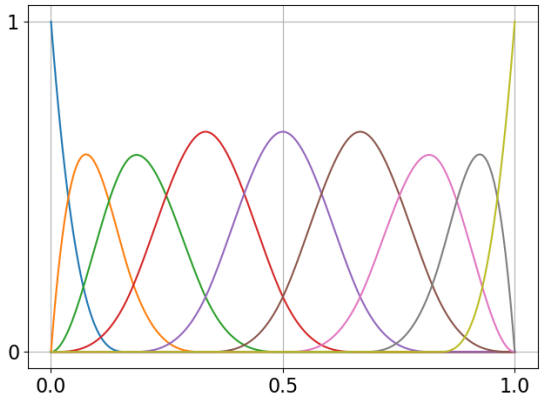

FIGURE 1 – Fonctions B-spline de degré $p = 3$ et nombre d'éléments $nb_{el} = 6$.

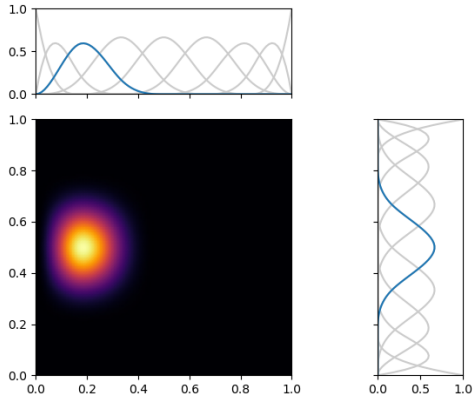

FIGURE 2 – Produit tensoriel des fonctions B-spline unidimensionnelles.

Dans l'approche IGA, le domaine physique Ω peut être défini comme la transformation géométrique du domaine paramétrique $\hat{\Omega} = [0,1]^d$, avec d le nombre de dimensions. De cette façon,

$$\Omega = \tau\left(\hat{\Omega}\right), \quad \text{avec} \quad \tau(\hat{x}) = \sum_i C_i \mathbf{B}_i(\hat{x}), \tag{4}$$

où C_i sont les points de contrôles et $\mathbf{B}_i$ sont des fonctions B-spline définies dans $\hat{\Omega}$. Ces fonctions peuvent être représentées comme le produit tensoriel des fonctions B-spline définies dans l'espace paramétrique unidimensionnel $[0,1]$, comme la figure 2 le montre pour un cas bidimensionnel. Le grand avantage de ce fait est le traitement des problèmes de plusieurs dimensions en utilisant des concepts très simples employés dans un cas unidimensionnel.

D'autre part, étant donné que l'approche IGA se base sur le paradigme isoparamétrique, les fonctions $\mathbf{R}_i$ sont alors définies comme $\mathbf{R}_i = \mathbf{B}_i \circ \tau^{-1}$ et les intégrales sont calculées après le changement de variable $\hat{x} = \tau^{-1}(x)$. Les composantes de $\mathbb{K}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{F}$ sont donc calculées par :

$$\begin{cases} \mathbb{K}_{ij} = \displaystyle\int_{\hat{\Omega}} \hat{\nabla}\mathbf{B}_i^T(\hat{x}) \left(J^{-1} J^{-T} \mu \det(J)\right) \hat{\nabla}\mathbf{B}_j(\hat{x})\, d\hat{x}, \\ \mathbb{C}_{ij} = \displaystyle\int_{\hat{\Omega}} \mathbf{B}_i(\hat{x}) \left(\sigma \det(J)\right) \mathbf{B}_j(\hat{x})\, d\hat{x}, \\ \mathbb{F}_i = \displaystyle\int_{\hat{\Omega}} \mathbf{B}_i(\hat{x}) \hat{f}(\hat{x}) \det(J)\, d\hat{x}, \end{cases} \tag{5}$$

où J est la matrice jacobienne de la transformation géométrique τ.

3.2 Assemblage des matrices

La construction des matrices dans la méthode de Galerkin se fait à travers l'assemblage des matrices élémentaires comme dans la méthode des éléments finis (EF). Il s'agit de diviser le domaine $\hat{\Omega}$ en N éléments $e_1, \cdots, e_N$, de calculer les matrices locales en utilisant les fonctions non-nulles sur l'élément et de boucler sur l'ensemble des éléments afin d'obtenir les matrices globales de la relation (5). Les composantes de la matrice de capacité thermique $\mathbb{C}$ sont de cette façon calculées par :

$$\int_{\hat{\Omega}} \mathbf{B}_i(\hat{x})\, \sigma \det(J) \mathbf{B}_j(\hat{x})\, d\hat{x} = \sum_{n=1}^{N} \int_{e_n} \mathbf{B}_i(\hat{x})\, \sigma \det(J) \mathbf{B}_j(\hat{x})\, d\hat{x}. \tag{6}$$

Pour calculer numériquement chacune des intégrales élémentaires, il est nécessaire d'utiliser une formule de quadrature. Grâce à la quadrature de Gauss-Legendre, l'une des plus utilisées, il est possible de calculer les intégrales de la relation (6) en utilisant la règle suivante :

$$\mathbb{I}_{e_n} = \int_{e_n} \mathbf{B}_i(\hat{x})\, \sigma \det(J) \mathbf{B}_j(\hat{x})\, d\hat{x} \approx \sum_k \mathbf{B}_i(x_k)\, \omega(x_k) \sigma \det(J)\, \mathbf{B}_j(x_k), \tag{7}$$

où x_k et $\omega(x_k)$ sont respectivement la position et le poids de points d'intégration dans l'élément e_n.

3.3 Méthode efficace pour le calcul matriciel

Bien que l'assemblage des matrices élémentaires soit une technique répandue dans la méthode EF et souvent employée dans IGA [3], il n'est en aucun cas la plus efficace pour elle. Parmi les techniques développées les plus efficaces, on trouve la *somme-factorisation* qui cherche à exploiter le produit tensoriel présent dans la structure des fonctions B-splines. Puisque $\mathbf{B}_i$ se définit comme le produit tensoriel de fonctions B-spline unidimensionnelles, alors les matrices $\mathbb{K}$ et $\mathbb{C}$ peuvent être aussi considérées comme le produit tensoriel des intégrales définies sur chaque dimension. Par exemple, dans un cas bidimensionnel où $\mathbf{B}_i(\hat{x}) = B_{i_1}(\hat{x}_1) \otimes B_{i_2}(\hat{x}_2)$, les intégrales sur l'élément $e_n = [a_{n_1}, b_{n_1}] \times [a_{n_2}, b_{n_2}]$ de la relation (6) sont calculées par :

$$\mathbb{I}_{e_n} = \int_{a_{n_1}}^{b_{n_1}} B_{i_1}(\hat{x}_1)\, B_{j_1}(\hat{x}_1) \otimes \left[\int_{a_{n_2}}^{b_{n_2}} B_{i_2}(\hat{x}_2)\, B_{j_2}(\hat{x}_2)\, c(\hat{x}_1, \hat{x}_2)\, d\hat{x}_2 \right] d\hat{x}_1, \tag{8}$$

où $c(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \sigma \det(J)$. En utilisant une règle de quadrature sur chacune des dimensions, on obtient :

$$\mathbb{I}_{e_n} \approx \sum_{k_1} \left[\omega(x_{k_1})\, B_{i_1}(x_{k_1})\, B_{j_1}(x_{k_1}) \otimes \sum_{k_2} \omega(x_{k_2})\, B_{i_2}(x_{k_2})\, B_{j_2}(x_{k_2})\, c(x_{k_1}, x_{k_2}) \right]. \tag{9}$$

Pour plus de détails, il est recommandé d'aller voir le travail de G. Sangalli et al. [5].

3.4 Étude de transfert thermique en 2 dimensions

Afin d'évaluer l'efficacité de l'approche IGA-Galerkin, nous avons fait l'étude du transfert thermique stationnaire bidimensionnel dans un milieu isotrope avec une source de chaleur de type sinusoïdal dont la formulation est la suivante :

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad \text{dans }]0, 1[\times]0, 1[, \\ T_{(x=0,y)} = 0 \quad T_{(x=1,y)} = 0, \\ T_{(x,y=0)} = 0 \quad T_{(x,y=1)} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

La figure 3 présente la solution de ce problème en utilisant des fonctions B-spline de degré $p = 3$ et un nombre d'éléments $nb_{el} = 6$. Puisque la solution exacte du problème est $T = 1/(2\pi^2) \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, il est possible de tracer la norme L_2 de l'erreur en fonction du nombre d'éléments sur chaque dimension pour un degré p donné comme présenté sur la figure 4. À partir de ces résultats, il faut noter que la norme L_2 dépend exponentiellement du nombre d'éléments, ce qui signifie que la pente de chaque courbe p est égale à $p + 1$. Pour ce problème, on a une erreur plus faible en utilisant des polynômes de haut degré et très peu d'éléments plutôt qu'en utilisant des polynômes de bas degré et plusieurs éléments.

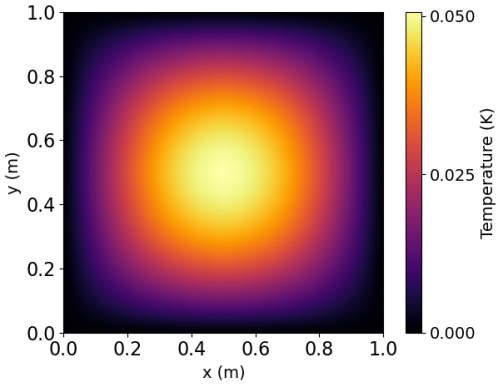

FIGURE 3 – Répresentation 2D de la solution de l'équation (10) pour $p = 3$ et $nb_{el} = 6$.

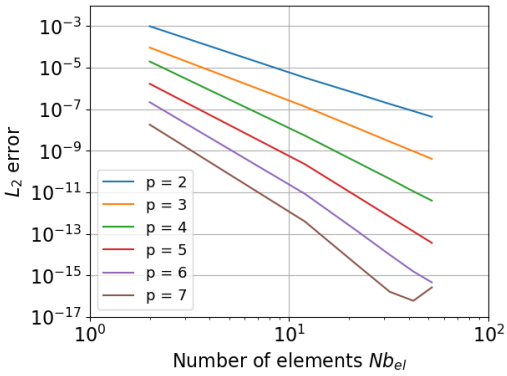

FIGURE 4 – Courbes de convergence de l'approche IGA-Galerkin.

4 Approche quadrature pondérée

4.1 Quelques définitions

Les inconvénients de l'approche IGA-Galerkin sont l'assemblage élément par élément, car les matrices élémentaires dans l'approche IGA-Galerkin ne sont pas creuses (cf. figure 5) ayant un coût de calcul assez élevé ; et le besoin d'une grande quantité de points de quadrature de Gauss pour avoir des résultats le plus proche possible des intégrales exactes (cf. figure 6). La conséquence principale est le coût de calcul important qui augmente pour les degrés polynomiaux élevés. L'approche « quadrature pondérée » (WQ) propose, fortement, de ne pas continuer à assembler les matrices globales élément par élément, mais de calculer chaque ligne en utilisant une règle de quadrature pondérée spécialement conçue pour elle. En particulier, la règle de quadrature $\mathbb{Q}_i$ pour la i-ème ligne de $\mathbb{C}$ établit :

$$\int_{\hat{\Omega}} \mathbf{B}_i(\hat{x})\, c(\hat{x})\, \mathbf{B}_j(\hat{x})\, d\hat{x} \approx \mathbb{Q}_i(c(\hat{x})\, \mathbf{B}_j(\hat{x})) = \sum_k \mathbb{W}_i(x_k)\, c(x_k)\, \mathbf{B}_j(x_k) \qquad \forall j, \tag{11}$$

où les poids de quadrature $\mathbb{W}_i(x_k)$ aux points d'intégration x_k dans $\hat{\Omega}$ ne sont pas connus mais peuvent être calculés numériquement comme la solution de la condition d'exactitude suivante :

$$\int_{\hat{\Omega}} \mathbf{B}_i(\hat{x})\, \mathbf{B}_j(\hat{x})\, d\hat{x} = \mathbb{Q}_i(\mathbf{B}_j(\hat{x})) = \sum_k \mathbb{W}_i(x_k)\, \mathbf{B}_j(x_k). \tag{12}$$

L'intérêt de cette idée repose sur l'exploitation du produit tensoriel étant donné que les poids de quadrature dans un cas multidimensionnel s'expriment aussi comme le produit tensoriel des poids calculés dans chaque dimension, de façon que $\mathbb{W}_i(x_k) = \mathbb{W}_{i_1}(x_{k_1}) \otimes \cdots \otimes \mathbb{W}_{i_d}(x_{k_d})$. D'autre part, l'approche WQ propose de choisir beaucoup moins de points d'intégration (cf. figure 7) tout en conservant le même ordre d'approximation. Cette proposition se base sur le fait qu'une fonction $\mathbf{B}_i$ est nulle à l'extérieur du support sur lequel elle est définie. Cela implique qu'il existe des intégrales du type $\int_{\hat{\Omega}} \mathbf{B}_i(\hat{x})\, \mathbf{B}_j(\hat{x})\, d\hat{x}$ qui sont nulles et il ne vaut donc pas la peine de choisir autant de points d'intégration qu'avec la méthode de Galerkin en utilisant la quadrature de Gauss-Legendre.

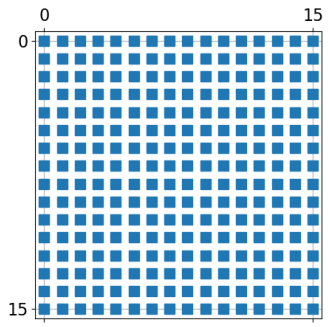

FIGURE 5 – Valeurs non nulles d'une matrice élémentaire 2D.

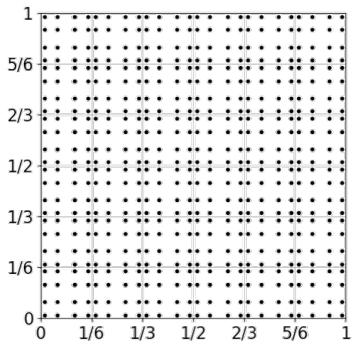

FIGURE 6 – Points d'intégration IGA-Galerkin ($p = 3$ et $nb_{el} = 6$).

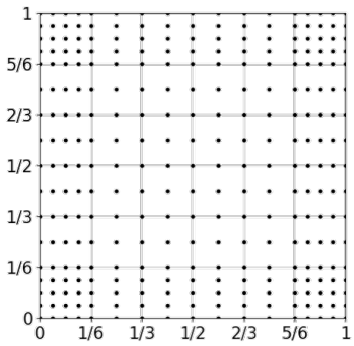

FIGURE 7 – Points d'intégration IGA-WQ ($p = 3$ et $nb_{el} = 6$).

4.2 Position des points d'intégration

Dans un cas unidimensionnel, les points de quadrature sont choisis en utilisant la règle dite *mid-point* laquelle propose que les points doivent être les nœuds de l'élément et le point du milieu. Le premier et le dernier élément sont une exception : p points équidistants à l'intérieur de l'élément doivent être choisis en plus des nœuds de l'élément. Par exemple, pour $p = 3$ et $nb_{el} = 6$, les points de quadrature sont représentés sur la figure 8.

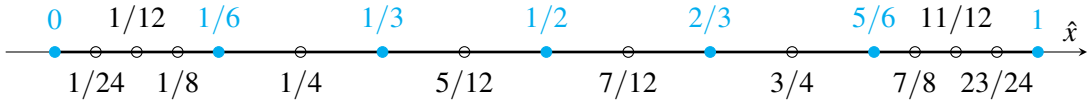

FIGURE 8 – Points d'intégration IGA-WQ pour $\{0, 0, 0, 0, 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1, 1, 1, 1\}$.

4.3 Poids des points d'intégration

Dans un cas unidimensionnel, la démarche pour calculer les poids d'intégration $\mathbb{W}_i(x_k)$ est :

— Trouver la position des points d'intégration x_k dans l'espace $\hat{\Omega} = [0, 1]$.
— Trouver l'ensemble $\mathcal{P}$ des points d'intégration où la fonction B_i est non-nulle.
— Trouver l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions dont le support intersecte celui de la fonction B_i.
— En utilisant la règle de quadrature de Gauss, calculer les intégrales exactes $\int_0^1 B_i(x)\,B_j(x)\,dx$ où B_j appartient à $\mathcal{F}$, et construire le sous-vecteur I.
— Évaluer les fonctions de l'ensemble $\mathcal{F}$ aux points d'intégration appartenant à $\mathcal{P}$ et construire la sous-matrice $\mathcal{B}$.
— Résoudre le système d'équations linéaire : $\mathcal{B}\,\mathcal{W} = I$, où $\mathcal{W}$ est le sous-vecteur de poids de points appartenant à $\mathcal{P}$ a partir duquel $\mathbb{W}_i$ est construit.

Il faut noter que, pour les fonctions dont le support contient des points d'intégration aux bords, le système matriciel à résoudre peut être sous-déterminé, déterminé ou sur-déterminé. Dans la littérature, la méthode des moindres carrés et la méthode de la solution de norme minimale sont les approches les plus utilisées. Pour plus de détails, il est recommandé d'aller voir le travail de M. Tani et al. [6].

4.4 Réduction du temps de calcul

Parmi les propriétés des fonctions B-spline, la répétition est l'une des plus intéressantes. Supposons que l'on cherche à trouver la règle d'intégration des fonctions unidimensionnelles pour $p = 3$ et $nb_{el} = 11$ comme présenté à la figure 9. On observe que seulement les $p+2$ premières fonctions sont différentes, les autres fonctions éloignées des bords ont une allure identique. Il suffit de calculer le poids d'intégration des $p+2$ premières fonctions et de répéter le motif pour les autres restantes.

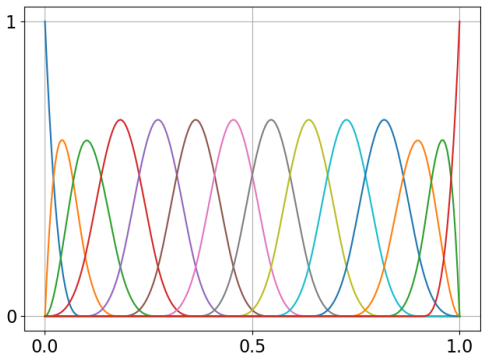

FIGURE 9 – Fonctions B-spline de degré $p = 3$ et nombre d'éléments $nb_{el} = 11$.

Pour les cas ayant un nombre élevé d'éléments, il n'est plus nécessaire de calculer la règle d'intégration pour toutes les fonctions, ce qui a un coût de calcul relativement élevé ; mais plutôt de concevoir un algorithme pour effectuer ce calcul efficacement. Après avoir implémenté notre algorithme, nous avons calculé le temps dont la machine a besoin pour construire les éléments qui interviennent dans l'équation de la chaleur stationnaire ($\mathbb{K}$ et $\mathbb{F}$) dans les approches IGA-Galerkin et IGA-WQ.

À partir des résultats illustrés sur les figures 10 et 11, nous pouvons affirmer que l'approche IGA-WQ par rapport à IGA-Galerkin permet de réduire le temps de calcul d'un facteur d'environ 12 pour les polynômes de haut degré. Ces résultats obtenus pour le cas bidimensionnel sont très prometteurs parce que l'on aurait un facteur d'accélération plus important en augmentant le nombre de dimensions. Les résultats de l'approche IGA-Galerkin montrent une dépendance du temps de calcul avec le nombre d'éléments. Cependant, cette tendance n'est pas observée avec l'approche IGA-WQ, car le temps de calcul a tendance à augmenter très peu en fonction du nombre d'éléments. Cela voudrait dire que l'on peut augmenter le nombre d'éléments ou le degré du polynôme selon nos besoins sans que cela signifie une augmentation importante du temps de calcul.

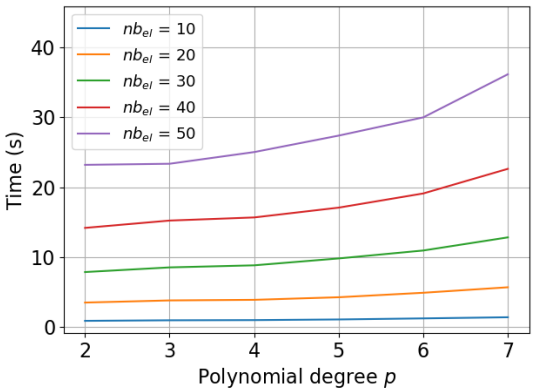

FIGURE 10 – Temps d'assemblage élément par élément dans l'approche IGA-Galerkin.

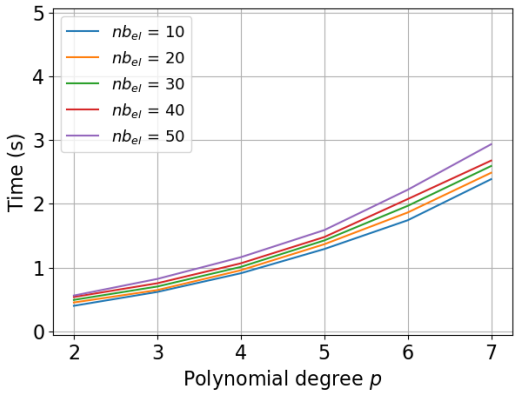

FIGURE 11 – Temps d'assemblage ligne par ligne des matrices dans l'approche IGA-WQ.

4.5 Aspects techniques du calcul des poids

Bien que l'implémentation de l'approche IGA-WQ aide à réduire le temps de calcul de quelques ordres de grandeur, il existe un inconvénient lors du calcul des poids d'intégration sur les bords du domaine : un système matriciel mal-conditionné. Quand on résout le système matriciel $\mathcal{B}\mathcal{W} = I$, il est fort probable que la matrice $\mathcal{B}$ est mal-conditionnée, et donc l'erreur de la solution risque d'être très important. Ce problème s'aggrave lorsque l'on augmente le degré du polynôme comme observé sur la figure 12. Il faut donc minimiser cette erreur en utilisant des méthodes numériques permettant de contourner le problème du mauvais conditionnement. Parmi les techniques existantes, on trouve la méthode du pivot de Gauss, la décomposition QR et même des méthodes itératives.

L'utilisation de la méthode du pivot de Gauss permet effectivement d'améliorer les résultats, ce qui peut être observé sur les courbes de convergence pour les polynômes de degré élevé tel que la figure 13 le montre. Cependant, cet effort pour améliorer le degré de précision de la méthode WQ doit se poursuivre, car la précision de la solution en dépend.

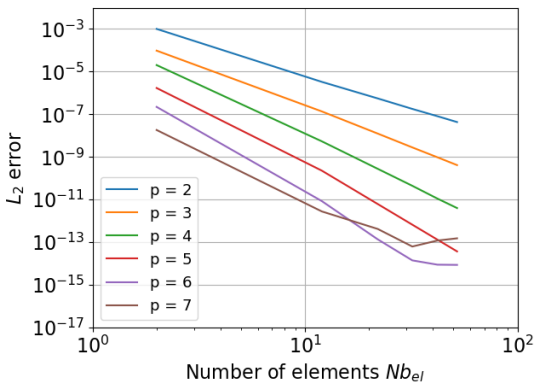

FIGURE 12 – Courbes de convergence de l'approche IGA-WQ : méthode des moindres carrés ou norme minimale. Système résolu par inversion matricielle.

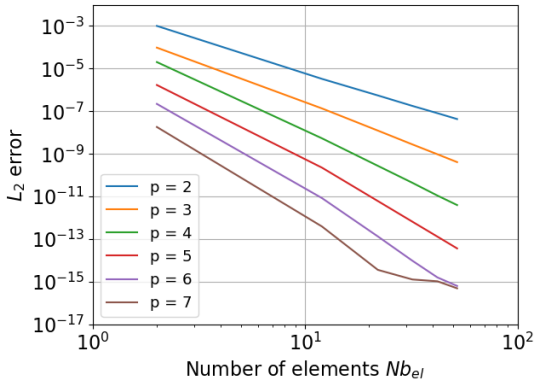

FIGURE 13 – Courbes de convergence de l'approche IGA-WQ : méthode des moindres carrés ou norme minimale. Système résolu par décomposition LU.

5 Approche sans matrice

Afin d'améliorer l'efficacité du calcul, l'approche « sans matrice » (MF) propose de ne pas stocker les matrices $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{C}$, mais d'utiliser des algorithmes itératifs tel que la méthode du gradient conjugué pour résoudre le système matriciel (2). Le but de coupler l'approche MF à l'approche IGA-WQ est donc de réduire la mémoire vive nécessaire pour résoudre le système matriciel. Pour illustrer l'approche MF, supposons que l'on cherche à calculer le vecteur $\mathbb{C}u$, où le vecteur u est connu. En utilisant la relation (11), on observe que :

$$(\mathbb{C}u)_i = \sum_j \mathbb{C}_{ij} u_j \approx \sum_j \left(\sum_k \mathbb{W}_i(x_k)\, c(x_k)\, \mathbf{B}_j(x_k) \right) u_j \approx \sum_k \mathbb{W}_i(x_k)\; c(x_k) \left(\sum_j \mathbf{B}_j(x_k)\, u_j \right). \tag{13}$$

Si on définit $u_h(\hat{x}) = \sum_j \mathbf{B}_j(\hat{x})\, u_j$, on obtient la relation :

$$(\mathbb{C}u)_i \approx \sum_k \mathbb{W}_i(x_k)\; [c(x_k)\, u_h(x_k)]\,, \tag{14}$$

ce qui signifie que calculer la i-ème composante de $\mathbb{C}u$ revient à calculer l'intégrale de la fonction $c\, u_h(\hat{x})$ en utilisant la i-ème règle de quadrature.

Le même principe peut être appliqué pour calculer le vecteur $\mathbb{K}u$, avec l'exception que le calcul de $\mathbb{K}_{ij}$ introduit les dérivées des fonctions B-spline $\mathbf{B}_j$ tel que montré dans l'équation (5). Il est donc nécessaire de construire 4 règles de quadrature différentes par dimension afin d'évaluer les intégrales : $\int_0^1 B_i(x)\, B_j(x)\, dx$, $\int_0^1 B_i^{'}(x)\, B_j(x)\, dx$, $\int_0^1 B_i(x)\, B_j^{'}(x)\, dx$ et $\int_0^1 B_i^{'}(x)\, B_j^{'}(x)\, dx$.

Tel que l'explique Sangalli et al. [7], pour évaluer le vecteur $\mathbb{K}u$ en utilisant l'approche IGA-WQ-MF, on n'a besoin de stocker que les 4 matrices de poids d'intégration $\mathbb{W} = \{\mathbb{W}_i(x_k), \forall i\}$, la matrice des fonctions B-spline $\mathbb{B}_0 = \{B_j(x_k), \forall j\}$ et la matrice de leurs dérivées $\mathbb{B}_1 = \{B_j^{'}(x_k), \forall j\}$ évaluées aux points d'intégration x_k. De cette façon, il est possible de calculer le vecteur $\mathbb{K}\, p_t$ qui intervient dans la boucle du gradient conjugué sans avoir besoin de construire $\mathbb{K}$. Les étapes de l'algorithme sont alors :

Algorithme du gradient conjugué - MF

Input: $\mathbb{W}, \mathbb{B}_0, \mathbb{B}_1, \mathbb{F}, \varepsilon, n$ ▷ ε : écart de tolérance, n : nombre d'itérations
Output: T

1: $r_0 \leftarrow \mathbb{F} \qquad p_0 \leftarrow r_0$
2: **for** $t = 0, 1, \ldots, n$ **do**
3: **if** $r_t^T r_t \leq \varepsilon^2 r_0^T r_0$ **then** On sort de la boucle **end if**
4: Calculer le vecteur $v_t = \mathbb{K}\, p_t$ à partir de (14) adaptée à la matrice de conductivité.
5: $\alpha_t \leftarrow \dfrac{r_t^T r_t}{p_t^T v}$
6: $T_{t+1} \leftarrow T_t + \alpha_t\, p_t \qquad r_{t+1} \leftarrow r_t - \alpha_t\, v_t$
7: $\beta_t \leftarrow \dfrac{r_{t+1}^T r_{t+1}}{r_t^T r_t} \qquad p_{t+1} \leftarrow r_{t+1} + \beta_t\, p_t$
8: **end for**
9: Le résultat est T_{t+1}

Les figures 14 et 15 montrent la mémoire vive utilisée dans la résolution de l'équation du transfert thermique (10) en fonction du temps pour chaque approche et pour 2 cas différents. Les approches IGA-Galerkin et IGA-WQ utilisent la décomposition LU avec pivotement partiel pour résoudre le système matriciel. Les résultats montrent que pour la même précision de la solution, les approches IGA-Galerkin et IGA-WQ ont besoin d'au moins 7 fois plus de mémoire que l'approche IGA-MF-WQ pour le cas $nb_{el} = 80$. D'autre part, les figures 16 et 17 montrent la mémoire vive utilisée pour chaque approche en utilisant une méthode itérative tel que le gradient conjugué. Dans tous les cas, on constate que bien que la méthode itérative couplée aux approches IGA et WQ permettent de diminuer la mémoire de stockage par rapport les méthodes directes, c'est le triplet des approches IGA-WQ-MF qui utilise mieux les ressources de calcul dont on dispose.

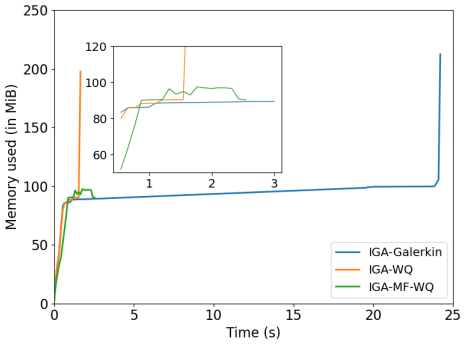

FIGURE 14 – Mémoire vive pour $p = 3$ et $nb_{el} = 50$. IGA-Galerkin et IGA-WQ couplées à la décomposition LU.

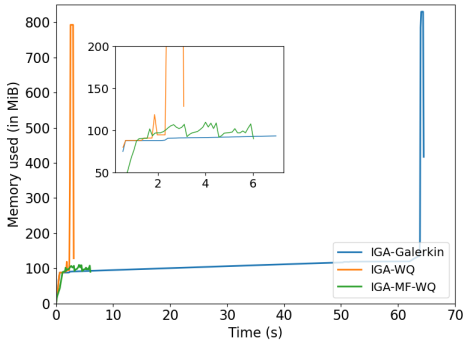

FIGURE 15 – Mémoire vive pour $p = 3$ et $nb_{el} = 80$. IGA-Galerkin et IGA-WQ couplées à la décomposition LU.

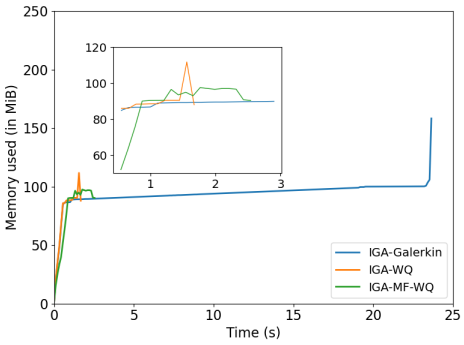

FIGURE 16 – Mémoire vive pour $p = 3$ et $nb_{el} = 50$. IGA-Galerkin et IGA-WQ couplées au gradient conjugué.

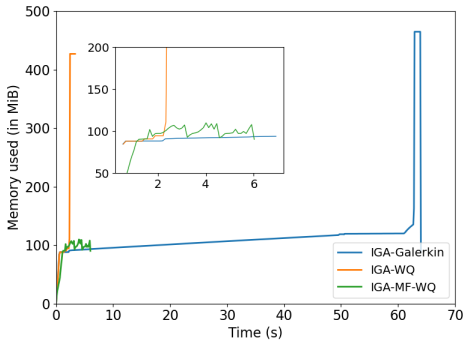

FIGURE 17 – Mémoire vive pour $p = 3$ et $nb_{el} = 80$. IGA-Galerkin et IGA-WQ couplées au gradient conjugué.

6 Conclusion

L'objectif principal de ce travail a été d'analyser les performances de différentes approches. D'une part, l'approche IGA en profitant de la stabilité numérique des fonctions B-spline permet d'augmenter le degré du polynôme sans que cela ne signifie l'introduction d'erreurs. Grâce au couplage IGA-WQ, on obtient des résultats très prometteurs parce qu'il est possible de réduire considérablement le temps d'assemblage des matrices globales. Le triplet IGA-WQ-MF permet de réduire tant le temps de calcul que la mémoire de stockage. Il est important à noter que ces approches ont changé tout le paradigme des codes de calcul des éléments finis existant. Aujourd'hui, l'enjeu principal est de poursuivre la mise en œuvre de ce nouveau paradigme pour des géométries complexes, en thermo-mécanique instationnaire.

Références

[1] V. Robin, F. Gommez, P. Gilles, P. Mourgue, *Simulation 3D du soudage multi-passes d'un tube incliné pénétrant dans une plaque : la maquette MUSICA*, 13ème colloque modélisation et simulation numérique du soudage, 2015.

[2] L. Debeugny, A. François, J-P. Lefebvre, A. Pyre, *Simulation du soudage d'un carter de turbopompe forte pression*, 13ème colloque modélisation et simulation numérique du soudage, 2015.

[3] A. Cottrell, T. Hughes, Y. Brazilevs, *IGA : Toward Integration of CAD and FEA*, Wiley, 2009.

[4] C. De Boor, *On calculating with B-splines*, Journal of Approximation Theory, Elsevier, 50- 62, 1972.

[5] P. Antolin, A. Buffa, F. Calabro, M. Martinelli, G. Sangalli, *Efficient matrix computation for tensor-product isogeometric analysis : the use of sum factoization*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 817-828, 2015.

[6] F. Calabro, G. Sangalli, M. Tani, *Fast formation of isogeometric Galerkin matrices by weighted quadrature*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 606-622, 2017.

[7] G. Sangalli, M. Tani, *Matrix-free weighted quadrature for a computationally efficient isogeometric k-method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 117-133, 2018.